Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico – Lisboa

Projeto de Matemática Computacional
MEBiom, MEBiol, MEFT - 1º Semestre 2018/19

Justifique e comente todas as respostas.

I

1. Construa um programa como implementação do **método da secante**. Os dados de entrada devem ser uma função f, as aproximações iniciais para a solução, o número máximo de iterações a efetuar e uma tolerância de erro a associar à diferença entre duas iteradas consecutivas. Os dados de saída devem ser a sucessão de iteradas e as correspondentes estimativas de erro.

2. Considere um circuito elétrico onde a carga eléctrica (em coulombs) é dada por

$$q(t) = 8\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right), \quad t \geq 0$$

onde $L = 0.202 \times 10^1$ é a indutância (em henrys), $R = 0.250 \times 10^2$ é a resistência (em ohms), $C = 0.241 \times 10^{-3}$ é a capacitância (em farads), e t representa o tempo (em segundos). Pretende-se determinar o primeiro instante $\bar{t}$ em que a carga elétrica é reduzida a metade do seu valor inicial. Para esse efeito, utilize o método da secante começando com $t_0 = 0$ e $t_1 = 10^{-4}$. Apresente as iteradas que são calculadas até obter uma aproximação de $\bar{t}$ com erro absoluto inferior a 10^{-8}.

II

Em algumas situações, as observações (x_k, y_k), $k = 1 : n$, às quais se pretende aplicar o **método dos mínimos quadrados**, podem não ser igualmente relevantes ou fidedignas. Nesse caso, para obter a função de ajustamento $g(x) := \sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i(x)$ a estes dados, deve-se modificar a função a minimizar, ou seja, deve-se minimizar a soma ponderada dos desvios quadrados

$$Q(c) = \sum_{k=1}^{n} w_k[y_k - g(x_k)]^2,$$

onde $w_k \geq 0$. Cada um dos valores w_k representa um certo peso a atribuir ao par (x_k, y_k).

1. Mostre que, neste caso, o sistema normal se escreve

$$B^T W B c = B^T W y$$

onde $B_{ij} = \phi_j(x_i)$, tal como no caso clássico, e $W_{ij} = \delta_{ij} w_i$ define a matriz de pesos.

2. Escreva um programa que, recebendo um conjunto de pontos a ajustar, os respetivos pesos e uma lista com funções de base, retorne a aproximação de mínimos quadrados ponderados desses dados.

3. Pretende-se construir uma estrada para servir 10 localidades, identificadas pelas coordenadas (x, y) e com número de habitantes h, de acordo com a tabela

x	1	3	4	6	8	10	15	16	18	20
y	1	5	7	4.5	12	28	20	19	14.5	10
h	2000	1500	4000	2100	3550	1000	2450	2000	4900	1100

A estrada deve ser uma curva cúbica e passar mais próximo das localidades com mais habitantes. Determine o traçado da estrada com base no critério dos mínimos quadrados ponderados.

III

Recorde a **regra de Simpson** para aproximar o integral $\int_a^b f(x)dx$

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right],$$

onde $h = (b-a)/n$ e n é par.

1. Escreva um programa que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e o natural n retorne uma aproximação do integral através da regra de Simpson.

2. Considere o integral $I = \int_0^1 x^{20} \exp(x-1)dx$. Construa uma tabela

n	S_n	$\lvert E_n \rvert$
10		
20		
40		
80		
160		
320		
$\vdots$		

onde $E_n := I - S_n$. Utilize para valor exato de I um valor S_M com 12 dígitos significativos. Recorrendo a regressão linear, verifique que os valores obtidos para as aproximações S_n estão de acordo com a ordem de precisão da regra de Simpson.

3. Para calcular os integrais

$$I_k = \int_0^1 x^k e^{x-1} dx$$

para $k = 2, 3, ..., 19, 20, 21, ...$, pode-se usar a seguinte fórmula de recorrência

$$I_k = 1 - kI_{k-1},$$

com $I_1 = 1/e$. Compare a aproximação de Simpson para I_{20} com o resultado obtido pela fórmula de recorrência anterior. Como explica o resultado obtido?

4. Considere a função de contagem de números primos $\pi :]0, +\infty[\to \mathbb{N}$ definida por

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo} : p \leq x\}.$$

Legendre e Gauss conjeturaram que

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} =: \mathrm{Li}(x)$$

para n muito grande, isto é,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1.$$

Usando a regra de Simpson, estime vários valores da função de contagem de números primos: $\pi(10^k)$, $k = 1, 2, 3..., 20, ...$ Utilize ainda as funções MATLAB `primes` ou `isprime`, ou `primepi` do PYTHON, para obter $\pi(n)$ para os mesmos valores de n. Compare os resultados.

IV

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

e o **método do ponto médio**

$$\begin{cases} y_0 = y_a, \\ y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2} f(t_i, y_i)\right), \ i = 0 : n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \end{cases}$$

o qual fornece aproximações da função y nos pontos $t_i = a + ih$: $y(t_i) \approx y_i$, $i = 0 : n$.

1. Escreva um programa que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $y_a \in \mathbb{R}^d$ e $n \in \mathbb{N}$, retorne as aproximações $y_0, y_1, ..., y_n$, produzidas pelo método do ponto médio.

2. De acordo com um modelo de dinâmica de relações analisado por J. C. Sprott (Dynamical Models of Love, 2004), as alterações dos sentimentos entre duas pessoas (Romeu e Julieta) ao longo do tempo podem ser descritas por um sistema de duas EDOs não-lineares

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} & = aR + bJ(1 - |J|), \\ \dfrac{dJ}{dt} & = cR(1 - |R|) + dJ. \end{cases}$$

Neste sistema, $R(t)$ e $J(t)$ representam o nível de satisfação de Romeu e Julieta com a relação no dia t, e os sinais dos coeficientes a, b, c, d do sistema definem os seus estilos românticos. Por exemplo, quatro estilos românticos podem ser considerados para Romeu: ansioso ($a > 0$ e $b > 0$), narcisista ($a > 0$ e $b < 0$), seguro ($a < 0$ e $b > 0$) e tímido ($a < 0$ e $b < 0$).

Utilize o método do ponto médio para traçar um gráfico que ilustre a dinâmica da relação de Romeu e Julieta durante 1 ano, partindo de uma situação descrita pelos valores $R(0) = 5.5$ e $J(0) = 4.5$. Deve simular os seguintes casos:

(a) $a = -0.02$, $b = 0.05$, $c = -0.03$, $d = 0.01$;

(b) $a = -0.02$, $b = 0.05$, $c = -0.03$, $d = -0.01$;

(c) $a = -0.02$, $b = 0.05$, $c = 0.03$, $d = -0.01$;

(d) $a = -0.01$, $b = 0.05$, $c = -0.03$, $d = 0.01$.