CURS # 13

Tuesday, January 9, 2024 9:28 AM

PH

NP $A \in NP \iff \exists\, g(\cdot,\cdot) \in P$

$\exists$ polinom q

$\forall x \quad x \in A \iff \exists y \;\; |y| \le p(|x|)$ a.î. $g(x,y) = TRUE$

$\Sigma_k^P \qquad \underbrace{(\exists y_1)(\forall y_2) \ldots (Q y_k)}_{k \text{ cuantificatori}} \; (g(x, y_1, \ldots, y_k) = TRUE)$

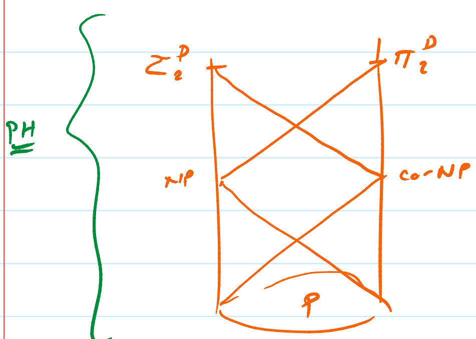
$\Pi_k^P = co\text{-}\Sigma_k^P \qquad (\forall y_1) \qquad (Q y_k)$

$\{A \mid \bar{A} \in \Sigma_k^P\}$

$\exists x_1 \; \exists x_2$

$\Updownarrow$

$\exists x \quad x = \langle x_1, x_2 \rangle$



$PH = \bigcup_{k \ge 1} \Sigma_k^P$

$= \bigcup_{k \ge 1} \Pi_k^P$

M^A

$$\boxed{\Sigma_2^P = NP^{NP}}$$

Probleme care (probabil) nu este în PH

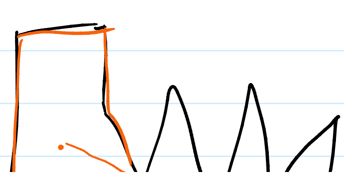
Se dă Sistem ecuații polinomiale peste $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2 + y - z \ge 0 \\ x + y + z^2 - t = 3 \\ \vdots \end{cases}$$

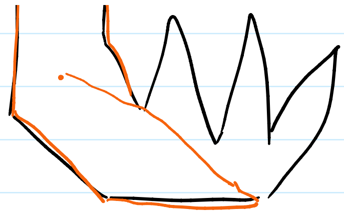
Alte pb

Se dă poligon nu neapărat convex în plan

$k \ge 1$



$k \geq 1$



Σ_k^P → QBF solvere.
→ Answer Set Programming   CLINGO.

$\boxed{\text{Clase de complexitate bazate pe spațiu}}$

M mașină Turing

$M(x)$

$$C_0 \to C_1 \to \ \dots \to C_n \to \ C_m \begin{cases} \text{YES} \\ \text{NO} \end{cases}$$

$$\text{space}_M(x) = \max \{ |c_i| \ : \ 1 \leq i \leq m \}$$

$$\text{PSPACE} = \{ A \mid \text{există o mașină Turing } M \text{ a.î. (1) } L(M) = A \text{ (2) } \forall x \ \text{space}_M(x) = O(|x|^k), k > 0 \}$$

(T) $PH \subseteq PSPACE$

(T) QBF este completă pt PSPACE $\leq_m^P$

QBF INPUT Formulă booleană cuantificată complet
$(\exists x_1) \forall x_2 \exists x_3 \dots (Q x_n) \ P(x_1, \dots x_n)$
DE DECIS Adevărată sau nu?

Demonstrez $\boxed{\Sigma_2^P \subseteq PSPACE}$

$A \in \Sigma_2^P$ există o mașină Turing nedet polinomială cu oracol M_1

a.i.

- $A = L(M_1, SAT)$
- $\forall x \quad time_{M_1}(x) \le q_1(|x|)$ polinom

$space_{M_1}(x) \le q_1(|x|)$

<u>SAT</u> $\rightarrow M_2$ nedeterministă în timp $\le q_2(|x|)$

<u>Creez</u> M care funcționează astfel

$M(x)$ simulează $M_1(x)$
Când $M_1(x)$ pune o întrebare y
M simulează $M_2(y)$

$$\frac{\begin{array}{l}|y| \le q_1(|x|) \\ time_{M_2}(y) \le q_2(|y|)\end{array}}{\le q_2(q_1(|x|))}$$

$\#$ query $\le q_1(|x|)$

Sp. total $\le q_1(|x|) \cdot q_2(q_1(|x|))$

NPSPACE $= \{ A \mid \exists$ mașină Turing <u>nedet.</u> M
a.i. $L(M) = A$
$\forall x \quad space_M(x) \le q(|x|) \}$ polinom

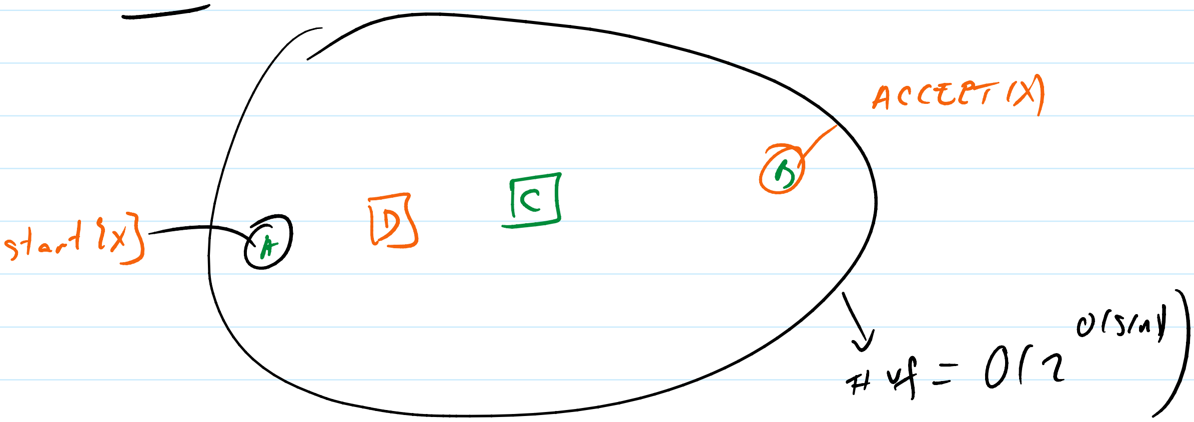
T PSPACE = NPSPACE

Dem

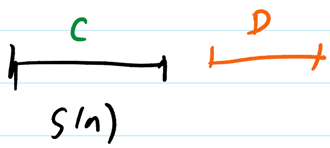
Arăt că

T (SAVITCH) $NSPACE\{s(n)\} \subseteq DSPACE\{s^2(n)\}$

IDEE



$M(x)$ acceptă $\Leftrightarrow$ $\exists$ drum start$\{x\} \longrightarrow$ ACCEPT$\{x\}$



$A \xrightarrow{t} B$ $\qquad$ $A \xrightarrow{t/2} C$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ $C \xrightarrow{t/2} C$

$A \xrightarrow{t} C$ $\qquad$ $A \xrightarrow{t/4} D$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ $D \xrightarrow{t/4} C$

$O(s(n))$ niveluri de recursie

pt fiecare nivel folosesc spațiu $s(n)$

$\boxed{\text{ALG. PROBABILIŞTI}}$

RAJEEV MOTWANI
PRABHAKAR RAGHAVAN

Randomized Algorithms

C.U.P (1994)

Alg. MONTE CARLO DA / NU

CORECT DA $\longrightarrow$ DA Prob $\geq 2/3$

CORECT NU $\longrightarrow$ DA Prob $\leq 1/3$

LAS VEGAS DA / NU / ?

$Pr\{?\} \leq 1/3$

PRIMES Se dă

n scris în binar.

Se decis

Este n prim sau nu ?

Alg. scoală exponențial

Multă vreme $\boxed{\text{alg. probabilist pt PRIMES}}$ (Miller Rabin)

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ prim} \\ (a,p)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

AKS (2003) PRIMES $\in P$

Pb pt care
nu se știe un
alg det. polinomial

Se dă polinom

$$(x_1 + 1)(x_2^3 + x_3 x_4) \ldots$$

ÎNTREBARE $P = 0$?