9) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\max(f, g)$ surj (1)

$\min(f, g)$ inj (2)

$f = g$

Din (1) $\Rightarrow \exists\, x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\max(f(x_0), g(y_0)) = 0$
dar cum $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow f(x_0) = g(y_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(f(x_0), g(y_0)) = 0 \xRightarrow{\text{inj}} x_0, y_0$ unice (3)

Din (1) $\Rightarrow \exists\, x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\max(f(x_1), g(y_1)) = 1$ (4)

Dacă $f(x_1)$ sau $g(y_1) = 0 \Rightarrow \min(f(x_1), g(y_1)) = 0$ $\nsim$ cu rel (3)

Dacă $f(x_1)$ sau $g(y_1) > 1 \Rightarrow \max(f(x_1), g(y_1)) > 1$ $\nsim$ cu rel (4) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) = g(y_1) = 1$ unica posibilitate

Dem. prin inducție că $P(k)$: $\exists!\, x_k, y_k \in \mathbb{N}$ a.î. $\max(f(x_k), g(y_k)) =$
$= \min(f(x_k), g(y_k))$ $\forall k \in \mathbb{N}$ este adevărată

I Verificarea:

$P(0)$, $P(1)$ adevărate

II Pasul de inducție:

Presupunem că $P(k)$ este adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Din (1) $\Rightarrow \exists\, x_{k+1}, y_{k+1} \in \mathbb{N}$ a.î. $\max(f(x_{k+1}), g(y_{k+1})) = k+1$

Dacă $x_{k+1}, y_{k+1} < k+1 \Rightarrow \min(f(x_{k+1}), g(y_{k+1})) < k+1$ $\nsim$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(f(x_{k+1}), g(y_{k+1})) = \max(f(x_{k+1}), g(y_{k+1}))$ și x_{k+1}, y_{k+1} unice $\Rightarrow P(k+1)$ adevărată

Conform principiului inducției matematice $\Rightarrow P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(f(x), g(x)) = \max(f(x), g(x))$ $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{N}$