

VREDNOTENJE EKSOTIČNIH OPCIJ

Privzemimo, da finančni trg lahko modeliramo z večobdobnim binomskim modelom. Naj S_t označuje ceno delnice v trenutku t . Definirajmo slučajne spremenljivke

$$Z_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

za $t = 1, \dots, T$. Temeljna predpostavka¹ binomskega modela je neodvisnost porazdelitve spremenljivk Z_t od časa t ter od preostalih vrednosti $Z_{t'}$ za $t \neq t'$.

Slučajne spremenljivke Z_t so zato neodvisne in enako porazdeljene z verjetnostno funkcijo

$$Z_t \sim \begin{pmatrix} u & d \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Naj bo izplačilo finančnega instrumenta v času T slučajna spremenljivka X . Izplačila *enostavnih* (*plain-vanilla*) instrumentov so odvisna le od cene delnice S_T ob zapadlosti, izplačila *eksotičnih* (*exotic*) instrumentov pa so odvisna od celotne poti cene delnice S_0, S_1, \dots, S_T .

Z vpeljavo do tveganja nevtralne verjetnosti Q namesto naravne verjetnosti P lahko začetno ceno instrumenta izračunamo z diskontiranjem njegovega pričakovanega izplačila

$$c = \frac{E_Q(X_T)}{(1+R)^T}.$$

Pričakovano vrednost $E_Q(X_T)$ izračunamo z *analizo polnega binomskega drevesa*, lahko pa jo ocenimo z *Monte Carlo simulacijami*. Če simuliramo vrednosti x_1, \dots, x_N slučajne spremenljivke X (t.j. slučajno izberemo N vrednosti iz porazdelitve X), potem je

$$E_Q(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Opcije s povprečno izvršilno ceno

Finančni instrumenti, pri katerih so izplačila odvisna od povprečne cene delnice v nekem časovnem obdobju, so *azijski instrumenti*. Privzemimo, da ceno delnice modeliramo z binomskim modelom s parametri S_0, u, d, T, R in W . Določiti želimo premiji *nakupne* in *prodajne* opcije s *povprečno izvršilno ceno* (*average strike call and put*) z zapadlostjo T in utežjo W .

Nakupni tip opcije ob zapadlosti T imetniku izplača pozitivni del razlike med končno ceno delnice in uteženim povprečjem cene delnice v obdobju $[0, T]$, prodajni tip opcije pa pozitivni del razlike med uteženim povprečjem cen delnice v obdobju $[0, T]$ in končno ceno delnice.

Naloga 1

- (a) Naj bo $S_0 = 50, u = 1.05, d = 0.95, T = 5, R = 3\%$ in $W = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Spodnje vrstice prikazujejo 5 možnih poti cene delnice. K vsaki poti pripišite kolikšno izplačilo ob

¹Predpostavka je ključna pri vpeljavi binomskega modela kot diskretne aproksimacije zveznega Black-Scholesovega modela. Za vrednotenje v binomskem modelu je dovolj konstantnost parametrov u, d in R .

zapidlosti pripada imetniku opcije s povprečno izvršilno ceno nakupnega (X) oziroma prodajnega (Y) tipa.

| S_0 | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 | Izplačilo X | Izplačilo Y |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|---------------|
| 50.00 | 52.50 | 49.88 | 47.38 | 45.01 | 47.26 | | |
| 50.00 | 52.50 | 55.12 | 57.88 | 60.78 | 63.81 | | |
| 50.00 | 47.50 | 49.88 | 47.38 | 45.01 | 42.76 | | |
| 50.00 | 47.50 | 45.12 | 47.38 | 45.01 | 47.26 | | |
| 50.00 | 52.50 | 49.88 | 52.37 | 54.99 | 52.24 | | |

- (b) Pripravite funkcijo `izplacilo(vrsta, W, type)`, ki določi izplačilo opcije ob zapadlosti, če vrsta (vektor) predstavlja zaporedne cene delnice. Vhodni podatek `type` ima lahko vrednosti "call" in "put".

Pozor: Funkcija mora delati pri poljubnih parametrih. Pred oddajo naloge jo testirajte na podatkih, ki so objavljeni v spletni učilnici.

Naloga 2

- (a) Pripravite funkcijo `binomski(S0, u, d, R, T, W, type)`, ki določi premijo opcije s povprečno izvršilno ceno ustreznega tipa z analizo polnega binomskega drevesa. Uporabite funkcijo pri parametrih iz naloge (1a).
- (b) Pripravite funkcijo `monte(S0, u, d, R, T, W, type, N)`, ki oceni premijo nakupne oziroma prodajne opcije s povprečno izvršilno ceno z metodo Monte Carlo. Pri tem simulira N poti cene delnice. Funkcijo uporabite pri vrednostih parametrov $S_0 = 60, u = 1.05, d = 0.95, R = 1\%, T = 15, W = \text{rep}(1, 16)$, `type` = "put" ter $N_1 = 10, N_2 = 100$ in $N_3 = 1000$.

Pozor: Funkciji morata delati pri poljubnih parametrih.

Naloga 3

- (a) Natančnost metode Monte Carlo določamo z večkratnim ocenjevanjem ob nespremenjenih pogojih. Nalogo (2b) ponovite $M = 100$ -krat. Pri vsakem N_i narišite histogram, ki prikazuje porazdelitev ocen premije (to je vzorčna porazdelitev ocen). Za boljšo primerjavo naj bo razpon na osi x v vseh histogramih enak.
- (b) Na vsakem histogramu z navpično premico prikažite povprečno oceno, izračunano iz M ponovitev. Primerjajte izračunano povprečje z vrednostjo dobljeno s funkcijo `binomski`. Z vodoravnima puščicama, položenima na abscisno os in izhodiščem v povprečni oceni, prikažite še standardni odklon vzorčne porazdelitve. To je standardna napaka ocene z metodo Monte Carlo.

Primer histogramov najdete v spletni učilnici. Zaradi slučajnosti so možna manjša odstopanja od vaših rešitev.