CURS #5

Tuesday, October 31, 2023 9:44 AM

funcții intuitiv calculabile ≡ funcții parțial recursive ≡ funcții calculabile de Mașini Turing

Mașini Turing Universale

Note de curs Mihai Prunescu

$U(x)$

$x = \langle i, w \rangle$

i → codul unei Mașini Turing

w → input

simulează $M_i(w)$

Exemplu de program Python UNIVERSAL

John MacCormick
What can be computed?
Princeton University Press (2018)

Funcție necalculabilă (de Mașini Turing)

$W : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ Vrem ca $L(W) \neq L(M_i)$ $\forall i$

	0	1	2	3	. . .
M_0	□				
M_1		□			
M_2			□		
⋮				□	

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } M_x(x) = 1 \\ 1 & \text{altfel} \end{cases}$$

(T) Funcția W nu poate fi calculată de o mașină Turing.

Dem Pp W ar putea fi calculată de mașina M_x.

$$W(x) \neq M_x(x)$$

$\boxed{\text{PROBLEMA OPRIRII}}$

INPUT: i, x

DE DECIS: Se oprește $M_i(x)$ într-un nr finit de pași?

$$K = \{ \langle i, x \rangle \mid M_i(x) \text{ se oprește} \}$$

$$HALT(\langle i, x \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } M_i(x) \downarrow \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

(T) HALT nu este parțial recursivă.

Dem Pp că există MT M_{HALT} care calculează HALT

O să creez o mașină Turing (M_W) care folosește M_{HALT} ca subrutină și ar calcula W

$$M_W(\alpha)\ \begin{cases} \text{input } \alpha \\ \text{simulez } \underbrace{HALT(\langle\alpha, \alpha\rangle)}_{M_{HALT}} \to 0/1 \\ \text{dacă } HALT(\langle\alpha,\alpha\rangle) = 0 \text{ return } 1 \\ \text{altfel return } 0 \end{cases}$$

Nu pot verifica corectitudinea unui program arbitrar cu un algoritm

Dez

Metode formale

Model Checking
RunTime Verification } corectitudine anumite programe, ÎN PRACTICĂ

DA PE MAJORITATEA INPUT-URILOR (HAMKINS, MIASNIKOV 2005) ÎN TEORIE

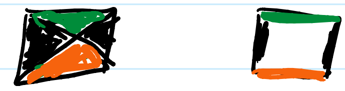
depinde de modelul de calcul

EXEMPLU "CONCRET" DE PROBLEMĂ NEDECIDABILĂ (pr. decizie care nu poate fi rez de Mașină Turing)

PAVAJE WANG (eng. WANG TILES)

HAO WANG (1961)

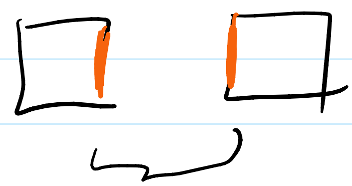
Se dau — Nr finit de template-uri:



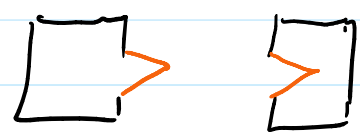
↓

$T_1, \dots T_k$

Se decid — Pot pava tot planul cu $T_1, \dots T_k$ a.i.

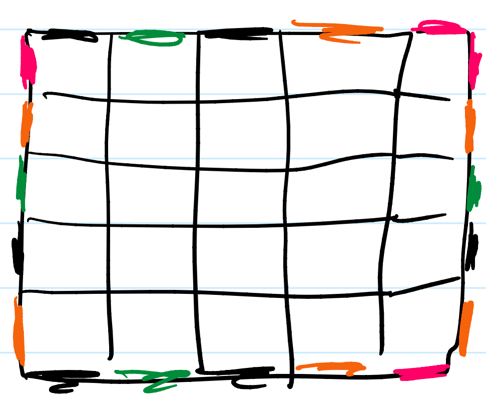


Echivalent



(T) Problema de decizie privind pavaje Wang nu este decidabilă

Acoperire periodică



WANG credea: Dacă $T_1, \dots T_k$ acoperă planul $\Longrightarrow$ $T_1 \dots T_k$ acoperă periodic

$\Downarrow$

Problema acoperirii decidabile

Problema acoperirii decidabilă

greșit !

BERGER (1965)
există acoperiri neperiodice
(~ 20.000 modele)

↓

KNUTH (98)
et al.

↓

CULIK (13)

↓

JEANDEL RAO 11 ← OPTIM

NR. MINIM DE TEMPLATE-URI CARE AU ACOP. NEPERIODICE

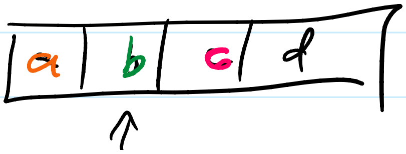
TILINGS (GRUNBAUM, SHEPHARD)

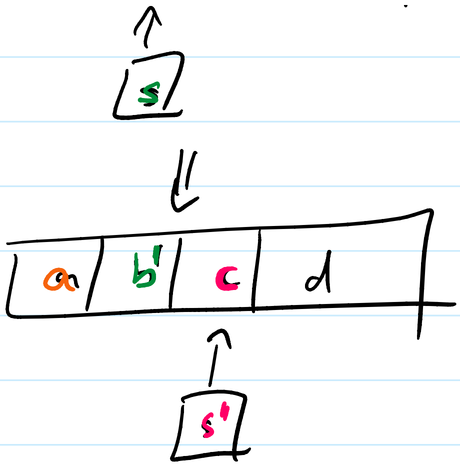
DACĂ POT ROTI FORME

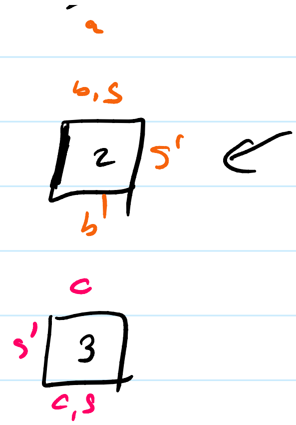
S-A CREZUT CĂ NR MINIM = 2
(PAVAJE PENROSE)

NR. MINIM = 1 (2022)
(EINSTEIN MONOTILE)

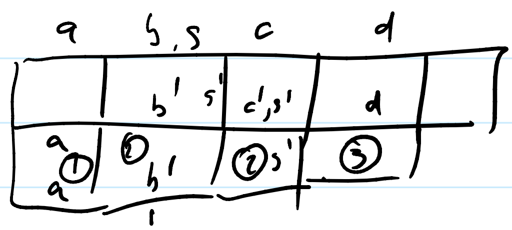
PAVAJELE WANG SIMULEAZĂ MAȘINI TURING







MAȘINĂ TURING



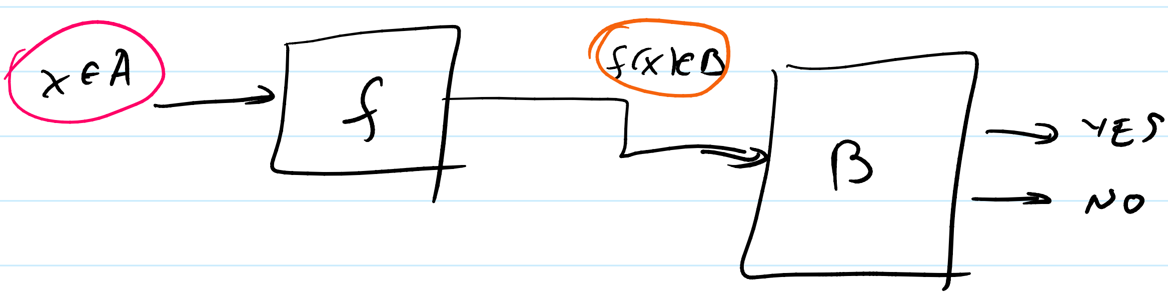
A, B două pb. de decizie

Def

$A \leq_m B \iff \exists\, f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ calculabilă de o mașină Turing care se oprește pe orice input

a.î.

$$x \in A \iff f(x) \in B$$



$A \leq_m B$
B calculabilă
de o M.T.
(B recursivă)

$\Rightarrow$ A recursivă

$A \leq_m B$
A nu este recursivă

$\Rightarrow$ B nu este recursivă

<u>Exp</u> $W \leq_m K$

nu este recursivă

nu este recursivă