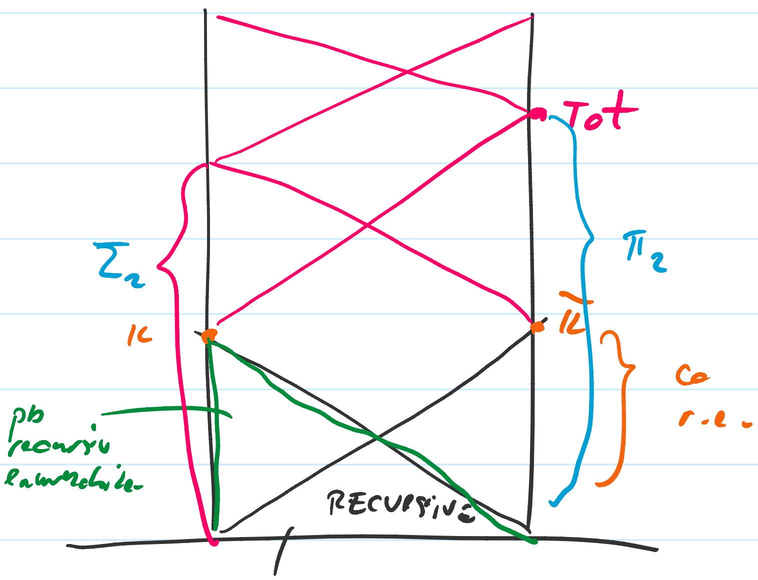
CURS #7

Tuesday, November 14, 2023 9:50 AM

Complexitatea pb. de decizie



$Tot \in \Pi_2$

A s.n <u>recursiv</u> $\Leftrightarrow \exists$ M.T M a.i.

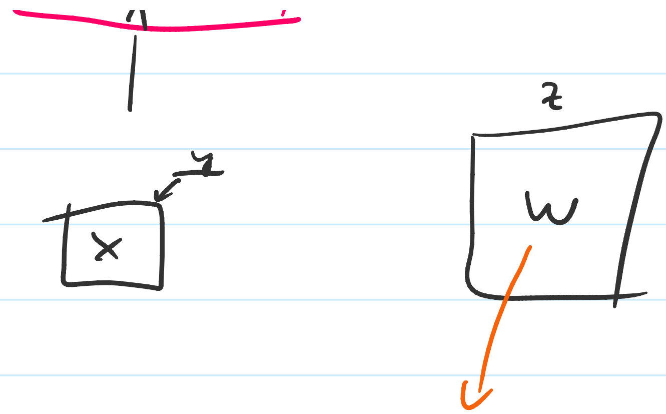
$M(x)$ calculează $\quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

K "semicalculabilă" (recursiv enumerabilă) $\quad M \rightarrow f_K(\langle x,y\rangle) = \begin{cases} 1 & \langle x,y\rangle \in K \\ \uparrow & \end{cases}$

$\underline{A \leq_m B}$

$Tot = \{ x \mid M_x$ se oprește pe <u>orice input y</u> $\}$

$\boxed{K \leq_m Tot}$ dar $Tot \not\leq_m K$



$M_x(y)$ se oprește atunci $W(z)$ se oprește oricare ar fi z

altfel nu se oprește pt niciun z

$W(z)$ simulează $M_x(y)$

$\langle x, y \rangle \in K \iff M_x(y)$ se oprește $\iff \exists T$ a.î. $M_x(y)$ se oprește în T pași

$P(x, y, T)$

$\boxed{\text{predicat recursiv}}$

r.e. A $\quad x \in A \iff \exists y$ a.î. $\langle x, y \rangle \in P$

r.e $= \exists$. recursiv

$$\exists y_1 \exists y_2 \; P(x, y_1, y_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \underset{\substack{\parallel \\ \langle y_1, y_2 \rangle}}{y} \; P(x, I_1(y), I_2(y))$$

Tot $\quad x \in Tot \iff \forall y\ \exists T$ a.î. $M_x(y)$ se oprește în T pași

$\forall y\ \exists t \quad P(x, y, t)$

Ierarhia Aritmetică

$(\Sigma_n, \Pi_n) \qquad \Sigma_n \quad \underbrace{\exists \forall \exists \forall}_{n} \quad P(\quad)$

$\Pi_n \quad \forall \exists \forall \exists \dots, P(\quad)$

Tic-tac-Toe pe tablă infinită

k în linie

$k \leq 5$ Primul jucător câștigă

$k \geq 8$ Al doilea jucător poate forța un joc infinit

$k = 6, 7$? ?

Pb de decizie

INPUT Joc de 2 persoane $M(x_1, y_1, \dots x_n, y_n)$

DE DECIS Are primul jucător o strategie câștigătoare?

$$\boxed{\Sigma_n \cup \Pi_n \subset \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}}$$

$$\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$$

$$\Pi_n \neq \Pi_{n+1}$$

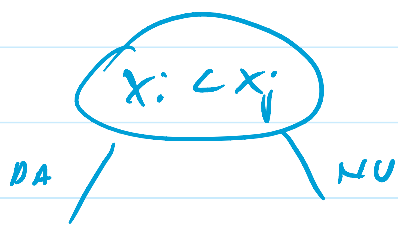
$$\Sigma_n \neq \Pi_n$$

COMPLEXITATE COMPUTAȚIONALĂ

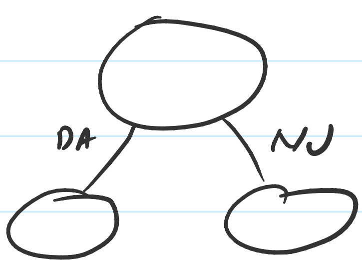
(CAPITOLUL 2, ARORA-BARAK)

Problemele rezolvabile eficient de cele care nu au alg. eficienți

Exp Sorting are complexitate $\Omega(n \log n)$ modelul bazat pe comparații



Arbore de decizie

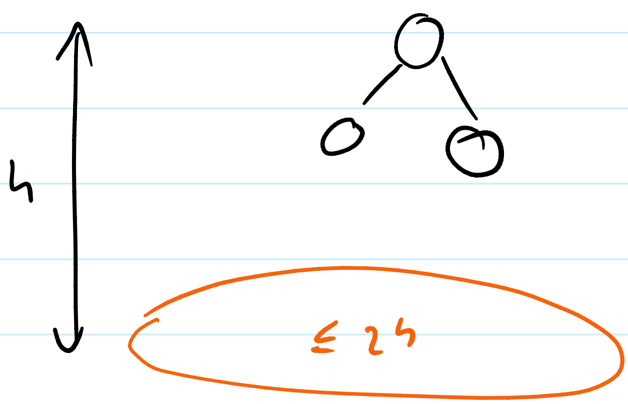


$(3,1,2)$

$x_3 < x_1 < x_2$

compl arb de decizie = lungimea celui mai lung drum de la rădăcină către o frunză

$\boxed{\Omega(n\log n)}$



nr permutări n elemente $n!$

FORMULA LUI STIRLING

$\boxed{n! \le 2^h}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

$$h \ge \log_2(n!) \ge \log_2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right) - O(1)$$

$$\ge c\, n\log n$$

Ce putem calcula eficient ?

$O(n \log n)$ – eficient
$O(n^2)$ – eficient

$O(n^{100})$ – eficient

(PTIME)

P

clasa pb de decizie care au alg cu complexitate $O(n^k)$

2^n – nu este eficient

compl alg = nr maxim de pasi pe un input de mărime n.

Exp SAT

Se dă Formula booleană (CNF) $\phi(x_1, \dots x_n)$

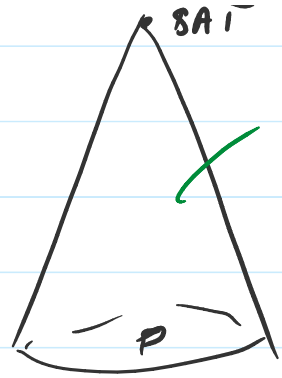
De decis Există valori de adevăr pt $x_1 \dots x_n$ a.î. $\phi(x_1, \dots x_n) = \text{TRUE}$?

tabela de adevăr → exponențial
backtracking → exponențial

$\bigwedge$ SAT

SAT are sau nu alg polinomial ?

PROBABIL



SAT – ... alg polinomiali? PROBABIL NU

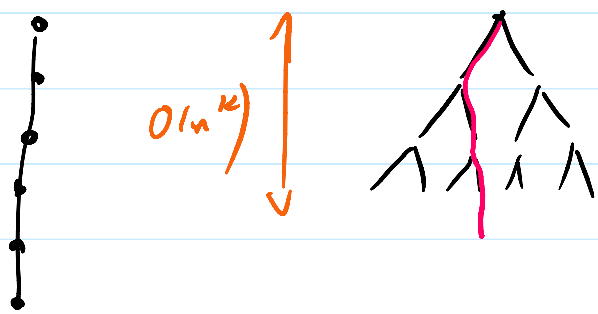
↓

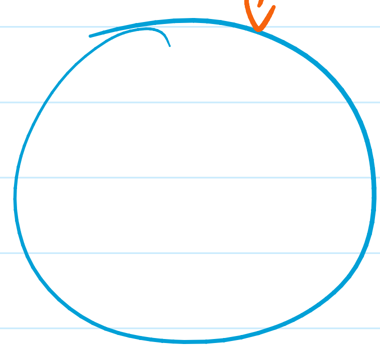
$P \neq NP$?

↓

1000.000 \$ premiu

NP = clasa pb de decizie care au alg. nedeterministi cu complexitate polinomială.





NP prob de decizie pt care există un alg polinomial P

– $P(x, y) = 1$

↑ martor

Exp

$x = \phi$

$y = 0101001$

$x \quad \exists \quad P(x, y)$

– $\forall y$ a.i. $P(x, y) = 1 \quad |y| \leq |x|^k$

<u>Def</u> O problemă de decizie A aparține clasei NP dacă există

- $P(x,y)$ calculabil în timp polinomial în $|x|+|y|$

- $k>0$

a.î.

$$\boxed{x\in A \Leftrightarrow \exists y \ |y|\le |x|^k \ \ P(x,y)}$$