FISA 2
TOPOLOGIE, FUNCTII CONTINUE, SIRURI DE FUNCTII

EXERCITIUL 1. Se consideră sirul $x_n = \left[\sqrt{n+1} - (-1)^n \sqrt{n}\right](-1)^{n+1} - \sin\frac{n\pi}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
a) Să se calculeze $\overline{\lim} x_n$ si $\underline{\lim} x_n$.
b) Să se verifice existenta sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCITIUL 2. Să se determine $\overset{0}{A}, \overline{A}, FrA, A'$ si $Izo\,(A)$ pentru multimile:
a) $A = (-2, 6] \cup [9, +\infty)$;
b) $A = \mathbb{Q} \cap [0, 3)$.

EXERCITIUL 3. Să se studieze continuitatea următoarelor functii:
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^6+y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), x \in \mathbb{R}\ si\ y \neq 0 \\ 0, x \in \mathbb{R}\ si\ y = 0 \end{cases}$.

EXERCITIUL 4. a) Se consideră functia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relatia $f(2x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este functie constantă.
b) Să se identifice toate functiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relatia $f(2x) = f(x) + x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

EXERCITIUL 5. Să se studieze convergenta simplă si uniformă a următoarelor siruri de functii:
a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star$;
b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x)^n\ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^\star$;
c) $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}\ \forall x \in (-1,1), \forall n \in \mathbb{N}^\star$;
d) $f_n : [0,a] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}\ \forall x \in [0,a], \forall n \in \mathbb{N}^\star$, unde $a \in (0,1)$.