CURS #10

Tuesday, December 5, 2023 10:00 AM

INDEPENDENT SET (IS)

INPUT G (graf), $k \geq 1$

DE DECIS $\exists\, W \subseteq V \quad |W| \geq k$

a.î. $\forall (v_1, v_2) \in E \quad v_1 \notin W$ sau $v_2 \notin W$

IS ∈ NP

Algoritm G, k, W

dacă $|W| < k \Rightarrow$ REJECT

else

for (v_1, v_2) in E:

if $v_1 \in W$ și $v_2 \in W$

REJECT

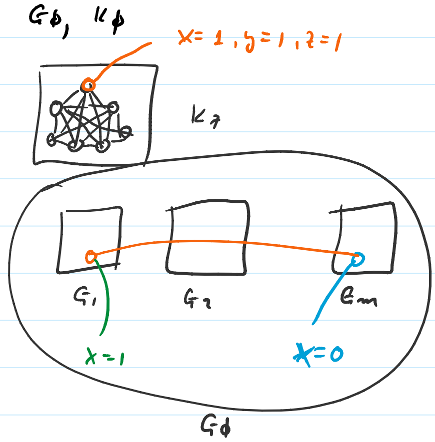
accept

$3\text{-SAT} \leq_m^{?} IS$

$\phi \xrightarrow{f} G_\phi, k_\phi$

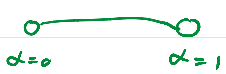
$x \vee y \vee z$

(7 soluții)



$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$

Adaug muchii



$\boxed{k_\phi = m}$

Claim

$\boxed{\phi \text{ satisfiabilă} \iff G_\phi \text{ are un IS de mărime } m}$

Dem

$\Rightarrow$) Pp ϕ satisfăcută de $A : V \to \{0,1\}$

$A \models C_1 \quad \exists\, v_1 \in C_1$ a.î. $A(v_1) = \text{TRUE}$

$\vdots$

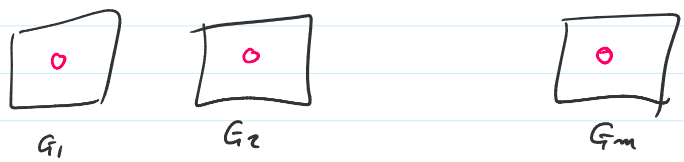
$A \models C_m \quad \exists\, v_m \in C_m$ a.î. $A(v_m) = \text{TRUE}$

$C_i = x_i \vee y_i \vee z_i$ $\qquad W_i = (A(x_i), A(y_i), A(z_i))$

$W = \{W_1, \dots, W_m\}$ I.S.

din construcție nu există muchie între W_i și W_j

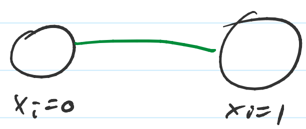
$\Leftarrow$) Pp. că G_ϕ are un IS W de mărime $\geq m$



Vrem $A : V \to \{0, 1\}$ $\qquad A \models \phi$

$C_i = x_i, y_i, z_i$ aleg $A(x_i), A(y_i), A(z_i)$ conform W_i

A bine definit $\qquad$ A nu dă valori dif la ac. variabile



W nu ar fi IS

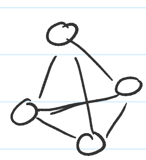
$A \models \phi$ $\qquad \forall i=\overline{1,m}$ $\quad A \models C_i$

☒

CLIQUE

INPUT $G = (V, E)$
$k \geq 1$

DE DECIS Există o clică în G de mărime $\geq k$



$CLIQUE \in NP$

INPUT $G = (V, E), k$

$w = w_1 \dots w_n \in \{0,1\}^n$

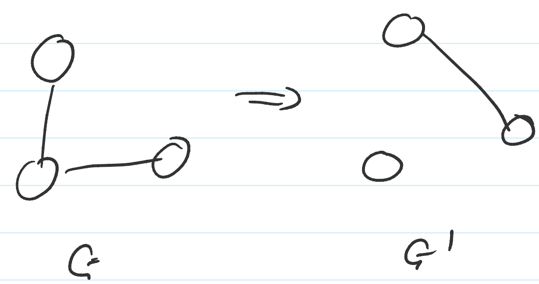
```
if ( Σ_{i=1}^{n} w_i < k )
        REJECT

for i = 1 to n
    for j = i+1 to n
        if w_i = 1 și w_j = 1
              și (i,j) ∉ E
            reject

accept
```

$\boxed{IS \leq_m^P CLIQUE}$

$(G, k) \longrightarrow (G', k')$

$\boxed{k' = k}$

G' complementul lui G



$\boxed{W \text{ clică în } G' \iff W \text{ IS în } G}$

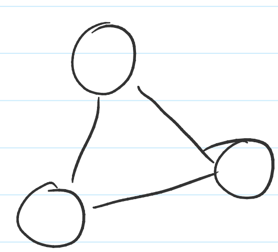
VERTEX COVER

Def Se dă (G, k)

VREAU $S \subseteq V$ $|S| = k$ a.î.

$\forall (v_1, v_2) \in E$

$v_1 \in S \lor v_2 \in S$



$K = 2 \Rightarrow$ DA

$K = 1 \Rightarrow$ NU

$\forall (v_1, v_2) \in E$ $\quad\quad$ $k = 2 \Rightarrow DA$

$v_1 \in S \vee v_2 \in S$ $\quad\quad$ $k = 1 \Rightarrow NU$

VC ∈ NP

$\boxed{IS \leq_m^p VC}$ $\quad$ $(G, k) \longrightarrow (G', k')$

$G' = G$ $\quad$ $S \subseteq V$ este IS în G

$k' = n - k$ $\quad$ $\Updownarrow$

$V \setminus S$ este vertex cover în G'

$|V \setminus S| = k'$

$\boxtimes$

P (ușor de rezolvat) — 2-SAT, cuplaj perfect, PRIMES

NP complete (are anumite instanțe greu de rez) — SAT, 3-SAT, 1-in-3 SAT, CLIQUE, VC, IS, Ham. Cycle, TSP

necunoscut — GI, factoring

"Tranziții de fază" în probleme NP-complete

Giorgio Parisi

ϕ , $\phi_1 = \phi \wedge C$

ϕ_1 "mai puțin satisfiabile decât ϕ"

$$\boxed{\phi_1 \in SAT \Rightarrow \phi \in SAT}$$

Generăm formule aleatoare de tip 3-SAT

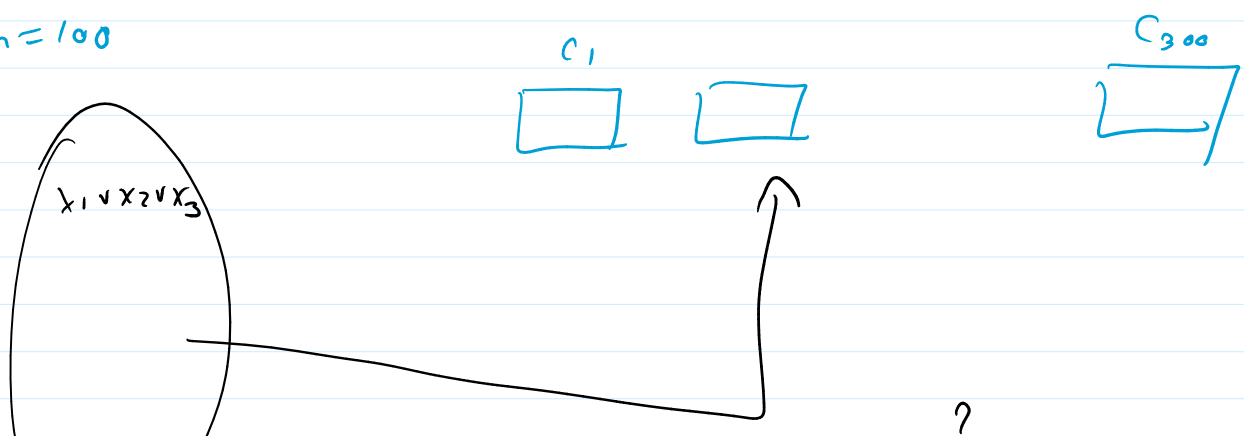
$$C = \frac{m}{n}$$

nr. clauze

nr variabile

$c = 3$

$n = 100$



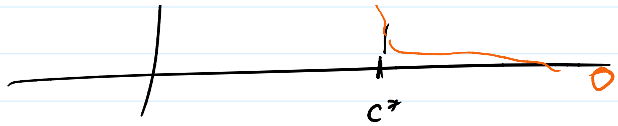
$Pr\{\phi \in SAT\}$?

$$c_1 < c_2 \Rightarrow Pr_{c_1}\{\phi \in SAT\} \geq Pr_{c_2}\{\phi \in SAT\}$$

$\underline{n \to \infty}$

<u>INTUIȚIE</u>

Multe pb NP-complete



Multe pb. NP-complete au "tranziții de fază"

Cele mai grele instanțe se găsesc la pct. de tranziție

Există pb NP-complete care sunt ușoare "în medie"

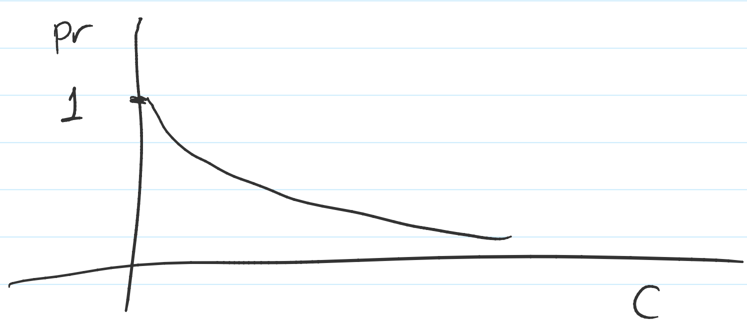
<u>Exp</u> 1-in-3 SAT (1-in-k SAT $k \geq 3$)

$$c^*_k = \frac{1}{\binom{k}{2}}$$

1-in-k-SAT "ușoară în medie" deși NP-completă

<u>Există pb fără tranziții de fază</u>

HORN-SAT



complexitate $\hookrightarrow$ tr de fază

pt alg.
de tip Davis-Putnam