CURS #2

Tuesday, October 10, 2023 9:43 AM

Classroom : ntzewsb

Unde suntem

- funcții calculabile în principiu
- "mai multe funcții decât programe"

Program $\Rightarrow$ $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$

$$\Updownarrow$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

$\langle , \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

Concluzia există funcții $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nu sunt calculabile

T. MATIYASEVICH Pb nu are algoritm

INPUT $p(x_1 \ldots x_n)$ cu coeficienți întregi

DE DECIS Are ecuația $p(x_1 \ldots x_n) = 0$ soluții întregi sau nu?

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ecuația } p_n(x_1 \ldots x_k) = 0 \text{ are soluții} \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Pb de decizie

INPUT $x \in \Sigma^*$

RASPUNS DA/NU

$L = \{ x \in \Sigma^* \mid$ răspunsul este DA $\}$

Calculul funcției $\longleftrightarrow$ Pb decizie

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n = \langle x, y \rangle$

De decis $f(x) = y$?

Primă Theorema — funcții primitiv recursive.

GEORGE LAKOFF — Where mathematics
RAFAEL NÚÑEZ — comes from.

D. HILBERT — "Procedură mecanică" pt verificarea adevărului unei prop. matematice arbitrare.

$\downarrow$

NU

1. (Gödel) adevărat $\neq$ demonstrabil
2. Nu orice problemă are algoritm (TURING)

Funcții primitiv recursive

Funcții de bază + operații cu funcții de bază

$\downarrow$

$f(n) = 0$

$S(n) = n+1$ (succesor)

$P_i^n (x_1 \ldots x_n) = x_i$ (proiecții)

1. Compunere

$f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$g_1, \ldots g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

$f \circ (g_1 \ldots g_k) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

2. Recursie primitivă

2. Recursie primitivă

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

$g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$

$h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$h(x_1, \dots x_n, 0) = f(x_1 \dots x_n)$$

$$h(x_1 \dots x_n, y+1) =$$
$$= g(x_1 \dots x_n, y, h(x_1 \dots x_n, y))$$

Def $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se numește primitiv recursivă dacă poate fi obținută din fct de bază prin compunere și rec. primitivă

Obs. Orice f primitiv recursivă este intuitiv calculabilă

Exp. Funcția lui Ackermann,

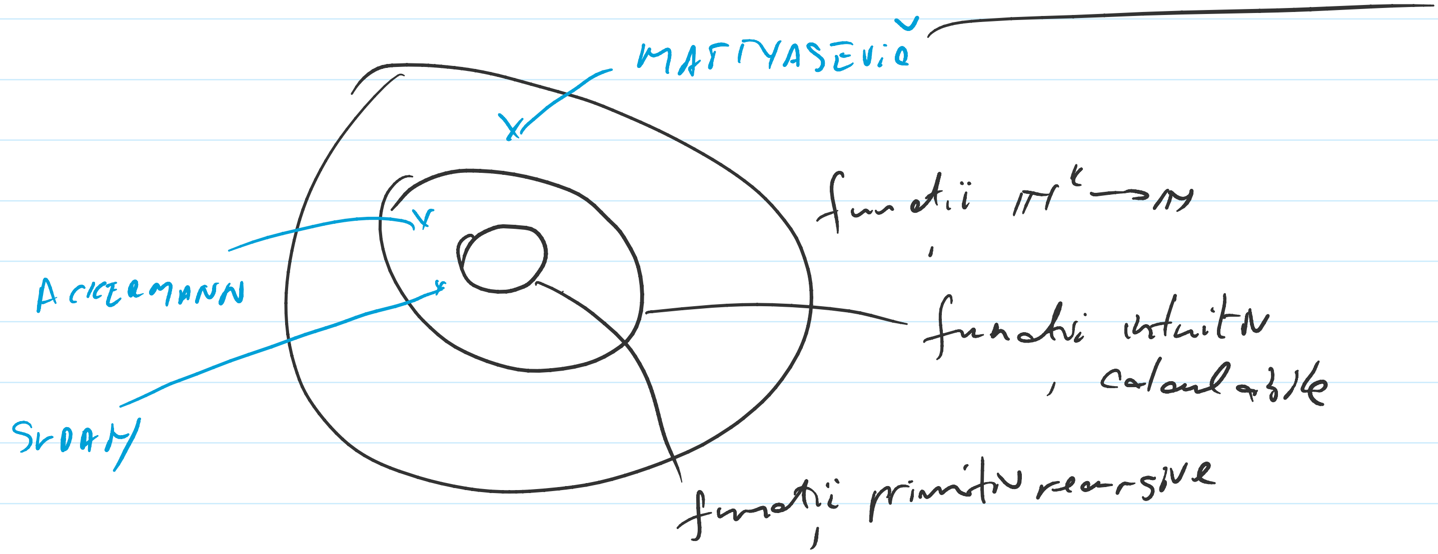
$$A(0, n) = n+1$$
$$A(m+1, 0) = A(m, 1)$$
$$A(m+1, n+1) =$$
$$= A(m, A(m+1, n))$$

rec. primitivă?

NU!

(T) Funcția lui Ackermann nu este primitiv recursivă.

Hilbert ⟶ Ackermann ⟶ funcție
+
Gabriel Sudan ⟶ funcție



INTUIȚIE

Fct primitiv recursive ⟶ for nu cu while

DOUGLAS HOFSTADTER   GÖDEL, ESCHER, BACH
AN ETERNAL GOLDEN BRAID
(o ETERNĂ GHIRLANDĂ INFINITĂ!)

INTUIȚIE   Trebuie să admit în modelul meu posibilitatea de funcție care uneori nu iau valori

$f(x) = \uparrow$ $\qquad f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$

?

nedefinită în x

uneori nu returnează valori

Motiv Exp. de funcție intuitiv calculabilă care nu este primitiv recursivă

PAȘI Enumerăm toate funcțiile primitiv recursive

$$f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$$

$$n \xrightarrow{\text{programe}} f_n$$

$g(n) = f_n(n)+1$ intuitiv calculabilă

g primitiv recursivă? **NU!**

$$g \neq f_n \quad \forall n$$

(mereu pe inputul n)

Def MINIMIZARE

$$g(x_1, \ldots x_n) = \mu y \{ f(x_1, \ldots x_n, y) = 0 \}$$

?

[illegible]

TOTALĂ

Def O funcție parțială $f : \mathbb{N}^n \rightsquigarrow \mathbb{N}$

se numește <u>parțial recursivă</u>

$\Updownarrow$

obținută din fct de bază

<u>compunere</u>

<u>rec. primitivă</u>

<u>minimizare</u>