Panait Ana-Maria 25.01.2022
grupa 132

EXAMEN LMC

(P2) Fie $Var : Form \to \mathcal{P}(V)$

Conform Propoziției 2.9 (Principiul recursiei pe formule) pentru $A = \mathcal{P}(V)$ avem că:

(R_0) $Var(v) = \{v\}$ pentru orice $v \in V$

(R_1) $Var(\neg\varphi) = Var(\varphi)$ pentru orice formulă φ

(R_2) $Var(\varphi \to \psi) = Var(\varphi) \cup Var(\psi)$

$G_0 : V \to \mathcal{P}(V)$, $G_0(v) = \{v\}$

$G_\neg : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$, $G_\neg(\Gamma) = \Gamma$

$G_\to : \mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$, $G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta$

Var este unica funcție care satisface (R_0), (R_1) și (R_2).

(P1) Presupunem că $E \setminus A$ e cel mult numărabilă.

$$\left.\begin{array}{l} E = (E \setminus A) \cup A \\ E \setminus A \text{ cel mult numărabilă} \\ A \text{ cel numărabilă (cerința)} \end{array}\right\} \xRightarrow{S2.5(ii)}$$ Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă $\Rightarrow$ E cel mult numărabilă

Dar din cerință avem că E nu e cel mult numărabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Contradicție, presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow$ $E \setminus A$ nu este cel mult numărabilă

(P5) $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și o mulțime Γ de $\mathcal{L}$-enunțuri

$\forall$ teorie T cu $\Gamma \subseteq T$ avem $Th(\Gamma) \subseteq T$

Din Definiția 3.58 știm că pentru orice enunț φ avem că $T \models \varphi \Rightarrow \varphi \in T$.

Din Definiția 3.59 știm că $Th(\Gamma) = \{\varphi \mid \varphi$ enunț și $\Gamma \models \varphi\} = \{\varphi \mid \varphi$ enunț și $Mod(\Gamma) \subseteq Mod\,\varphi\}$

Pentru T teorie cu $\Gamma \subseteq T$ și $\varphi \in Th(\Gamma)$ oarecare.

Cum $\varphi \in Th(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \models \varphi$. Dar $\Gamma \subseteq T$ și rezultă că $T \models \varphi \Rightarrow \varphi \in T$ (D 3.58) pentru $\varphi \in Th(\Gamma)$ oarecare.

$\Rightarrow Th(\Gamma) \subseteq T$

(P6) $z \in V$

$\forall z \psi \models \psi$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e: V \to A$ o evaluare.

$\mathcal{A} \models (\forall z \psi)[e] \Rightarrow$ pentru oricare $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]$

$e_{x \leftarrow a}$ și e sunt diferite doar când evaluează pe x, iar pentru restul de variabile sunt egale.

Dacă presupunem că $x \notin FV(\psi)$ putem aplica Propoziția 3.27 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e] \Rightarrow \forall z \psi \models \psi$