Fortgeschrittene Methoden der Datenauswertung

Mittelwert

Es ist nicht möglich aus n Messungen (x_1, ..., x_n) den „wahren Wert" der Messgröße x_w zu bestimmen.

Aber:
Der beste Schätzwert für x_w ist durch den Mittelwert (bzw. das arithmetische Mittel) aller Messungen gegeben:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Wenn alle systematischen Fehler vermieden werden, kommt das arithmetische Mittel mit wachsender Zahl n dem wahren Wert x_w immer näher:

$$x_w = \lim_{n\to\infty} \bar{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Standardabweichung

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsvariablen um ihren Mittelwert.

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Fehler des Mittelwerts

Der Fehler des Mittelwerts ist natürlich genauer als der Fehler einer Einzelmessung.

Fehler einer Einzelmessung S_E:

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Fehler des Mittelwerts S_M:

$$S_M = \frac{S_E}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Meßvorgang: Einzelergebnisse x_i $(i = 1 \ldots n)$

Fehler

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_g^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right)$$

Meßergebnis: $x = x_c \pm u$

Anzahl signifikanter Stellen

Geben Sie eine höchstens zwei signifikante Stellen an.

2 signifikante Stellen:
Ist die erste signifikante Stelle ein 1 oder 2, so werden zwei signifikante Stellen angegeben.

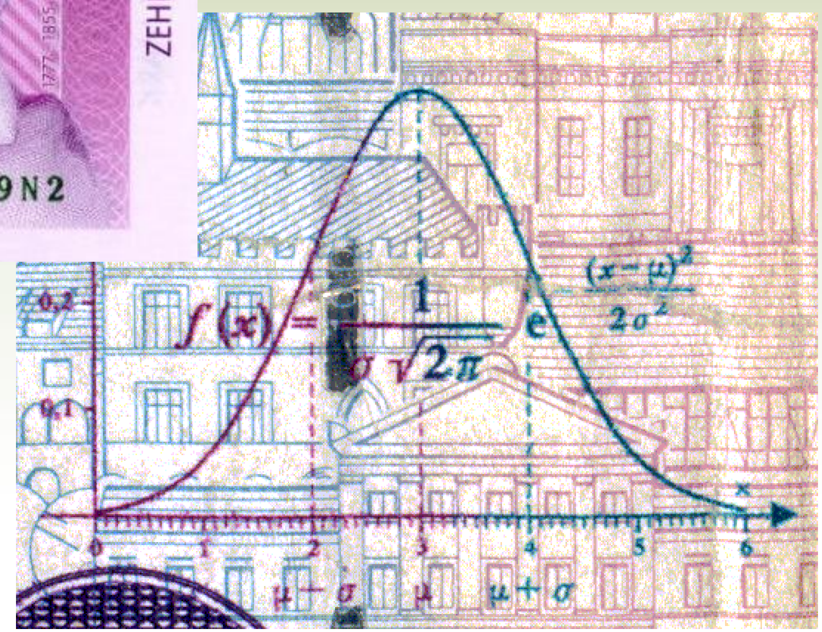
1.5725413 ± 0.1432 -> 1.57 ± 0.14

1 signifikante Stellen:
Ist die erste signifikante Stelle 3 oder größer, so wird eine signifikante Stelle angegeben.

1.5725413 ± 0.623542 -> 1.6 ± 0.6

Gaußverteilung

Die Gaußverteilung ist in der Physik von großer Bedeutung.



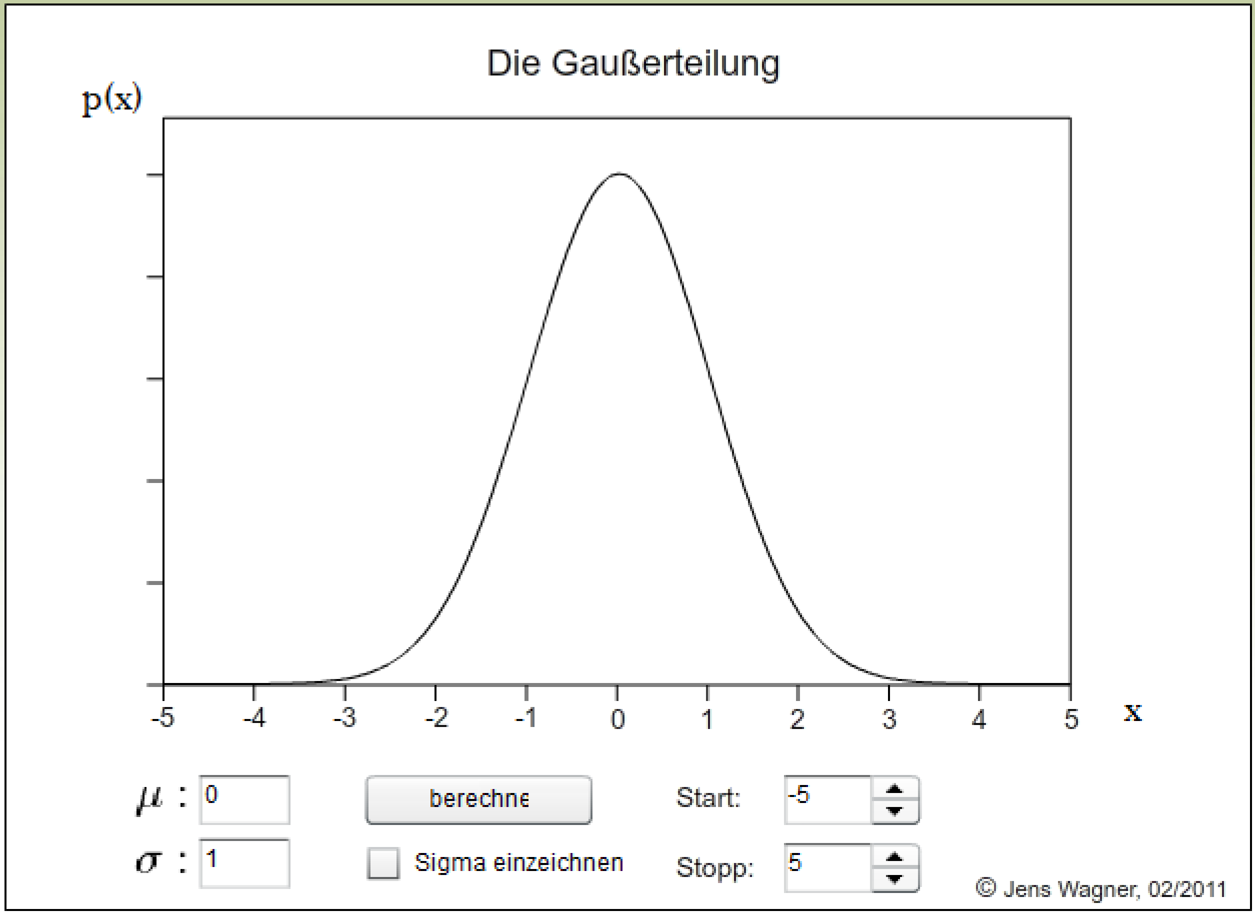
Die Gaußverteilung

Kontinuierliche Verteilung mit zwei Parametern: μ,σ

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

μ: Erwartungswert

σ: Breite der Verteilung



Gaußverteilung

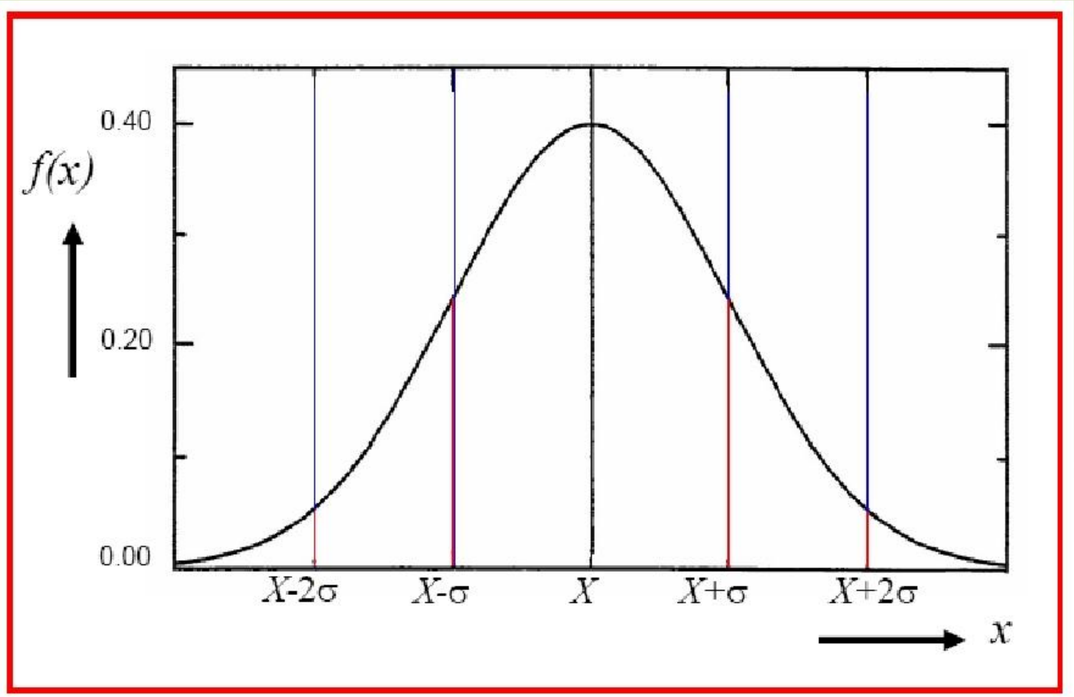
Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsgröße im Bereich [a,b] liegt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)dx \qquad \text{mit} \qquad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

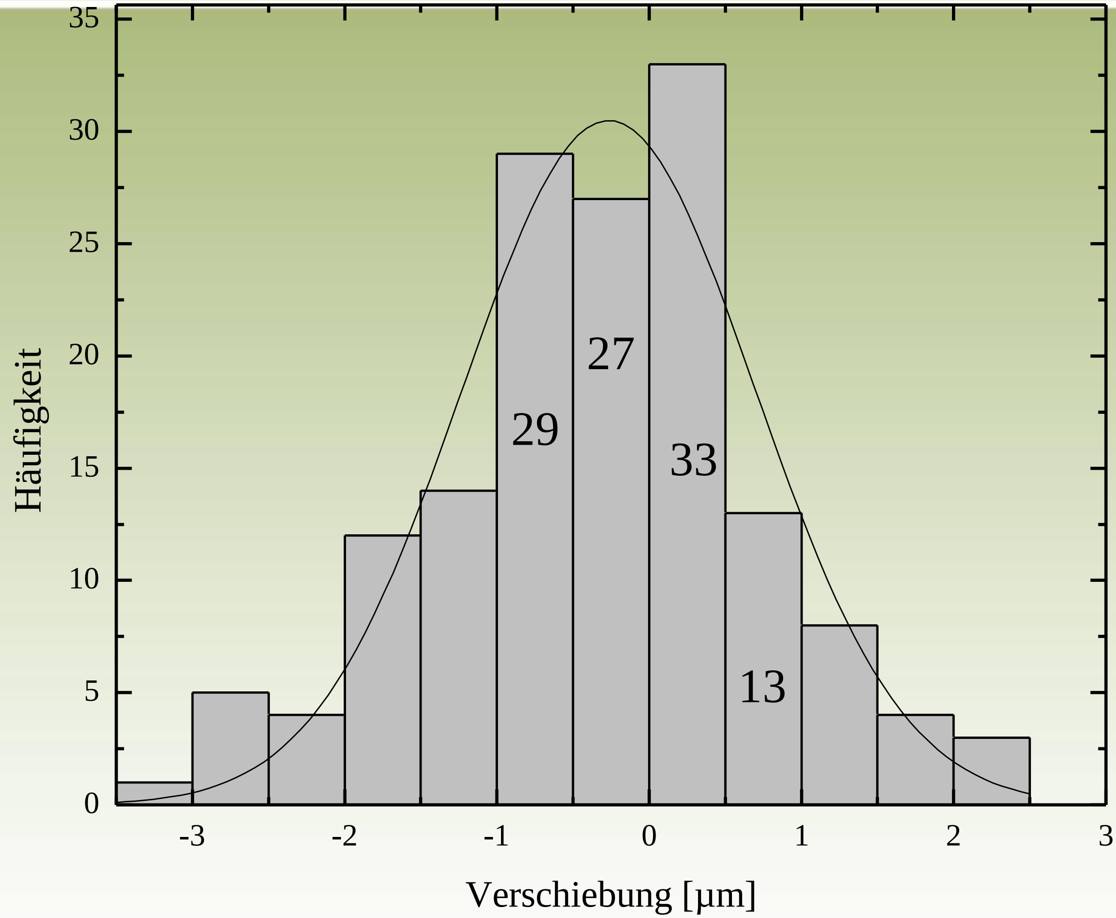
$$\int_{-\sigma}^{\sigma} P(x)\,dx = 68{,}3\%$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} P(x)\,dx = 95{,}5\%$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} P(x)\,dx = 99{,}7\%$$



Versuch: Brownsche Bewegung



Es wurde 153 mal die Position eines Partikels gemessen und daraus die Verschiebung berechnet

$(29+27+33+13)/153 = 102/153$

$=$ **66,6%**

1 *Spaltenstatistik (23.03.2009 14:58:40)*

Hinweise

Eingabedaten

Deskriptive Statistik

	N gesamt	Mittelwert	Standardabweichung	Summe	Minimum	Median	Maximum
dx	153	-0,35787	1,07774	-54,754	-3,388	-0,328	2,405

Gaußverteilung

Bei einer hinreichend großen Anzahl von Einzelmessungen, sind $\bar{x}$ und S_E „gute“ Schätzwerte für μ und σ.

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu \qquad \lim_{n\to\infty} S_E = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2} = \sigma$$

Messergebnis: $\bar{x} \pm S_M$

Interpretation:

Als beste Schätzung für den „wahren Wert“ wurde bei einer Messreihe der Wert $\bar{x}$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall $[\bar{x} - S_M, \bar{x} + S_M]$.

Kumulative Gaußverteilung

Die Größe h männlicher Studenten sei gaußverteilt mit h= (1,79 ± 0,11) m. Wie viel Prozent der Studenten haben eine Größe zwischen 1.7 m und 1.9 m?

Obere Grenze:
(1,9-1,79) m/0,11 m= 1

Untere Grenze:
(1,7-1,79)m/0,11 m= -0,8

Die Poissonverteilung

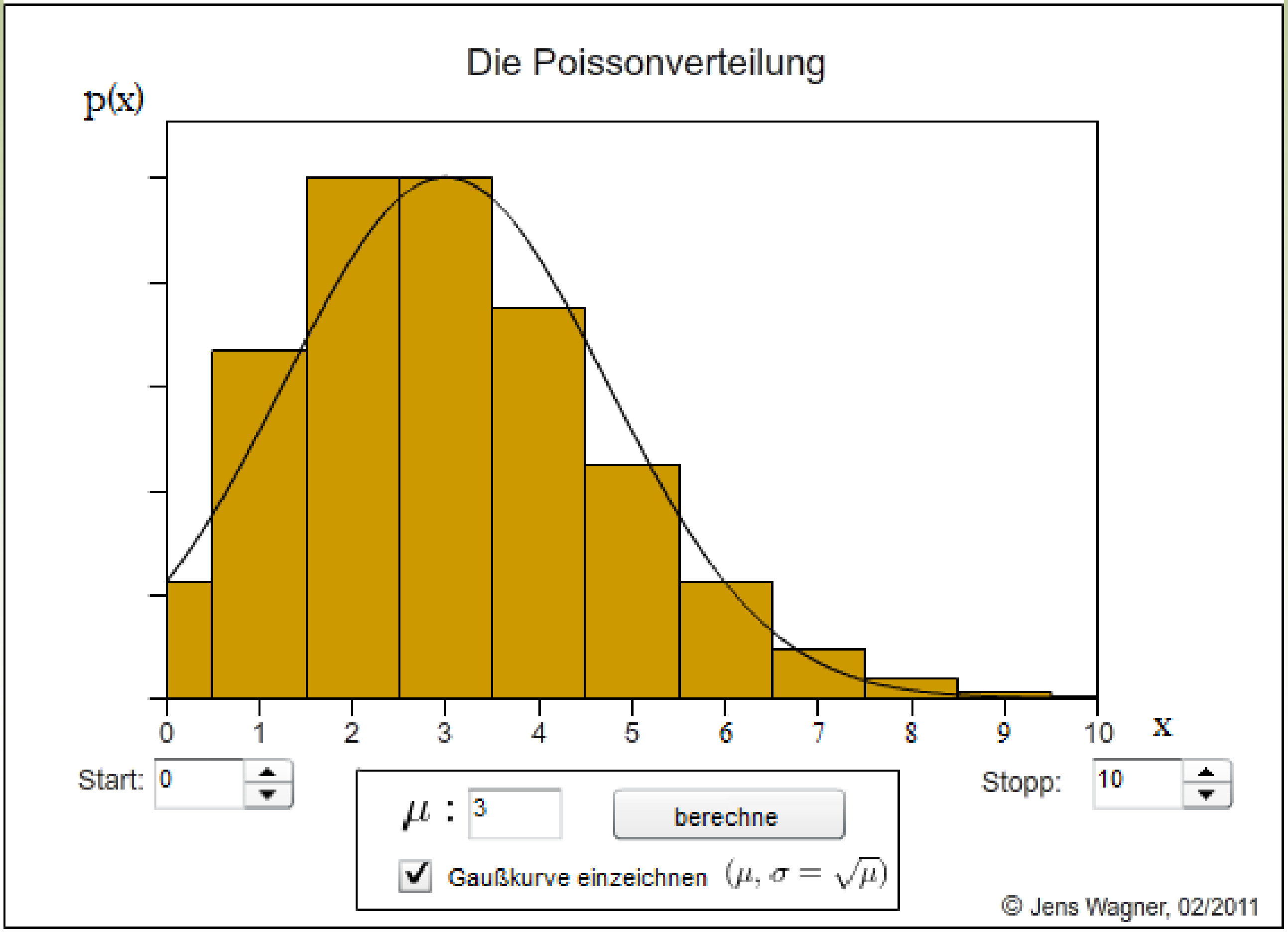
In Experimenten werden häufig Messgrößen durch die Zählung von Ereignissen bestimmt:

- Zerfallsrate eines radioaktiven Präparats (Aktivität)
- Wirkungsquerschnitt aus der Zahl der gestreuten Teilchen in einem Detektor
- Zahl der Photonen/Zeit in einem Photovervielfacher

Auch solche Zählexperimente sind statistischen Schwankungen unterworfen, die durch die Poissonverteilung wiedergegeben wird.

Die Poissonverteilung

$$p_\lambda(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu}$$ Diskrete Verteilung mit nur einem Parameter μ



Erwartungswert: μ

Varianz: μ

Die Poissonverteilung

Für große Werte von μ kann die Poissonverteilung durch eine Gaussverteilung mit Mittelwert μ und Breite $\sigma = \sqrt{\mu}$ genähert werden.

Der statistische Fehler einer grosse Ereigniszahl N ist gaußverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = \sqrt{N}$

Die Poissonverteilung

Beispiel: Gemessen wird die Aktivität (Zahl der Zerfälle/s) eines radioaktiven Präparats:

In 1 Minute wurden N=105 Zerfälle gemessen. Wie gross ist die Aktivität?

$A = 105/60s = 1{,}75$ Bequerel
$\Delta A = \sqrt{105}/60s = 0{,}17$ Bequerel
$\rightarrow \quad A = (1{,}75 \pm 0{,}17)$ Bequerel

Beispiel: Wieviele Zerfälle müssten gemessen werden um A auf 1 % genau zu messen?

$\rightarrow \Delta N/N = \sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N} = 0{,}01 \quad \rightarrow N = 10000$

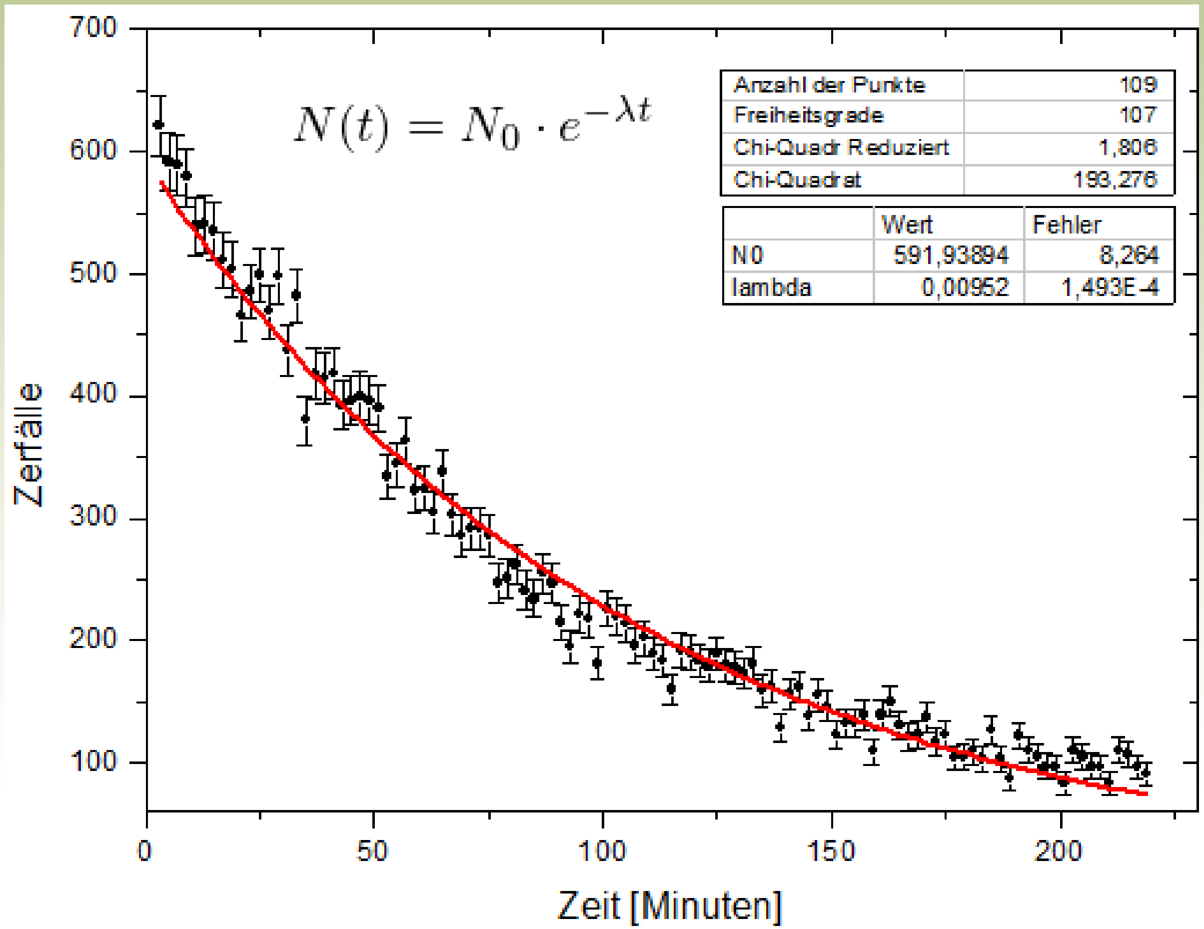
Teil 2: Anpassung von Funktionen an Messdaten

Warum werden Modelle (Funktionen) an Daten angepasst ?

- Bestimmung der Funktionsparameter. In diesen steckt die Physik!
- Das zugrunde liegende physikalische Modell ist nicht gefestigt. Die Anpassung ist ein Test einer theoretischen Hypothese oder es soll eine Entscheidung zwischen verschiedenen Modellen liefern.

Anpassung einer Funktion an Daten

Die Physik steckt in den Parametern. Wie können diese aus den Daten berechnet werden?



Test einer theoretischen Vorhersage

Modell 1: Gluon hat Spin 0

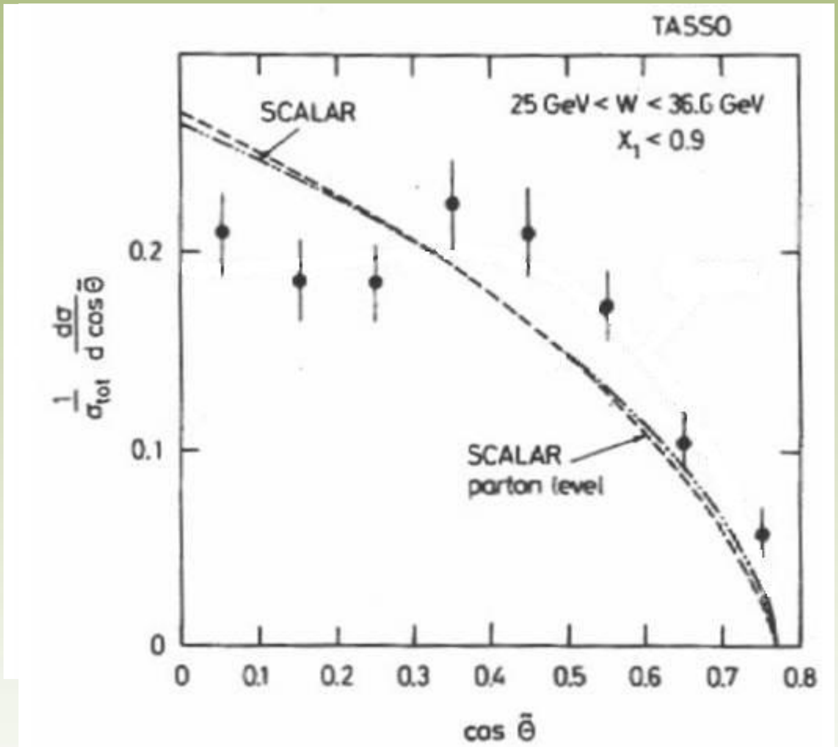
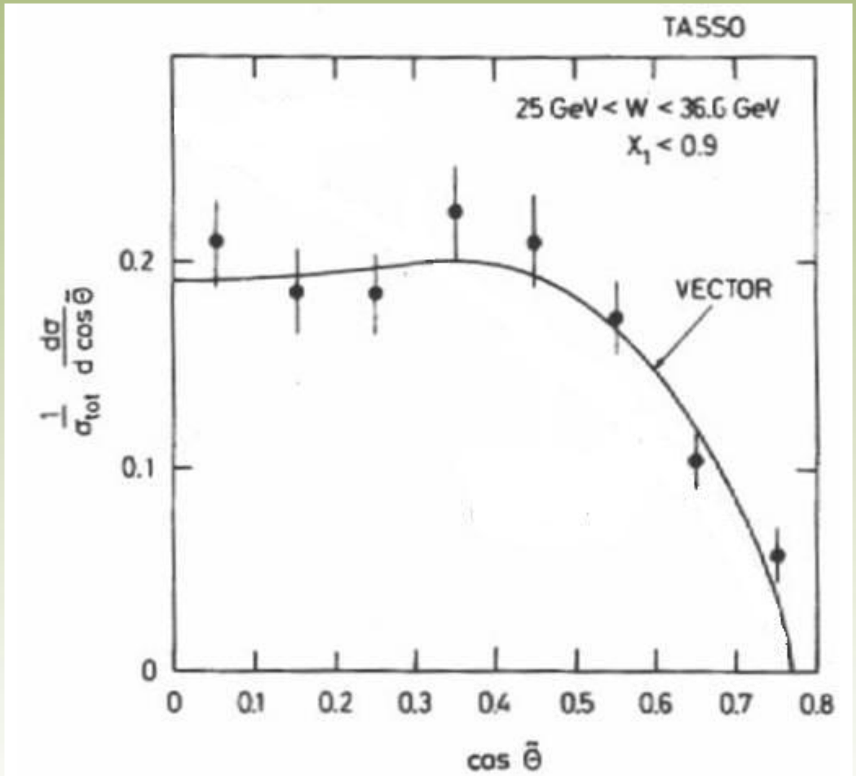


Abb.: Welchen Spin hat das Gluon?

Modell 2: Gluon hat Spin 1

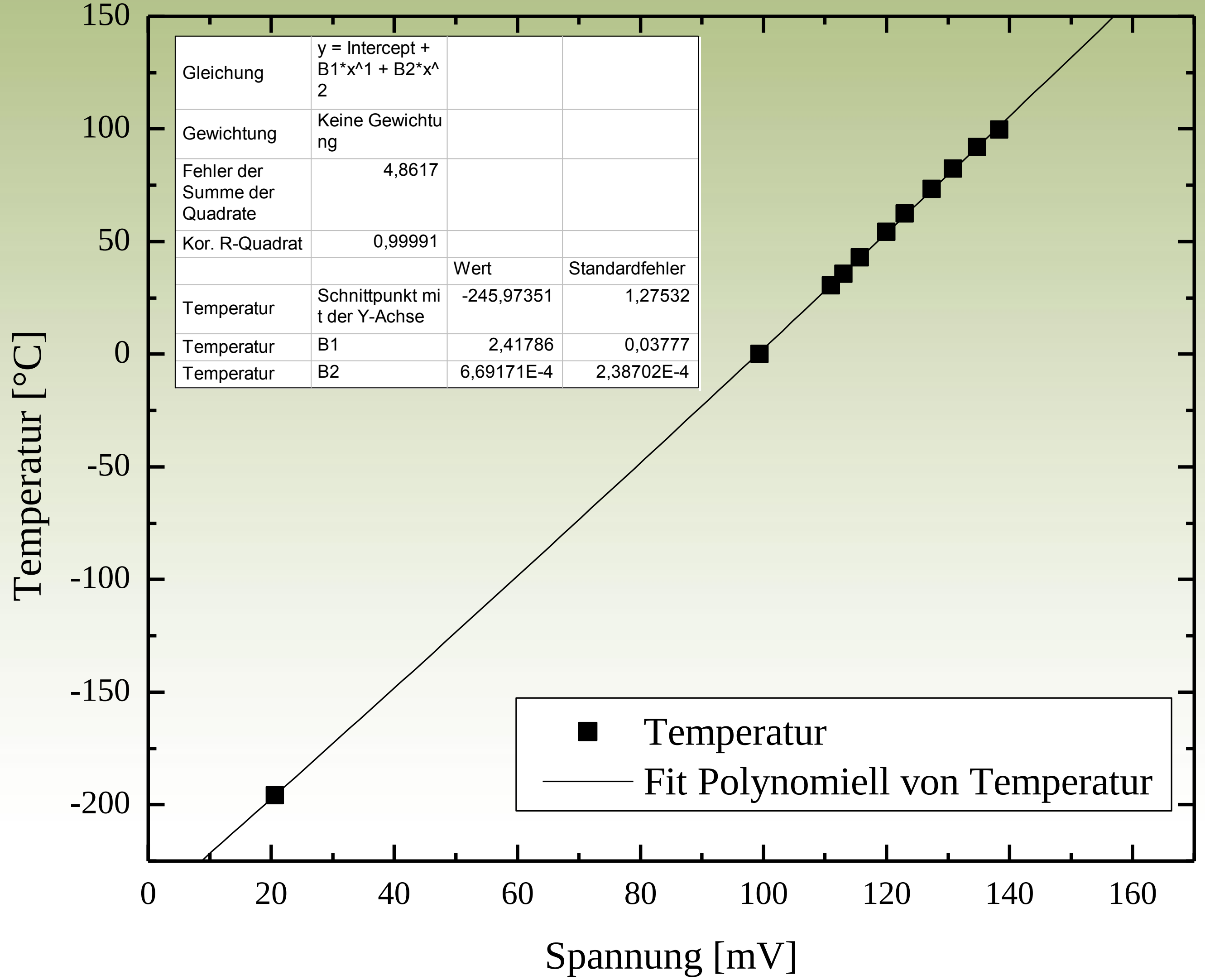


Ist mit dieser Messung der Spin S=0 ausgeschlossen?

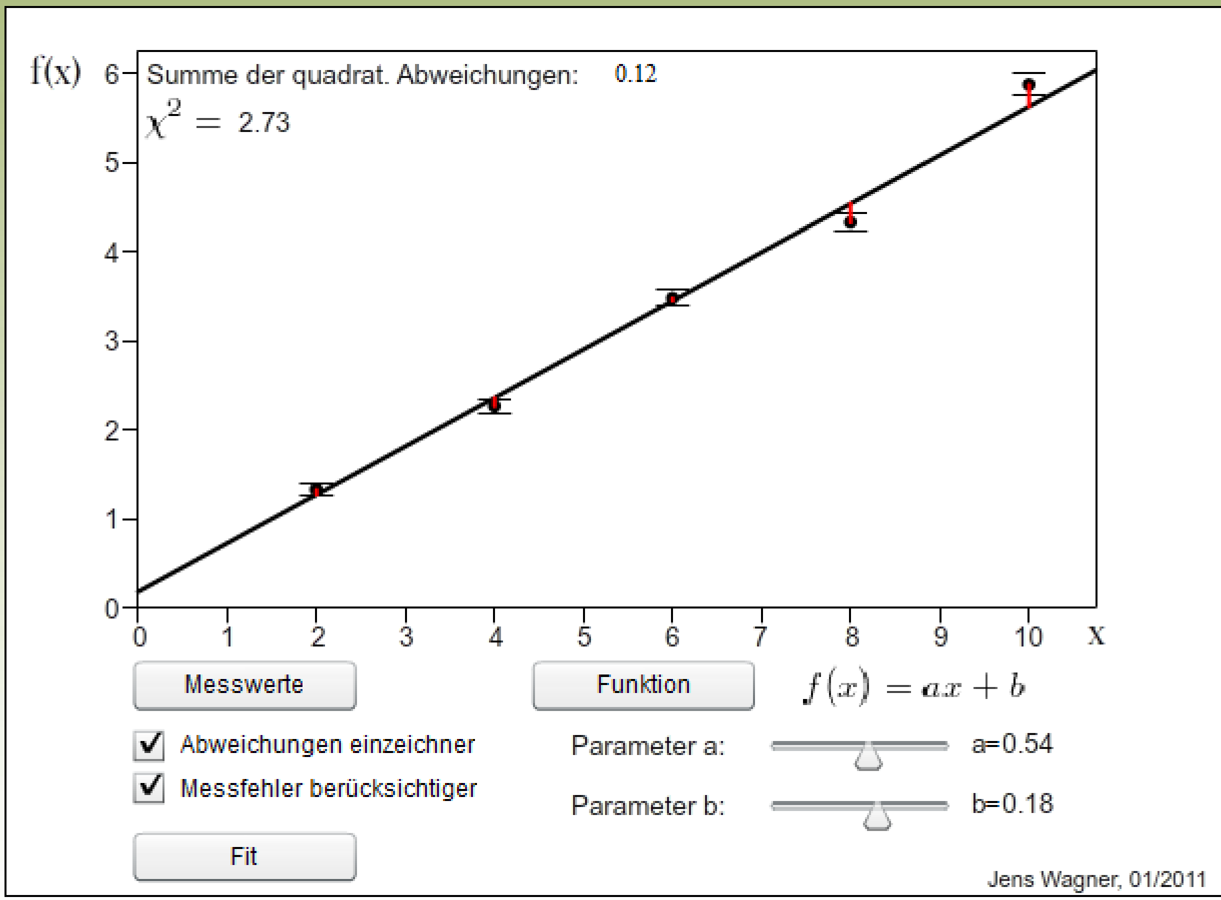
Wie gut passt Spin1 zu den Messungen?

Parametrisierung von Messungen durch ein Polynom

Eichung eines PT100 Thermometers



Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (χ^2)



Modell: $f(x) = a \cdot x + b$

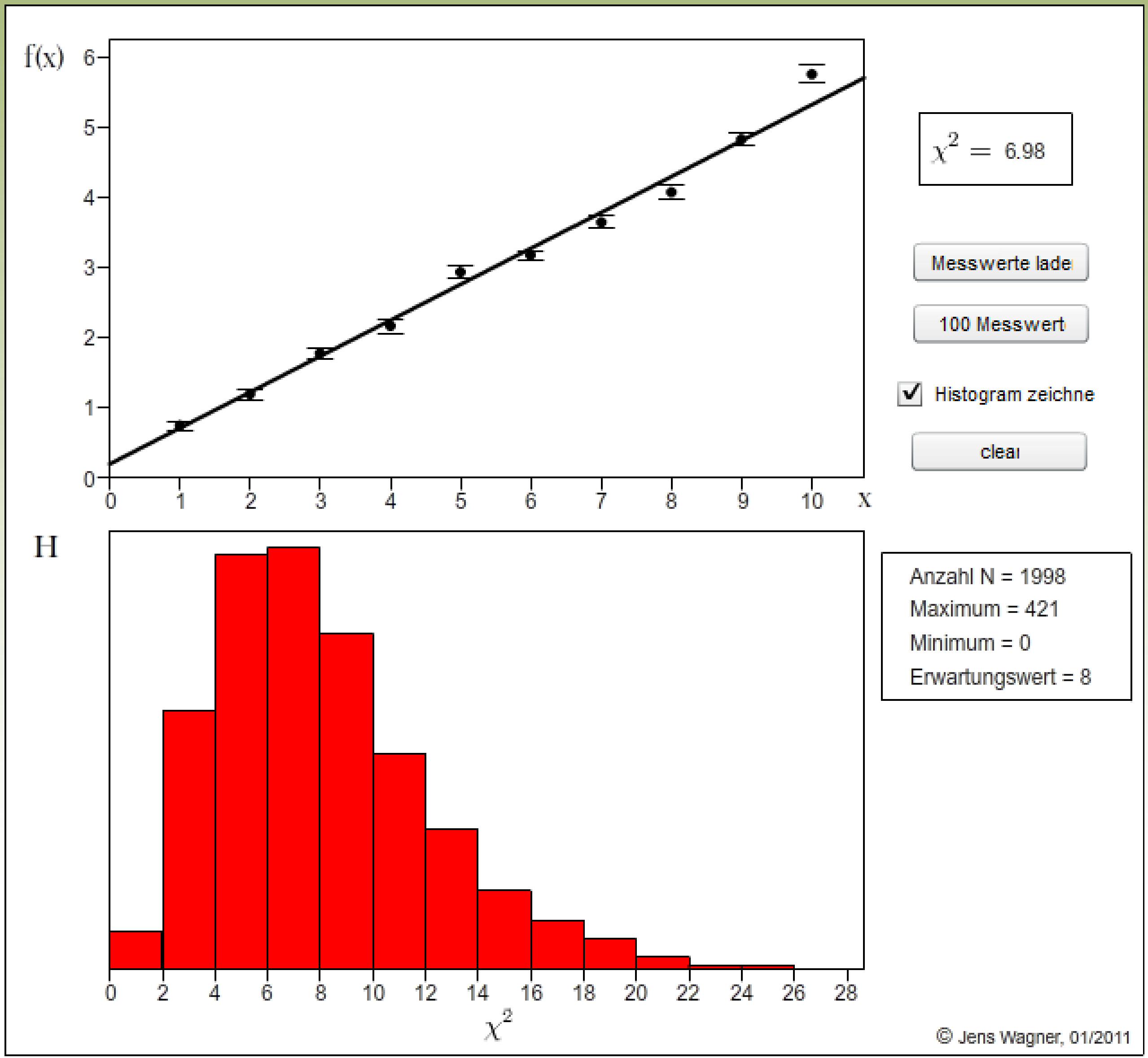
Kriterium der Anpassung:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 = \text{Min.}$$

Berücksichtigung der Messgenauigkeiten:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i} \right)^2 = \text{Min.}$$

Die χ^2 -Verteilung



Die χ^2 -Verteilung

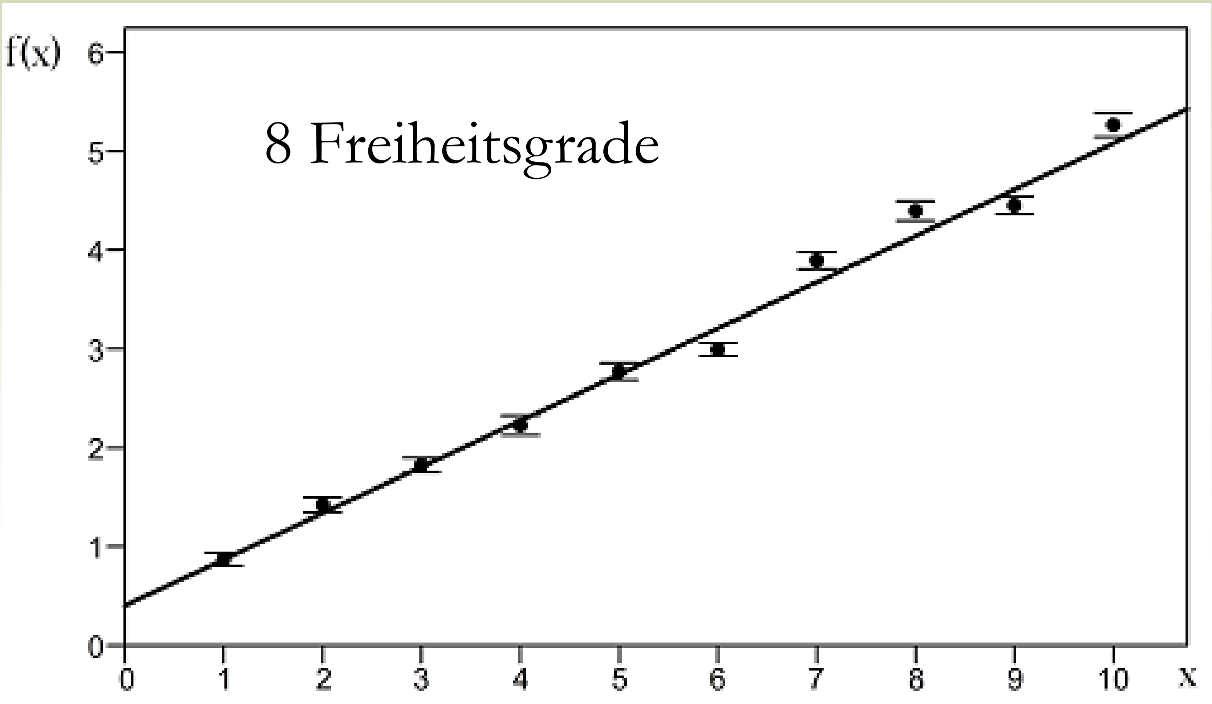
Die Chi-Quadrat-Verteilung ist die Verteilung der Summe von stochastisch unabhängigen, quadrierten, standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Die Verteilung hängt nur von einem Parameter f ab: Der Zahl der Freiheitsgrade f.

Der Freiheitsgrad eines Systems entspricht der Anzahl der frei variierbaren Größen, die das System in einem genau definierten Zustand beschreiben.

Bsp.: Das „System“: *Die Summe dreier Zahlen ergibt acht* besitzt 2 Freiheitsgrade.

Die χ^2 -Verteilung

Wie viele Freiheitsgrade besitzt die $\chi 2$ -Verteilung unseres Beispiels ?
Es liegen 10 Messpunkte vor. Die Anpassungsfunktion besitzt 2 Parameter. Durch die Berechnung der Parameter sind zwei Werte nicht mehr frei variierbar. Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt daher der Zahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter.



Eigenschaften der χ^2 -Verteilung

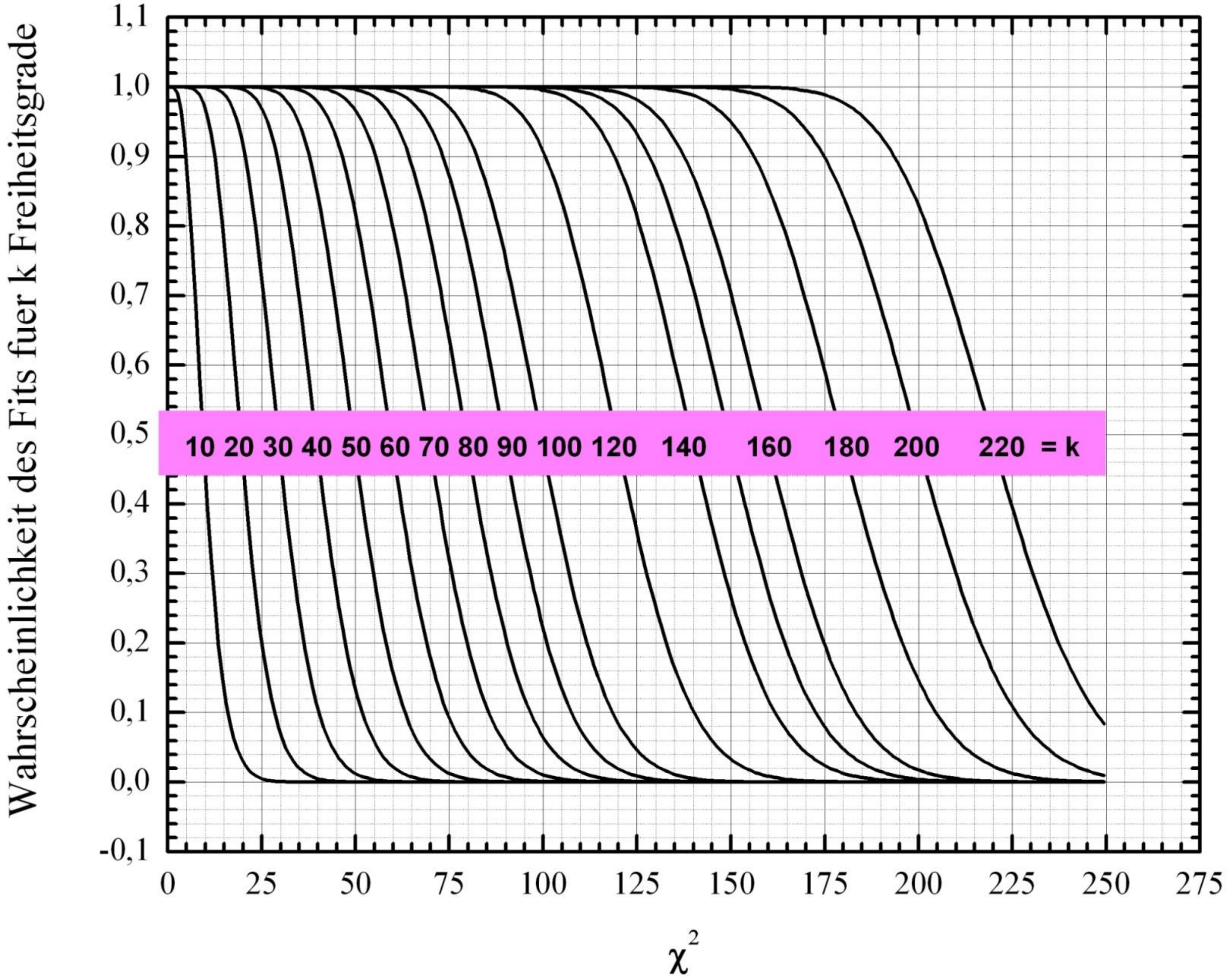
Die Wahrscheinlichkeit einen Wert größer oder gleich einem χ^2 -Wert zu erhalten, ergibt sich durch das Integral:

$$P(x \geq \chi^2) = \frac{1}{P_0} \int_{\chi^2}^{\infty} p_f(x) dx.$$

Der Wert von χ^2 kann nicht beliebig groß werden. Als Faustregel zur Abschätzung der Güte eines Fits gilt:

$$\chi^2_{red.} = \frac{\chi^2}{f} \approx 1.$$

Wahrscheinlichkeitsrechner



Wahrscheinlichkeit des Fits fuer k Freiheitsgrade
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-0,1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 120 140 160 180 200 220 = k
0 25 50 75 100 125 150 175 200 225 250 275
χ2

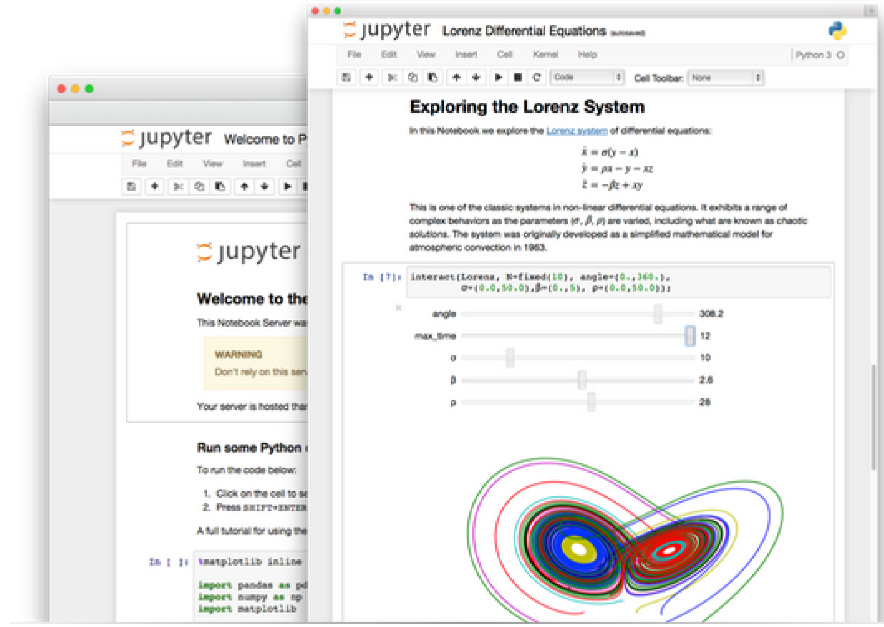
Vorgehensweise

- Modell aufstellen: Funktion f(x; a,b,c,…)
- Schätze die Parameter a, b, c,… , so dass die Funktion die Datenpunkte möglichst gut beschreibt.
- Berechne χ^2
- Finde den Parametersatz a, b, c,.. für den χ^2 minimal wird.
  (Levenberg-Marquardt Algorithmus).
- **Python**

http://www.jupyter.org/

jupyter INSTALL ABOUT RESOURCES DOCUMENTATION NBVIEWER WIDGETS BLOG DONATE

Jupyter Notebook



The Jupyter Notebook is a web application that allows you to create and share documents that contain live code, equations, visualizations and explanatory text. Uses include: data cleaning and transformation, numerical simulation, statistical modeling, machine learning and much more.

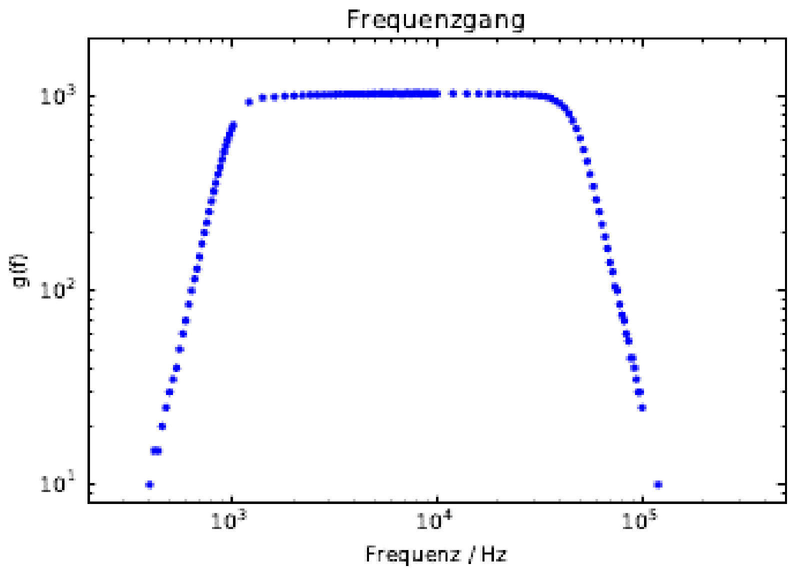


Abbildung 7: *Frequenzgang mit eingeschränkten Start und Stopp Bereich.*

```
from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))
```

Wählen Sie folgende Startwerte p0 für die Fitparameter und führen Sie den Fit durch.

- Verstärkung V: 1000
- untere Grenzfrequenz W1: 1000
- obere Grenzfrequenz W2: 50000
- Filterordnung n1, n2: 5.

```
p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[15:-43], g[15:-43] ,p0)
```

Achten Sie darauf, dass Sie für die Grenzen der Arrays f, g Ihre Werte eintragen. Die optimalen Parameter befinden sich in dem Array popt. pcov ist die Kovarianzmatrix auf deren Hauptdiagonale sich die Varianzen der Parameter befinden.

```
popt[0]
```

entspricht der Verstärkung und

```
np.sqrt(pcov[0,0])
```

dem 1σ- Fehler der Verstärkung. Zeichnen Sie die Funktion mit in das Diagramm ein und speichern Sie es (Abbildung 8).

```
plt.loglog(f[15:-43],g[15:-43], linestyle='None', marker='.',
           label='Messdaten')
plt.loglog(f, fit_func(f, *popt), label='Fit')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
plt.legend(loc='best')
plt.savefig('figures/Frequenzgang.pdf',format='pdf')
```

VIII.3 Numerische Integration

Aus dem gemessenen Frequenzgang $g(f)$ ist das Integral

$$B = \int_0^\infty g(f)^2\, df, \qquad (18)$$

zu berechnen:

```
import scipy.integrate as integrate

def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2

B=integrate.quad(fit_func_square, f[15], f[-43], args=tuple(popt))
print('Das Integral betraegt: {value:.4e}'.format(value=B[0]))
```

Achten Sie wieder darauf, dass Sie für die Grenzen von f Ihre Werte eintragen.

Einführungskurs

http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/Python.php

PHYSIKALISCHES
INSTITUT

- Anfänger-Praktikum
- Anmeldung
- Persönliche Statusseiten
- Passwort vergessen?

PI > Einrichtungen > AP

Python Einführungskurs

Im Physikalischen Anfängerpraktikum überzeugen Sie sich nicht nur davon, dass die Physik aus der Vo
Einführung in die wissenschaftliche Methodik. Zur Auswertung der Versuche werden Sie Software zur n
verwenden müssen und erlernen dabei ihre Verwendung in der Wissenschaft.

Ihnen ist freigestellt, welche Software Sie für die Auswertungen verwenden. Da Programmierung in der
Praktikum zum Erlernen einer Programmiersprache zu nutzen. Dazu haben wir für Sie einen Online-Ein
konzipiert und bieten in den Versuchsanleitungen immer wieder Hinweise, wie Sie ein Problem mit Pytho

Der Python-Einführungskurs umfasst sechs Lektionen, in denen Sie die Grundlagen der Programmieru
Unter folgendem Link starten Sie den Kurs in interaktiven *Jupyter Notebooks*. Wenn Sie die gleiche UR
der Sie aufgehört haben:

- **Interaktive Kursmaterialien starten**

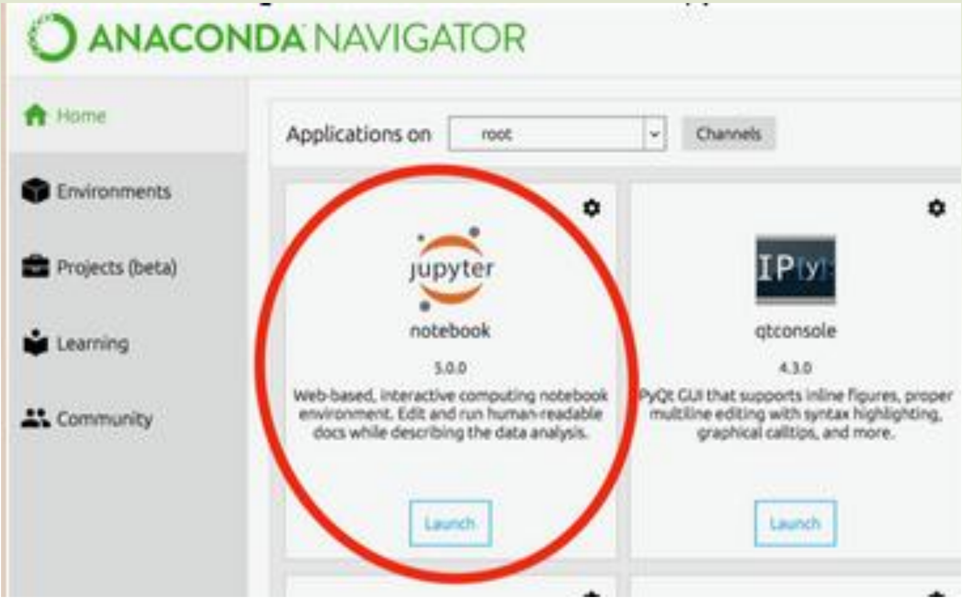
Jupyter Notebooks eignen sich hervorragend für die Auswertung der Versuche in Python. Wie Sie dies
und auch unter folgendem Link zu finden:

- Python und Jupyter Notebook im Praktikum verwenden

Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge zum Python-Einführungskurs oder zur Verwendung von Py
dankbar. Melden Sie sich dazu einfach bei Nils Fischer (Konzeption und Implementierung des Kurses)
als Open Source auf GitHub zur Verfügung.

Python/Jupyter installieren

- Anaconda herunterladen (https://www.continuum.io/downloads) und installieren. Dies installiert auch die graphische Benutzeroberfläche Anaconda Navigator.
- Den Python Kurs herunterladen (https://github.com/uhd-pap/course-deploy/archive/master.zip), die Zip Datei entpacken und den Ordner in den Benutzerordner legen.
- Anaconda Navigator öffnen und damit das Jupyter Notebook starten.
- Damit öffnet sich ein Browser. Zum Python Kurs navigieren und die index.ipynb Datei öffnen.

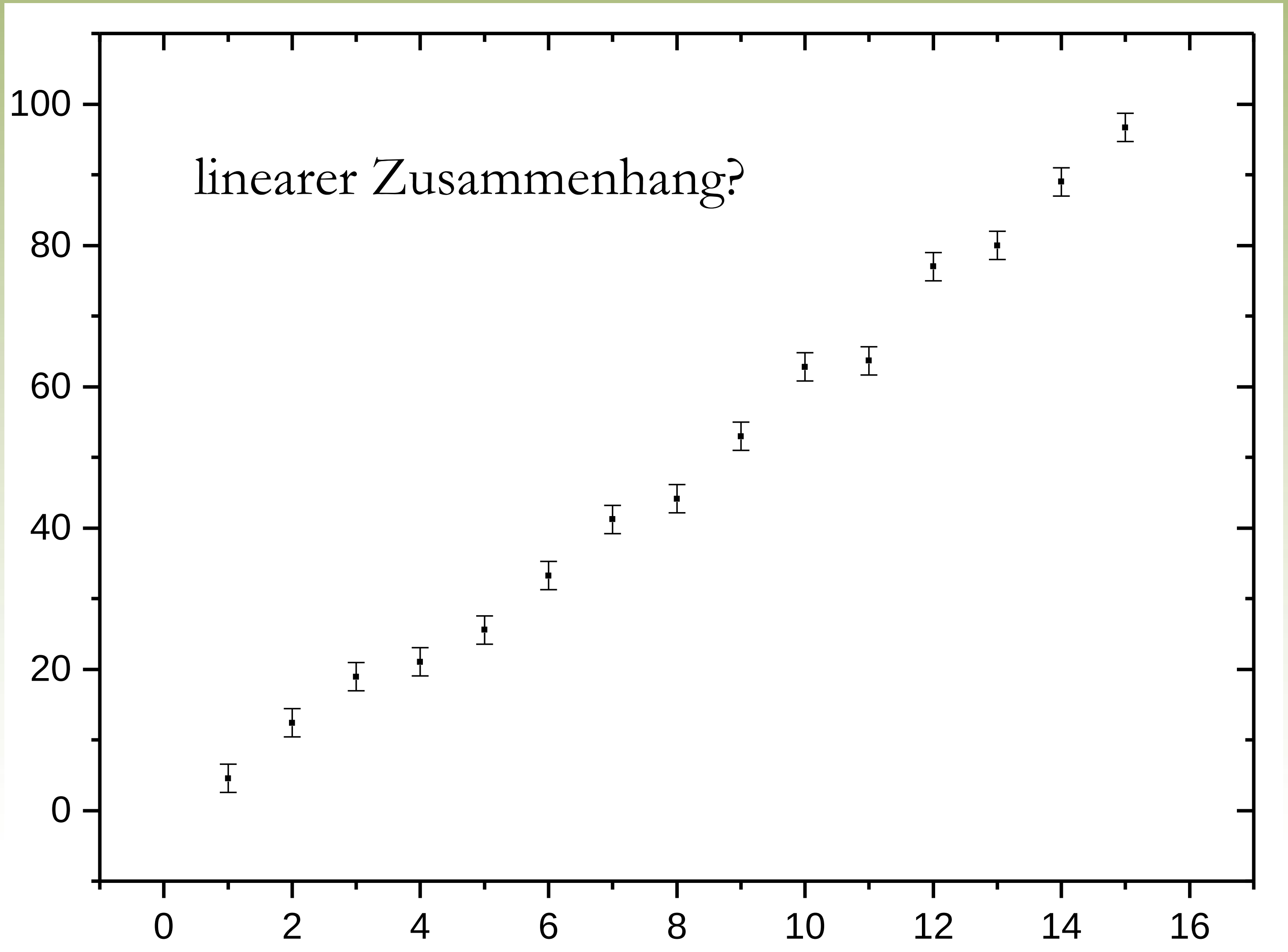


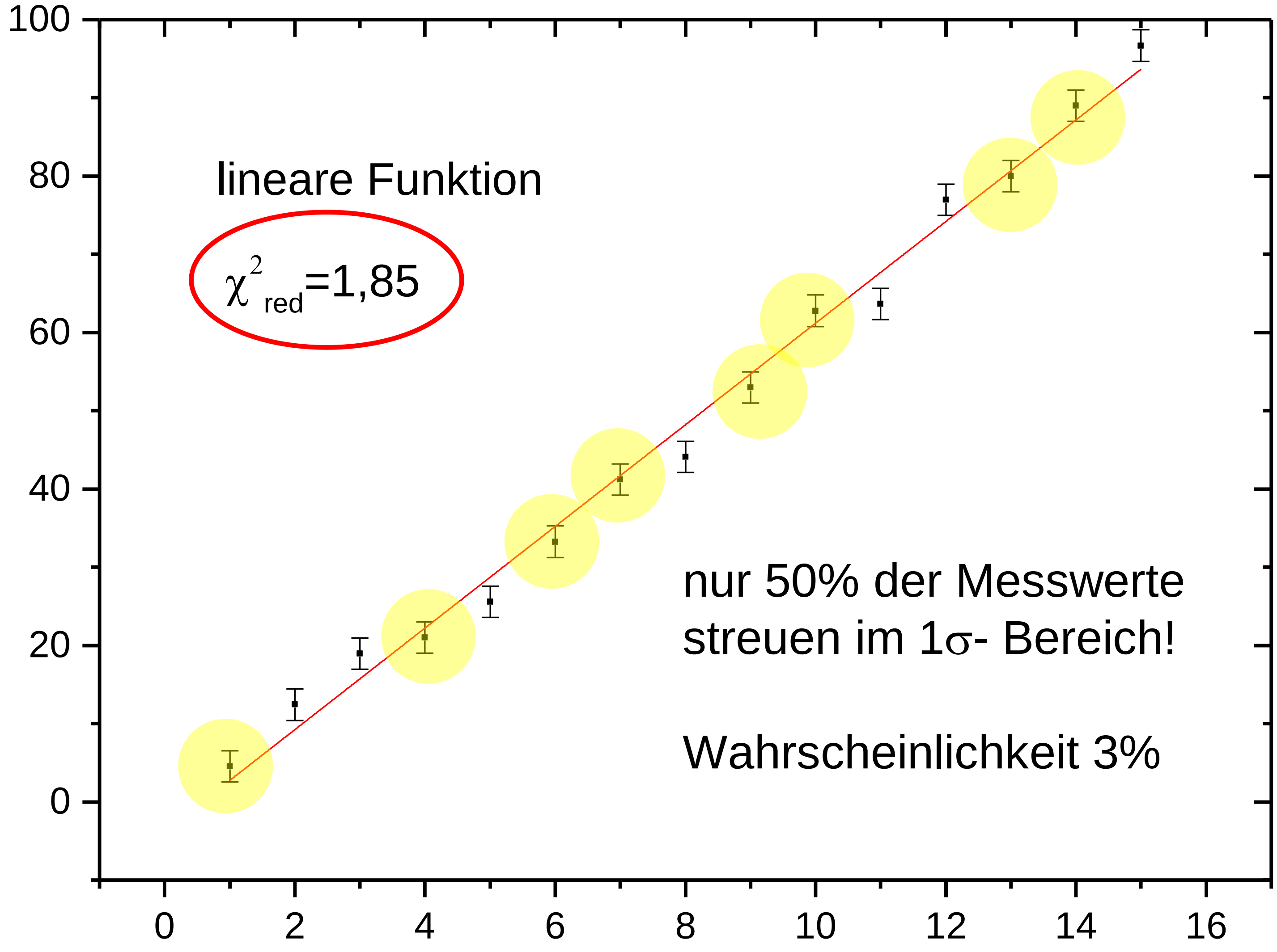
Jupyter per Remotezugang

physik1.kip.uni-heidelberg.de
physik2.kip.uni-heidelberg.de
…
physik5.kip.uni-heidelberg.de

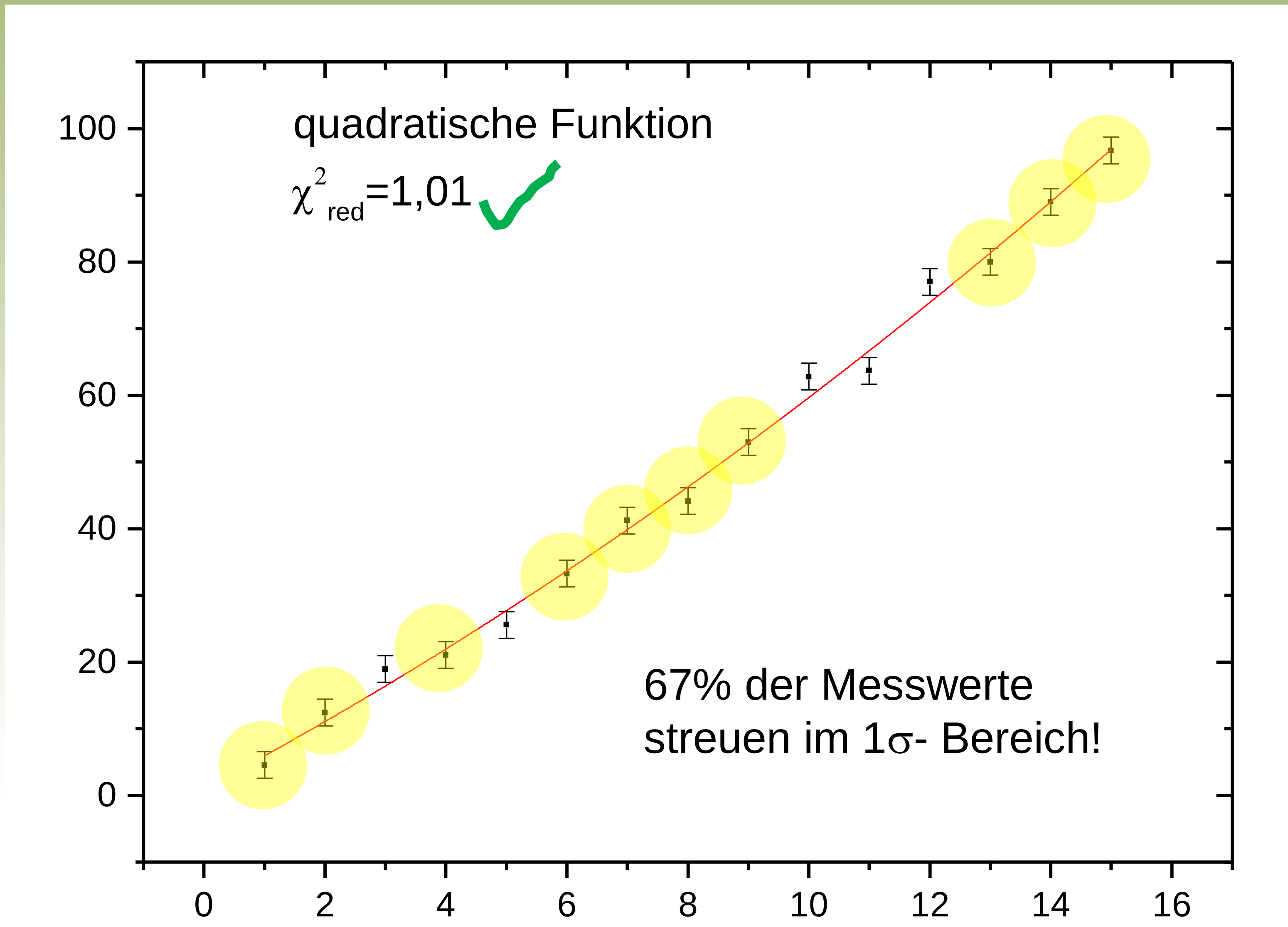
Einloggen mit URZ-Kennung

Beispiel

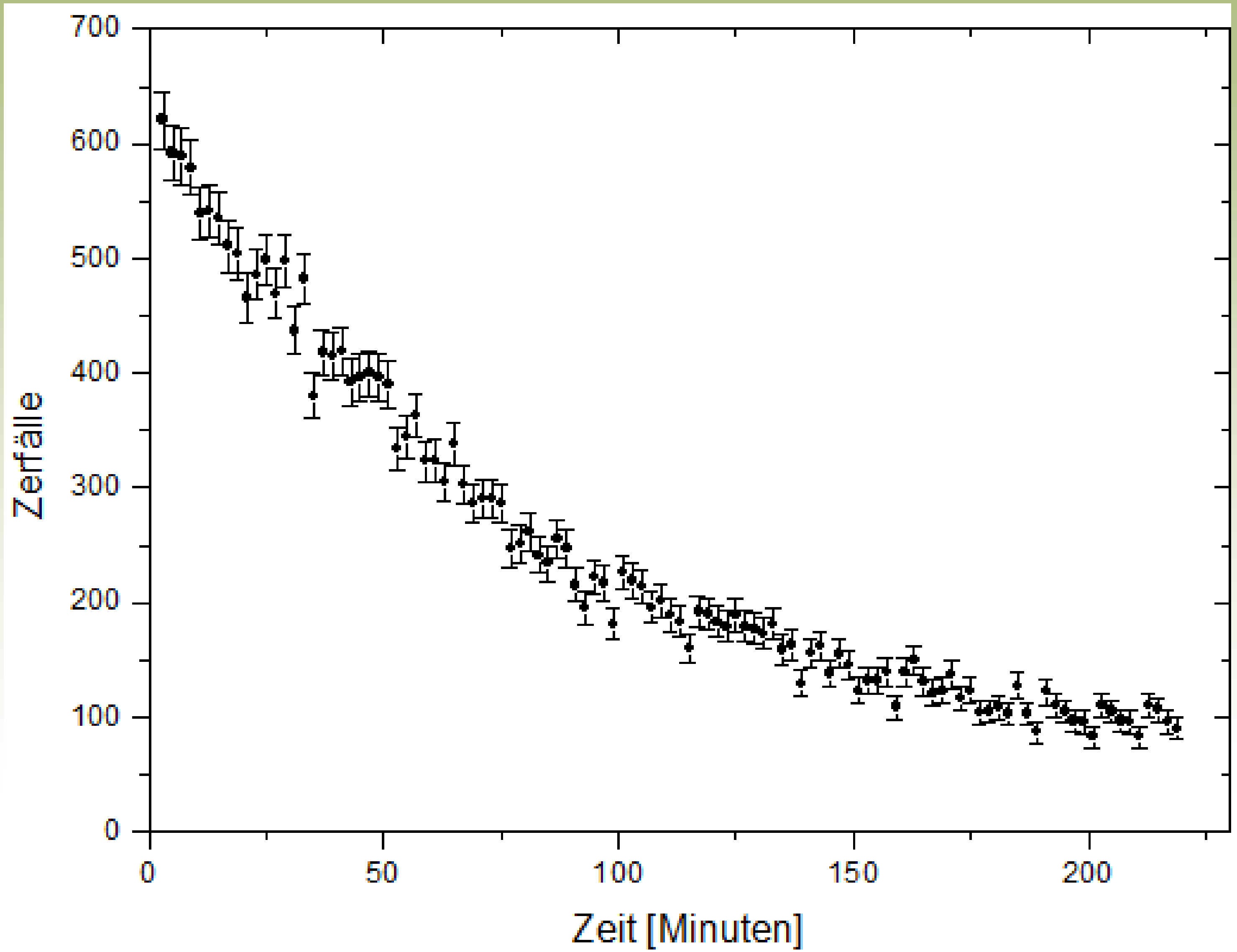




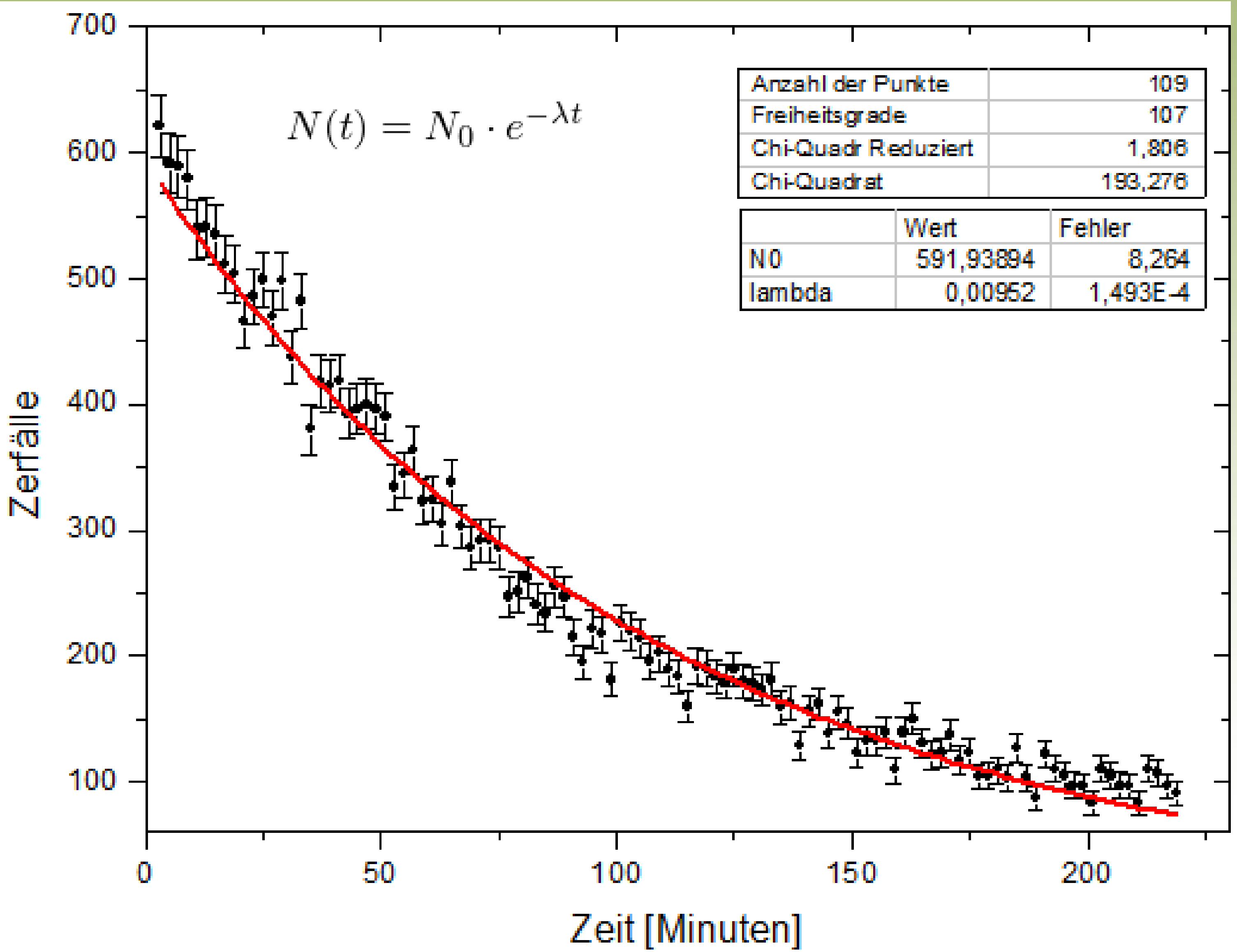
lineare Funktion
χ²red=1,85
nur 50% der Messwerte
streuen im 1σ- Bereich!
Wahrscheinlichkeit 3%
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16


quadratische Funktion
χ^2_{red}=1,01
67% der Messwerte
streuen im 1σ- Bereich!
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16

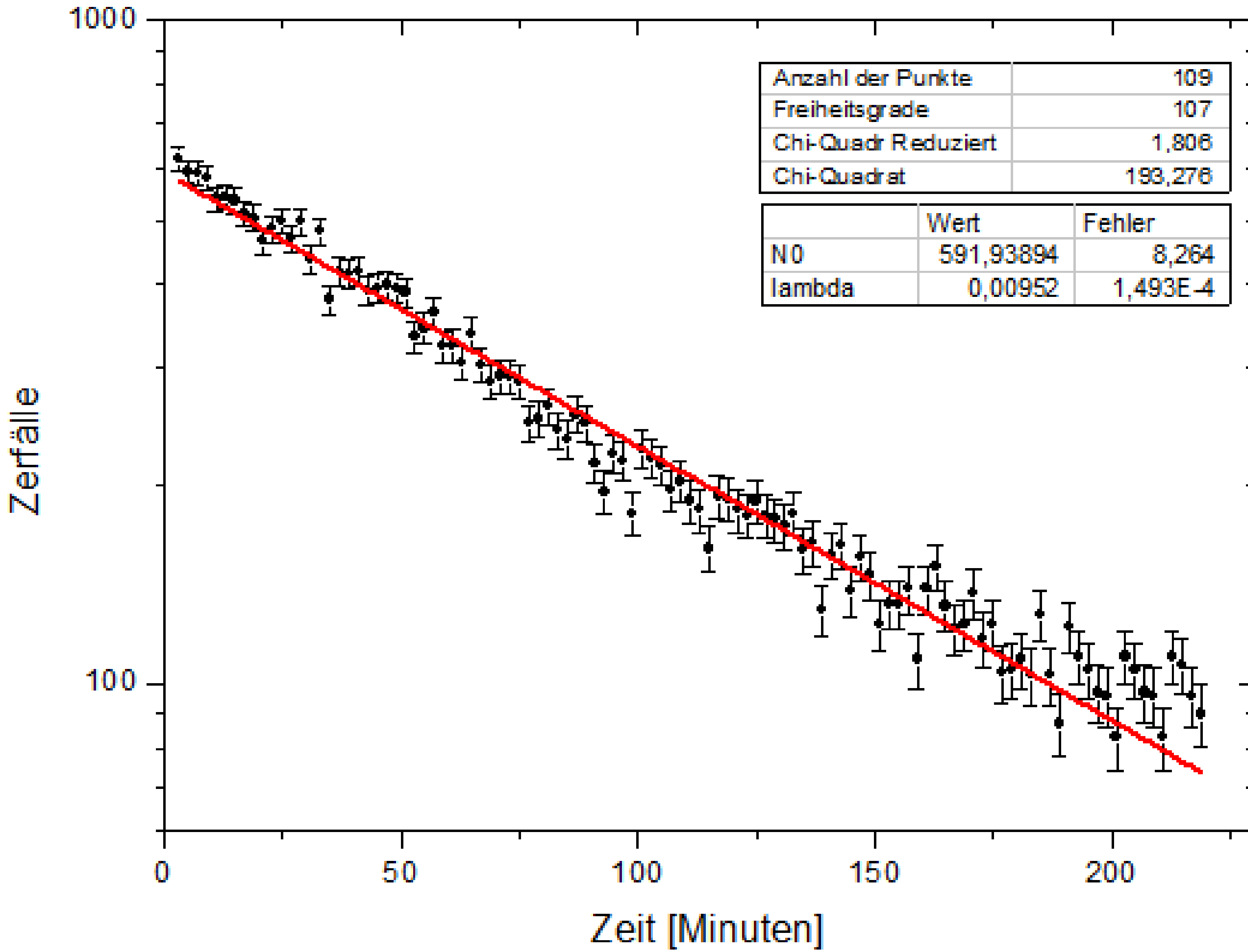
Beispiel Praktikumsversuch



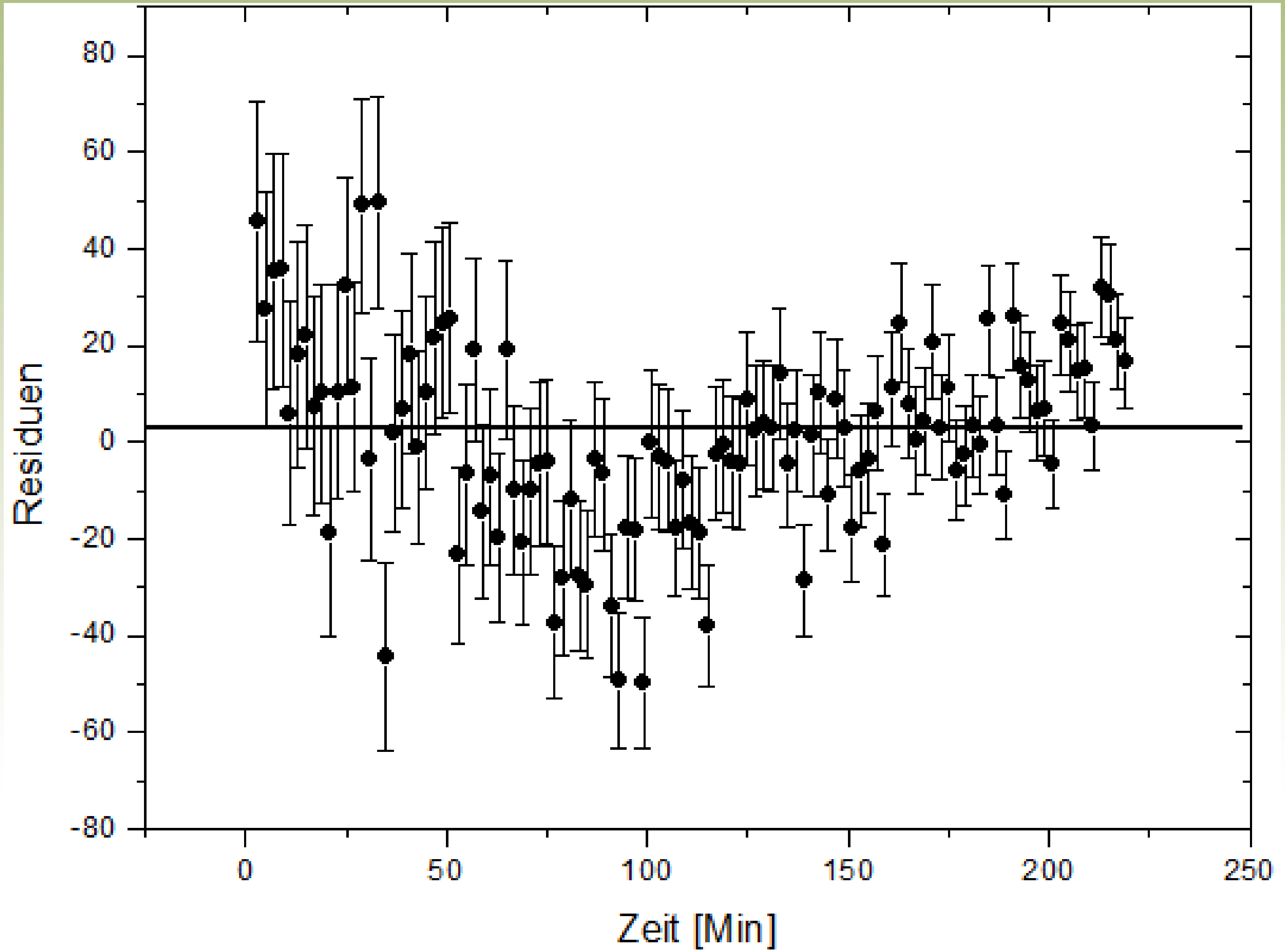
Beispiel einer Modellanpassung



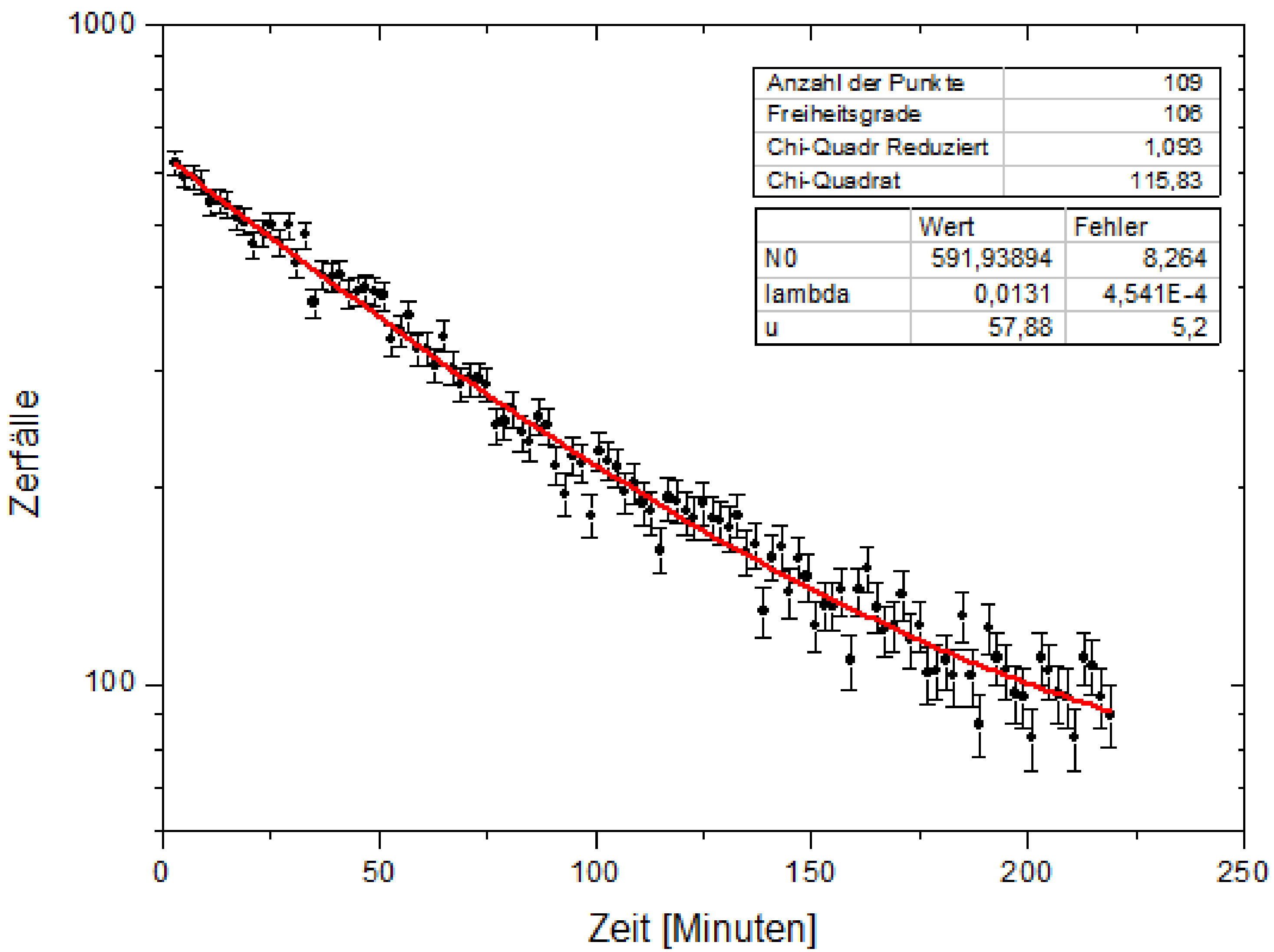
Beispiel einer Modellanpassung



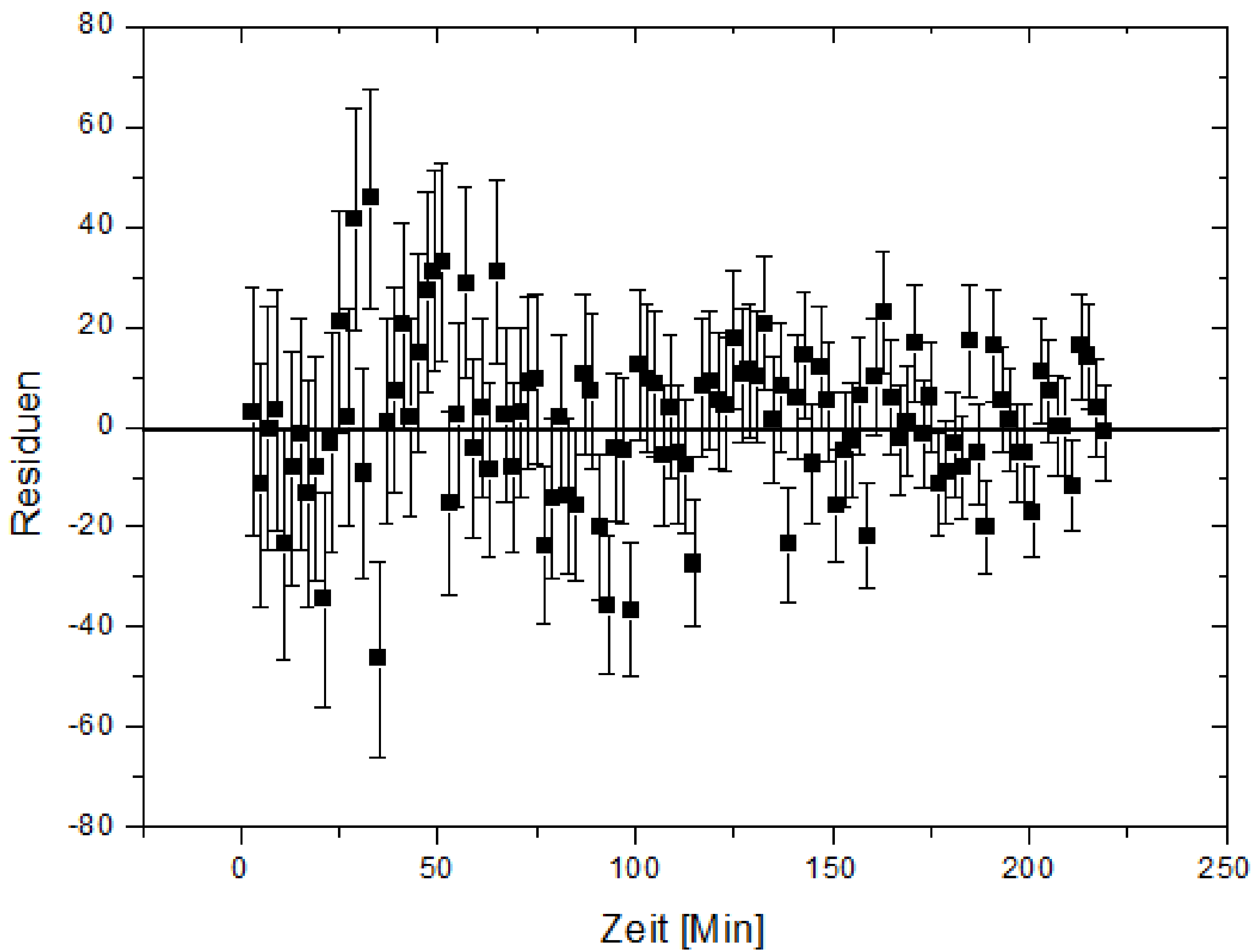
Beispiel einer Modellanpassung



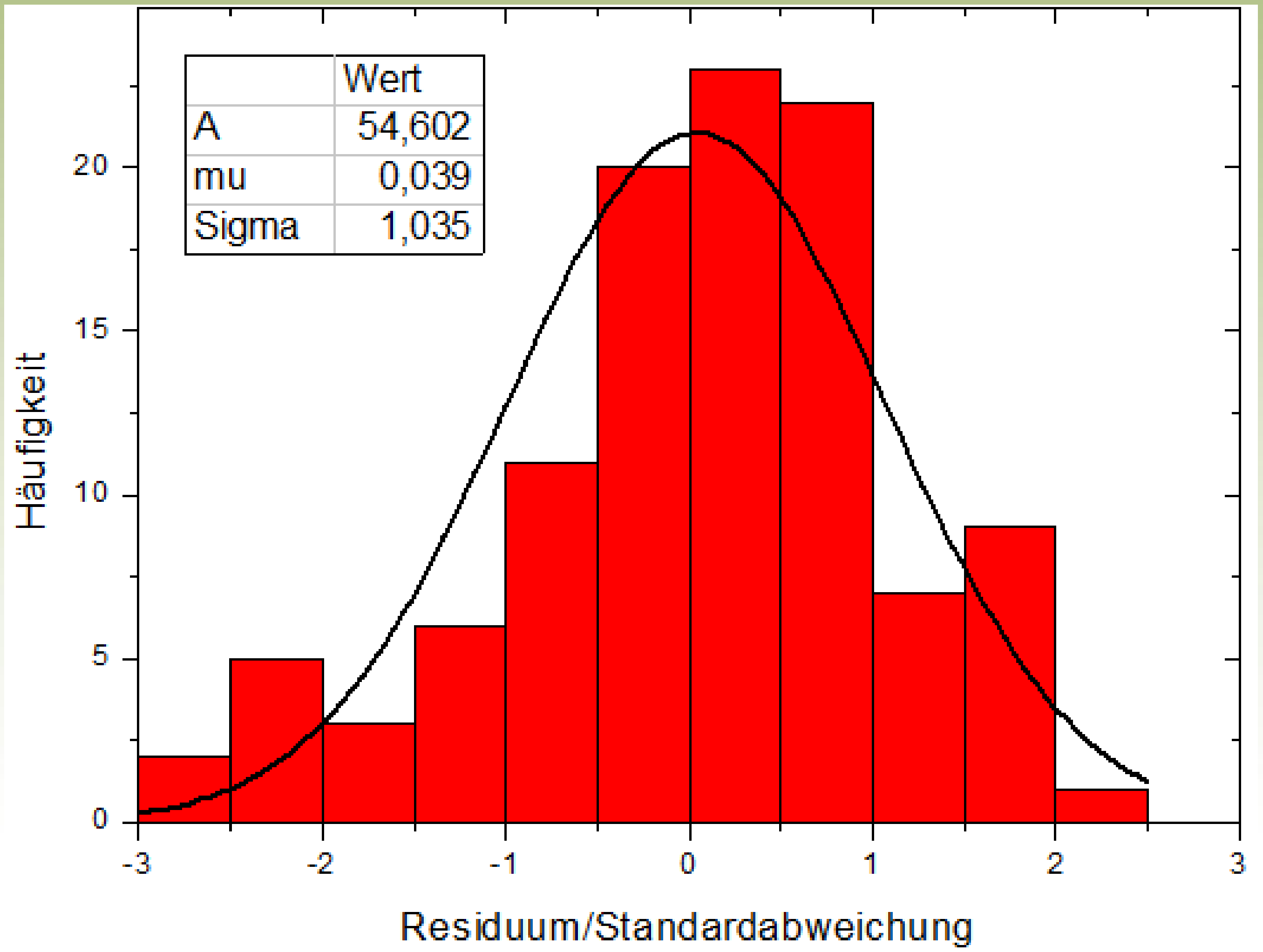
Beispiel einer Modellanpassung



Beispiel einer Modellanpassung



Beispiel einer Modellanpassung



Vielen Dank!

Fragen?

Nochmal: Fehler des Mittelwerts

$$S_M = \frac{S_E}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$