Examen la algebră [1]
an I, sem. I
3.02.2022

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Γ = numărul de litere al primului nume = ...
Ω = numărul de litere al primului prenume = ...

Subiectul I. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim relaţia binară

$$x \sim y \Longleftrightarrow 2 \mid x + y.$$

1. Să se arate că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{Z}$. **(3 pct.)**
2. Daţi exemplu de 5 numere întregi care se găsesc în relaţia $\sim$ cu Γ şi determinaţi clasa de echivalenţă a lui Ω în raport cu $\sim$. **(4 pct.)**
3. Arătaţi că mulţimea factor $\mathbb{Z}/\sim$ admite o structură de grup şi că aceasta este unică până la un izomorfism (de grupuri). **(2 pct.)**

Subiectul II.

1. Calculaţi ordinul elementului $(\overline{17}, \widehat{7})$ din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma-2} \times \mathbb{Z}_{\Omega+14}, +)$. **(3 pct.)**
2. Conţine grupul factor $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ elemente de ordin infinit? Este $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ un grup ciclic? **(4 pct.)**
3. Fie Λ cel mai mic element al mulţimii

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \Omega \leq x \leq \Gamma + 32 \text{ şi } x \mid \Gamma + 32\}.$$

Daţi exemplu de o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe $\mathbb{Z}_{\Gamma+32}$ astfel încât mulţimea factor $\mathbb{Z}_{\Gamma+32}/_\sim$ să fie un grup cu Λ elemente în raport cu operaţia indusă de operaţia de adunare de pe $\mathbb{Z}_{\Gamma+32}$. **(2 pct.)**

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii.**
La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus! (Exemplu: dacă numele este Vasilescu Ştefan Alexandru consideraţi peste tot $\Gamma = 9$ şi $\Omega = 6$.)
Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.
Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. **(4 pct.)**

2. Aflaţi signatura lui σ şi calculaţi $\sigma^{2022+\Gamma}$. **(3 pct.)**

3. Există permutări $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că

$$\tau^{\Omega} \circ \sigma \circ \tau^{-\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}^{\Gamma}?$$

(2 pct.)

Subiectul IV. Fie $I = (X - \Gamma, \Omega)$ idealul din $\mathbb{Z}[X]$ generat de $X - \Gamma$ şi Ω.

1. Să se dea exemplu de polinom din I şi de un polinom din $\mathbb{Z}[X]$ care nu este în I. Justificaţi. **(2 pct.)**

2. Să se verifice dacă $(X - \Gamma + \Omega - 1) \subseteq I$. Justificaţi. **(2 pct.)**

3. Să se arate că $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_{\Omega}$ definit prin $\varphi(f) = \widehat{f(\Gamma)}$, $f \in \mathbb{Z}[X]$, este un morfism surjectiv de inele unitare. Calculaţi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ şi aplicaţi teorema fundamentală de izomorfism pentru inele lui φ. **(3 pct.)**

4. Determinaţi numărul divizorilor lui zero, al elementelor inversabile, al elementelor nilpotente şi respectiv al elementelor idempotente din inelul $A = \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-\Gamma,\Omega)}$. **(2 pct.)**