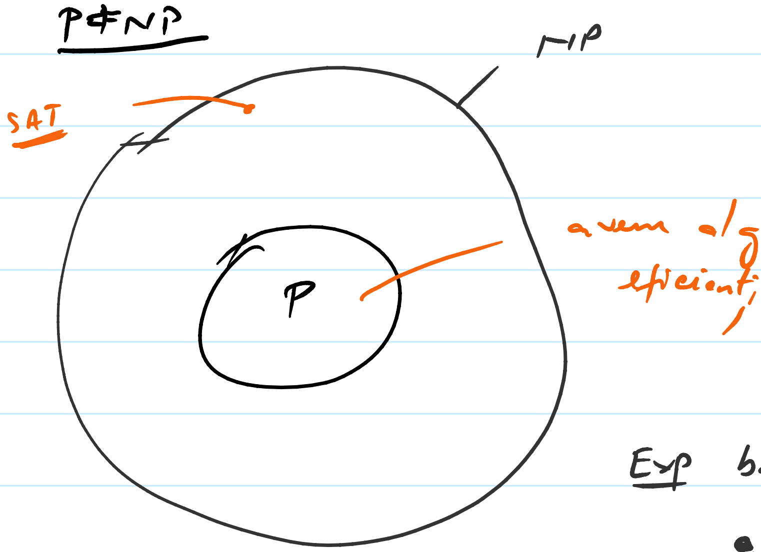
CURS #8

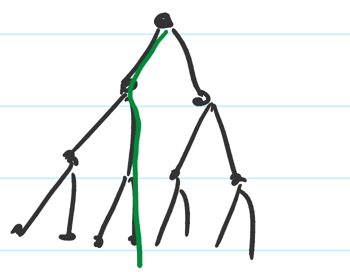
Tuesday, November 21, 2023 9:49 AM

Probleme de decizie

P≠NP



Exp backtracking



Alg verificare

INPUT $\phi, \vec{x}$

VERIFICAT $\phi(\vec{x}) = \text{TRUE}$ $\Big\}\ O(|\vec{x}|^k)$

$NP = \{ A \mid \exists\, \rho(\cdot,\cdot)$ calculabil în timp polinomial $\}$

$\rho(x,y) \to O((|x|+|y|)^k)$

$\exists\ p$ polinom.

a.î.

$x \in A \iff \exists y \quad |y| \le p(|x|)$ a.î. $\rho(x, y) = \text{TRUE}$

martor pt x

Exp $x =$ Formula ϕ (CNF)

$y = FTFFTT$

$$\phi = \bigwedge (\vee \ldots \vee)$$

Exp2 3-COL $= \{ G$ graf $\mid G$ poate fi colorat cu 3 culori $\}$

$\downarrow$ NP

$f(\cdot,\cdot)$ **Algoritm**

INPUT: G, $c = c_1 c_2 \ldots c_n \in \{1,2,3\}^n$

$\uparrow$

$O(n^2)$

for v in V
  for w in V
    if $(v,w) \in E$ si $c_v = c_w$
      return FALSE
return TRUE

$$\text{3-COL} = \{ G \mid \exists c \text{ a.i. } f(G,c) = \text{TRUE} \}$$

Obs 2-COL $\in P$

HC (Hamiltonian Cycle)

$f(\cdot,\cdot)$ **Input**: G

$c = c_1 \ldots c_n \in V^n$

$\downarrow$

$O(m^2)$

for i = 1 to n $(c_{n+1} = c_1)$
  for j = i+1 to n
    if $c_i = c_j$
      return FALSE

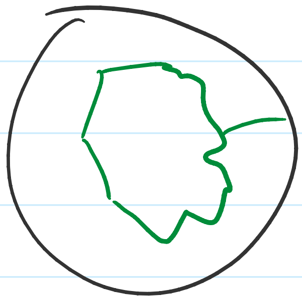
for i = 1 to n

```
for i = 1 to n
    if (c_i, c_{i+1}) ∉ E
        return FALSE
return TRUE
```

TSP (Comis Voiajorului)

Se dă $G = K_n$, $d: E \to \mathbb{R}_+$, $k > 0$

De decis



$\sum d(e) \le k$

$f((G,d,k), c_1 \dots c_n \in V^n)$

↓

$O(n^2)$

INPUT (G,d,k)

$c_1 \dots c_n \in V^n$

```
for i = 1 to n
    for j = i+1 to n
        if c_i = c_j
            return FALSE
if (Σ d(c_i, c_{i+1}) > k)
    return FALSE
return TRUE
```

Exp KNAPSACK

$v_1 \dots v_n > 0$

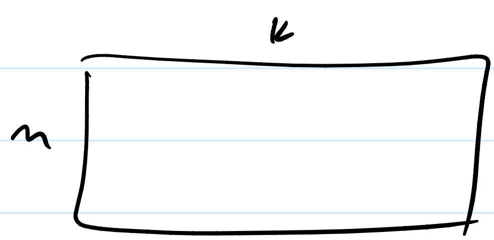
$c_1 \dots c_n > 0$

$k > 0$, $v > 0$

De decis

pot să iau obiecte de mărime $\le k$

coloane (prog dinamică) = k



pot selecta obiecte

de mărime $\leq K$ $\qquad$ $\Omega(n \cdot k)$

de valoare $\geq V$

K = în binar (100 biți)

K = exponențial în $|K|$

① Dacă INPUT size

$|c_1| + \ldots + |c_n| + |K| + |V|$ (codificate binar) $\Rightarrow$ PROG DINAMICĂ exponențială

Dacă INPUT SIZE

$\underbrace{11 \ldots 1}_{c_1} \leftarrow c_1 + c_2 + c_n + K + V$ $\rightarrow$ PROG DINAMICĂ polinomială

KNAPSACK ① $\in NP$

$f(\cdot,\cdot)$ $\qquad$ INPUT $c_1, \ldots c_n, k, V$ (codificate binar); $v_1 \ldots v_n$

$y = y_1 \ldots y_n \in \{0,1\}^n$

$O(n)$

if (sum $\{c_i$ for $y_i = 1\}$) $> K$)

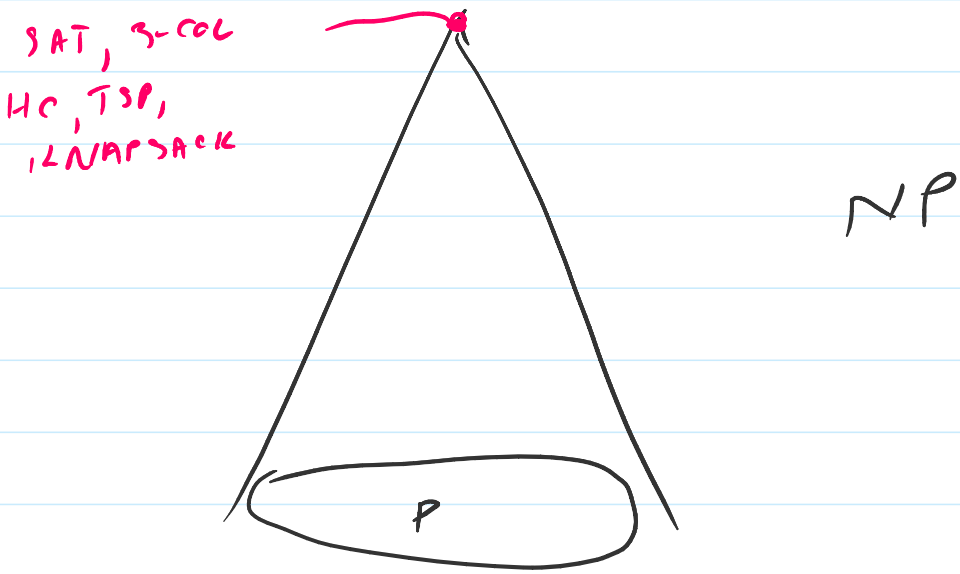
return FALSE

if (sum $\{v_i$ for $y_i = 1\}$) $< V$)

return FALSE

return TRUE

Concluzie SAT, 3-COL, HC, TSP, KNAPSACK $\in NP$



$A \le_m^p B$ $\quad \exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ calculabilă în timp polinomial

a.î. $\forall x$

$x \in A \iff f(x) \in B$

Exp 3-COL $\le_m$ SAT este calculabilă în timp polinomial

INPUT G

ϕ = vidă

for v in V

add to ϕ

$x_{v,1} \vee x_{v,2} \vee x_{v,3}$

$\overline{x}_{v,1} \vee \overline{x}_{v,2}$, $\overline{x}_{v,1} \vee \overline{x}_{v,3}$, $\overline{x}_{v,2} \vee \overline{x}_{v,3}$

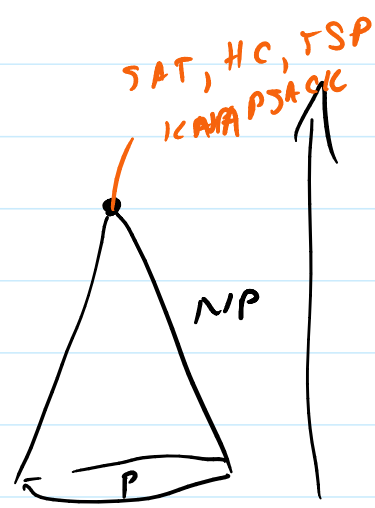
$O(|V| + |E|)$

for (v,w) in E

for (v,w) in E
  for $i=1$ to 3
    add to ϕ
    $\overline{x_{v,i}} \vee \overline{x_{w,i}}$

Def O problemă de decizie A se numește
NP-dificilă (engl: NP-hard),
$\Updownarrow$
$\forall B \in NP \quad B \overset{?}{\leq_m} A$

Def O problemă de decizie A se numește
NP-completă
$\Updownarrow$
- $A \in NP$
- A este NP dificilă



MII DE PROBLEME SUNT NP-COMPLETE

- fizică
- biologie
- şt. politice
- sociologie

etc

IMPORTANȚA PB. NP-complete

- dacă avem un alg. eficient (în practică) pt o pb. NP-completă

atunci pot folosi solverele ca să rezolv alte pb.

solverele care să rezolve alte pb.

SAT glucose, minisat, etc

ILP (programare liniară în nr. întregi)
glpk, gurobi, cplex scip

comerciale

Fizică Statistică

Model Ising (Ernst Ising)

Energie

Vrem Cum arată starea de energie minimă?

d=1 Soluție matematică ușoară (Ising)

d=2 Soluție matematică

d≥3 NICIO FORMULĂ MATEMATICĂ!

SORIN ISTRAIL (BROWN UNIVERSITY)

Pb calculării modelului Ising în d≥3 dimensiuni <u>NP-completă</u>

IDEEA DEM SAT ESTE NP-completă

MAȘINI TURING (nedeterministe)

MAŞINI TURING (nedeterministe)

$T_M(x)$ $\quad \underbrace{C_0(x) - C_1 - C_2 \quad - C_k}_{\boxed{T_M(x) = k}}$ ACCEPT REJECT

$DTIME\{f\} = \{ A \mid \exists$ o maşină Turing M a.î.

$\forall x$ $M(x)$ se oprește în $\in O(f(|x|))$ } pași

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\boxed{P = \bigcup_{k>0} DTIME\{n^k\}}$$