FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 1

(S1.1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.
Demonstraţie: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$.
Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$.
$\square$

(S1.2) Fie X o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul X şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.
Demonstraţie: Presupunem că ar exista, şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{t \in X \mid t \notin f(t)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $x \in X$ cu $f(x) = A$. Dar atunci: $x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x) = A \Leftrightarrow x \notin A$, ceea ce este o contradicţie. $\square$

(S1.3) Două mulţimi sunt echipotente dacă există o bijecţie între ele.

(i) Demonstraţi că orice intervale deschise (a, b), (c, d) ale lui $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

(ii) Demonstraţi că $(0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1]$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Demonstraţie:

(i) Definim

$$f : (a, b) \to (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \text{ pentru orice } x \in (a, b).$$

Definiţia lui f este corectă: dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ şi $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d - c$, deci $c < f(x) < d$. Definim

$$g : (c, d) \to (a, b), \quad g(y) = \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a \text{ pentru orice } y \in (c, d).$$

Se observă uşor că f şi g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, $|(a, b)| = |(c, d)|$.

(ii) Ştim că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluţie directă este: se ia funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, 1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Se ia apoi funcţia $h : (0, 1] \to (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in (0, 1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0, 1) \to (0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1]$ şi $(0, 1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcţia $j : [0, 1] \to (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in [0, 1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0, 1) \to [0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $[0,1]$ sunt echipotente.

În sfârşit, se observă uşor că funcţia $F : (0,1] \to [0,1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0,1]$ şi $[0,1)$ sunt echipotente.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

Dacă $n \in \mathbb{N}$, spunem despre o mulţime A că *are n elemente* dacă există o bijecţie

$$f : A \to \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\}.$$

Spunem că o mulţime A este *finită* dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente, iar în caz contrar spunem că A este *infinită*. O mulţime A se numeşte *numărabilă* dacă există o bijecţie $f : A \to \mathbb{N}$. O mulţime se numeşte *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă.

(S2.1) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) $\mathbb{N}^*$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Definim
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$
Se demonstrează imediat că f este bijecţie, inversa sa fiind
$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

(ii) Enumerăm elementele lui $\mathbb{Z}$ astfel:
$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$
Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$

E clar că f e bijectivă şi că $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definită prin:

$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s-1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$

este inversa lui f.

(iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor şi în cadrul elementelor cu aceeaşi sumă după prima componentă în ordine crescătoare:

$$\begin{array}{lc} \text{linia } 0 & (0,0), \\ \text{linia } 1 & (0,1),(1,0), \\ \text{linia } 2 & (0,2),(1,1),(2,0), \\ \text{linia } 3 & (0,3),(1,2),(2,1),(3,0), \\ \vdots & \\ \text{linia } k & (0,k),(1,k-1),\ldots,(k-1,1),(k,0), \\ \vdots & \end{array}$$

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia k sunt $k+1$ perechi $(i, k-i), i = 0, \ldots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel: $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 2, \ldots$ În general, $f(i,j)$ se defineşte ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui (i,j). Deoarece (i,j) este al $(i+1)$-lea element pe linia $i+j$, rezultă că înaintea sa sunt $1+2+3+\ldots+(i+j)+i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Aşadar, bijecţia va fi funcţia

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

Această funcţie se numeşte şi *funcţia de numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

□

(S2.2) Demonstraţi că orice mulţime infinită are o submulţime numărabilă.
Demonstraţie: Fie A o mulţime infinită. Definim inductiv şirul $(a_n)_{n \in N}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.
Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$. Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ şi $a_2 \neq a_1$.
În general, presupunem că am definit $a_0, \ldots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toţi $a_0, \ldots, a_n$.

Definim funcţia $f : \mathbb{N} \to A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se observă imediat că f este injectivă, prin urmare avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulţime numărabilă a lui A. $\square$

(S2.3) Demonstraţi că orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie: Fie A, B mulţimi a.î. $A \subseteq B$, A este infinită şi B este numărabilă.

Deoarece $A \subseteq B$, funcţia incluziune $f : A \to B$, $f(a) = a$ este injectivă.
Deoarece A este infinită, putem aplica (S2.2) pentru a obţine o submulţime numărabilă C a lui A. Prin urmare, există o funcţie bijectivă $h : B \to C$. Compunând h cu funcţia incluziune a lui C în A obţinem funcţia $g : B \to A$, $g(b) = h(b)$, care este injectivă.
Am obţinut funcţiile injective $f : A \to B$, $g : B \to A$. Putem aplica Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a concluziona că $A \sim B$, deci că A este numărabilă.
Altă demonstraţie: Cu A, B ca mai devreme, fie $g : \mathbb{N} \to B$ o bijecţie. Vom defini inductiv un şir $(a_n)_{n \in N}$ din A, ca în (S2.2), cu diferenţa că nu vom mai face alegeri arbitrare, ele fiind acum unic determinate la fiecare pas.
Deoarece A este nevidă, iar g este surjectivă, există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $g(m) \in A$. Alegem m minim cu această proprietate şi punem $a_0 := g(m)$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci din nou putem alege m minim cu proprietatea că $g(m) \in A - \{a_0\}$ şi punem $a_1 := g(m)$.
În general, presupunem că am definit $a_0, \ldots, a_n \in A$. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ este nevidă, deci alegem m minim cu proprietatea că $g(m) \in A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ şi punem $a_{n+1} := g(m)$.
Atunci funcţia $f : \mathbb{N} \to A$, definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin $f(n) = a_n$, va fi bijecţia dorită. $\square$

(S2.4) Demonstraţi că o mulţime A este cel mult numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă de la A la o mulţime numărabilă (pe care o putem lua ca fiind $\mathbb{N}$).
Demonstraţie: $\Rightarrow$ Dacă A este numărabilă, există o bijecţie $f : A \to \mathbb{N}$. Dacă A este finită, avem două cazuri:

(i) $A = \emptyset$. Atunci funcţia vidă este injecţie de la $\emptyset$ în $\mathbb{N}$.

(ii) $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ pentru un $n \geq 1$. Atunci $f : A \to \mathbb{N}$, $f(a_i) = i$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ este injecţie.

$\Leftarrow$ Dacă A este finită, concluzia este evidentă. Presupunem că A este infinită. Fie B o mulţime numărabilă şi $f : A \to B$ o injecţie. Atunci $A \sim f(A) \subseteq B$. Din (S2.3), rezultă că $f(A)$ este numărabilă. Prin urmare, A este numărabilă. $\square$

(S2.5) Demonstraţi următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.

(ii) Reuniunea a două mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Demonstraţie: Fie A_1 şi A_2 două mulţimi cel mult numărabile. Dacă una din mulţimile A_1, A_2 este vidă, concluzia este imediată, deoarece $C \times \emptyset = \emptyset \times C = \emptyset$ şi $C \cup \emptyset = \emptyset \cup C = C$ pentru orice mulţime C. Presupunem, aşadar, că A_1 şi A_2 sunt nevide. Conform (S2.4), există funcţiile injective $f_1 : A_1 \to \mathbb{N}$, $f_2 : A_2 \to \mathbb{N}$.

(i) Definim

$$f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(a, b) = (f_1(a), f_2(b)).$$

Rezultă uşor că f este injectivă: Fie $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A_1 \times A_2$. Atunci $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$ ddacă $(f_1(a_1), f_2(b_1)) = (f_1(a_2), f_2(b_2))$ ddacă $f_1(a_1) = f_1(a_2)$ şi $f_2(b_1) = f_2(b_2)$ ddacă $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$ (deoarece f_1, f_2 sunt injective) ddacă $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, conform (S2.1), aplicăm din nou (S2.4) pentru a concluziona că $A_1 \times A_2$ este cel mult numărabilă.

(ii) Definim $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel:

dacă $a \in A_1 \cup A_2$, alegem $i_a \in \{1, 2\}$ cu $a \in A_{i_a}$ şi definim $f(a) = (f_{i_a}(a), i_a)$.

Rezultă uşor că f este injectivă: dacă $a, b \in A_1 \cup A_2$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ şi $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, conform (S2.1), aplicăm din nou (S2.4) pentru a concluziona că $A_1 \cup A_2$ este cel mult numărabilă.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 3

(S3.1) Fie A o mulţime infinită. Demonstraţi următoarele, pentru orice mulţime B:

(i) Dacă există o funcţie injectivă $f : A \to B$, atunci B este infinită.

(ii) Dacă $A \subseteq B$, atunci B este infinită.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin reducere la absurd că B este finită. Aşadar, există o bijecţie $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$. Obţinem că funcţia $h : A \to \{1, \ldots, n\}$, $h = g \circ f$ este injectivă. Prin urmare, $A \sim h(A) \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Rezultă că există (pas justificat mai jos!) $k \leq n$ astfel încât $h(A) \sim \{1, \ldots, k\}$, aşadar $A \sim \{1, \ldots, k\}$ şi deci A este finită. Am obţinut o contradicţie.

Rămâne de arătat, deci, că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $X \subseteq \{1, \ldots, k\}$ avem că X este finită. Demonstrăm prin inducţie după k. Pentru $k = 0$, avem $X \subseteq \{1, \ldots, 0\} = \emptyset$ şi deci $X = \emptyset$, aşadar A este finită. Pentru trecerea de la k la $k + 1$, presupunem că avem $X \subseteq \{1, \ldots, k + 1\}$. Atunci $Y := X \cap \{1, \ldots, k\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ şi deci există l cu $Y \sim \{1, \ldots, l\}$. Atunci fie $X = Y$ şi atunci $X \sim \{1, \ldots, l\}$, fie $X = Y \cup \{k + 1\}$ şi atunci $X \sim \{1, \ldots, l + 1\}$. În ambele cazuri, X este finită.

(ii) Funcţia incluziune $\iota : A \to B$, $\iota(a) = a$ este injectivă. Aplicăm (i) pentru a concluziona că B este infinită.

□

(S3.2) Demonstraţi următoarele:

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este mulţime cel mult numărabilă.

(ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie cel mult numărabilă de mulţimi cel mult numărabile. Aşadar, I este nevidă şi cel mult numărabilă şi mulţimile $A_i, i \in I$ sunt cel mult numărabile. Conform (S2.4), există pentru fiecare $i \in I$ o funcţie injectivă $f_i : A_i \to \mathbb{N}$.

Definim $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N} \times I$ astfel:

$$\text{dacă } a \in \bigcup_{i\in I} A_i, \text{ alegem } i_a \in I \text{ cu } a \in A_{i_a} \text{ şi definim } f(a) = (f_{i_a}(a), i_a).$$

Rezultă uşor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ şi $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Conform Corolarului 1.10, $\mathbb{N} \times I$ este numărabilă. Aplicând din nou (S2.4), obţinem că $\bigcup_{i\in I} A_i$ este cel mult numărabilă.

(ii) Fie $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n$ mulţimi numărabile şi $A := A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Aplicând (i) pentru $I = \{1, \ldots, n\}$, obţinem că A este cel mult numărabilă. Deoarece $A_1 \subseteq A$ şi A_1 este infinită, rezultă, din (S3.1).(ii), că A este infinită. Prin urmare, A este numărabilă.

□

(S3.3) Demonstraţi că $\mathbb{Q}$ este numărabilă.
Demonstraţie: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ şi $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă. Cum $\mathbb{Z}$ este numărabilă, rezultă că A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm (S3.2).(i) şi faptul că $\mathbb{Q}$ este infinită pentru a obţine numărabilitatea lui $\mathbb{Q}$. □

(S3.4) Arătaţi că $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.
Demonstraţie: Cum ştim din (S1.3) că intervalul $(0,1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente, este suficient să arătăm că intervalul $(0,1)$ nu este numărabil. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Vom reprezenta funcţia f folosind tabelul de mai jos:

$$\begin{array}{c|l} 0 & 0, a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}\ldots \\ 1 & 0, a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ 2 & 0, a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ 3 & 0, a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \end{array}$$

Aşa cum se observă, pentru orice $i, j \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}$ este a $(j+1)$-a zecimală a lui $f(i)$. Deoarece f este surjectivă, fiecărui număr din codomeniul acesteia, $(0,1)$, îi este asociat un număr natural. Cu alte cuvinte, toate numerele reale ce compun intervalul $(0,1)$ ar trebui să se regăsească în coloana a doua a tabelului de mai sus. Vom arăta că aceasta este imposibil, construind un număr $x \in (0,1)$ ce nu se poate găsi în coloana a doua a niciunei linii din tabel. Fie $x := 0, d_0 d_1 d_2 d_3 ... d_j ...$, unde fiecare cifră d_j din reprezentarea zecimală a lui x este obţinută astfel:

$$d_j := \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_{j,j} = 1 \\ 1, & \text{dacă } a_{j,j} \neq 1. \end{cases}$$

Având în vedere construcţia numărului x, prima zecimală a acestuia va fi diferită de prima zecimală a lui $f(0)$, a doua zecimală va fi diferită de a doua zecimală a lui $f(1)$, ..., a n-a zecimală a lui x va fi diferită de a n-a zecimală a lui $f(n-1)$, şi aşa mai departe. În concluzie, numărului x nu îi este asociat un număr natural a a.î. $x = f(a)$, deci f nu este o bijecţie. Contradicţie. □

(S3.5) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă rezolvi destule probleme.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

p = Merg în parc. q = Îmi termin treaba. r = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \to p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

s = Plouă. t = Putem observa stelele.

Atunci $\psi = t \to \neg s$.

(iii) Fie $\theta =$ Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

$$w = \text{Treci examenul la logică.} \qquad z = \text{Înţelegi subiectul.}$$

Atunci $\theta = w \to z$.

(iv) Fie $\chi =$ Treci examenul la logică dacă rezolvi destule probleme. Considerăm propoziţiile atomice:

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \qquad v = \text{Rezolvi destule probleme.}$$

Atunci $\chi = v \to u$.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Fie LP logica propoziţională.

(i) Demonstraţi că mulţimea *Expr* a expresiilor lui LP este numărabilă.

(ii) Demonstraţi că mulţimea *Form* a formulelor lui LP este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup Sim \cup \bigcup_{n\geq 2} Sim^n = A \cup B$, unde $A = \{\lambda\} \cup Sim$ şi $B = \bigcup_{n\geq 2} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din Corolarul 1.10, că Sim este numărabilă. Aplicând încă o dată Corolarul 1.10, rezultă că A este numărabilă.

Conform Propoziţiei 1.13.(iii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 2$. Este evident că $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ este numărabilă (se poate verifica imediat că $h : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{N}$, $h(n) = n - 2$ este bijecţie). Putem aplica Propoziţia 1.13.(i) pentru a concluziona că B este cel mult numărabilă. Evident, B este nevidă.

Aplicând din nou Corolarul 1.10, obţinem că *Expr* este cel mult numărabilă.

Cum $V \subseteq Expr$, iar V este infinită, rezultă că *Expr* este numărabilă.

(ii) Cum $Form \subseteq Expr$, iar *Expr* este numărabilă, rezultă că *Form* este o mulţime cel mult numărabilă.

Cum $V \subseteq Form$, iar V este infinită, rezultă că *Form* este numărabilă.

$\square$

(S4.2) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

□

Fie φ, $\psi \in Form$. Pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$, notăm cu $e \vDash \varphi$ (şi spunem că e **satisface** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $\vDash \varphi$ (şi spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \vDash \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \nvDash \varphi$. Notăm $\varphi \vDash \psi$ (şi spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecinţă semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$ avem $e \vDash \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $e \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $e \vDash \psi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

(S4.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

(S4.4) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash (\varphi \to \psi)$;

(ii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iii) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(iv) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{array}{rcl} a \rightarrow b = 1 & \iff & a \leq b, \\ 1 \rightarrow a = a, & & a \rightarrow 1 = 1 \\ 0 \rightarrow a = 1, & & a \rightarrow 0 = \neg a \\ 1 \wedge a = a, & & 0 \wedge a = 0, \\ 1 \vee a = 1, & & 0 \vee a = a. \end{array}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \to \chi)$	$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) &= 0 \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) &= 0 \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 0 \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) &= 1 \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) = e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) &= 1 \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} (e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

(S4.5) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem:

$$\begin{aligned}\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \neg e^+(\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\ &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\ &\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}\end{aligned}$$

□

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 5

(S5.1) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ şi $\models \psi$;

(ii) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi \quad &\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi} \\
&\qquad\quad\; \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \quad \models \varphi \text{ şi} \models \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $x \in V$, $e_1(x) = 1$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $x \in V$, $e_2(x) = 0$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ şi $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

$\square$

(S5.2) Să se găsească toate modelele fiecăreia dintre mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \boldsymbol{\to} e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \boldsymbol{\to} e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$e \vDash \Gamma$ dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
dacă şi numai dacă $e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots$
dacă şi numai dacă (pentru orice $v \in V$, $e(v) = 0$)
sau (există $k \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice $i < k$, $e(v_i) = 0$ şi, pentru orice $i \geq k$, $e(v_i) = 1$).

Definim $e^\infty : V \to \{0,1\}$ astfel încât, pentru orice $v \in V$, $e^\infty(v) = 0$ şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^\infty\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$e \vDash \Gamma$ dacă şi numai dacă $e \vDash v_0$ şi, pentru orice $0 \leq n \leq 7$, $e \vDash v_n \to v_{n+1}$
dacă şi numai dacă $e(v_0) = 1$ şi $e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8)$
dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, $e(v_n) = 1$.

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

$\square$

(S5.3) Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi $\varphi, \psi \in Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \to e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \to 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

$\square$

Notaţie. *Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm cu $\Gamma \vDash_f \varphi$ (şi citim* **din Γ se deduce semantic finit φ***) faptul că există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.*

(S5.4) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_f \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem întâi că $\Gamma \vDash_f \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 2.30.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).
Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).
Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).
Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulţime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. $\square$

(S5.5) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_f \varphi$.

Demonstraţie:

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):

$$\begin{aligned} \Gamma \vDash \varphi \quad & \iff \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 2.30.(i))} \\ & \iff \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\ & \iff \quad \Gamma \vDash_{\mathrm{f}} \varphi \text{ (conform (S5.4)).} \end{aligned}$$

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ este nesatisfiabilă} \quad & \iff \quad \Gamma \vDash \perp \text{ (conform Propoziţiei 2.29)} \\ & \iff \quad \Gamma \vDash_{\mathrm{f}} \perp \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ şi } \perp) \\ & \iff \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \vDash \perp \\ & \iff \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\ & \qquad\quad \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 2.29)} \\ & \iff \quad \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.} \end{aligned}$$

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 6

(S6.1) **(Metoda reducerii la absurd)**
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3) şi Propoziţia 2.37.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	Propoziţiile 2.44 şi 2.38.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S6.2) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3) şi Propoziţia 2.37.(i)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(1) şi (S6.1)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	se aplică (iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

(S6.3) **("Reciproca" axiomei 3)**
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

(1)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S6.2).(iii) şi Propoziţia 2.38.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S6.2).(ii) şi Propoziţia 2.38.(ii)
(8)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(9) şi (S6.1)
(11)	$\{\varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
(12)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Teorema deducţiei.

□

(S6.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi).$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$	Propoziţia 2.37.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	(S6.2).(iii) şi Prop. 2.38.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S6.2).(ii) şi Prop. 2.38.(ii)
(8)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	(9) şi (S6.1).

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 7

(S7.1) Să se arate că pentru orice formulă φ,

$$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(2)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \varphi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(3)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S6.2).(ii) şi Prop. 2.38.(ii)
(5)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (3), (5)
(7)	$\{\neg\varphi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi$	(6) şi (S6.1)
(8)		$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	Teorema deducţiei.

□

(S7.2) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \land \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \land \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \land \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \land \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \land \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 2.38.(ii).
Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S6.2).(ii)
(2)		$\vdash (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	(S6.3)
(3)		$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Teorema deducţiei
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S6.2).(iii)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (4), (5).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 2.37.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \bot)$	(S6.2).(ii)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to \bot$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S6.1).

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 2.37.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 2.37.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S6.2).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	(S6.2).(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(9) şi (S6.1).

Demonstrăm (iv), implicaţia “$\Rightarrow$”:

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3)
(5)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi$	(i)
(6)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi$	(ii)
(8)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia “$\Leftarrow$”:

(1)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(2)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \varphi \wedge \psi$	(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

□

(S7.3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formule. Să se arate că (Propoziţia 2.61 din curs):

(i) Pentru orice formulă ψ, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ dacă şi numai dacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ este consistentă dacă şi numai dacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Demonstraţie:

(i) Observăm mai întâi că ultima echivalenţă (între a doua şi a treia afirmaţie) este o instanţă a Teoremei deducţiei. E suficient, deci, să arătăm faptul că prima afirmaţie este echivalentă cu a treia. Demonstrăm prin inducţie după $n \geq 1$.

Pentru $n = 1$, enunţul este tautologic.

Fie $n \geq 1$. Presupunem adevărată concluzia pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$. Avem:

$$\begin{aligned} \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}\} \vdash \psi &\Leftrightarrow \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi_{n+1} \to \psi && \text{(din Teorema deducţiei)} \\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \varphi_{n+1} \to \psi && \text{(din ipoteza de inducţie)} \\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n, \varphi_{n+1}\} \vdash \psi && \text{(din Teorema deducţiei)} \\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \varphi_{n+1}\} \vdash \psi. && \text{(din (S7.2).(iv))} \end{aligned}$$

(ii) Avem că:

$$\begin{aligned} \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \text{ consistentă} &\Leftrightarrow \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \not\vdash \bot && \text{(din Propoziţia 2.59)} \\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \not\vdash \bot && \text{(din punctul (i))} \\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \text{ consistentă.} && \text{(din Propoziţia 2.59)} \end{aligned}$$

□

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 8

(S8.1)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime infinită de formule care nu este semantic echivalentă cu nicio mulţime finită de formule.

Demonstraţie:

(i) Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă, deci infinită. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziţia 2.13 pentru φ, e şi e_k, avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \vDash \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită.

(ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulţime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulţime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă e este funcţia constantă $\mathbf{1}$. Prin urmare, $Mod(\Gamma) = \{\mathbf{1}\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ.

$\square$

(S8.2) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Avem că:

$\Gamma \vdash \varphi$	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$	Propoziţia 2.43
	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$	Propoziţia 2.61.(i)
	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$	T. de completitudine 2.55
	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi$	din Propoziţia 2.31.(ii)
	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \vDash \varphi$	T. de compacitate - V3

$\square$

(S8.3) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

Demonstraţie: Fie $\Gamma \subseteq Form$. Vrem să arătăm că Γ este consistentă dacă şi numai dacă Γ este satisfiabilă. Avem că:

Γ este consistentă	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \nvdash \bot$	Propoziţia 2.59
	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \nvDash \bot$	Teorema de completitudine tare - versiunea 2
	$\Leftrightarrow$	Γ este satisfiabilă	Propoziţia 2.29.

$\square$

(S8.4) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \lor v_1) \land v_1) \lor v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg(\neg v_0 \lor v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg\neg v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 &\sim ((v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1)) \lor v_0 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \lor \neg v_1 \lor v_0) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1 \lor v_0) && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor v_0), && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \lor \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \lor \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \lor \neg v_4) \lor (\neg\neg v_2 \lor v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \lor \neg v_4) \lor v_2 \lor v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \land \neg\neg v_4) \lor v_2 \lor v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \land v_4) \lor v_2 \lor v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \land v_4) \lor v_2 \lor v_3 &\sim ((\neg v_1 \lor v_2) \land (v_4 \lor v_2)) \lor v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \lor v_2 \lor v_3) \land (v_4 \lor v_2 \lor v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S8.5) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi pe cel al funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 2.74 şi 2.76, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 2.75 şi 2.76, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 2.70.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 9

(S9.1) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \vDash \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \not\vDash \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \to \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

$\square$

(S9.2) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstraţie:

(i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ şi $L := \neg v_4$, obţinând aşadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ şi $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

$\square$

(S9.3) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstraţie: Notăm:

$$\begin{aligned}
&C_1 := \{v_0, v_4\} && \\
&C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\} && \\
&C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\} && \\
&C_4 := \{\neg v_0, v_3\} && \\
&C_5 := \{v_0, v_1\} && \text{(rezolvent al } C_1,\ C_3\text{)} \\
&C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} && \text{(rezolvent al } C_2,\ C_4\text{)} \\
&C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\} && \text{(rezolvent al } C_5,\ C_6\text{)}
\end{aligned}$$

Avem, aşadar, că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$. $\square$

(S9.4) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \land v_1) \to v_2) \land (v_0 \to v_1)$$

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile şi aplicând legile de Morgan, obţinem că:

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim (\neg(v_0 \land v_1) \lor v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1) \\
&\sim (\neg v_0 \lor \neg v_1 \lor v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1),
\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ', a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ şi $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 şi C_2. Cum C_1 şi C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem aşadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ', formulă în FNC echivalentă semantic cu φ. $\square$

(S9.5) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \to v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \to v_3)$$

este nesatisfiabilă.

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile, obţinem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ'. Notând:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \{v_0, v_2\} \\
C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\} \\
C_3 &:= \{\neg v_1\} \\
C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\} \\
C_5 &:= \{\neg v_3\} \\
C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\}
\end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{aligned}
C_7 &:= \{\neg v_2\} && \text{(rezolvent al } C_2,\ C_3\text{)} \\
C_8 &:= \{v_0\} && \text{(rezolvent al } C_1,\ C_7\text{)} \\
C_9 &:= \{v_4\} && \text{(rezolvent al } C_4,\ C_8\text{)} \\
C_{10} &:= \{v_3\} && \text{(rezolvent al } C_6,\ C_9\text{)} \\
C_{11} &:= \square && \text{(rezolvent al } C_5,\ C_{10}\text{)}
\end{aligned}$$

avem că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 2.91, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziţia 2.85, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci şi φ, care este echivalentă semantic cu φ', este nesatisfiabilă. $\square$

(S9.6) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1. & x_1 := v_0 \\
 & T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_1 \\
 & T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4. & i := 3;\ \text{goto } P3.1 \\
P3.1. & x_3 := v_2 \\
 & T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
 & T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\} \\
P3.2. & U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.3. & \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.4. & i := 4;\ \text{goto } P4.1 \\
P4.1. & x_4 := v_3 \\
 & T_4^1 := \{\{v_3\}\} \\
 & T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P4.2. & U_4 := \{\{v_4, v_6\}\} \\
P4.3. & \mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\} \\
P4.4. & i := 5;\ \text{goto } P5.1
\end{array}$$

$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6$; goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7$; goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S9.7) Demonstraţi, folosindu-vă de proprietăţile satisfacerii semantice şi de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluţiei:

$$\{\neg v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4\} \vDash (\neg v_3 \to \neg(v_1 \to v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstraţie: Aplicând Propoziţia 2.30.(i), condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că mulţimea de formule:

$$\{\neg v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4, \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă şi, mai departe, din Propoziţia 2.31.(i), cu faptul că formula:

$$\neg v_2 \wedge (v_2 \to \neg v_3) \wedge (v_3 \to v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obţinem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg\neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4),$$

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg\neg\neg v_3 \wedge \neg\neg(\neg v_1 \vee v_2) \wedge \neg\neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4,$$

ultima formulă fiind în FNC şi corespunzându-i forma clauzală:

$$\mathcal{S} := \{\{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă, încheind astfel demonstraţia (prin aplicarea Propoziţiei 2.85). Folosim mulţimea $\mathcal{S}$ ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui rulare se produce după cum urmează.

	$i := 1$
	$\mathcal{S}_1 := \{\{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\}$
$P1.1.$	$x_1 := v_1$
	$T_1^1 := \{\{v_1\}\}$
	$T_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$
$P1.2.$	$U_1 := \{\{v_2\}\}$
$P1.3.$	$\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{v_2\}\}$
$P1.4.$	$i := 2$; goto $P2.1$
$P2.1.$	$x_2 := v_2$
	$T_2^1 := \{\{v_2\}\}$
	$T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\}$
$P2.2.$	$U_2 := \{\{\neg v_3\}, \square\}$
$P2.3.$	$\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \square\}$
$P2.4.$	$\square \in \mathcal{S}_3 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Rămâne, deci, că $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă. $\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 10

(S10.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x:

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \mathbin{\pmb{\vee}} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \pmb{\neg}\varphi^{\mathcal{A}}(e) \pmb{\to} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \mathbin{\pmb{\vee}} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1.\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x \neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \pmb{\neg}(\forall x \neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff (\forall x \neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{nu e adevărat că } (\forall x \neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \text{nu e adevărat că pentru orice } a \in A, (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \neq 1 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1.\end{aligned}$$

□

(S10.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

(i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, şi $t = \dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$.

(ii) Fie $\varphi = x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

(ii) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau} \\ &\qquad \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (x = y)[e] \\ &\iff < (e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau } < (e(x), e(y)) \\ &\qquad \text{sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

$\square$

(S10.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a \\
&\iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

□

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice a, $b \in A$, avem că:*

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \textit{dacă } v \neq x \textit{ şi } v \neq y \\ a & \textit{dacă } v = x \\ b & \textit{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S10.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(ii) $\exists y \forall x \varphi \vDash \forall x \exists y \varphi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$.

(i) $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]\big)$ şi $\big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}]\big) \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(ii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x\leftarrow c})_{y\leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow c, y\leftarrow d}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**).

Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow c, y\leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b-ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow c, y\leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

$\square$

(S10.5) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;

(ii) $\forall x \exists y \varphi \nvDash \exists y \forall x \varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ şi $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x \varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \nvDash (\forall x \varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x \psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \nvDash (\forall x \psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \nvDash (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)[e].$$

(ii) Fie $\varphi := x \dot{<} y$. Atunci

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \quad & \iff \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y \varphi)[e_{x \leftarrow n}] \\
& \iff \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\
& \iff \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m,
\end{aligned}
$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \quad & \iff \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x \varphi)[e_{y \leftarrow m}] \\
& \iff \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\
& \qquad\quad \text{avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\
& \iff \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m,
\end{aligned}
$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\exists y \forall x \varphi)[e].$$

□

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 11

(S11.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

(i) $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \exists x \varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \land \forall x \psi$;

(iii) $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x \psi \to \varphi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ (aplicând P. 3.27)} \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e]. \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \land \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models (\varphi \land \psi)[e_{x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 3.27)} \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \models \forall x \psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \land \forall x \psi)[e]. \end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\exists x(\psi \to \varphi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\psi \to \varphi)[e_{x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]\big) \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e]\big) \text{ (aplicând P. 3.27)} \\ &\iff (\text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}]) \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \forall x \psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x \psi \to \varphi)[e]. \end{aligned}$$

$\square$

(S11.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$,

(i) $\mathcal{N} \vDash \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;

(ii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;

(iii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

Demonstraţie:

(i) Luăm
$$\varphi_1 := \exists v_1(v_1 \dot{+} v_1 = v_0).$$

(ii) Luăm
$$\varphi_2 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((v_1 \dot{<} v_0 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \to v_1 = \dot{S}\dot{0}).$$

(iii) Luăm
$$\varphi_3 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((\dot{S}\dot{0} \dot{<} v_1 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \to \exists v_2(v_1 = v_2 \dot{+} v_2)).$$

□

(S11.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r = (\dot{+}, \dot{\times})$ şi $\mathcal{L}_r$-structura $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_r$-formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{R}$,
$$\mathcal{R} \vDash \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

Demonstraţie: Luăm
$$\psi := \exists v_2(v_1 = v_0 \dot{+} v_2 \wedge \exists v_3(v_2 = v_3 \dot{\times} v_3)).$$

□

(S11.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de funcţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \nvDash \varphi$.

Demonstraţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind
$$\forall x \forall y((\neg \exists z(x = z + z) \wedge \neg \exists z(y = z + z)) \to \exists z(x + y = z + z)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente "nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula "impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1,0) + (0,1) = (1,1)$.
A doua soluţie: se ia φ ca fiind

$$\exists t \forall x (\exists z (x = z + z) \vee \exists z (x = z + z + t)),$$

ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, luând $t := 1$ (orice număr este ori de forma $2z$, ori de forma $2z + 1$), dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de elementele pare are patru clase, şi nu două. $\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi);$$

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\vDash \varphi \to \forall x\varphi;$$

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\vDash \exists x(x = t).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi))[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$ – deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*) – şi vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, de unde avem că $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\varphi)[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 3.27, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind (S10.1).(ii), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x \leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 3.26, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acest lucru e simplu, doar luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

□

(S12.2) Dacă $\mathcal{L}$ este un limbaj cu un singur simbol de relaţie de aritate 2, simbol notat cu $\sim$, să se scrie un enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente care satisface φ.

Demonstraţie:

Enunţul φ va fi conjuncţia celor trei proprietăţi ale relaţiilor de echivalenţă, împreună cu:

$$\forall x \exists y (x \sim y \land \neg(x = y) \land \forall z (z \sim x \rightarrow (z = x \lor z = y))).$$

Este imediat faptul că o mulţime finită poate fi înzestrată cu o asemenea relaţie dacă şi numai dacă are un număr par de elemente. Aşadar, mulţimea cerută este mulţimea numerelor naturale nenule pare. □

Fixăm acum $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S12.3) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x (f(x) = c) \land \neg \forall z (g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y (\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$;

(iii) $\exists x \forall y P(x, y) \lor \neg \exists y (S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z (\exists x Q(x, z) \lor \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \land \forall x \exists z Q(z, x))$.

Demonstraţie:

(i)

$$\begin{aligned} \forall x(f(x)=c) \wedge \neg\forall z(g(y,z)=d) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \forall x(f(x)=c) \wedge \exists z\neg(g(y,z)=d) \\ &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \forall x\exists z(f(x)=c \wedge \neg(g(y,z)=d)). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \forall y\exists z(\forall x P(x,y) \to Q(x,z)) \\ &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \forall y\exists z(\forall u P(u,y) \to Q(x,z)) \\ &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \forall y\exists z\exists u(P(u,y) \to Q(x,z)). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \exists x\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \exists x(\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y\forall z(S(y) \to R(z)) \\ &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \exists x(\forall y P(x,y) \vee \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\ &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \exists x(\forall u P(x,u) \vee \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\ &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash\; \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x\exists z Q(z,x)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash \\ \exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to (\neg\neg\exists x R(x) \vee \neg\forall x\exists z Q(z,x)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash \\ \exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to (\exists x R(x) \vee \exists x\forall z\neg Q(z,x)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash \\ \exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x(R(x) \vee \forall z\neg Q(z,x)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash \\ \exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x\forall z(R(x) \vee \neg Q(z,x)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash \\ \exists z\exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists u\forall v(R(u) \vee \neg Q(v,u)) &\;\text{\reflectbox{$\vDash$}}\!\vDash \\ \forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u))). & \end{aligned}$$

□

(S12.4) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x\exists z(f(x)=c \wedge \neg(g(x,z)=d))$;

(ii) $\forall y\exists z\exists u(P(u,y) \to Q(y,z))$;

(iii) $\exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$;

(iv) $\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d)_z(h(x)) = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u(P(u,y) \rightarrow Q(y,z))_z(p(y)) = \forall y \exists u(P(u,y) \rightarrow Q(y,p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y(P(u,y) \rightarrow Q(y,p(y)))_u(j(y)) = \forall y(P(j(y),y) \rightarrow Q(y,p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z(P(m,u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y(P(m,u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_z(k(u,y)) = \forall u \forall y(P(m,u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(k(u,y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem $\varphi^1 = \forall z \forall x \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) = \forall z \forall x \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v,n(z,x))))$, unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 13

(S13.1) Să se axiomatizeze următoarele clase de mulţimi:

(i) mulţimile care au între 3 şi 5 elemente;

(ii) mulţimile nevide care au mai puţin de 7 elemente;

(iii) mulţimile care au între 20 şi 300 elemente;

(iv) mulţimile care au cel puţin 10 elemente.

Demonstraţie: Lucrăm în $\mathcal{L}_=$, deoarece $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulţimile nevide.

(i) Considerăm enunţul

$$\varphi := \exists^{=3} \vee \exists^{=4} \vee \exists^{=5}.$$

Atunci $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$.

(ii) $\mathcal{K} = Mod(\exists^{\leq 6})$.

(iii) Considerăm enunţul

$$\psi := \exists^{\geq 20} \wedge \exists^{\leq 300}.$$

Atunci $\mathcal{K} = Mod(\psi)$.

(iv) $\mathcal{K} = Mod(\exists^{\geq 10})$.

$\square$

(S13.2) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile infinite;

(iv) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

Demonstraţie: Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$. Clasa grafurilor este axiomatizată de Γ.

(i) Fie $\mathcal{K}_1$ clasa grafurilor complete. Considerăm enunţul

$$\varphi_1 := \forall x \forall y (\neg(x = y) \to \dot{E}(x, y)).$$

Atunci $\mathcal{K}_1 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_1\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_1)$.

(ii) Fie $\mathcal{K}_2$ clasa grafurilor care au proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă. Considerăm enunţul

$$\varphi_2 := \forall x \exists y \dot{E}(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(x, z) \to y = z).$$

Atunci $\mathcal{K}_2 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_2\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_2)$.

(iii) Fie $\mathcal{K}_3$ clasa grafurilor infinite. Considerăm mulţimea de enunţuri

$$\Delta := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Avem $\mathcal{K}_3 = Mod(\Gamma \cup \Delta)$.

(iv) Fie $\mathcal{K}_4$ clasa grafurilor care au cel puţin un ciclu de lungime 3. Considerăm enunţul

$$\psi := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1) \right).$$

Atunci $\mathcal{K}_4 = Mod(\Gamma \cup \{\psi\}) = Mod((IREFL), (SIM), \psi)$.

□

(S13.3) Să se axiomatizeze:

(i) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element minimal;

(ii) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element maximal;

(iii) clasa mulţimilor strict ordonate cu proprietatea că orice element are un unic succesor.

Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<})$.

(i) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MINIMAL)))$, unde

$$(MINIMAL): \quad \exists x \forall y \neg(y \dot{<} x)$$

(ii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MAXIMAL)))$, unde

$$(MAXIMAL): \quad \exists x \forall y \neg(x \dot{<} y)$$

(iii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (SUCC)))$, unde

$$(SUCC): \quad \forall x \exists y (x \dot{<} y \wedge \forall z (x \dot{<} z \rightarrow (z = y \vee y \dot{<} z)))$$

□

Definiţia 1. *O $\mathcal{L}$-teorie T se numeşte completă dacă pentru orice enunţ φ, avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.*

(S13.4) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, definim

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunţ şi } \mathcal{A} \vDash \varphi\}.$$

Demonstraţi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie completă.
Demonstraţie: Demonstrăm mai întâi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie. Fie φ un enunţ a.î. $Th(\mathcal{A}) \vDash \varphi$. Deoarece, evident, $\mathcal{A}$ este un model al $Th(\mathcal{A})$, rezultă că $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Prin urmare, $\varphi \in Th(\mathcal{A})$. Aşadar, $Th(\mathcal{A})$ este o teorie.
Demonstrăm în continuare că $Th(\mathcal{A})$ este completă. Fie φ un enunţ arbitrar. Avem două cazuri:

- $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Rezultă că $\varphi \in Th(\mathcal{A})$.
- $\mathcal{A} \not\vDash \varphi$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$, prin urmare $\neg\varphi \in Th(\mathcal{A})$.

□

(S13.5) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat cu $\dot{<}$. Fie Γ o mulţime de enunţuri ce conţine axiomele de ordine strictă, totală şi ce admite măcar un model infinit. Să se arate că există un model $\mathcal{A}$ pentru Γ în care, mai mult, $(\mathbb{Q}, <)$ se scufundă, i.e. există $f : \mathbb{Q} \rightarrow A$ (necesar injectivă) cu proprietatea că pentru orice $q, r \in \mathbb{Q}$, $q < r$ dacă şi numai dacă $f(q) \dot{<}^{\mathcal{A}} f(r)$.

Demonstraţie: Notăm cu $\mathcal{L}'$ limbajul ce extinde $\mathcal{L}$ prin adăugarea unei familii de constante $\{c_q\}_{q\in\mathbb{Q}}$, câte una corespunzătoare fiecărui număr raţional. Mai departe, notăm cu Γ' mulţimea Γ la care adăugăm toate enunţurile de forma $c_q \dot{<} c_r$, cu $q < r$. Fie $\mathcal{B}$ un model infinit pentru Γ.

Arătăm că orice submulţime finită a lui Γ' este satisfiabilă, deci Γ' este satisfiabilă (din Teorema de compacitate). Fie Δ o submulţime finită a lui Γ'. Există $n \in \mathbb{N}$ şi $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât doar constantele $c_{q_1}, \ldots, c_{q_n}$ apar în Δ. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $q_1 < \ldots < q_n$. Structura $\mathcal{B}$ fiind infinită, admite o secvenţă $b_1 \dot{<}^{\mathcal{B}} \ldots \dot{<}^{\mathcal{B}} b_n$. Construim o $\mathcal{L}'$-extensie $\mathcal{B}_\Delta$ a lui $\mathcal{B}$ în felul următor: pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, punem $c_{q_i}^{\mathcal{B}} := b_i$, iar pentru orice $q \notin \{q_1, \ldots, q_n\}$, punem $c_q^{\mathcal{B}} := b_1$ (o valoare arbitrară). Atunci $\mathcal{B}_\Delta$ va fi model pentru Δ.

Fie $\mathcal{C}$ un model pentru Γ'. Notăm cu $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-redusa lui $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{A}$ este modelul căutat pentru Γ – scufundarea f va fi dată de formula:

$$f(q) := c_q^{\mathcal{C}},$$

pentru orice $q \in \mathbb{Q}$. $\square$