Examen SAI seria 15, sem. I, 1.02.2021 [1]

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Subiectul I. Pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ se consideră relaţia $a \sim b$ dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b = 3^k a$.

1. Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{N}$. (3 pct.)
2. Dacă $\widehat{a}$ este clasa de echivalenţă a lui $a \in \mathbb{N}$ modulo $\sim$, descrieţi $\widehat{0}$, $\widehat{1}$, $\widehat{6}$ şi $\widehat{12}$. (2 pct.)
3. Determinaţi un sistem complet de reprezentanţi pentru $\sim$. (2 pct.)
4. Dacă $\frac{\mathbb{N}}{\sim}$ este mulţimea claselor de echivalenţă pe $\mathbb{N}$ modulo $\sim$, există $f : \frac{\mathbb{N}}{\sim} \to \mathbb{N}$ funcţie bijectivă? Dar $g : \mathbb{N} \to \frac{\mathbb{N}}{\sim}$ funcţie bijectivă? (2 pct.)

Subiectul II.
Fie grupul $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ şi $H = \langle (2,3) \rangle = \{(2k, 3k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ subgrupul lui G generat de $(2,3)$.

1. Demonstraţi că G este generat de elementele $(1,0)$ şi $(0,1)$. Este G grup ciclic? (2+2 pct.)
2. Arătaţi că, grupul factor $(\frac{G}{H}, +)$ este generat de $\overline{(1,1)}$, clasa elementului $(1,1) \in G$ modulo H. Este grupul factor $\frac{G}{H}$ izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$? (3+2 pct.)

Subiectul III.
Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 8 & 11 & 17 & 16 & 5 & 9 & 3 & 1 & 15 & 14 & 2 & 4 & 13 & 12 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \in S_{17}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. (2+1 pct.)
2. Aflaţi ordinul şi signatura permutării σ. Calculaţi σ^{2021}. (3 pct.)
3. Determinaţi toate permutările τ din S_{17} cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma$. (3 pct.)

Subiectul IV.

1. În inelul de polinoame $\mathbb{Z}_{350}[X]$, există divizori ai lui zero nenuli ce nu sunt elemente nilpotente? Dar polinoame inversabile de grad n, n număr natural nenul? (2+2 pct.)
2. Arătaţi că $f = X^3 + X^2 + \widehat{1}$ este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$. Descrieţi inelul factor $L = \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{f\mathbb{Z}_2[X]}$ şi determinaţi elementele inversabile din L. (3 pct.)
3. Este $f = X^4 + X^2 + \widehat{1}$ polinom reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$? În caz afirmativ, descompuneţi f în produs de polinoame ireductibile. (2 pct.)

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!**