CURS #9

Tuesday, November 28, 2023 9:46 AM

$P \neq NP$ (probabil)

Def $A \leq_m^P B \iff \exists f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ calculabilă în timp polinomial

$x \in A \iff f(x) \in B$

Def A se numește NP-completă

- $A \in NP$
- $\forall B \in NP \quad B \leq_m^P A$

A NP completă? — $A \in NP$; $\exists B$ NP completă, $B \leq_m^P A$

(T) SAT este NP-completă

Dem

$SAT \in NP$ ușor $\qquad A: V \to \{0,1\}$

INPUT $(\Phi, \underline{A})$

Dacă $\Phi(A) = TRUE$
ACCEPT
altfel
REJECT

Vrem să dem $\quad \forall B \in NP \quad B \leq_m^P SAT$

NP ⟶ Mașini Turing NEDETERMINISTE ⟶ circuit boolean

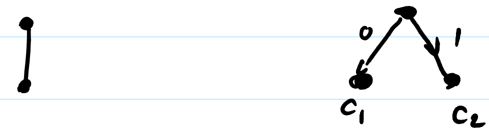
Mașini Turing nedeterministe

Mașini Turing obișnuite

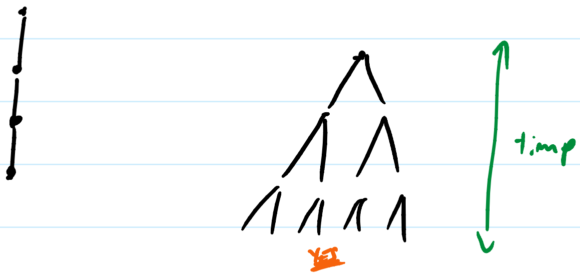
$$\delta: S \times \Sigma^k \to S \times \Sigma^{k-1} \times \{\to, \leftarrow, -\}^k$$

(deterministe)

determinist $\qquad$ nedeterminist



$$\delta: S \times \Sigma^k \times \{0,1\} \to S \times \Sigma^{k-1} \times \{\to, \leftarrow, -\}^k$$



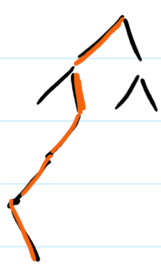
$M(x)$ acceptă $\Leftrightarrow$ $\exists$ drum y a.î. $M(x)$ acceptă pe dr y

(T) $A \in NP \Leftrightarrow$ există o mașină Turing nedeterministă în timp polinomial care acceptă A

nr pași $\leq p(|x|)$ polinom

Exp SAT

ϕ $A = 01001$



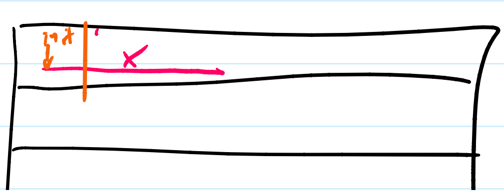
Fie $B \in NP$

$B = L(M)$ → mașină Turing nedet polinomială

$x \longrightarrow \phi_x$ — Mașina M pe intrarea x acceptă

↓

există drum pe care M acceptă



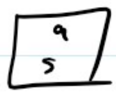
$C_0(x)$

$$\phi_x = \phi_x^1 \wedge \phi_x^2 \wedge \phi_x^3$$

suntem în config inițială pe intrarea x

Tranziții

Sunt în stare accept.



$$y_{i,a} = \begin{cases} TRUE & a \\ FALSE & b \end{cases}$$

$$z_{i,s} = \begin{cases} TRUE & s \\ FALSE & \text{altfel} \end{cases}$$

cont 1 = x_1 starea 1 = s_{init}

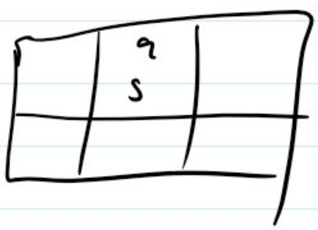
cont 2 = x_2 starea 2 =

...

cont n = x_n starea n = —

c'

c''

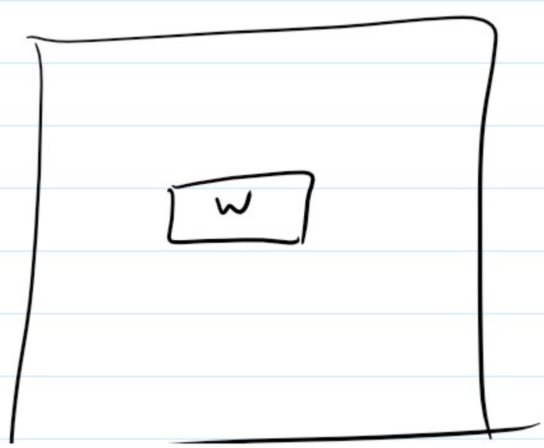


$\psi_w(\vec{z}) = TRUE$

$\Updownarrow$

$\vec{z}$ codifică un pas al MT.

$$\phi_x^2 = \bigwedge \psi_w$$



$\boxed{x}$

Cum arătăm că A este NP-completă?

(L) $A \le_m^p B$ şi $B \le_m^p C$
$\underbrace{}_{f}$ $\underbrace{}_{g}$

$\Downarrow$

$A \le_m^p C$

$A \in NP$

$\exists B$ B NP completă

a.î. $B \le_m^p A$

$x \in A \iff f(x) \in B$

$\quad\quad\quad\quad\quad\; \| $

$\quad\quad\quad\quad\quad\; y \in B \iff g(y) \in C$

$x \in A \iff g(f(x)) \in C$

$g \circ f$ calculabilă în timp polinomial

deci g, f

$\boxed{\text{3-SAT}}$

INPUT $\phi = \bigwedge C_i$

$|C_i| \le 3$

3-SAT $\in NP$

DE DECIS Este ϕ sat sau NU?

$\textcircled{T}$ 3-SAT este NP-completă

<u>Dem</u> 3-SAT $\in$ NP

$$\boxed{SAT \leq_m^p 3\text{-}SAT}$$

$$\phi \longrightarrow Z_\phi \quad 3\text{-CNF}$$

a.i. $\phi \in SAT \iff Z_\phi \in SAT$

ϕ	Z_ϕ
$\bar{x} \vee \bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
$\bar{z} \vee t \vee \bar{u}$	$\bar{z} \vee t \vee \bar{u}$
$a \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee d$	$a \vee \bar{b} \vee u$
	$\bar{u} \vee \bar{c} \vee d$

variabilă nouă!

$$a_1 \vee \bar{a}_2 \vee a_3 \vee a_4 \vee a_5$$

$$\underbrace{a_1 \vee \bar{a}_2}_{b_1} \qquad \underbrace{a_4 \vee a_5}_{b_2}$$

var. noi

$a_1 \vee \bar{a}_2 \vee b_1$

$\bar{b}_1 \vee a_3 \vee b_2$

$\bar{b}_2 \vee a_4 \vee a_5$

<u>Obs</u> 2-SAT $\in$ P

Obs k-SAT $k \geq 3$ NP-complete

Obs k-SAT $k \geq 3$ NP-complete

3-SAT $\leq$ 4-SAT

$x \vee y \vee z$ $\quad$ $x \vee y \vee z \vee \alpha$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $x \vee y \vee z \vee \bar{\alpha}$

Def 1-in-3 SAT

input $\phi = \bigwedge C_i$

$C_i = \text{1-in-3}(x, y, z)$

Satisfying assignment $A : V \to \{0, 1\}$ s.t.

$\forall C_i$ esatto uno dei $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ sono v.

(T) 1-in-3 SAT NP-complete

Dim 3-SAT $\leq_m^p$ 1-in-3 SAT

ϕ $\quad\quad$ $f(\phi)$

$x \vee y \vee z$ $\quad\quad$ $R(\cancel{x}, a, d)$

variabile nuove

$R(\ldots, b, d)$

$x \vee y \vee t$

T F F

$R(x, a, d)$

$R(y, b, d)$

$R(a, b, e)$

$R(c, d, f)$

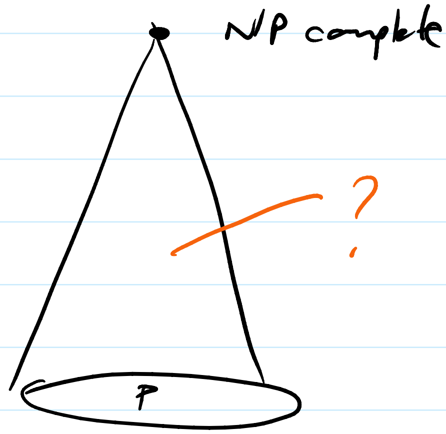
$R(z, c, \text{FALSE})$

x	y	z	a	b	c	d	e	f
T	F	F	F	T	T	F	F	T

<u>Obs</u> Până acum avem variante ale pb SAT

P   2-SAT, HORN-SAT

NP-complete   3-SAT, (k-SAT), 1-IN-3 SAT



T. LADNER

$P \neq NP \Rightarrow \exists A \in NP \setminus P$
A nu este NP-complete

Exp de pb. intermediare - IZOMORFISMUL A DOUĂ GRAFURI

<u>Se dau</u> G_1, G_2 două grafuri cu n vârfuri (matricea de adiacență)

De decis: $\exists$ bijecție $\pi : V_1 \to V_2$

a.î. $(x,y) \in E_1 \iff (\pi(x), \pi(y)) \in E_2)$

TEOREMA LUI SCHAEFER (INFORMAL)

Variantele Pb. SAT sunt fie în P ← Horn-SAT, 2-SAT, (negated Horn), XOR-SAT

fie NP-complete

$\boxed{\text{INDEPENDENT SET}}$

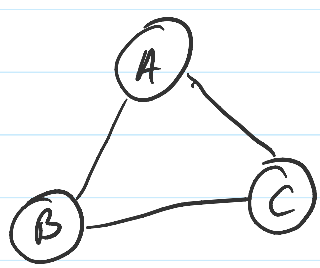
Se dă $G=(V,E)$ graf

$1 \le k \le n$

De decis: $\exists$ W mulțime de vf

$|W| \le k$

a.î. $\forall (v,w) \in E$ $v \in W$, $w \in W$



$k=1$ NU

$k=2$ DA

(T) IS este NP-completă

Dem IS $\in NP$ ușor

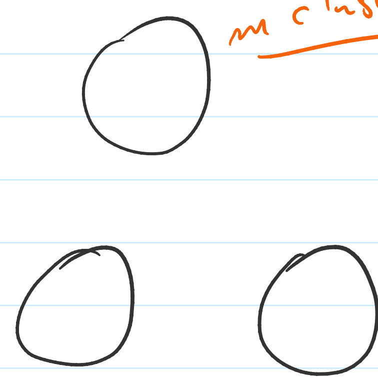
Mașină $(G, k) \to W$

$$\boxed{3\text{-}SAT \leq_m^P IS}$$

ϕ m clauze, n variabile

G, k

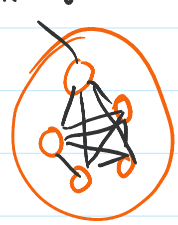
m clustere



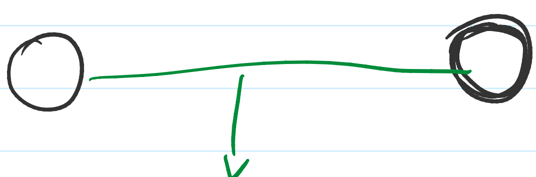
$x \vee y \vee z$

7 set assignments

$x = y = z = 1$



7 vârfuri



$x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

pun o muchie când se contrazic

$x = 0$, $a = 1$, $b = 1$