

Universidad de La Habana

FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

PRIMER PROYECTO DE SIMULACIÓN

Ana Paula González Muñoz C-312
Dennis Daniel González Durán C-312
Frank H. Perez Fleitas C-312

[Proyecto en github](#)

Introducción

Este proyecto tiene como objetivo desarrollar una simulación de eventos discretos para entender mejor el problema orientado. Se busca aplicar los principios de la simulación de eventos discretos para modelar y experimentar con estos fenómenos, y obtener resultados que nos ayuden a tomar decisiones informadas.

Objetivos y metas

1. Desarrollar un sistema que permita modelar el problema.
2. Utilizar el sistema para basándonos en sus resultados y en el análisis estadístico de estos, tomar decisiones.

Sistema específico a simular: Central Telefónica

La compañía aérea “Siberia” tiene una centralita de teléfonos con 3 líneas. La empresa tiene un pico de llamadas durante 3 horas, en las que algunos clientes no pueden ponerse en contacto con la empresa debido al intenso tráfico de llamadas (se sabe que si las tres líneas están siendo utilizadas al cliente no se le puede retener). La compañía estima que, debido a la fuerte competencia, el 60% de las llamadas no respondidas utiliza otra compañía. Durante las horas punta las llamadas siguen una distribución de Poisson con una media de 20 llamadas hora, mientras que en el resto del tiempo la media es de 5 llamadas hora. Cada telefonista emplea 6 minutos por cada llamada (distribución exponencial). El beneficio de un viaje distribuye normal con una media de 210 euros y varianza de 50. Cada empleado cuesta a la compañía 24 euros/hora y una línea telefonica debe ser atendida por uno de ellos. Se asume que el coste de añadir una línea es despreciable.

- Parámetros del sistema:
 - Media de llamadas en horas no punta.
 - Media de llamadas en horas punta.
 - Media del tiempo de atención de una llamada.
 - Duración de la simulación.
 - Cantidad de líneas operando.
 - Intervalos de horas punta.
 - Media del costo de un viaje.
 - Varianza del costo de un viaje.
 - Valor de probabilidad de que los clientes usen otra compañía.
- Variables de interés:
 - Llamadas atendidas.
 - Llamadas perdidas.
 - Ganancia por llamadas atendidas.
 - Cantidad de clientes que usaron otra compañía.

Detalles de implementación

En el directorio source se encuentra el archivo que contienen el código fuente de la simulación. El mismo se divide en diferentes secciones:

Métodos y estructuras auxiliares

Se definen métodos de utilidad para la simulación:

- **make_central:** crea una central telefónica con la cantidad de líneas especificada. La central se comporta como un arreglo de booleanos, donde en la i -ésima posición se almacena si dicha línea está ocupada o no.
- **calculate_salaries:** dado una cantidad de líneas y un salario por horas determina cuanto dinero pierde la central como pago a los trabajadores.
- **stop_case:** determina si la simulación debe detenerse. Para esto realiza un análisis por intervalos de confianza para comprobar si se tiene suficiente información de las variables objetivos.
- **mean_call:** determina en un momento de la simulación la media de la distribución con la que llegan llamadas a la central en dependencia de las horas puntas.

Se definen estructuras de utilidad para la simulación:

- **class Config:** entidad donde se almacenan los parámetros de la simulación.
- **class Event:** representación de un evento. Estos tienen tipo, tiempo restante para que ocurra y posición en la central en caso de ser una llamada que está siendo atendida.

Simulación del problema

Se encuentra el código principal de la simulación que funciona con una cola de eventos de la siguiente manera:

- Se crea una central telefónica
- Se genera la primera llamada entrante y se inserta en la cola
- Mientras no se cumpla el caso de parada se simula un día en la central. Para esto se toma el evento de la cola más próximo a ocurrir
 - En caso de ser una llamada: se inserta en la cola y se generan dos nuevos eventos: la finalización de esta y la entrada de una nueva llamada.
 - En caso de ser la finalización de una llamada: se libera la línea telefónica que esta utiliza

Al finalizar el día, se almacena el resultado de las variables de interés y se comprueba el caso de parada para determinar si es necesario que la simulación continúe.

Análisis estadístico

Se encuentran los códigos correspondientes a las gráficas y pruebas de hipótesis que se muestran en el informe.

Resultados y experimentos

El modelo tiene la forma:

- Media de llamadas en horas no punta = 5
- Media de llamadas en horas punta = 20
- Media del tiempo de atención de una llamada = 6

- Cantidad de líneas operando = 3
- Intervalos de horas punta = $[[3,6]]$
- Media del costo de un viaje= 210
- Varianza del costo de un viaje= 50
- Valor de probabilidad de que los clientes usen otra compañía= 0.6

Durante la simulación la central telefónica generó una ganancia promedio de 29714 euros por día. En promedio, se dejaron de atender 13 llamadas diarias, resultando en una pérdida potencial de 7 clientes por día debido a las llamadas no atendidas.

Los resultados indican que, aunque la ganancia promedio diaria es significativa, la pérdida debido a las llamadas no atendidas podría representar una oportunidad de mejora. Reducir el número de llamadas no atendidas podría aumentar considerablemente la ganancia total.

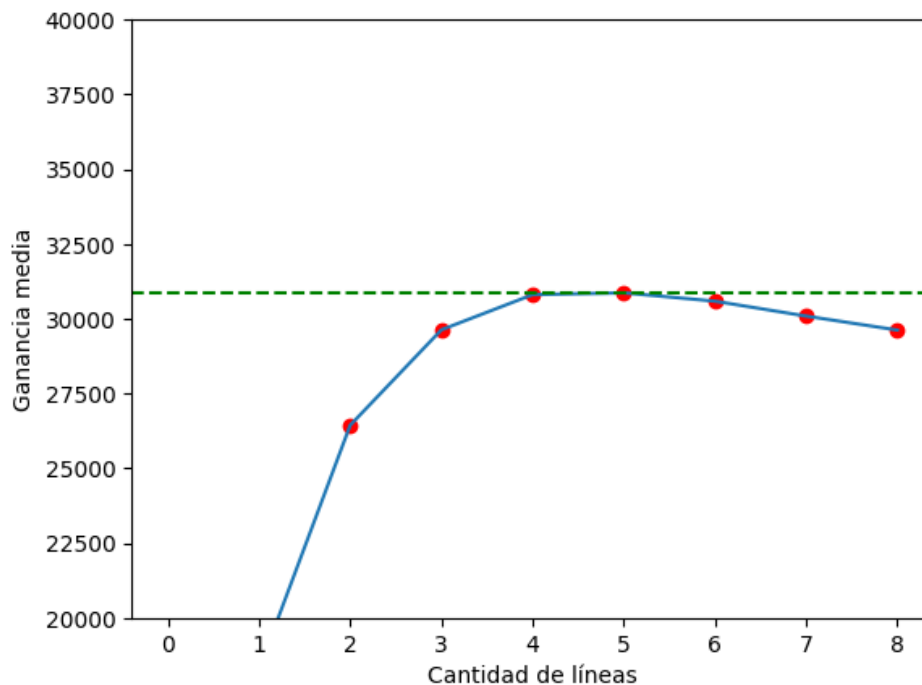
Formulación de hipótesis de la simulación

En esta sección se presentan las hipótesis que guiarán la simulación de la central telefónica, con el objetivo de evaluar su impacto en la ganancia generada. Se plantean dos hipótesis principales:

Hipótesis 1: Incremento en la cantidad de líneas telefónicas

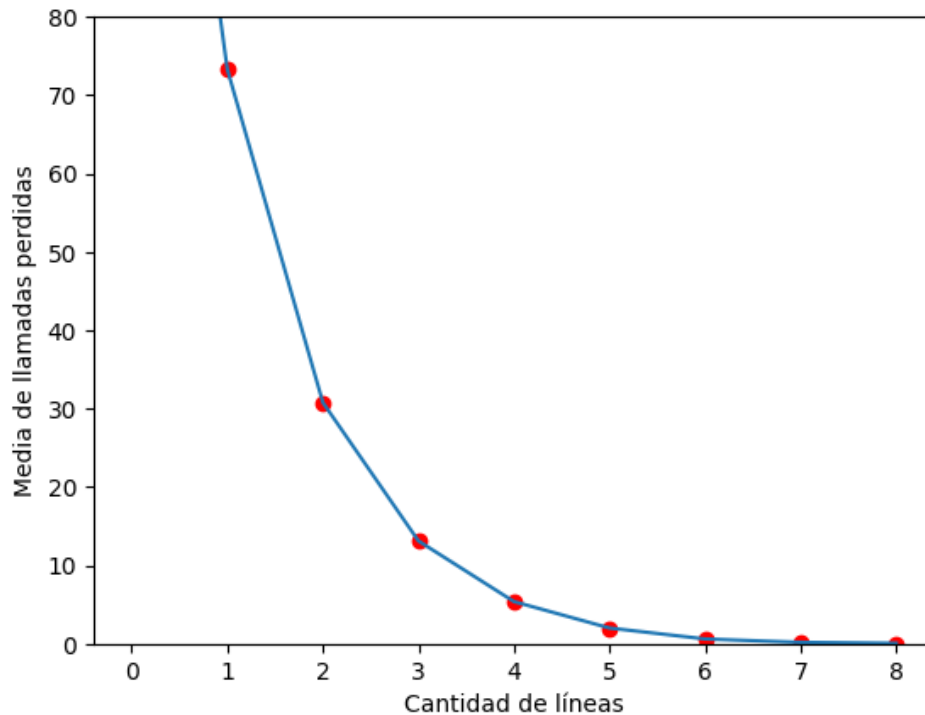
Descripción: Se propone que aumentar el número de líneas telefónicas en la central reducirá la cantidad de llamadas perdidas y aumentará la cantidad de llamadas atendidas, lo que podría incrementar la ganancia.

Para comprobar esto se realizó una simulación para cada cantidad de líneas (entre 0 y 8) para promediar la ganancia (teniendo en cuenta el salario de los trabajadores). Se muestran los resultados en la siguiente gráfica:



Se puede observar que en promedio se obtiene mejor ganancia con 4, 5 y 6 líneas.

Para apoyar esta idea, se observó también la cantidad de llamadas perdidas según la cantidad de líneas telefónicas activas:



Se puede observar que de 4 líneas en adelante se pierden menos llamadas, por lo que se puede suponer que con 5 líneas se atienden la mayor cantidad de llamadas y por lo tanto se obtiene una mayor ganancia en promedio.

Se realiza una prueba de hipótesis para comprobar si las diferencias entre las ganancias con 3 y 5 líneas son significativas o no:

$$H_o : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a : \mu_i \neq \mu_j$$

Cuando se analiza el intervalo de confianza con $\alpha = 0.05$ de la diferencia entre ambos sistemas obtenemos un $p - value = 2.2287551656043974e - 116$ por lo que se rechaza la hipótesis nula: la central obtiene mayor ganancia con 5 trabajadores que con 3.

Se realiza una segunda prueba de hipótesis para comprobar si las diferencias entre las llamadas perdidas con 3 líneas y con 5 son significativas o no:

$$H_o : \mu_1 = \mu_2$$

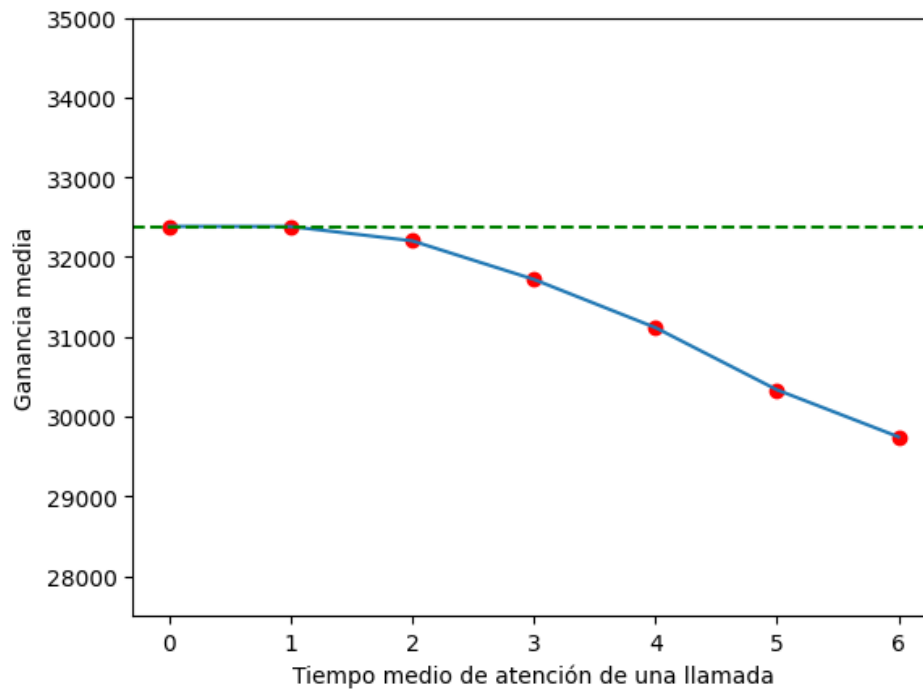
$$H_a : \mu_i \neq \mu_j$$

Cuando se analiza el intervalo de confianza con $\alpha = 0.05$ de la diferencia entre ambos sistemas obtenemos un $p - value = 0$ por lo que se rechaza la hipótesis nula: la central pierde menos llamadas 5 trabajadores que con 3.

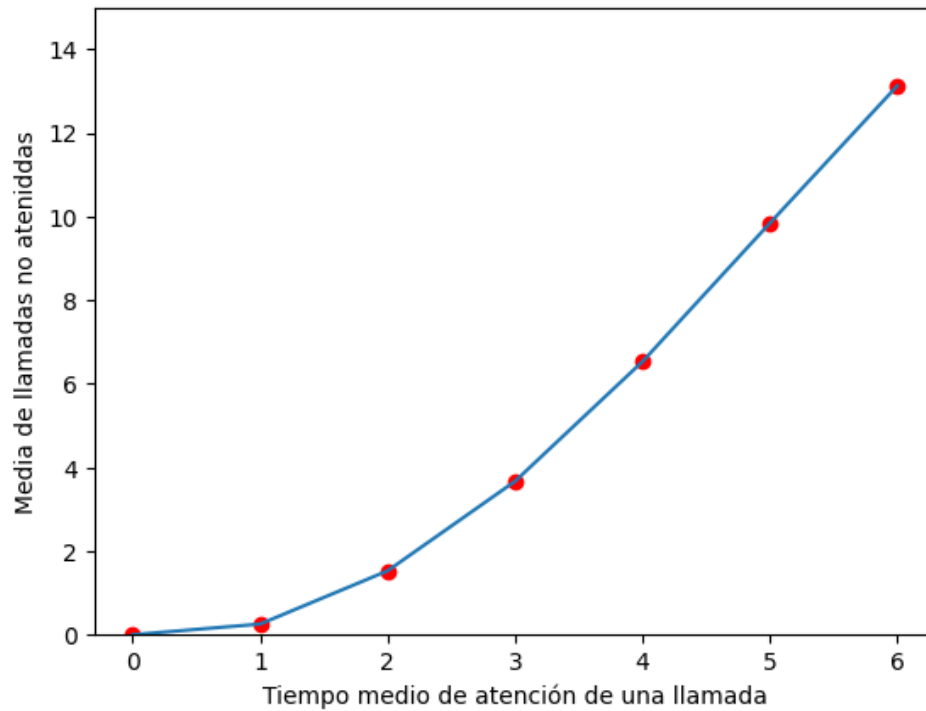
Hipótesis 2: Reducción del tiempo de atención

Descripción: Se plantea que disminuir el tiempo promedio de atención por llamada permitirá gestionar un mayor número de llamadas en el mismo período, optimizando el rendimiento de la central y aumentando las ganancias.

Para comprobar esto se realizó una simulación para cada tiempo de demora de atención de las llamadas (entre 0 y 6 minutos por llamada) y la cantidad de líneas del modelo original (3) y variando el tiempo de atención (entre 0 y 6 minutos por llamada). Se muestran los resultados en la siguiente gráfica:



Se puede observar que a medida que disminuye el tiempo de atención se obtiene mayor ganancia. Para apoyar esta idea, se observó también la cantidad de llamadas perdidas según el tiempo de atención:

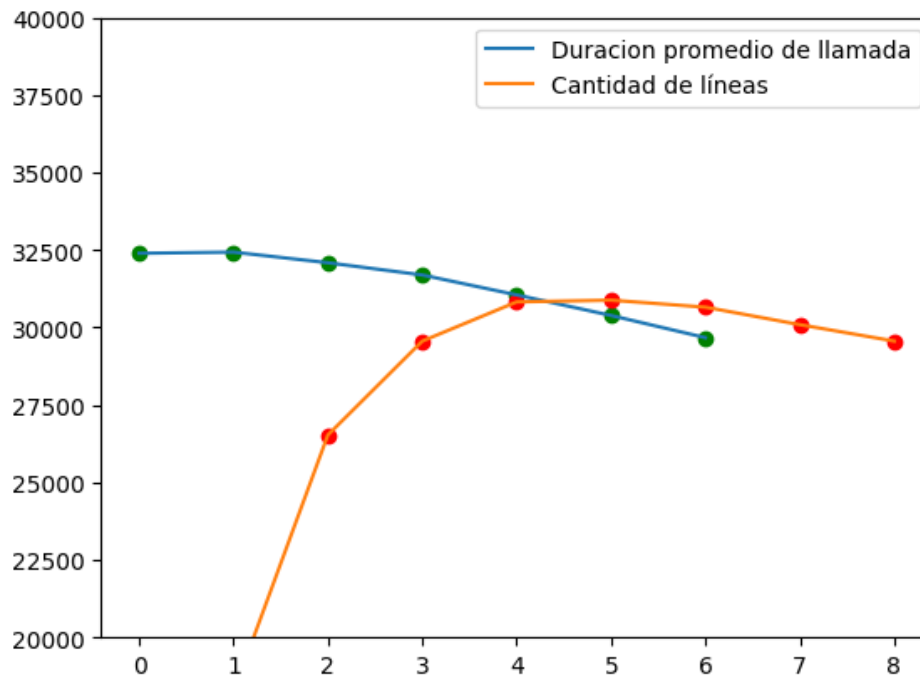


Se puede observar que a medida que disminuye el tiempo de atención disminuye la cantidad de llamadas perdidas.

Comparación entre las hipótesis de la simulación

Para decidir cuál estrategia es mejor para optimizar la ganancia de la central se compararán los resultados obtenidos en ambas.

Como se puede observar en la siguiente gráfica, para superar las ganancias generadas por 5 líneas telefónicas se necesita que el tiempo de atención tenga una media menor que 4 minutos por llamada.

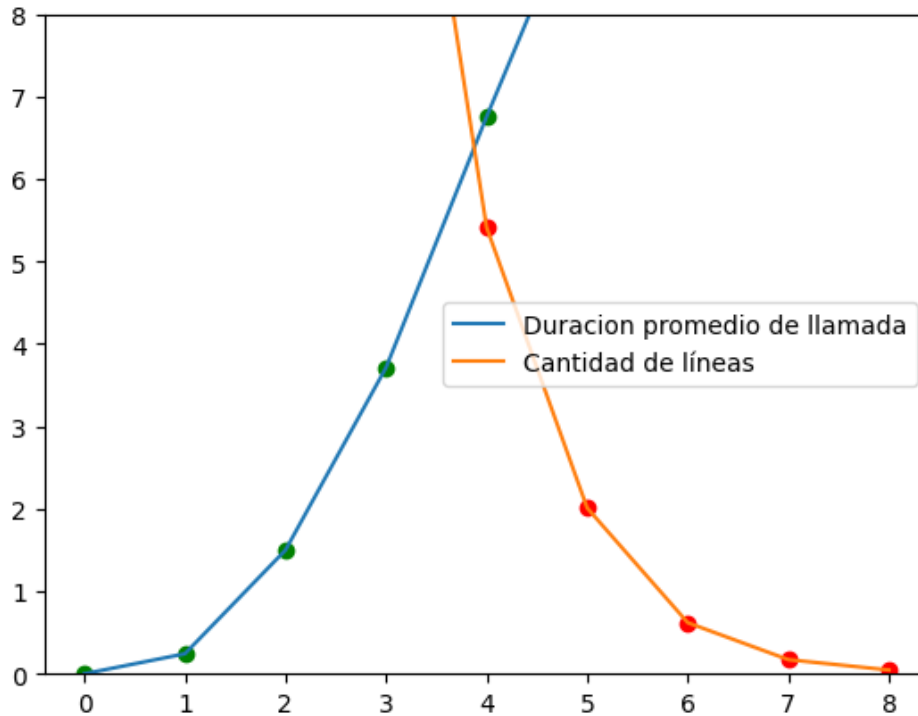


Los resultados sugieren que si el deseo de la empresa es aumentar las ganancias se tienen dos opciones principales:

- Aumentar a 5 la cantidad de líneas telefónicas.
- Disminuir a 4 minutos o menos la media del tiempo de atención por llamada.

La elección de alguna de estas estrategias depende del costo y viabilidad de disminuir el tiempo de atención.

Además si la empresa desea lograr una mayor satisfacción de los clientes se podría analizar la pérdida de llamadas según cada estrategia.



Se realiza una prueba de hipótesis para comprobar si las diferencias entre las llamadas no atendidas con 5 líneas es significativa con respecto a las llamadas perdidas con una media de atención de 4 minutos:

$$H_o : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a : \mu_i \neq \mu_j$$

Cuando se analiza el intervalo de confianza con $\alpha = 0.05$ de la diferencia entre ambos sistemas obtenemos un $p - value = 0$ por lo que se rechaza la hipótesis nula: las diferencias entre las llamadas no atendidas de ambas estrategias es significativa.

Se puede observar entonces que para obtener un valor cercano o mejor a la pérdida de llamadas obtenidas con 5 líneas telefónicas se necesita al menos una media de atención de 3 minutos por llamada, por lo que si se tiene en cuenta la satisfacción de los clientes se necesitará disminuir a 3 minutos o menos la media del tiempo de atención, por lo que será decisión de la empresa que estrategia aplicar según la viabilidad y el presupuesto disponible.

Análisis de parada de la simulación

La simulación se detiene por alguno de los siguientes 2 motivos:

- Se alcanza la cantidad máxima de días de la simulación
- Se cumple el caso de parada definido en **stop_case**
 - Se utiliza un intervalo de confianza $\alpha = 0.05$ y por lo tanto $Z\alpha/2 = 1.96$. Esto significa que será cierto, con una probabilidad (aproximadamente) igual a 0.95, que la media muestral \bar{X} y la desviación estándar muestral S serán tales que la media poblacional estará entre $\bar{X} \pm 1.96/\sqrt{n}$

Modelo matemático

Descripción del modelo de como modelos probabilísticos

- Modelo de llegada de llamadas
 - Utiliza una distribución de Poisson para modelar las llegadas de llamadas:
 - * Durante horas punta (3 horas): $\lambda = 20$ llamadas por hora.
 - * Fuera de horas punta: $\lambda = 5$ llamadas por hora.
- Modelo de Duración de Llamadas:
 - Utiliza una distribución exponencial para modelar el tiempo de atención de llamadas, con una media de 6 minutos por llamada ($\mu = 1/6$).
- Modelo de Beneficios:
 - Los beneficios de los viajes se distribuyen de manera normal con una media de 210 euros y una varianza de 50 euros.
- Costos:
 - Cada empleado cuesta 24 euros por hora.
 - Cada línea debe ser atendida por un empleado, por lo que el costo por hora para las tres líneas es $3 \cdot 24$ euros

Supuestos y restricciones

- Supuestos:
 - Las llamadas no atendidas son perdidas en un 60%.
 - Los tiempos de llegada y de atención de llamadas son independientes.
 - El costo de añadir una línea adicional es despreciable.
- Restricciones:
 - La central tiene un máximo de 3 líneas.
 - Solo una llamada puede ser atendida por cada línea a la vez.
 - Las llamadas no pueden ser retenidas si todas las líneas están ocupadas.

Comparación de los resultados obtenidos y los resultados teóricos

Un sistema con servidores en paralelo se caracteriza porque hay más de un servidor que ejecuta la misma función con la misma eficiencia. En un sistema con servidores en paralelo no hay varias colas, sino una única cola. En algunos de estos, la cola no puede albergar a un número indefinido de clientes. En este caso se dice que el sistema es de capacidad limitada. Existe un caso especial de la cola con límite de capacidad y es cuando este límite coincide con el número de servidores. Es decir, no se puede generar cola. Esta situación da lugar a la distribución de probabilidad conocida como Erlang en un sistema de copas M/M/C/C. Este modelo es válido porque las llamadas llegan siguiendo un proceso de Poisson, los tiempos de servicio son exponenciales, y hay un número fijo de tres líneas telefónicas ($C=3$) sin capacidad de espera adicional.

Nomenclatura

- λ : Número de llegadas por unidad de tiempo
- μ : Número de servicios por unidad de tiempo si el servidor está ocupado
- c : Número de servidores en paralelo
- L : Número medio de clientes en el sistema
- W : Tiempo medio de estancia de los clientes en el sistema
- P_c : probabilidad de que el sistema esté lleno
- r : número medio de clientes que se atienden por término medio

Probabilidad de que el sistema este lleno

La descripción teórica del modelo plantea que la probabilidad de que el sistema este lleno es de:

$$P_c = \frac{\frac{r^c}{c!}}{\sum_{i=0}^c \frac{r^i}{i!}}, \quad r = \frac{\lambda}{\mu}$$

Dado que el problema analizado contiene 2 intervalos de tiempo de interés, determinados por si en cierto momento es una hora punta o no, es necesario analizar la disponibilidad del sistema en ambos momentos del día.

Al sustituir las variables que describen el problema en las horas punta, se obtiene un valor de **8/38**, mientras que para los valores que describen el resto del tiempo se obtiene un valor de **1/79**.

Utilizando entonces la probabilidad condicional obtenemos que la probabilidad de que el sistema este lleno es:

$$P_c = P_{punta} \cdot P_{c.punta} + P_{nopunta} \cdot P_{c.nopunta} \quad (1)$$

Dando como resultado que dado una llamada entrante, el sistema estará ocupado con una probabilidad de aproximadamente **0.037**

Para contrastar este resultado con la simulación, se realiza un análisis de la misma durante una cantidad significativa de días determinada por la condición de parada de la misma. En cada uno de estos días se elige un momento aleatorio con el objetivo de comprobar la disponibilidad del sistema.

Luego de este análisis se pudo comprobar que la proporción de la cantidad de momentos elegidos donde el sistema estaba lleno con respecto al total de estos oscilaba entre **0.037** y **0.042**. Valores bastantes cercanos al resultado teóricamente correcto.

Cantidad media de clientes en el sistema

La descripción teórica del modelo plantea que la fórmula para determinar la media de clientes en el sistema es:

$$L = r \cdot (1 - P_c)$$

Para comprobar esto, se realiza un analisis en los 2 casos de interés anteriormente mencionados. Al sustituir las variables que describen el problema en las horas punta, se obtiene un valor para la media de **1.5789**.

Para comprobar este resultado en la simulación se realiza un análisis semejante al utilizado en la fórmula (1), seleccionando un momento aleatorio del intervalo del día que representa la hora punta y comprobando la capacidad del sistema.

Luego de promediar los resultados en cada uno de estos momentos se obtuvo valores alrededor de **1.53**. Siendo estos unos resultados muy próximos a los esperados.

Sustituyendo luego las variables que describen el problema en las horas ho punta, se obtiene un valor para la media de **0.49367089** Al realizar un procedimiento análogo al anterior, esta vez seleccionando momentos de tiempo fuera del horario pico, se obtuvo una media de **0.51**.

Estancia media de los clientes en el sistema

Para un contraste final con los resultados teóricos y con el fin de validar una elección correcta del modelo que describe el problema. Se comprueba la media de estancia de los clientes en el sistema mediante la fórmula:

$$W = \frac{L}{\lambda \cdot (1 - P_c)}$$

Se analiza en cada uno de los intervalos de interés por separado. Se puede observar entonces que tanto al sustituir por las variables que describen el problema en las horas punta, como al usar el resto, obtenemos un valor de **6**. El cual es un valor esperado debido a que este es el tiempo medio de atención de los clientes del sistema a analizar en cualquier momento del día.

Conclusiones

En general, se obtuvo un conjunto de resultados semejantes a los teóricamente correctos, por lo que la situación ha sido representada con cierto grado de similaridad al comportamiento esperado. Brindando esto una mayor seguridad con respecto a la toma de decisiones sobre la gestión de la central.