Examen la algebră [1]
an I, sem. I
3.02.2022

Numele şi prenumele Panait Ana-Maria

Grupa 132

$\Gamma =$ **numărul de litere al primului nume** $= 6$
$\Omega =$ **numărul de litere al primului prenume** $= 3$

Subiectul I.

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim relaţia binară
$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \text{ sau } x + y = \Omega.$$
(i) Să se arate că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Să se determine clasa de echivalenţă a numărului real 2022 în raport cu relaţia $\sim$.
(iii) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x(\Omega - x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu este nici injectivă, nici surjectivă.
(iv) Să se arate că mulţimea factor $\mathbb{R}/\sim$ este echipotentă cu imaginea funcţiei f de la punctul (iii). (**6 pct.**)

2. Definim funcţia $g : \mathbb{Z} \to [0, 1)$, $g(n) = \{2^n \sqrt[13]{\Gamma}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x. Să se arate că g este injectivă. (**3 pct.**)

Subiectul II.

1. Determinaţi elementele de ordin 2 şi elementele de ordin 3 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5}, +)$.

2. Determinaţi elementele de ordin 6 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5} \times \mathbb{Z}_{\Omega+12}, +)$. (**3 pct.**)

3. Conţine grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma} \times \mathbb{Z}_{\Omega}, +)$ un element de ordin $\Gamma \cdot \Omega$? (**3 pct.**)

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii.**
La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus! **La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus!** **(Spre exemplu: dacă numele este Vasilescu Ştefan Alexandru consideraţi peste tot $\Gamma = 9$ şi $\Omega = 6$.)**
Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.
Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. (**3 pct.**)
2. Aflaţi ordinul şi signatura permutării σ. Calculaţi $\sigma^{2022+\Gamma}$. (**3 pct.**)
3. Determinaţi permutările $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma^{\Omega}$. (**3 pct.**)

Subiectul IV.

1. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $X^4 + X^2 + \Gamma$ la $X^3 + X + \Omega$ în $\mathbb{Q}[X]$.
2. Să se determine cmmdc al polinoamelor $X^5 + X^2 + \hat{\Gamma}$ şi $X^3 + \hat{\Omega}X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$.
3. Să se determine numărul elementelor inversabile, al elementelor nilpotente şi al elementelor idempotente din inelul $\mathbb{Z}_{6\Gamma}$.
4. Fie $I = (X - \Gamma, \Omega)$ idealul din $\mathbb{Z}[X]$ generat de $X - \Gamma$ şi Ω. Să se arate că $I \neq \mathbb{Z}[X]$.

Pamait Ana-Maria 4.02.2022

Examen la algebră

Subiectul I

1. $\mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 3$

(i) Fie $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$

„$\sim$" reflexivă $\Leftrightarrow x \sim x \Leftrightarrow x = x$ sau $x + x = 3$
$x = x$ adevărat $\Rightarrow$ „$\sim$" reflexivă (1)

„$\sim$" simetrică $\Leftrightarrow x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$x \sim y \Rightarrow x = y$ sau $x + y = 3 \Rightarrow y = x$ sau $y + x = 3$ (adunarea e comutativă și egalitatea e relație de echivalență) $\Rightarrow y \sim x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" simetrică (2)

„$\sim$" tranzitivă $\Leftrightarrow x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 3$

I $x = y$ atunci $y \sim z \Leftrightarrow y = z$ sau $y + z = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \sim z \Leftrightarrow x = z$ sau $x + z = 3 \Leftrightarrow x \sim z$

II $x + y = 3 \Rightarrow x = 3 - y$. Cum $y \sim z$

a. $y = z \Rightarrow x \sim y \Leftrightarrow y \sim z$

b. $y + z = 3 \Rightarrow z = 3 - y = x \Rightarrow x \sim z$

$\Rightarrow$ „$\sim$" tranzitivă (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ „$\sim$" relație de echivalență

(ii) $\widehat{2022} = \{h \in \mathbb{R} \mid h \sim 2022\} = \{h \in \mathbb{R} \mid h = 2022$ sau $h + 2022 = 3\} =$
$= \{h \in \mathbb{R} \mid h = 2022$ sau $h = -2019\} = \{-2019, 2022\}$

(iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(3 - x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 3x - x^2$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9-0)}{-4} = \frac{9}{4}$

$a = -1 < 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = (-\infty, \frac{9}{4}] \neq \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu e surjectivă

$f(0) = f(3) = 0 \Rightarrow f$ nu e injectivă (există două elemente care au aceeași valoare în codomeniu)

(iv) $\mathbb{R}/\sim \ \simeq \operatorname{Im} f = (-\infty, \frac{9}{4}]$

Fie $h: \mathbb{R} \to \operatorname{Im} f = (-\infty, \frac{9}{4}]$, $h(x) = x(3-x)$ și $\sim_h$ relație liniară pe $\mathbb{R}$, cu $x \sim_h y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$

$x \sim_h y \Leftrightarrow h(x) = h(y) \Leftrightarrow x(3-x) = y(-y+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - x^2 = 3y - y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 + 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-x)(y+x) - 3(y-x) = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x$ sau $x + y = 3 \Leftrightarrow x \sim y \Rightarrow \sim_h = \sim$

Din proprietatea de universalitate a mulțimii factor rezultă că $\exists! \ \bar{f}: \mathbb{R}/\sim \to (-\infty, \frac{9}{4}]$ a.î. $\bar{f} \circ p = f$, unde $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$, $p(x) = \hat{x}$

$\sim = \sim_h \Rightarrow \bar{f}$ este injectivă (1)

$\operatorname{Im} h = (-\infty, \frac{9}{4}] \Rightarrow \bar{f}$ e surjectivă (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \bar{f} \text{ e bijectivă} \\ \bar{f}: \mathbb{R}/\sim \to (-\infty, \frac{9}{4}] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}/\sim \ \simeq \underbrace{(-\infty, \tfrac{9}{4}]}_{\operatorname{Im} f}$$

2. $g: \mathbb{Z} \to [0, 1)$

$g(n) = \{2^n \sqrt[13]{6}\}$

g inj

Presupunem prin absurd că există m și n cu $m \neq n$ a.î. $g(m) = g(n)$ (g nu e injectivă) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{2^m \sqrt[13]{6}\} = \{2^n \sqrt[13]{6}\}$

$2^m \sqrt[13]{6} - [2^m \sqrt[13]{6}] = 2^n \sqrt[13]{6} - [2^n \sqrt[13]{6}]$

$(2^m - 2^n) \sqrt[13]{6} = \underbrace{\underbrace{[2^m \sqrt[13]{6}]}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{[2^n \sqrt[13]{6}]}_{\in \mathbb{Z}}}_{\in \mathbb{Z}}$

$\Rightarrow (2^m - 2^n) \sqrt[13]{6} = k \in \mathbb{Z}$

Cum $m \neq n \Rightarrow \underbrace{\sqrt[13]{6}}_{\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \frac{l_1}{2^m - 2^n} \in \mathbb{Q}$ fals $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow g$ e injectivă

Subiectul II

1. $(\mathbb{Z}_{11}, +)$

Fie $x \in \mathbb{Z}_{11}$, $o(x) = 2$, $o(x) = 3$

$o(x) = \frac{11}{(11, x)} = 2 \Leftrightarrow (11, x) = \frac{11}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nu există element de ordin 2

$o(x) = \frac{11}{(11, x)} = 3 \Leftrightarrow (11, x) = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nu există element de ordin 3

2. $(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{15}, +)$

Fie $(x, y) \in \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{15}$, $o((x,y)) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} o((x,y)) = [o(x), o(y)] = 6 \\ o(x) \in \{1, 11\} \\ o(y) \in \{1, 3, 5, 15\} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nu există elemente de ordin 6 în } \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{15}$$

3. $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3, +)$, $o(x, y) = 6 \cdot 3 = 18$

$$\left.\begin{array}{l} o((x,y)) = [o(x), o(y)] = 18 \\ o(x) \in \{1, 2, 3, 6\} \\ o(y) \in \{1, 3\} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nu există elemente de ordin 18 în } \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$$

Subiectul III

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}$$

1. $\sigma=(1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 7\ 11)$ (descompunerea în produs de cicli disjuncți)

$\sigma=(1\ 2)(2\ 9)(3\ 5)(5\ 10)(10\ 8)(8\ 6)(4\ 7)(7\ 11)$

(descompunerea în produs de transpoziții)

2. $\theta(\sigma)$ = cmmmc între lungimile ciclurilor $=[3,5,3]=[3,5]=15$

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^8=1$

$\sigma^{2022+6}=\sigma^{2028}$

$\sigma^{2028}=\sigma^{15\cdot 45+3}=(\sigma^{15})^{45}\cdot\sigma^3=\sigma^3=(1\ 2\ 9)^3(3\ 5\ 10\ 8\ 6)^3\cdot(4\ 7\ 11)^3=(3\ 5\ 10\ 8\ 6)^3=(3\ 8\ 5\ 6\ 10)$

(ordinul unui 3-ciclu este 3)

3. $\tau\in S_{11}$ $\tau^2=\sigma^3=(3\ 8\ 5\ 6\ 10)$

$\varepsilon(\tau^2)=\varepsilon((3\ 8\ 5\ 6\ 10))=1 \Rightarrow \exists\, \tau$

Cum τ^2 este 5-ciclu τ trebuie să fie produsul dintre un 5-ciclu și niște transpoziții disjuncte între ele și cu 5-ciclul.

Observăm că $(3\ 6\ 8\ 10\ 5)^2=(3\ 8\ 5\ 6\ 10)$ deci notăm $(3\ 6\ 8\ 10\ 5)=\tau_0$

$\tau\in\{\tau_0, \tau_0(a_1\ a_2), \tau_0(a_1\ a_2)(a_3\ a_4), \tau_0(a_1\ a_2)(a_3\ a_4)(a_5\ a_6)\}$

unde $a_i\in\{1,2,4,7,9,11\}$ și $a_i\neq a_j$ $\forall\, i\neq j\in\mathbb{N}^*$, $i,j\leq 6$

Subiectul IV

1. $X^4 + X^2 + 6 : X^3 + X + 3$ în $\mathbb{Q}[X]$

$$X^4 + X^2 + 6 = X^4 + X^2 + 3X + 6 - 3X = X(X^3+X+3) + (-3X+6)$$

$\Rightarrow$ cât $= X$, rest $= -3X+6$ $(\deg(-3X+6) < \deg(X^3+X+3))$

2. $X^5 + X^2 + \hat{6} = X^5 + X^2$ în $\mathbb{Z}_2[X]$

$X^3 + \hat{5}X + \hat{1} = X^3 + X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$

Fie $d = \text{cmmdc}(X^5 + X^2, X^3 + X + \hat{1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} d \mid X^5 + X^2 \\ d \mid X^3 + X + \hat{1} \end{cases} \Rightarrow d \mid X^5 + X^2 - X^2(X^3+X+\hat{1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid -X^3 \Rightarrow d \mid X^3 \Rightarrow d \mid X^3 - (X^3+X+\hat{1}) \Rightarrow d \mid X + \hat{1}$

$X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X] \Rightarrow d \in \{1, X+\hat{1}\}$

$X^3 + X + \hat{1} = X(X^2+\hat{1}) + \hat{1} = X(X^2-\hat{1}) + \hat{1} = X(X+\hat{1})(X+\hat{1}) + \hat{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X + \hat{1} \nmid X^3 + X + \hat{1} \Rightarrow d = \hat{1}$

3. $\mathbb{Z}_{36}$

$\hat{x}$ inversabil în $\mathbb{Z}_{36} \Leftrightarrow (x, 36) = 1 \Rightarrow$ indicatorul lui Euler pt $36 : 12 \Rightarrow |\mathbb{Z}_{36}^{\times}| = 12$

$\hat{x}$-nilpotent în $\mathbb{Z}_{36} \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\hat{x}^n = \hat{0} \Leftrightarrow 36 \mid x^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \mid x^n$

$3 \mid x^n \Rightarrow 2 \mid x$

$3 \mid x \Rightarrow 6 \mid x$

Se observă că $6 \mid x$ este o condiție suficientă ca $36 \mid x^2$, deci $\hat{x}$-nilpotent $\Leftrightarrow 6 \mid x$

$|N(\mathbb{Z}_{36})| = \frac{36}{6} = 6$

$\hat{x}$ idempotent în $\mathbb{Z}_{36}$ $\Leftrightarrow$ $\hat{x}^2 = \hat{x}$ $\Leftrightarrow$ $36 \mid x(x-1)$

x și $(x-1)$ sunt prime între ele $\Rightarrow 9 \mid x$ sau $9 \mid x-1$

$\underline{I}$ $9 \mid x$

$x \in \{0, 9, 18, 27\}$

$x - 1 \in \{-1, 8, 17, 26\}$

$x(x-1) \in \{0, 9 \cdot 8, 18 \cdot 17, 27 \cdot 26\}$ - 2 variante

$\underline{II}$ $9 \mid x-1 \Rightarrow x - 1 \in \{0, 9, 18, 27\}$

$x \in \{1, 10, 19, 28\}$

$x(x-1) \in \{0, 90, 18 \cdot 19, 27 \cdot 28\}$ - 2 variante

Numărul elementelor idempotente în $\mathbb{Z}_{36}$ este 4

4. $\underline{I = (X-6, 3)}$ $\quad I \subseteq \mathbb{Z}[X]$

$\underline{I \neq \mathbb{Z}[X]}$

Presupunem prin absurd că $2 \in I \Rightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{Z}[X]$ a.î.

$2 = u(X-6) + v \cdot 3$

Fie $u = u_0 + u_1 X + u_2 X^2 + \ldots + u_n X^n$, $u_i \in \mathbb{Z}$, $u_n \neq 0$ și

$v = v_0 + v_1 X + v_2 X^2 + \ldots + v_m X^m$, $v_i \in \mathbb{Z}$, $v_m \neq 0$

$\Rightarrow 2 = u_0 X + u_1 X^2 + u_2 X^3 + \ldots + u_n X^{n+1} - u_0 \cdot 6 - u_1 \cdot 6 \cdot X -$

$- u_2 \cdot 6 \cdot X^2 - \ldots - u_n \cdot 6 \cdot X^n + v_0 \cdot 3 + v_1 \cdot 3 \cdot X + v_2 \cdot 3 + X^2 + \ldots + v_m \cdot 3 \cdot X^m$

$\Leftrightarrow 2 = -u_0 \cdot 6 + v_0 \cdot 3 = (v_0 - u_0 \cdot 2) \cdot 3 \Rightarrow 3 \mid 2$ fals $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \in \mathbb{Z}[X]$, $2 \notin I \Rightarrow I \neq \mathbb{Z}[X]$