

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

**Min-Graph Equipartition Problem with Simulated  
Annealing**

Ana Marija Kravanja, Urška Jeranko, Oskar Kregar

Ljubljana, 2019

## 1. OSNOVNO O PROJEKTU

Reševali bomo problem deljenja grafa. Graf želimo razdeliti na dva priližno enaka dela pri čemer je med njima čim manj povezav. Najti tako delitev ni preprosto. Problem postane še težji, če moramo iskati med zelo veliko rešitvami da najdemo pravo. Reševali ga bomo s požrešno metodo in metodo simuliranega izničenja. Rešitve teh metod bomo primerjali med sabo in jih preizkusili na več različnih grafih pri različnih parametrih.

## 2. POŽREŠNA METODA

Požrešna metoda je strategija pri kateri optimalno rešitev izberemo na vsakem koraku posebej s ciljem da bi našli globalno optimalno rešitev. Problem metode je, da na vsakem koraku izberemo najboljšo rešitev, kar nas pripelje do lokalnega optima, ne pa nujno globalnega. Možno je tudi, da nas privede celo do najslabšega globalnega rezultata.

Naj bo  $G = (V, E)$  enostaven graf, pri čemer je  $V$  množica vozlišč in  $E$  množica povezav. Naj bo število vozlišč enako  $n$ . Definirajmo delitev grafa na dve množici  $X$  in  $Y$ , pri čemer je  $|X| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Širina bisekcije je najmanjše število povezav med  $X$  in  $Y$  med vsemi možnimi delitvami.

**Definicija 2.1.** Naj bo  $G = (V, E)$  enostaven graf in  $X, Y \subseteq V$ , tako da je  $X \cap Y = \emptyset$  in  $X \cup Y = V$ .

- Za  $x \in X$  označimo  $I(x)$  notranja vrednost, to je število povezav  $(x, z) \in E; z \in X \setminus \{x\}$ . Analogno definiramo  $I(y)$  za  $y \in Y$ .
- Za  $x \in X$  označimo  $O(x)$  zunanja vrednost, to je število povezav  $(x, z) \in E; z \in Y$ . Analogno definiramo  $O(y)$  za  $y \in Y$ .
- Za  $x \in X, y \in Y$  naj bo  $\omega(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{if } (x, y) \in E \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$ .
- Za  $x \in X, y \in Y$  naj bo  $S(x, y) := O(x) - I(x) + O(y) - I(y) - 2\omega(x, y)$ .

**2.1. Algoritem požrešne metode.** Začnemo z naključno delitvijo vozlišč grafa. Algoritem zamenja dve vozlišči na različnih straneh, če nam to predstavlja boljšo bisekcijo in se ustavi, če to ni več možno. Pri menjavi notranje vrednosti postanejo zunanje in obratno, zato dobimo izboljšano bisekcijo le če je  $S(x, y) > 0$ .

**2.1.1. Algoritem 1.** Vhodni podatki: Graf  $G = (V, E), |V| = n$ .

- (1) Izberemo naključno delitev  $(X, Y)$ .
- (2) Izberemo  $x \in X, y \in Y$ , tako da je  $S(x, y) > 0$ .
- (3) Zamenjamo vozlišči  $x$  in  $y$ .
- (4) Ponavljamo 2. in 3. korak dokler ne obstajata več  $x \in X, y \in Y$ , da je  $S(x, y) > 0$ .

Izhodni podatki: delitev  $(X, Y)$ .

## 3. METODA SIMULACIJSKEGA IZNIČENJA

Metoda simulacijskega izničenja je verjetnostna strategija za aproksimacijo globalnega optima dane funkcije. Razlika od požrešne metode je to, da na vsakem koraku lahko izberemo tudi slabšo rešitev z neko verjetnostjo, vendar nas na koncu

privede do globalnega optimuma. Metoda ej dobila ime zaradi procesa toplotne obdelave kovin. Ta vsebuje segrevanje in ohlajanje materiala da spremenimo fizikalne lastnosti v notranji strukturi. Ko se kovina ohladi postane njena nova dtruktura fiksna, kar povzroči da kovina pridobi določene lastnosti. V simulacijskem izničenju ohranimo temperaturno spremenljivko, ki simulira ogrevalni proces. Na začetku ga nastavimo višje, da je proces hlajenja daljši in se algoritem dlje časa izvaja. Algoritem bo namreč pogosteje sprejemal rešitve, ki so slabše od naše trenutne rešitve. Vendar se algoritem čez čas osredotoči na območje iskalnega prostora, v katerem upamo, da je mogoče najti optimalno rešitve. Algoritem je zelo učinkovit pri iskanju bližine optimalnih problemov rešitvi pri obravnavanju velikih problemov, ki vsebujejo številne lokalne optimalnosti.

**3.1. Algoritem metode simulacijskega izničenja.** Graf si definiramo analogno kot pri požrešni metodi. Če je  $S(x, y) > 0$  zamenjamo vozlišči, če pa je  $S(x, y) < 0$  pa z verjetnostjo

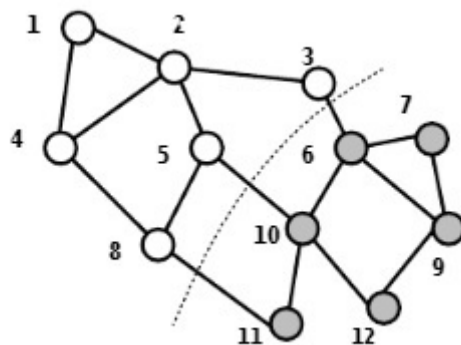
$$P(x, y, t) = e^{-\frac{S(x, y)}{t}}; t \geq 0$$

3.1.1. *Algoritem 2.*  $S(Q(Z))$  je označena funkcija, ki množici  $Z$  priredi neko kvaliteto, torej če je  $Q(Z) > Q(R)$  pomeni da je množica  $Z$  bolj ugodna za nadaljno obravnavo. Za funkcijo  $Q$  smo si v našem primeru izbrali  $S(x, y)$ , ki je definiran enako kot pri prejšnji požrešni metodi. Torej če je  $S(x, y)$  funkcija, kjer smo v množici  $R$  zamenjali  $x$  in  $y$  in  $S(a, b)$  množica  $Z$  kjer jih nismo zamenjali in velja da je  $S(x, y) > S(a, b)$ , potem z določeno verjetnostjo zamenjamo  $R$  z  $Z$ .

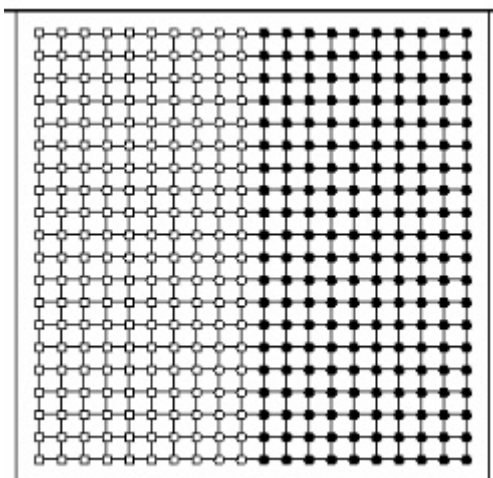
- (1)  $t$  = temperatura z visoko vrednostjo
- (2)  $Z$  = začetna delitev grafa na množici  $X$  in  $Y$
- (3)  $N = Z$  naj predstavlja trenutno najboljšo rešitev
- (4) ponovi dokler je  $N$  najboljša rešitev, nam je zmanjkalo časa ali pa je  $t \leq 0$
- (5)  $R$  = delitev, kjer zamenjamo  $x$  in  $y$
- (6) če je  $Q(R) > Q(Z)$  ali naključno število med 0 in 1 manjše od  $P(x, y, t)$ , potem je  $S = R$
- (7) zmanjšamo  $t$
- (8) če je  $Q(Z) > Q(N)$
- (9)  $N = Z$
- (10) vrni  $N$

#### 4. PRIMERI

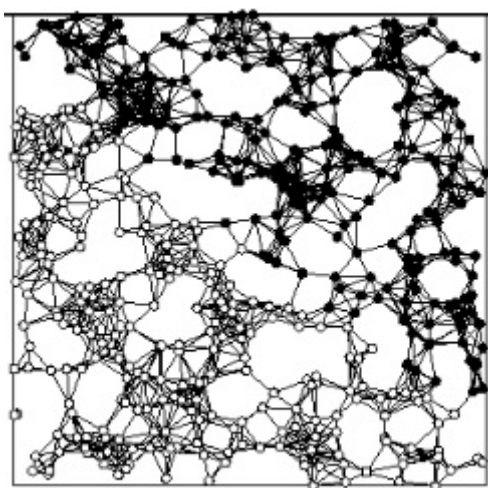
Poglejmo si nekaj primerov delitve grafov.



SLIKA 1. primer grafa na 12 točkah



SLIKA 2. primer grafa na 400 točkah, prikazana je optimalna rešitev



SLIKA 3. Johnsonsov geometrični graf