FISA 1
SIRURI SI SERII DE NUMERE REALE

EXERCITIUL 1. Se consideră sirul mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică inegalitatea $x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că sirul este convergent.

EXERCITIUL 2. Se consideră sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relatia de recurentă $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ cu $x_0 \in (0,1)$. Să se arate că sirul este convergent si să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} (x_1.x_2....x_n)$.

EXERCITIUL 3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{kn}\right)$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

EXERCITIUL 4). a) Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{Z}$ este convergent dacă si numai dacă $\exists l \in \mathbb{Z}$ si $\exists p \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = l$ $\forall n \geq p$.

b) Să se arate că sirul $\mathrm{x}_n = \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}\right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ nu este convergent.

EXERCITIUL 5. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right), \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} tg\frac{\pi}{n^\alpha}, \alpha > 0$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n}, \alpha > 0$

e) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+1)(a+2)..........(a+n)}{(b+1)(2b+1)......(nb+1)}$ cu $a, b > 0$

f) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$.