

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/333320701>

Caratterizzazione delle Proprietà di Entanglement di Stati Quantistici a Multiquibits

Thesis · April 2019

DOI: 10.13140/RG.2.2.23249.48482

CITATIONS

0

READS

793

2 authors:



Roberto Franzosi

INO - Istituto Nazionale di Ottica

92 PUBLICATIONS 1,300 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Denise Cocchiarella

University of Innsbruck

9 PUBLICATIONS 1 CITATION

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Electronic motions along the backbones of interacting DNA-EcoR1 biomolecules [View project](#)



Special Issue "The Ubiquity of Entropy" in Entropy, MDPI [View project](#)



UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

DIPARTIMENTO DI SCIENZE FISICHE, DELLA TERRA E DELL'AMBIENTE
Corso di Laurea in Fisica e Tecnologie Avanzate

CARATTERIZZAZIONE DELLE PROPRIETÀ DI ENTANGLEMENT
DI STATI QUANTISTICI A MULTIQUBITS

Relatore:

Dott. Roberto Franzosi

Candidato:

Denise Cocchiarella

Anno Accademico 2017-2018

“Non il possesso della conoscenza, della verità irrefutabile, fa l’uomo di scienza,
ma la ricerca critica, persistente e inquieta, della verità.”
-Karl Popper

Ringraziamenti

Ringrazio il Dott. Roberto Franzosi,
per avermi trasmesso la sua immancabile *passione* per il ragionamento, per avermi insegnato
a cercare la via più *bella* e semplice per risolvere un problema e per l'aiuto durante il lavoro
di tesi.

Ringrazio mio papà, Matteo,
per avermi insegnato a non accontentarmi mai e a *superare* me stessa, sempre.

Ringrazio mia mamma, Loredana,
per avermi insegnato che si può superare ogni difficoltà, con il *sorriso*.

Ringrazio Céline, mia sorella, compagna di *vita* da 17 anni.

Ringrazio Chiara, per esserci da *sempre*.

Ringrazio Bianca,
amica e compagna *speciale* di università, per gli interminabili confronti.

Ringrazio Anna e Cristina,
con le quali il percorso di Fisica ha avuto *inizio*, per le emozioni che il trio mi ha regalato.

Ringrazio tutti i miei compagni di università,
per aver rappresentato una *famiglia* nel corso di questi anni.

Ringrazio l'intero ambiente di Fisica, per aver rappresentato una seconda *casa*.

Indice

Introduzione	1
1 Introduzione all'entanglement	4
1.1 Applicazioni dell'entanglement	4
1.2 Sistemi bipartiti	9
1.3 Entropia di Von Neumann	10
1.4 Sistemi multipartiti	11
1.5 Informazione di Fisher quantistica	12
2 Misura geometrica dell'entanglement	14
2.1 Metrica di Fubini-Study	14
2.1.1 Formalismo	15
2.2 Distanza di "entanglement"	17
2.2.1 Introduzione alla formula generale $g_{\mu\nu}$	17
2.3 Sistema a due qubits	18
2.3.1 $g_{\mu\nu}$ su $ r, \phi\rangle$	19
2.3.2 $g_{\mu\nu}$ su $ \beta, \theta\rangle$	22
2.4 Calcolo entropia di Von Neumann	23
2.5 Sistema ad M qubits	24
3 Studio analitico e numerico della metrica	28
3.1 Correlazione quantistica	28
3.1.1 Rotazioni del tensore metrico	29
3.2 Verifica delle proprietà di $g_{\mu\nu}$	29
3.2.1 Analisi di $g_{\mu\nu}$ per $ r, \phi\rangle$	29
3.2.2 Analisi di $g_{\mu\nu}$ per $ \beta, \theta\rangle$	31
3.3 Verifica delle proprietà della distanza	32
3.3.1 Traccia di g per $ r, \phi\rangle$	32
3.3.2 Traccia di g per $ \beta, \theta\rangle$	35

4 Conclusioni	37
A Quantum bits	38
A.1 Introduzione al qubit	38
A.2 Sfera di Bloch	39
A.3 Multiple qubits e Stati di Bell	40
A.4 LOCC	41
B Matrici di Pauli e Rotazioni	42
B.1 Matrici di Pauli	42
B.2 Rotazioni in rappresentazione 2×2	43
Elenco delle figure	45
Bibliografia	46

Introduzione

L'entanglement si presenta come un aspetto puramente quantistico della natura che non possiede una controparte classica. Non soltanto è fonte di ispirazione per innumerevoli dibattiti filosofici sull'inspiegabile comportamento della meccanica quantistica ma, ad oggi, è considerato come una componente necessaria per realizzare passi in avanti nel campo delle tecnologie quantistiche. Infatti, l'entanglement gioca un ruolo fondamentale in campi come la crittografia quantistica, il teletrasporto, la metrologia e nel miglioramento della definizione degli standard di risoluzione in frequenza [1]. Nonostante il ruolo centrale, a causa della sua complessità, l'entanglement si presenta ad oggi come un fenomeno enigmatico [2, 3]. L'interesse verso questo peculiare aspetto si è mostrato sin da subito, ma è soltanto dagli anni Novanta che, con l'avvento della teoria dell'informazione quantistica, ne è stata compresa l'utilità. Ad oggi sono molteplici gli esperimenti progettati al fine di realizzare stati quantistici fortemente entangled. Ad esempio, sono stati usati fotoni per dimostrare l'entanglement in sistemi di sei particelle o di dieci qubits [4, 5], è stato creato entanglement tra sei o otto ioni [6, 7], e all'interno del diamante sono stati posti in uno stato entangled spin nucleari ed elettronici [8]. Con il progresso delle tecniche sperimentali ci si attende la possibilità di realizzare configurazioni via via più complesse.

In questo scenario risulta chiara l'importanza di avere una metodologia in grado di determinare se uno stato è entangled e nel caso, di poterne valutare l'entità. Nella rivelazione di entanglement ricoprono un ruolo centrale la disuguaglianza di Bell [9], quelle basate sullo "spin squeezing" [10] e le disuguaglianze basate sull'entropia di Von Neumann. Si aggiungono a queste i metodi basati sugli "entanglement witnesses", che definiscono uno strumento universale per l'analisi e la classificazione di stati quantistici [11].

Recentemente il problema dell'entanglement ha trovato risposte parziali nell'ambito della teoria dell'informazione quantistica basata sulla metrica nota come "quantum Fisher information metrics" che è anche in stretta connessione con la teoria della stima quantistica, "quantum estimation theory", di quantità fisiche non associate ad osservabili. È noto che tale metrica, nel caso di stati puri, coincide con la metrica di Fubini-Study [12] definita sullo spazio proiettivo dei raggi dello spazio di Hilbert.

Molte teorie della fisica classica possono essere formulate con un linguaggio geometrico: ad esempio la meccanica Hamiltoniana basata sulla geometria симплекtica, la relatività generale che fa uso della geometria di Riemann e la teoria classica di Yang-Mills che trae le sue premesse dall'elegante teoria dei fibrati. Anche la Meccanica Quantistica che è strettamente connessa agli operatori lineari nello spazio di Hilbert e usa metodi analitici algebrici o funzionali, può essere formulata nell'elegante linguaggio geometrico. La geometria pervade la meccanica quantistica al livello fondamentale. Responsabile di alcune peculiarità del mondo quantistico, la struttura geometrica dello spazio degli stati quantistici porta a definire una metrica nota come metrica di Fubini-Study capace di stabilire una distanza tra stati. È stato dimostrato che esiste una complessa connessione tra *strutture geometriche* ed *entanglement quantistico* [13]. La metrica di Fubini-Study ha ottenuto l'attenzione in vari ambiti come la meccanica statistica quantistica [14], il trasporto quantistico nei solidi [15], le transizioni di fase quantistiche [16] e la descrizione di isolanti topologici [17].

Il lavoro originale della presente tesi è stato quello di introdurre una metrica ad hoc derivata da quella di Fubini-Study in grado di discriminare tra stati entangled e non. In particolare è stato ricavato il tensore metrico, associato a variazioni infinitesime e locali in stati generici ad M qubits, in grado di evidenziare le proprietà di entanglement degli stessi. Il tensore metrico così definito è stato testato nel caso di alcuni stati, dipendenti da un parametro ϕ continuo, di cui è noto il grado di entanglement, sempre in funzione dello stesso parametro. È stato trovato che la traccia del tensore ha un massimo in corrispondenza dello stato massimamente entangled.

Il tensore metrico ha una dimensione pari al numero di componenti del sistema. I suoi autovalori determinano il grado di crescita della distanza tra stati nelle varie direzioni identificate dagli autovettori. I suoi autovettori hanno un'interpretazione analoga a quella nei modi normali, perché costituiscono stati collettivi del sistema lungo i quali si ha un rate di crescita della distanza uniforme. L'analisi degli elementi fuori diagonale fornisce informazioni non sul grado di entanglement, ma sulla sua presenza. Infatti, in presenza di elementi non diagonali uguali a 0, lo stato gode di separabilità mentre nel caso contrario si ha uno stato affetto da correlazione quantistica.

Di seguito è schematizzata l'organizzazione della tesi.

Nel Capitolo 1 si espone il fenomeno dell'entanglement per sistemi bipartiti e multipartiti, si riassumono gli elementi essenziali dell'informazione di Fisher quantistica che è alla base di un criterio di sufficienza per riconoscere l'entanglement in stati quantistici. Inoltre si ricordano alcune applicazioni dell'entanglement nell'ambito dell'interferometria quantistica.

Nel Capitolo 2 si introduce la metrica di Fubini-Study dalla quale si deriva la forma generale della metrica utile alla misura dell'entanglement. Si applica quindi il formalismo nel caso di due famiglie di stati ad M qubits dipendenti da un parametro di cui sono noti i valori corrispondenti agli stati massimamente entangled.

Il Capitolo 3 è dedicato allo studio analitico e numerico del tensore metrico ricavato e in particolare al calcolo della sua traccia e dei suoi autovalori in funzione dei parametri che identificano gli stati appartenenti alle due famiglie introdotte nel capitolo precedente. Successivamente si rappresentano visivamente i risultati per mezzo di opportuni grafici.

Il Capitolo 4 è dedicato alle conclusioni ed all'analisi delle prospettive di futuri sviluppi dei risultati del lavoro di tesi.

Capitolo 1

Introduzione all'entanglement

Nel febbraio del 1935 Albert Einstein, Boris Podolski e Nathan Rosen pubblicano l'articolo dal titolo: “La descrizione quantistica della realtà fisica può ritenersi completa?” [18]. Nasce il famoso “paradosso EPR”, in relazione al quale nello stesso anno il fisico austriaco Erwin Schrödinger [19] introduce il termine “entanglement”. Nella sua più semplice manifestazione, il fenomeno avviene se l'interazione tra due sistemi fisici permette di generare correlazioni che sussistono anche quando l'interazione smette di aver luogo e i due sistemi si trovano separati spazialmente. L'entanglement presenta un singolare aspetto della realtà a livello quantico, nonostante formalmente risulti una particolare applicazione del ben compreso “principio di sovrapposizione”.

Nel seguito si riassumono concetti noti in letteratura e rilevanti per lo studio e caratterizzazione dell'entanglement. Si introduce il concetto di sistema bipartito e multipartito, di entanglement multipartito, l'entropia di Von Neumann e di squeezing.

1.1 Applicazioni dell'entanglement

Le misure, in campo fisico, ricoprono un ruolo fondamentale nella conquista della conoscenza. Una teoria, dopo essere stata formulata, è messa alla prova utilizzandola ad esempio nel calcolo del valore di alcune costanti fondamentali. Aumentando l'accuratezza delle misure, può accadere che la distanza tra i risultati teorici e quelli sperimentali risulti molto grande in relazione agli errori, e che, di conseguenza, la teoria debba essere riformulata. Si comprende in questo modo l'importanza della ricerca finalizzata al miglioramento della precisione dei dati sperimentali. Oggigiorno l'interferometria è la modalità sperimentale che fornisce la più alta precisione nella misura delle costanti fondamentali [20], tra cui la costante di gravitazione universale [21, 22], l'accelerazione di gravità [23], la costante di struttura fine [24] e la

polarizzabilità elettrica degli atomi [25]. Il suo sviluppo ha reso possibile il primo rilevamento delle onde gravitazionali [26], inoltre sono stati proposti esperimenti per testare il principio di equivalenza debole [27] e ha fornito altri contributi alla cosmologia stabilendo vincoli sull'energia oscura [28]. Soltanto recentemente si è capito che utilizzare la correlazione quantistica tra le particelle coinvolte in esperimenti di interferometria fa crescere di molto la sensibilità dell'interferometro [29, 30]. Esaminando il funzionamento di un interferometro verrà messa in evidenza la connessione tra entanglement ed interferometria e si potrà apprezzare l'utilità dell'informazione di Fisher quantistica per il superamento dei limiti dell'interferometria classica.

Aspetti generali degli interferometri

Un interferometro *ottico* permette di stimare gli spostamenti di fase mediante l'interferenza tra onde luminose. Una delle configurazioni più note prevede l'emissione di un raggio luminoso da parte di una sorgente, la sua scomposizione in fasci perpendicolari per mezzo di uno specchio ed una riflessione di tali fasci con successiva ricombinazione finale. Per i due bracci dell'interferometro avere identica lunghezza spaziale è molto difficile. Ciò equivarrebbe a rendere i due cammini diversi per una distanza spaziale inferiore ad una lunghezza d'onda. La differenza tra i due cammini crea un'interferenza. Uno tra i primi apparati è il tradizionale interferometro di Mach-Zender (Fig.1.1), divenuto oggetto di innumerevoli studi teorici ed una configurazione standard ancora in uso. Interferometri come quello di Michelson-Morley e di Mach-Zehnder sono esempi di interferometri a “doppio percorso”, con cammini separati spazialmente. Sono stati realizzati anche schemi d'interferometro “a percorso comune”, come l'interferometro ad anello (o interferometro di Sagnac [31]), ed altri ulteriori schemi. La necessità di un interferometro che utilizza gli atomi piuttosto che la luce deriva perlopiù dal fatto generale che la sonda interferometrica deve interagire con la perturbazione esterna per produrre lo sfasamento. I fotoni non risentono delle normali forze inerziali poiché sono senza massa. Al contrario, gli atomi hanno massa ed appaiono molto sensibili alle accelerazioni e alle rotazioni e possono essere impiegati per realizzare giroscopi o gravimetri [33]. I *beam splitter* introdotti nello schema generale dell'interferometro sono implementati, negli interferometri atomici, da reticoli di diffrazione. I livelli energetici della struttura interna, come quelli dati dall'interazione iperfine, possono fornire i bracci all'interferometro: in questo caso la scissione è fornita dall'interazione con una radiazione elettromagnetica, che può cambiare coerentemente la popolazione degli stati interni, come nell'interferometro Ramsey (Fig.1.1). Negli interferometri atomici, le cause esterne che portano uno sfasamento consistono in forze meccaniche o campi magnetici. È per questo motivo che tali strumenti si sono mostrati notevolmente efficaci nell'eseguire misurazioni di campo magnetico. Inoltre, se i due modi che supportano la dinamica sono due livelli interni, la misurazione delle frequenze di transizione atomica con l'interferometria Ramsey [34] può essere sfruttata per determinare uno

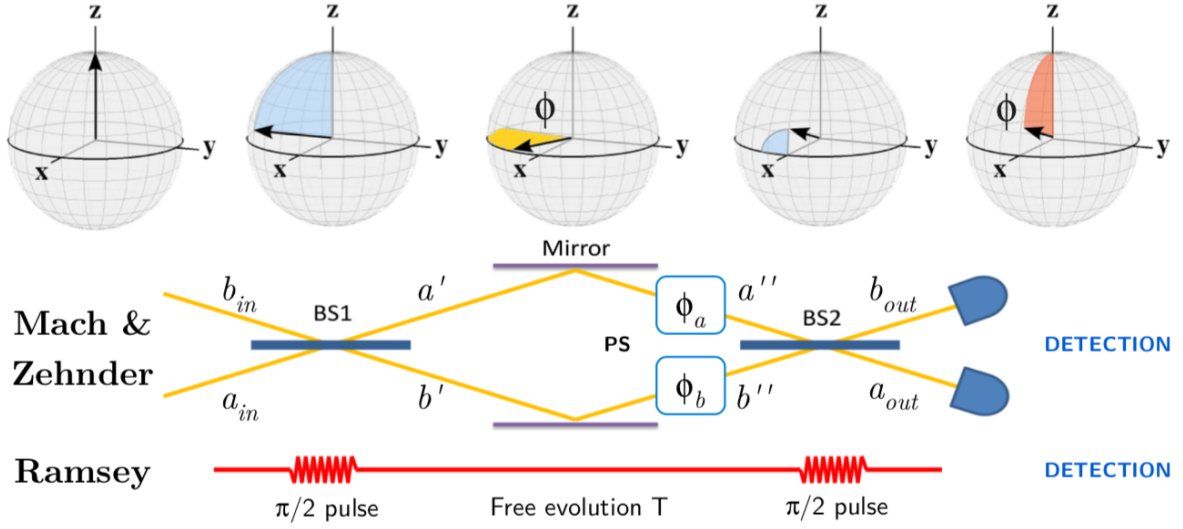


Figura 1.1: **Interferometri di Mach-Zehnder e Ramsay**, rappresentazione schematica e sequenza di rotazioni dello spin in una sfera di Bloch (vedi appendice A.2). Nel primo apparato i fotoni circolano all'interno dei due percorsi **a** e **b**, mentre il secondo sfrutta gli stati interni dell'atomo. Ad ogni modo, il principio fisico è equivalente. Supponendo che il sistema si trovi inizialmente in uno stato con N particelle in **a** e nessuna in **b**. Lo spin è orientato come $\langle J \rangle_{in} = \frac{N}{2} \mathbf{z}$. L'azione delle componenti può essere tradotta in rotazioni di un vettore nella sfera di Bloch. Quando il fascio incide sul primo "beam splitter" (equivalentemente viene fornito all'atomo un impulso di $\frac{\pi}{2}$) il vettore nella sfera di Bloch viene ruotato di $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse x . Dopodiché, durante il tempo di "accumulazione di fase", si presenta una rotazione di un angolo $\phi = \phi_a - \phi_b$ attorno all'asse z . Infine una rotazione di $-\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse x . La trasformazione complessiva consiste in una rotazione di un angolo ϕ attorno all'asse y . Conoscere il numero di particelle negli stati finali **a** e **b** di uscita dall'interferometro permette di acquisire informazioni sulla fase ϕ . L'immagine è ripresa dal lavoro di tesi "Multipartite entanglement in quantum phase transition" di Marco Gabbrielli [32].

standard di frequenza per gli orologi atomici [35] ed in generale in spettroscopia. Negli ultimi anni si è consolidata la pratica che vede atomi ultrafreddi come sonda negli esperimenti di interferometria atomica.

Stima della fase

Lo sfasamento non può essere misurato: non esiste cioè un operatore Hermitiano ad esso associato [36]. Un interferometro *ideale*, in meccanica quantistica, è rappresentato da una qualsiasi trasformazione unitaria $e^{-i\phi\hat{H}} : \hat{\rho}_0 \mapsto \hat{\rho}_\phi$ generata dall'operatore \hat{H} , che per ogni valore esatto del parametro ϕ associa allo stato di input descritto dalla matrice densità $\hat{\rho}_0$ lo stato di output descritto dalla matrice densità $\hat{\rho}_\phi$. Si estraggono i valori di ε attraverso esperimenti, eseguendo cioè delle misure sull'osservabile \hat{E} . Il numero di misure indipendenti dello stato di output $\hat{\rho}_\phi$ sarà m , pari al numero di copie identiche dello stato iniziale $\hat{\rho}_0$. Si costruisce la probabilità $P(\varepsilon|\phi)$ di trovare il risultato ε per un certo ϕ , successivamente si tenta di ricavare il valore del parametro ϕ che riproduce tale distribuzione di probabilità mediante uno estimatore Φ che gode della proprietà per cui il suo valor medio corrisponde al

parametro ϕ ed è per questo detto estimatore “corretto” o “non distorto”:

$$\langle \Phi \rangle = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\phi) \Phi(\varepsilon) = \phi.$$

L'incertezza sulla determinazione del parametro ϕ , ovvero la deviazione standard, risulta $\Delta\phi = [\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\phi) (\Phi(\varepsilon) - \langle \Phi \rangle)^2]^{1/2}$.

Aumentare l'accuratezza nella stima della fase, equivale ad avere informazioni sempre più precise sulla causa che l'ha generata. Nel caso dei fotoni la causa consiste in una differente lunghezza di cammino, nel caso degli atomi in forze meccaniche o campi magnetici. Dato un numero finito di input, come il numero N di particelle coinvolte in un esperimento di interferometria, l'obiettivo del lavoro di stima della fase è di ridurre l'incertezza $\Delta\phi$.

Il limite nella precisione che è possibile raggiungere è fornito dal Teorema di Cramèr-Rao [37]

$$\Delta\phi \geq \frac{1}{\sqrt{mF_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}]}}. \quad (1.1)$$

Da questa relazione, in cui compare l'informazione di Fisher quantistica F_Q , si nota la correlazione tra il problema di stimare la fase e quello di distinguere diversi stati lungo un percorso nello “spazio dei parametri”. L'incertezza $\Delta\phi$ o “sensibilità di fase” può essere intesa come il minimo sfasamento per il quale lo stato di uscita dell'interferometro $\hat{\rho}_\phi$ può essere distinto dallo stato iniziale $\hat{\rho}_0$. Maggiore è la F_Q , maggiore risulterà la sensibilità dell'interferometro.

Interferometro “a due modi”

Con un interferometro a due bracci è possibile studiare sistemi che coinvolgono N particelle distinte e non interagenti considerando esclusivamente i due gradi di libertà associati ai due percorsi. Le particelle potranno assumere spin $\pm \frac{1}{2}$ a seconda del braccio. Ogni trasformazione unitaria eseguita sulle N particelle ha la forma di una rotazione $e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}}$ di ampiezza θ attorno all'asse di rotazione \mathbf{n} , dove $J_{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}$ e $\hat{\mathbf{J}} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ è il momento angolare totale del sistema. Le componenti di $\hat{\mathbf{J}}$ sono esprimibili in termini delle matrici di Pauli (vedi appendice B.1)

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_x^{(i)}, \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_y^{(i)}, \quad \hat{J}_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_z^{(i)}$$

e soddisfano l'algebra SU(2) del momento angolare: $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$.

Dall'Eq. (1.1) si ottiene in questo caso $\Delta\phi \geq (mF_Q[\hat{\rho}_0, \hat{J}_{\mathbf{n}}])^{-1/2}$.

Dato uno stato iniziale $\hat{\rho}_0$, è possibile ottimizzare la scelta dell'asse di rotazione \mathbf{n} in modo da massimizzare la QFI ed ottenere $F_Q[\hat{\rho}_0] = \max_{\mathbf{n}} F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{J}_{\mathbf{n}}]$. La QFI dipenderà poi esclusivamente dallo stato iniziale $\hat{\rho}_0$.

Per molto tempo è stata considerata come limite alla sensibilità negli esperimenti con interferometri *a due modi* la quantità $\Delta\theta_{SN} = 1/\sqrt{Nm}$ detta “shot noise limit”. N rappresenta

il numero di particelle ed m le misure indipendenti eseguite su ciascuna copia identica dello stato di partenza $\hat{\rho}_0$. L'interferometro di Michelson-Morley apre la strada a molti esperimenti che sono mirati ad aumentare la sensibilità al di sopra dello *shot noise limit*. Soltanto recentemente è stato scoperto un modo per riuscire in questo obiettivo: generare *entanglement* tra le particelle dello stato iniziale coinvolte nell'esperimento [38, 39, 40, 41]. Sfruttando l'entanglement ci si pone l'obiettivo di raggiungere il limite teorico $\Delta\theta_{HL} = 1/\sqrt{mN^2}$ detto "limite di Heisenberg". Un'intensa attività sperimentale è oggi dedicata alla verifica sperimentale del superamento dello "shot noise limit". Esempi rilevanti sono costituiti dai rivelatori di onde gravitazionali e dai condensati di Bose-Einstein. In particolare sfruttando la non linearità delle interazioni tra particelle nei condensati, è possibile creare stati *entangled* per un gran numero di atomi. È da sottolineare che non tutti gli stati entangled portano ad una maggiore precisione, ma soltanto quelli riconosciuti dalla QFI [39, 40, 41]. Il campo che tenta di fornire questa massima precisione è noto come "*interferometria quantistica*".

Spin squeezing

Nel caso in cui in un sistema non sia possibile avere accesso ad ogni singolo qubit si parla di rilevamento *collettivo* di entanglement. In un sistema a multiqubits le quantità globali che possono essere misurate sono le componenti del momento angolare

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sigma_i^{(k)},$$

dove $i = x, y, z$ e $\sigma_i^{(k)}$ sono le matrici di Pauli.

Data la seguente relazione per le componenti del momento angolare

$$(\Delta J_y)^2 (\Delta J_z)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle J_x \rangle|^2,$$

in accordo con la definizione di Kitagawa e Ueda [10], uno stato è detto spin squeezed se $(\Delta J_z)^2 \leq \frac{|\langle J_x \rangle|}{2}$. Si assume che il valor medio dello spin sia in direzione x . Se in uno stato ad N qubits è violata la disuguaglianza

$$\frac{(N\Delta J_z)^2}{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2} \geq 1,$$

allora lo stato è *entangled*.

1.2 Sistemi bipartiti

Siano A e B due sistemi indipendenti definiti nei rispettivi spazi di Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , allora secondo la formulazione di Dirac-Von Neumann [42], al sistema composto si associa lo spazio dato dal prodotto tensore $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Se i sottosistemi A e B corrispondono a stati puri $|\psi^{(A)}\rangle$ e $|\psi^{(B)}\rangle$, il sistema composto sarà descritto dallo stato *prodotto* dei due stati puri $|\psi^{(AB)}\rangle = |\psi^{(A)}\rangle \otimes |\psi^{(B)}\rangle$. Questo è un esempio di stato separabile o fattorizzabile: le azioni eseguite su un sottosistema non influenzano in alcun modo l'altro. È possibile definire in maniera generale la situazione in cui i sottosistemi comunicano tra di loro: viene a crearsi una correlazione classica tra A e B che si trovano ad occupare gli stati $|\psi_k^{(A)}\rangle$ e $|\psi_k^{(B)}\rangle$ con una probabilità p_k . Uno stato misto è detto *separabile* (o classicamente correlato) se può essere scritto come una combinazione convessa di stati separabili [43]

$$\hat{\rho}_{sep}^{(AB)} = \sum_k p_k |\psi_k^{(A)}\rangle \langle \psi_k^{(A)}| \otimes |\psi_k^{(B)}\rangle \langle \psi_k^{(B)}|. \quad (1.2)$$

Qualsiasi stato del sistema composto che non può essere scritto con una forma simile è chiamato stato *entangled*: i sottosistemi godono in questo caso di una correlazione non più classica, ma quantistica. Una tal correlazione risulta più forte di una di tipo classico, non potrà infatti essere né creata né distrutta da operazioni locali e comunicazione classica (LOCC) (vedi Appendice A.4). Una correlazione quantistica di questo tipo prende il nome di “entanglement”. È possibile trovare strumenti che indichino il grado di entanglement contenuto in uno stato, ovvero che permettano di *quantificarlo*. Formalmente misure di questo tipo devono risultare positive per stati *entangled* e assumere il valore zero per stati fattorizzabili. Devono apparire invarianti sotto trasformazioni unitarie locali su un singolo sottosistema e non possono variare per LOCC eseguite sul sistema composto. L'argomento di EPR ha favorito la scoperta di alcuni fra i più interessanti e intriganti aspetti della fisica del Novecento: il mondo micro-fisico in realtà è non locale e una qualsiasi futura interpretazione della meccanica quantistica risulterà imprescindibile da tale principio. È a John Stewart Bell che va il merito principale di questa scoperta. La disuguaglianza di Bell [44, 9] è soddisfatta da teorie locali e violata dalla meccanica quantistica: si può, pertanto, verificare sperimentalmente attraverso tale strumento, la località o la non località della meccanica quantistica. La violazione della disuguaglianza di Bell [45], nel caso di uno stato puro $|\psi^{(AB)}\rangle$, offre un metodo operativo in grado di determinare se tra i due sottosistemi A e B vi sia una correlazione quantistica e quindi entanglement, oppure solo una correlazione classica. L'aspettativa naturale che l'entanglement sia correlato al grado di mescolanza dei singoli sottosistemi ha portato alla definizione di “entropia di entanglement” come l'entropia di von Neumann della matrice densità ridotta [46] ottenuta sommando sui gradi di libertà di uno dei due sottosistemi. Per stati misti invece la situazione che si presenta è ben diversa e più complicata. La verifica di una correlazione

quantistica o classica è offuscata dalla mancanza di una conoscenza completa dello stato del sistema. Sono state tuttavia proposte in letteratura diverse definizioni per la misura della correlazione quantistica in sistemi descritti da stati misti [47].

Va sottolineato che il numero N di sottosistemi che compongono il sistema completo, gioca un ruolo determinante nel problema della definizione di una misura atta a quantificare la correlazione quantistica tra componenti del sistema completo. Se il caso dei sistemi a due componenti (bipartiti) rappresenta un esempio di successo per il quale esiste una caratterizzazione esauriente delle proprietà di entanglement, i sistemi a più componenti (multipartiti) costituiscono ancora una sfida aperta per ciò che riguarda la caratterizzazione delle proprietà di entanglement.

1.3 Entropia di Von Neumann

Una misura di entanglement ampiamente utilizzata nel caso di sistemi bipartiti è l'entropia di entanglement. Questa quantità non è altro che l'entropia di Von Neumann S_A associata a un sottosistema A del sistema totale, prodotta tracciando sui gradi di libertà del complemento di A , A^c .

Von Neumann definisce l'entropia di uno stato quantistico descritto da una matrice densità ρ attraverso la relazione

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log(\rho)), \quad (1.3)$$

dove Tr è l'operatore di traccia. Se λ_x sono gli autovalori di ρ allora la definizione di von Neumann può essere espressa come

$$S(\rho) = -\sum_x \lambda_x \log(\lambda_x), \quad (1.4)$$

Si consideri un sistema quantistico nello stato fondamentale $|\psi\rangle$ e si assuma che non sia degenere. La matrice densità è $\rho_{tot} = |\psi\rangle \langle\psi|$ e l'entropia risulta nulla, $S_{tot} = -\text{Tr}(\rho_{tot} \ln \rho_{tot}) = 0$. Il sistema può essere diviso in due sottosistemi A , ed il suo complemento A^c . Lo spazio di Hilbert dell'intero sistema è $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}$. Si immagina un osservatore che può avere accesso soltanto al sottosistema A . Dal suo punto di vista il sistema è descritto dalla matrice densità *ridotta* ρ_A , ottenuta tracciando su tutti i gradi di libertà del complemento A^c :

$$\rho_A = \text{Tr}_{A^c} \rho_{tot}.$$

L'osservatore A misura l'entropia di Von Neumann

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A)$$

che definisce l'entropia di entanglement del sottosistema A . Se il sistema totale si trova in uno stato puro, l'entropia di entanglement associata alla sottoregione A è uguale a quella del suo complemento A^c . Questo non vale nel caso di sistemi misti. L'entropia di Von Neumann assume un ruolo fondamentale nella teoria dell'informazione quantistica, rappresenta la minima quantità di informazione quantistica necessaria a codificare uno stato descritto dalla matrice densità ρ senza perdere informazioni dopo la decodifica [48].

1.4 Sistemi multipartiti

Nel caso di un sistema composto da $N \geq 2$ sottosistemi distinguibili indicizzati tramite $i = 1, 2, \dots, N$, lo stato quantistico definito nello spazio di Hilbert globale $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \mathcal{H}_N$ è detto *completamente separabile* quando può essere espresso come una miscela statistica di stati fattorizzabili

$$\hat{\rho}_{sep} = \sum_k p_k |\psi_{prod,k}\rangle \langle \psi_{prod,k}| = \sum_k p_k \bigotimes_{i=1}^N |\psi_k^{(i)}\rangle \langle \psi_k^{(i)}|. \quad (1.5)$$

Con $|\psi_{prod,k}\rangle = |\psi_k^{(1)}\rangle \otimes |\psi_k^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_k^{(N)}\rangle$ si intende lo stato separabile, con la probabilità p_k associata a tale stato e con $|\psi_k^{(i)}\rangle$ lo stato puro dell' i -esimo sottosistema. Gli stati che non possono essere rappresentati attraverso questa forma sono detti *entangled* [49]. A differenza del caso $N = 2$, dove ogni stato può risultare fattorizzabile o entangled, per i sistemi multipartiti la classificazione dell'entanglement presenta una maggior varietà. Ad esempio gioca un ruolo importante il più grande sottoinsieme non fattorizzabile, a cui si dà il nome “entanglement depth” [50]. Uno stato puro costituito da $N > 2$ sottosistemi (o parti) è chiamato *k-producibile* [49, 51] se può essere decomposto nel prodotto di $m \leq N$ stati che descrivono altrettanti cluster e cioè come $|\psi_{k-prod,k}\rangle = |\psi_{N_1}\rangle \otimes |\psi_{N_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{N_m}\rangle$, dove $|\psi_{N_l}\rangle$ è lo stato che descrive un numero di sottoinsiemi $N_l \leq k$ e $\sum_{l=1}^m N_l = N$. Lo stato *k-producibile* è quindi la fattorizzazione dello stato ad N componenti in stati di m -cluster. Nei cluster è quindi “immagazzinato” l'entanglement dello stato complessivo.

La definizione può essere estesa al caso in cui esiste correlazione classica tra stati. Uno stato misto è chiamato *k-separabile* ogni volta che è possibile definire una miscela statistica di stati *k-producibili*

$$\hat{\rho}_{k-sep} = \sum_k p_k |\psi_{k-prod,k}\rangle \langle \psi_{k-prod,k}|. \quad (1.6)$$

Uno stato si dice *k-partito entangled* se risulta *k-separabile* ma non $(k-1)$ -separabile. Con k si intende il numero di parti entangled all'interno del più grande cluster non-separabile e diremo che lo stato entangled *k-partito* possiede un “entanglement depth” maggiore di $k-1$. Avere $k = 1$ corrisponde al caso *completamente separabile* come in Eq.(1.5); al contrario il caso $k = N$ rappresenta il limite opposto, quello di uno stato *massimamente entangled*. Per

$N = 2$ otteniamo il caso particolare del sistema bipartito affrontato nel paragrafo precedente. Per sistemi multipartiti, sia puri che misti, non sono stati ancora completamente raggiunti criteri soddisfacenti di valutazione qualitativa o quantitativa di entanglement [52]. Ad esempio, non è stato ancora definito, per $N > 3$, un *criterio di separabilità*.

Per stati puri è possibile quantificare l'entanglement attraverso una misura geometrica [53] che risulta zero per stati completamente separabili e cresce in modo monotono fino ad arrivare al suo massimo per stati N -partiti. Una misura cosiffatta definisce la distanza tra uno stato e il suo più vicino stato separabile nello spazio di Hilbert in accordo con la metrica indotta dal prodotto scalare. Tuttavia, ottenere una misura geometrica dell'entanglement con il metodo precedente è un compito laborioso. Un metodo che permette di rilevare la presenza di entanglement in uno stato è basato sulla violazione di limiti posti dal valore di aspettazione di particolare operatori detti “entanglement witnesses” (testimoni di entanglement) [54]. La condizione necessaria ma non sufficiente per stati $\hat{\rho}$ separabili equivale, dato l'operatore “testimone” \hat{W} , a $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{W}) \leq b$, dove b dipende dalla scelta di \hat{W} . La violazione permette di verificare che il sistema si trova in uno stato entangled. Alla base di questo approccio si trova il fatto che per stati entangled multipartiti esiste *almeno* un testimone di entanglement [55]. Un vantaggio di questo metodo è il fatto di essere accessibile alla sperimentazione, tuttavia il testimone di entanglement è strettamente dipendente dall'apparato sperimentale le cui imperfezioni potrebbero danneggiare l'informazione.

Un differente metodo per quantificare l'entanglement è quello basato sull'informazione di Fisher quantistica.

1.5 Informazione di Fisher quantistica

Supponiamo di aver preparato un sistema nello stato descritto dalla matrice densità $\hat{\rho}_0$ e di perturbarlo applicando una generica trasformazione unitaria $\hat{T}(\phi)$ dipendente dal parametro ϕ in modo che $\hat{T} : \hat{\rho}_0 \mapsto \hat{\rho}_\phi$. Scegliendo un'osservabile \hat{E}_ε , i cui autovalori sono denotati con ε , la probabilità di ottenere ε per un dato valore di ϕ è data dalla “likelihood” $P(\varepsilon|\phi) = \text{Tr}(\hat{\rho}_\phi \hat{E}_\varepsilon)$. La quantità di informazione sul parametro ϕ che è possibile estrarre dalle misure dell'osservabile ε è quantificata dall'*Informazione di Fisher* [56]

$$F(\phi) = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{P(\varepsilon|\phi)} \left(\frac{\partial P(\varepsilon|\phi)}{\partial \phi} \right)^2, \quad (1.7)$$

che dipende dallo stato iniziale $\hat{\rho}_0$, dal valore del parametro ϕ , dal modo in cui è correlato allo stato trasformato mediante \hat{T} e dalla scelta dell'osservabile \hat{E}_ε . Nella (1.7) la somma è estesa a tutti i possibili risultati delle misurazioni di ε . Massimizzando la (1.7) su tutte le

possibili misurazioni otteniamo per l'informazione di Fisher un limite superiore [14]

$$F(\phi) \leq \max_{\hat{E}} F(\phi) \equiv F_Q[\hat{\rho}_\phi]. \quad (1.8)$$

Il risultato di tale massimizzazione è chiamato “*informazione di Fisher quantistica*” (QFI). È possibile dimostrare [37] che la QFI può essere scritta nella forma

$$F_Q[\hat{\rho}_\phi] = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_\phi \hat{L}_\phi^2 \right), \quad (1.9)$$

dove \hat{L}_ϕ è la soluzione all'equazione $\partial_\phi \hat{\rho}_\phi = \frac{1}{2} \{ \hat{\rho}_\phi, \hat{L}_\phi \}$, dove $\{ \hat{\rho}_\phi, \hat{L}_\phi \}$ è l'anti-commutatore, nota come “*symmetric logarithmic derivative*”. Nel particolare caso di *trasformazioni unitarie* $\hat{\mathcal{T}}(\phi) = e^{-i\phi \hat{H}}$ generata dall'osservabile H , è possibile ricavare un'espressione della QFI [14] in termini degli autovalori p_k e autovettori $|k\rangle$ associati allo stato misto iniziale $\hat{\rho}_0 = \sum_k p_k |k\rangle \langle k|$ secondo la relazione:

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = 2 \sum_{kk'} \frac{(p_k - p_{k'})^2}{p_k + p_{k'}} \left| \langle k | \hat{H} | k' \rangle \right|^2, \quad (1.10)$$

dove la somma è limitata agli indici k e k' per cui $p_k + p_{k'} \neq 0$. Si noti che la QFI non dipende da ϕ della trasformazione: dipende invece dallo stato iniziale $\hat{\rho}_0$ e dal generatore \hat{H} della trasformazione. Nel caso in cui lo stato di partenza sia *puro* $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$, l'Eq.(1.10) si riduce a

$$F_Q[|\psi_0\rangle, \hat{H}] = 4 \left[\langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle^2 \right] = 4(\Delta \hat{H})^2 \quad (1.11)$$

L'informazione di Fisher quantistica fornisce un criterio per riconoscere l'entanglement di sistemi bipartiti [57] e multipartiti [40, 58].

Capitolo 2

Misura geometrica dell'entanglement

In questo capitolo si introduce la geometrizzazione della meccanica quantistica e si presenta il risultato originale del lavoro di tesi e cioè la derivazione di una metrica di tipo Fubini-Study che consente di dare una misura quantitativa dell'entanglement.

2.1 Metrica di Fubini-Study

Una caratteristica affascinante della fisica moderna consiste nell'opportunità di descrivere principi fisici ricorrendo a concetti geometrici [59]. La natura mostrando simmetrie spazio-temporali a cui va soggetta e le simmetrie di gauge a cui obbedisce mostra la forma delle interazioni fondamentali che la regolano. Ad esempio, la riformulazione geometrica di Minkowski della relatività speciale per mezzo di una geometria spazio-temporale è stata molto utile nella costruzione della successiva relatività generale di Einstein. Tuttavia l'approccio geometrico alla teoria quantistica è stato piuttosto limitato fino alla straordinaria scoperta di Berry, sull'esistenza di una fase geometrica nell'evoluzione ciclica di un sistema adiabatico in evoluzione [60]. All'inizio degli anni Ottanta è stato compreso che gli effetti della simmetria di gauge non compaiono soltanto nella descrizione delle forze fondamentali, ma anche nella descrizione di semplici sistemi quantistici. La definizione di fase geometrica è stata riformulata e generalizzata al caso di variazioni cicliche non adiabatiche, riducendo lo spazio di Hilbert \mathcal{H} allo spazio di Hilbert proiettivo (PH) definito come l'insieme di “raggi” dello spazio di Hilbert \mathcal{H} . Studi di questo tipo sono denominati “Meccanica Quantistica Geometrica”, una disciplina che tenta di definire una “*distanza quantistica*” tra stati *diversi*. Gli stati quantistici sono funzioni complesse e ciò rende il tensore metrico noto come “*tensore geometrico quantistico*” (QGT) di tipo complesso. Le parti reale e immaginaria del tensore hanno significati diversi. La parte reale, simmetrica, risulta un tensore di Riemann atto a misurare

la “distanza quantistica”. La parte immaginaria, antisimmetrica, ha l’interpretazione di un campo di gauge nello spazio di Hilbert proiettivo. Eseguendo il prodotto interno tra due stati quantistici le informazioni che emergono sono due: la sovrapposizione e la fase relativa. La parte simmetrica del QGT misura la prima, mentre la densità di flusso della fase relativa è individuata dalla parte antisimmetrica. Il QGT non è altro che la metrica di Fubini-Study (FMS) nello spazio proiettivo complesso CP^n . Scegliendo la base $|\psi_i\rangle, i = 1, 2, \dots, n$, un generico stato è definito come $|\psi\rangle = Z^i |\psi_i\rangle$ nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_n in cui vale

$$\langle d\psi|d\psi\rangle = \langle \psi_i|\psi_j\rangle dZ^i dZ^j. \quad (2.1)$$

Poiché uno stato quantistico è definito a meno di un fattore di fase, la distanza tra stati vicini deve risultare perpendicolare alla “direzione” $|\psi\rangle \rightarrow e^{i\alpha} |\psi\rangle$. Se ψ è normalizzato,

$$|d\psi\rangle - \frac{1}{2i}(\langle \psi|d\psi\rangle - \langle d\psi|\psi\rangle) |\psi\rangle$$

soddisfa la perpendicolarità e si può definire [12] la metrica di Fubini-Study con l’espressione:

$$\langle d\psi|d\psi\rangle - \frac{1}{4}|\langle \psi|d\psi\rangle - \langle d\psi|\psi\rangle|^2. \quad (2.2)$$

2.1.1 Formalismo

Consideriamo una famiglia di Hamiltoniane parametro-dipendenti [61, 17, 62] $\{H(\lambda)\}$ con una dipendenza dal set di parametri $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$. L’Hamiltoniana $H(\lambda)$ opera sullo spazio di Hilbert e si indicano con $E_n(\lambda)$ gli autovalori e con $|\phi_n(\lambda)\rangle$ gli autostati. Lo stato del sistema $|\psi(\lambda)\rangle$ è una combinazione lineare dei $|\phi_n(\lambda)\rangle$ per ogni punto di \mathbb{R}^n . Con una variazione infinitesima $d\lambda$ del parametro, si definisce la distanza quantistica

$$dS^2 = \|\psi(\lambda + d\lambda) - \psi(\lambda)\|^2 = \langle \delta\psi|\delta\psi\rangle = \langle \partial_\mu \psi|\partial_\nu \psi\rangle d\lambda^\mu d\lambda^\nu = (\gamma_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu})d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (2.3)$$

Nell’ultimo passaggio si è messo in evidenza la parte reale ed immaginaria del tensore complesso $\langle \partial_\mu \psi|\partial_\nu \psi\rangle$. Poiché il prodotto scalare tra due stati è Hermitiano $\gamma_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - i\sigma_{\nu\mu}$, segue che

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \gamma_{\nu\mu} \\ \sigma_{\mu\nu} &= -\sigma_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ma possiamo assumere nullo il contributo di $\sigma_{\mu\nu}d\lambda^\mu d\lambda^\nu$ a causa dell’antisimmetria di $\sigma_{\mu\nu}$ e della simmetria di $d\lambda^\mu d\lambda^\nu$. La distanza è quindi ridotta a

$$dS^2 = \langle \delta\psi|\delta\psi\rangle = \gamma_{\mu\nu}d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (2.5)$$

Tuttavia occorre una ridefinizione della metrica. Infatti, prendendo $|\psi'(\lambda)\rangle = e^{i\alpha(\lambda)} |\psi(\lambda)\rangle$, segue che $\langle \partial_\mu \psi' | \partial_\nu \psi' \rangle = \gamma'_{\mu\nu} + i\sigma'_{\mu\nu}$ e si può mostrare che

$$\begin{aligned}\gamma'_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} - \beta_\mu \partial_\nu \alpha - \beta_\nu \partial_\mu \alpha + \partial_\mu \alpha \partial_\nu \alpha \\ \sigma'_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{2.6}$$

dove $\beta_\mu(\lambda) = i \langle \psi(\lambda) | \partial_\mu \psi(\lambda) \rangle$ è la curvatura di Berry [60, 63]. Per trasformazioni di Gauge, la curvatura di Berry risulta $\beta_\mu(\lambda)' = \beta_\mu(\lambda) + \partial_\mu \alpha$. Si ridefinisce la metrica come

$$g_{\mu\nu}(\lambda) := \gamma_{\mu\nu}(\lambda) - \beta_\mu(\lambda)\beta_\nu(\lambda),\tag{2.7}$$

dove le variazioni sulla seconda parte del membro di destra annullano le variazioni su $\gamma_{\mu\nu}$, così

$$g'_{\mu\nu}(\lambda) = g_{\mu\nu}(\lambda).$$

È possibile una semplice interpretazione *fisica*: $\gamma_{\mu\nu}$ misura la distanza tra stati nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , mentre $g_{\mu\nu}$ la distanza tra “raggi” nello spazio di Hilbert proiettivo $\mathcal{PH} = \mathcal{H}/U(1)$. Fisicamente le osservabili associate ad operatori Hermitiani agiscono esclusivamente sui “raggi” associati agli stati. Questo è il motivo per cui si considera $g_{\mu\nu}$ e non $\gamma_{\mu\nu}$. La metrica di Fubini-Study, o “Tensore Geometrico Quantistico” (QGT), si definisce tramite l’espressione

$$Q_{\mu\nu}(\lambda) := \langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle - \langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \langle \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle\tag{2.8}$$

e le quantità introdotte in precedenza risultano

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \text{Re } Q_{\mu\nu} \\ \sigma_{\mu\nu} &= \text{Im } Q_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

È possibile introdurre questa metrica anche con un approccio alternativo basato sulla teoria perturbativa che mostra in modo più esplicito il ruolo centrale di $g_{\mu\nu}$ nella definizione della metrica [64].

2.2 Distanza di “entanglement”

L’idea è di considerare un generico stato di partenza $|s\rangle$ di M qubits (vedi appendice A.1) e ruotare ogni qubit con una trasformazione locale che quindi non ne modifica il grado di entanglement:

$$|s\rangle \rightarrow U|s\rangle$$

Lo stato di riferimento $U|s\rangle$ è così il più generale stato con lo stesso entanglement di $|s\rangle$. Sul j –esimo qubit si esegue una rotazione infinitesima $d\tilde{U}^j$. Nel caso di uno stato *separabile*, la rotazione $d\tilde{U}^j$ non coinvolge in alcun modo i restanti qubits. É da attendersi che la “distanza” tra i due stati dipenda da un set di parametri attribuibili esclusivamente al j –esimo qubit. Al contrario, se i qubits sono tra di loro correlati, cioè risultano in uno stato *entangled*, si prevede che l’espressione della distanza tra i due stati dipenda, oltre che dal qubit stesso, anche dai set di parametri riferiti ai restanti qubits. La metrica che in questo modo si ottiene si prospetta sensibile all’entanglement dello stato $|s\rangle$.

2.2.1 Introduzione alla formula generale $g_{\mu\nu}$

Nel caso generale si agisce come segue. Dato uno stato $|s\rangle$ ad M qubits, si ottiene un set di stati $|U, s\rangle$ generati dall’azione di M operatori unitari locali U^j con $(j = 1, \dots, M)$. Ogni U^j opera sul j –esimo qubit. Chiameremo:

$$|U, s\rangle = \prod_{j=1}^M U^j |s\rangle, \quad (2.10)$$

con $U^j = \exp\left[-i(\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{n}^j) \frac{\xi^j}{2}\right]$, dove $\sigma_{x,y,z}^j$ sono le matrici di Pauli che operano sul j -esimo qubit, \mathbf{n}^j è un vettore unitario tridimensionale che individua l’asse attorno cui U^j opera una rotazione di un angolo ξ^j del j -esimo qubit.

Si definisce la variazione infinitesima dello stato (2.10) ottenuta con l’azione di M trasformazioni infinitesime, ognuna agente su un diverso qubit

$$|dU, s\rangle = \sum_{j=1}^M d\tilde{U}^j |U, s\rangle \quad (2.11)$$

dove $d\tilde{U}^j = -i(\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) \frac{d\xi^j}{2}$ opera una rotazione infinitesima del qubit j -esimo attorno alla direzione individuata dal vettore unitario \mathbf{v}^j di un angolo infinitesimo $d\xi^j$ (vedi appendice B.2).

Risulta

$$\begin{aligned}\langle dU, s | dU, s \rangle &= \sum_{j,k=1}^M \langle U, s | d\tilde{U}^{\prime j \dagger} d\tilde{U}^{\prime k} | U, s \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^M \langle s | d\tilde{U}^{\prime j \dagger} d\tilde{U}^{\prime k} | s \rangle.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Nell'ultimo passaggio si è usufruito dell'*unitarietà* di U ($U^{\dagger j} U^j = U^j U^{\dagger j} = 1$) e del fatto che $d\tilde{U}^i$ commuta con tutti gli \tilde{U}^j con $j \neq i$. Si fa inoltre uso della seguente proprietà:

$$d\tilde{U}^{\prime j} = U^{j \dagger} d\tilde{U}^j U^j = U^{j \dagger} \left(i \frac{d\xi^j}{2} \boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j \right) U^j. \quad (2.13)$$

Questa sostituzione mette in evidenza la rotazione degli operatori $\boldsymbol{\sigma}^j$ attorno alla direzione \mathbf{n}^j di ξ^j per cui

$$\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^{\prime j}, \quad (2.14)$$

dove $\mathbf{v}^{\prime j}$ è ancora un vettore unitario.

Per le stesse proprietà si dimostra che:

$$\langle U, s | dU, s \rangle = \sum_j \langle s | d\tilde{U}^{\prime j} | s \rangle. \quad (2.15)$$

L'Eq.(2.2) in questo caso ha la forma

$$\langle dU, s | dU, s \rangle - \frac{1}{4} | \langle dU, s | U, s \rangle - \langle U, s | dU, s \rangle |^2. \quad (2.16)$$

2.3 Sistema a due qubits

Le Eq. (2.10) e (2.11) nel caso $M = 2$ diventano

$$|U, s\rangle = U^1 U^2 |s\rangle,$$

$$|dU, s\rangle = d\tilde{U}^1 U^1 U^2 |s\rangle + U^1 d\tilde{U}^2 U^2 |s\rangle,$$

così risulta:

$$\langle dU, s | dU, s \rangle = \frac{1}{4} [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + 2d\xi^1 d\xi^2 \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{v}^1)(\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{v}^2) | s \rangle]. \quad (2.17)$$

La forma più generale per lo stato $|s\rangle$ è del tipo $|s\rangle = \sum_{lm} C_{lm} |lm\rangle$ ed il termine misto del membro di destra della (2.17) si può scrivere come

$$\sum_{lm} \sum_{rn} C_{lm}^* C_{rn} \langle l | \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{v}^1 | r \rangle \langle m | \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{v}^2 | n \rangle. \quad (2.18)$$

I termini al secondo membro

$$\langle U, s | dU, s \rangle = -i(\langle s | \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{v}^1 | s \rangle + \langle s | \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{v}^2 | s \rangle) \quad (2.19)$$

sono esprimibili come

$$\sum_{lm} \sum_{rn} C_{lm}^* C_{rn} \langle lm | \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{v}^1 | rn \rangle \delta_{mn} = \sum_{lm} \sum_{rm} C_{lm}^* C_{rm} \langle l | \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{v}^1 | r \rangle, \quad (2.20)$$

$$\sum_{lm} \sum_{rn} C_{lm}^* C_{rn} \langle lm | \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{v}^2 | rn \rangle \delta_{lr} = \sum_{lm} \sum_{ln} C_{lm}^* C_{ln} \langle m | \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{v}^2 | n \rangle. \quad (2.21)$$

2.3.1 $g_{\mu\nu}$ su $|r, \phi\rangle$

Di rilevanza è l'articolo “*Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles*” ad opera di Hans J. Briegel and Robert Raussendorf [65]. Con il loro lavoro introducono una nuova classe di stati entangled ad M -qubits e ne forniscono una caratterizzazione operativa in termini di misure locali. Introducono la nozione di “*maximal connectedness*” e di “*persistence of entanglement*” per uno stato entangled. Uno stato è *massimamente connesso* se è possibile proiettare qualsiasi coppia di qubit in uno stato di Bell (vedi appendice A.3) agendo con misure locali sui restanti qubits. Per uno stato ad M qubits la “*persistence of entanglement*” indica il numero minimo di misure locali che si devono eseguire per ottenere lo stato completamente disentangled. La situazione generale che gli autori discutono è quella di particelle separate in modo che tra loro possano comunicare soltanto mediante comunicazione classica ed operazioni locali (LOCC) (vedi appendice A.4). Si considera un insieme di qubits posti nei siti di un reticolo tridimensionale ed individuati da un indice j , interagenti attraverso un tipo di interazione a corto range descritta da

$$H_{int} = \hbar g \sum_{j,j'} \delta_{j+1,j'} \left(\frac{1 + \sigma_z^j}{2} \right) \left(\frac{1 - \sigma_z^{j'}}{2} \right), \quad (2.22)$$

con $\delta_{j+1,j'}$ si limita l'interazione ai primi vicini. σ_z^j è una delle matrici di Pauli (vedi appendice B.1). La trasformazione unitaria generata dall'Hamiltoniana di Eq.(2.22) è

$$U(\phi) = \exp\left(-i\phi \sum_j \frac{1+\sigma_z^j}{2} \frac{1-\sigma_z^{j+1}}{2}\right), \quad (2.23)$$

dove $\phi = \int g(t)dt$. Per $g(t) = g = \text{costante}$, $U(\phi) = U(gt)$ è una trasformazione periodica nel tempo e genera delle “oscillazioni di entanglement” della catena. Per i valori di $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, la catena è non entangled. Per tutti gli altri valori invece lo è, ed in particolare risulta *in qualche senso* massimamente entangled per $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$.

Come nell'articolo citato in precedenza ogni qubit dello stato iniziale $|r, 0\rangle$ è preparato nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono autostati di $(1 - \sigma_z)/2$ con autovalori 0 ed 1, così

$$|r, 0\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle). \quad (2.24)$$

Consideriamo gli operatori di proiezione

$$\pi_0^j = \frac{1+\sigma_z^j}{2} \quad \text{e} \quad \pi_1^j = \frac{1-\sigma_z^j}{2},$$

I proiettori π_0^j e π_1^j godono della proprietà

$$\pi_0^j(\alpha_j |0\rangle + \beta_j |1\rangle) = \alpha_j |0\rangle \quad \text{e} \quad \pi_1^j(\alpha_k |0\rangle + \beta_k |1\rangle) = \beta_j |1\rangle.$$

L'Eq. (2.23) diventa

$$U(\phi) = \exp\left(-i\phi \sum_{j=1}^M \pi_0^j \pi_1^{j+1}\right),$$

dove M è il numero di siti del sistema considerato e dove si intende $\pi_1^{M+1} \equiv 0$.

Considerando il j -esimo elemento è possibile dimostrare che

$$U(\phi, j) = \mathbb{1} + (e^{-i\phi} - 1)\pi_0^j \pi_1^{j+1}. \quad (2.25)$$

Considerando $g = 1$ nell'Eq.(2.22) e chiamando $H_{int} \equiv H_0$ e che $U(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\phi)^n H_0^n$ si ottiene, sfruttando le proprietà dei proiettori

$$H_0^n = (\pi_0^1 \pi_1^2)^n = (\pi_0^1 \pi_1^2), \quad \text{con} \quad n \geq 1, \quad \text{e}$$

$$H_0^0 = (\pi_0^1 \pi_1^2)^0 = \mathbb{1}$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned}
 U(\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\phi)^n (\pi_0^1 \pi_1^2)^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\phi)^n (\pi_0^1 \pi_1^2) + \mathbb{1} + (1-1)(\pi_0^1 \pi_1^2) \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\phi)^n \right] (\pi_0^1 \pi_1^2) + \mathbb{1} - \pi_0^1 \pi_1^2 \\
 &= \mathbb{1} + (e^{-i\phi} - 1) \pi_0^1 \pi_1^2.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Applicando l'operatore $U(\phi)$ in quest'ultima forma allo stato (2.43) si ottiene il *nuovo* stato

$$|r, \phi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + e^{-i\phi} |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \tag{2.27}$$

La formula (2.20), nel caso dello stato (2.27) e chiamando i vettori unitari per semplicità di notazione $\mathbf{v}^1 \equiv \mathbf{w}$, $\mathbf{v}^2 \equiv \mathbf{z}$, con $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ e $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3\}$ e $\cos(\frac{\phi}{2}) \equiv c$, $\sin(\frac{\phi}{2}) \equiv s$ si riscrive come

$$c(cw_1 + sw_2) \frac{d\xi^1}{2}.$$

Allo stesso modo la (2.21) diventa

$$c(cz_1 - sz_2) \frac{d\xi^2}{2},$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} |\langle dU, s|U, s\rangle - \langle U, s|dU, s\rangle|^2 \\
 &= -c^2(cw_1 + sw_2)^2 \left(\frac{d\xi^1}{2}\right)^2 + \\
 & \quad -c^2(cz_1 - sz_2)^2 \left(\frac{d\xi^2}{2}\right)^2 + \\
 & \quad -2c^2(cw_1 + sw_2)(cz_1 - sz_2) \left(\frac{d\xi^1}{2}\right) \left(\frac{d\xi^2}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Inoltre si ottiene

$$\begin{aligned}
 \langle dU, s | dU, s \rangle = & \frac{1}{4} \left\{ (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + \right. \\
 & d\xi^1 d\xi^2 \left[w_3 [(-1 + C)z_1 - Sz_2] + \right. \\
 & + w_2 [(-1 + C)z_2 + S(z_1 - z_3)] + \\
 & \left. \left. + w_1 [(1 + C)z_1 - Sz_2 + (1 - C)z_3] \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

dove si è posto $\cos(\phi) \equiv C$ e $\sin(\phi) \equiv S$

2.3.2 $g_{\mu\nu}$ su $|\beta, \theta\rangle$

La seconda classe di stati presi in considerazione ha la forma

$$|\beta, \theta\rangle = \cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle$$

In questo caso i calcoli sono notevolmente semplificati dato il numero inferiore di coefficienti. Ponendo $C \equiv \cos(2\theta)$ e $S \equiv \sin(2\theta)$, la metrica di Fubini-Study assume la forma

$$\begin{aligned}
 & (1 - C^2 w_3^2) \left(\frac{d\xi^1}{2} \right)^2 + (1 - C^2 z_3^2) \left(\frac{d\xi^2}{2} \right)^2 + \\
 & + 2 \left[S(w_1 z_1 - w_2 z_2) + S^2(w_3 z_3) \right] \frac{d\xi^1}{2} \frac{d\xi^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nel caso in cui sul primo qubit dello stato $|\beta, \theta\rangle$ si esegua una trasformazione locale

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle \quad |1\rangle \rightarrow e^{i\varphi} |1\rangle,$$

lo stato diventa

$$|\beta, \theta, \varphi\rangle = \cos(\theta) |00\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta) |11\rangle. \tag{2.31}$$

Il tensore ad esso associato ha una forma simile al caso precedente, ma in questo caso gli elementi fuori diagonale contengono il parametro φ . Infatti, introducendo le definizioni $s_\varphi \equiv$

$\sin(\varphi)$ e $c_\varphi \equiv \cos(\varphi)$ la metrica assume la forma:

$$\begin{aligned} & (1 - C^2 w_3^2) \left(\frac{d\xi^1}{2} \right)^2 + (1 - C^2 z_3^2) \left(\frac{d\xi^2}{2} \right)^2 + \\ & + 2 \left\{ S[w_1(c_\varphi z_1 + s_\varphi z_2) + w_2(s_\varphi z_1 - c_\varphi z_2)] + S^2(w_3 z_3) \right\} \frac{d\xi^1}{2} \frac{d\xi^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nel paragrafo 3.3.2 si metterà in evidenza come nonostante la forma metrica sia differente, le proprietà della distanza risultino invariate.

2.4 Calcolo entropia di Von Neumann

Al fine di calcolare l'entropia di Von Neumann per $|r, \phi\rangle$ si riportano la matrice densità e la matrice densità ridotta

$$\rho = |r, \phi\rangle \langle r, \phi|, \quad \rho_1 = \text{tr}_2 \rho = \sum_{j=0,1} \mathbb{1} \otimes \langle j| \rho |j\rangle.$$

La matrice densità ridotta ha la forma

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+e^{-i\phi}}{2} \\ \frac{1+e^{i\phi}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

che ha autovalori $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \cos \phi/2}{2}$. Ricordando l'entropia di Von Neumann

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\text{tr}(\rho_1 \log(\rho_1)) \\ &= -\lambda_1 \log(\lambda_1) - \lambda_2 \log(\lambda_2), \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dalla Fig.(2.1) si vede che $S(\phi = 0, 2\pi) = 0$ e che risulta massima in $\phi = \pi$.

Per lo stato $|\beta, \theta\rangle$ invece

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e l'entropia di Von Neumann in funzione di θ appare:

$$S(\theta) = \cos^2(\theta)(\log(\cos^2(\theta)) - \sin^2(\theta) \log(\sin^2(\theta))) \quad (2.36)$$

Dalla Fig.(2.2) si vede che per $S(\theta = 0, \frac{\pi}{2}) = 0$ e che risulta massima in $\theta = \frac{\pi}{4}$.

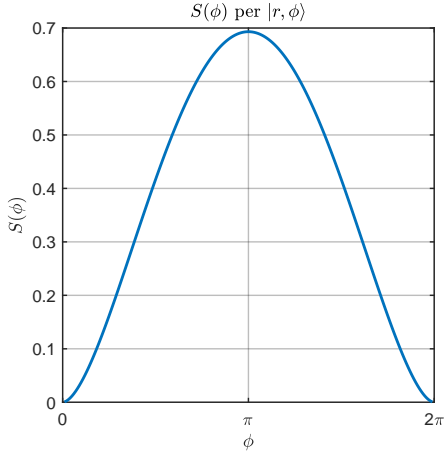


Figura 2.1: Entropia di Von Neumann $S(\phi)$ per lo stato $|r, \phi\rangle$

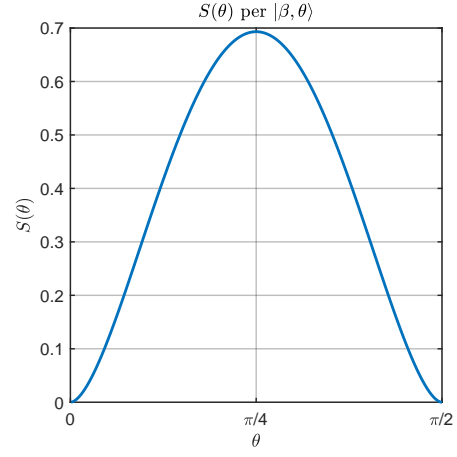


Figura 2.2: Entropia di Von Neumann $S(\theta)$ per lo stato $|\beta, \theta\rangle$

2.5 Sistema ad M qubits

In questa sezione si considera il caso generale di un sistema ad M qubits. L'operatore di entanglement è quello introdotto nell'articolo [65] e visto precedentemente. Si denota con $\Pi_0^j = (\mathbb{1} + \sigma_3^j)/2$ e $\Pi_1^j = (\mathbb{1} - \sigma_3^j)/2$ gli operatori di proiezione sugli autostati di σ_3^j , $|0\rangle_j$, con autovalore $+1$ e $|1\rangle_j$ con autovalore -1 relativi al j -esimo qubit. L'operatore che genera l'entanglement è

$$U_0(\phi) = \exp(-i\phi H_0), \quad (2.37)$$

dove

$$H_0 = \sum_{j=1}^{M-1} \Pi_0^j \Pi_1^{j+1}. \quad (2.38)$$

Risulta

$$U_0(\phi) = \prod_{j=1}^{M-1} \left(\mathbb{1} + \alpha \Pi_0^j \Pi_1^{j+1} \right), \quad (2.39)$$

dove

$$\alpha = (e^{-i\phi} - 1). \quad (2.40)$$

Allora, l'operatore (2.39) è diagonale sui vettori di base $\{|0 \cdots 0\rangle, |0 \cdots 01\rangle, \dots, |1 \cdots 1\rangle\}$. Ogni vettore della base è identificato da M interi $n_0, \dots, n_{M-1} = 0, 1$ attraverso l'identità

$$|\{n\}\rangle = |n_{M-1} \ n_{M-2} \ \dots \ n_0\rangle. \quad (2.41)$$

Si numerano i vettori in accordo con la rappresentazione binaria

$$|k\rangle = |\{n^k\}\rangle, \quad k = \sum_{j=0}^{M-1} n_j^k 2^j,$$

dove n_ν^k è la ν -esima cifra del numero k in rappresentazione binaria e $k = 0, \dots, 2^M - 1$. Gli autovalori λ_k che corrispondono allo stato $|k\rangle$ della base risultano

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n(k)} \binom{n(k)}{j} \alpha^j, \quad (2.42)$$

dove $n(k)$ è il numero di coppie 01 contenuto nella sequenza del vettore di base $|k\rangle$.

Il sistema inizialmente è preparato nello stato fattorizzato

$$|r, 0\rangle = \bigotimes_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_j + |1\rangle_j) = 2^{-M/2} \sum_{k=0}^{2^M-1} |k\rangle, \quad (2.43)$$

che equivale al prodotto tensore degli autostati di σ_1^j . L'azione dell'operatore unitario non-locale U_0 sullo stato iniziale $|r, 0\rangle$ fornisce il nuovo stato

$$|r, \phi\rangle = U_0(\phi)|r, 0\rangle = 2^{-M/2} \sum_{k=0}^{2^M-1} \sum_{j=0}^{n(k)} \binom{n(k)}{j} \alpha^j |k\rangle. \quad (2.44)$$

Per $\phi = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, lo stato è separabile, per tutte le altre scelte di ϕ è entangled. In particolare come è mostrato in [65], i valori di $\phi = (2k+1)\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), danno lo stato massimamente entangled.

La seconda classe di stati che si considera è

$$|GHZ, \theta\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|2^M - 1\rangle. \quad (2.45)$$

Per $\theta = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, gli stati sono separabili, mentre $\theta = k\pi/2 + \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$ seleziona gli stati con massimo entanglement. Al fine di riscrivere la metrica utile all'entanglement derivata dalla Fubini-Study nel caso degli stati (2.44), si considerano i vettori di base $|k\rangle$. Risulta

$$(\mathbf{v}^\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu)|k\rangle = (-1)^{n_\nu^k} v_3^\nu |k\rangle + \delta_{n_\nu^k, 0} v_+^\nu |k + 2^\nu\rangle + \delta_{n_\nu^k, 1} v_-^\nu |k - 2^\nu\rangle, \quad (2.46)$$

dove $v_{\pm}^{\nu} = v_1^{\nu} \pm i v_2^{\nu}$. Per $|j\rangle = |\{n^j\}\rangle$, dalle equazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} \langle j | (\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | k \rangle &= (-1)^{n_{\nu}^k} v_3^{\nu} \delta_{j,k} + \\ &\delta_{n_{\nu}^k,0} v_+^{\nu} \delta_{j,k+2^{\nu}} + \delta_{n_{\nu}^k,1} v_-^{\nu} \delta_{j,k-2^{\nu}} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Si deriva l'equazione

$$\begin{aligned} \langle r, \phi | (\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | r, \phi \rangle &= \\ \sum_{k=0}^{2^M-1} \left[(-1)^{n_{\nu}^k} v_3^{\nu} |c_k|^2 + \right. & \\ \left. \delta_{n_{\nu}^k,0} v_+^{\nu} c_{k+2^{\nu}}^* c_k + \delta_{n_{\nu}^k,1} v_-^{\nu} c_{k-2^{\nu}}^* c_k \right] , & \end{aligned} \quad (2.48)$$

dove

$$c_k = 2^{-M/2} \lambda_k . \quad (2.49)$$

Nel caso $\mu \neq \nu$ si ottiene,

$$\begin{aligned} \langle r, \phi | (\mathbf{v}^{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mu})(\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | r, \phi \rangle &= \\ \sum_{k=0}^{2^M-1} \left[(-1)^{n_{\mu}^k + n_{\nu}^k} v_3^{\mu} v_3^{\nu} |c_k|^2 + \right. & \\ (-1)^{n_{\mu}^{k+2^{\nu}}} \delta_{n_{\nu}^k,0} v_3^{\mu} v_+^{\nu} c_{k+2^{\nu}}^* c_k + & \\ (-1)^{n_{\mu}^{k-2^{\nu}}} \delta_{n_{\nu}^k,1} v_3^{\mu} v_-^{\nu} c_{k-2^{\nu}}^* c_k + & \\ (-1)^{n_{\nu}^k} \delta_{n_{\mu}^{k-2^{\mu}},0} v_-^{\mu} v_3^{\nu} c_{k-2^{\mu}}^* c_k + & \\ (-1)^{n_{\nu}^k} \delta_{n_{\mu}^{k+2^{\mu}},1} v_+^{\mu} v_3^{\nu} c_{k+2^{\mu}}^* c_k + & \\ \delta_{n_{\mu}^{k-2^{\mu}},0} \delta_{n_{\nu}^{k-2^{\nu}},0} v_-^{\mu} v_+^{\nu} c_{k-2^{\mu}}^* c_{k-2^{\nu}} + & \\ \delta_{n_{\mu}^{k-2^{\mu}},0} \delta_{n_{\nu}^{k+2^{\nu}},1} v_-^{\mu} v_-^{\nu} c_{k-2^{\mu}}^* c_{k+2^{\nu}} + & \\ \delta_{n_{\mu}^{k+2^{\mu}},1} \delta_{n_{\nu}^{k-2^{\nu}},0} v_+^{\mu} v_+^{\nu} c_{k+2^{\mu}}^* c_{k-2^{\nu}} + & \\ \left. \delta_{n_{\mu}^{k+2^{\mu}},1} \delta_{n_{\nu}^{k+2^{\nu}},1} v_+^{\mu} v_-^{\nu} c_{k+2^{\mu}}^* c_{k+2^{\nu}} \right] , & \end{aligned} \quad (2.50)$$

e, per $\mu = \nu$ si ha

$$\langle r, \phi | (\mathbf{v}^{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mu})(\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | r, \phi \rangle = 1 . \quad (2.51)$$

La metrica derivata dalla Fubini-Study nel caso degli stati GHZ (2.45) risulta

$$\begin{aligned} \langle GHZ, \theta | (\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | GHZ, \theta \rangle &= \\ \cos^2(\theta) \langle 0 | (\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | 0 \rangle + \sin^2(\theta) \langle 2^M - 1 | (\mathbf{v}^{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nu}) | 2^M - 1 \rangle &= \\ \cos(2\theta) v_3^{\nu} . & \end{aligned} \quad (2.52)$$

Per $\mu \neq \nu$ si ha

$$\begin{aligned} \langle GHZ, \theta | (\mathbf{v}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\mu) (\mathbf{v}^\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu) | GHZ, \theta \rangle = \\ \cos^2(\theta) \langle 0 | (\mathbf{v}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\mu) (\mathbf{v}^\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu) | 0 \rangle + \\ \sin^2(\theta) \langle 2^M - 1 | (\mathbf{v}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\mu) (\mathbf{v}^\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu) | 2^M - 1 \rangle = \\ v_3^\mu v_3^\nu. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Per $\mu = \nu$ si ha

$$\langle GHZ, \theta | (\mathbf{v}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\mu) (\mathbf{v}^\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu) | GHZ, \theta \rangle = 1. \quad (2.54)$$

La metrica risulta per $\mu \neq \nu$

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [1 - \cos^2(2\theta)] v_3^\mu v_3^\nu, \quad (2.55)$$

e

$$g_{\mu\mu} = \frac{1}{4} [1 - \cos^2(2\theta) v_3^\mu v_3^\mu]. \quad (2.56)$$

Al fine di ottenere l'espressione per il determinante della metrica si ricorre alla seguente relazione. Data una matrice m con elementi

$$m_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \lambda_\mu + f_\mu f_\nu \quad (2.57)$$

è semplice mostrare che

$$\det(m) = \prod_\mu \lambda_\mu + \sum_\mu f_\mu^2 \prod_{\nu \neq \mu} \lambda_\nu \quad (2.58)$$

allora ponendo $c \equiv \cos(2\theta)$ si ha,

$$f_\mu = \sqrt{(1 - c^2)} v_3^\mu, \quad (2.59)$$

e

$$\lambda_\mu = 1 - v_3^{\mu 2}, \quad (2.60)$$

risulta $g = m/4$ e quindi

$$\det(g) = \left[1 + (1 - c^2) \sum_{i=1}^M \frac{v_3^{i2}}{1 - v_3^{i2}} \right] \prod_{j=1}^M \frac{(1 - v_3^{j2})}{4}. \quad (2.61)$$

Così, quando $c = \pm 1$ (caso separabile) g è diagonale. Inoltre se per una delle componenti del vettore unitario vale $v_3^\mu = 1$ allora $\det(g) = 0$.

Capitolo 3

Studio analitico e numerico della metrica

3.1 Correlazione quantistica

Riprendendo l'Eq.(2.16)

$$\langle dU, s | dU, s \rangle - \frac{1}{4} | \langle dU, s | U, s \rangle - \langle U, s | dU, s \rangle |^2 \quad (3.1)$$

Utilizzando le Eq.(2.12) e (2.11) il primo termine risulta

$$\sum_{j,k=1}^M \langle s | d\tilde{U}'^{j\dagger} d\tilde{U}'^k | s \rangle = \sum_j \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j)^2 | s \rangle \left(\frac{d\xi^j}{2} \right)^2 + \sum_{j \neq k} \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) (\boldsymbol{\sigma}^k \cdot \mathbf{v}^k) | s \rangle \left(\frac{d\xi^j}{2} \right) \left(\frac{d\xi^k}{2} \right)$$

mentre il secondo termine diventa

$$- \sum_j (\langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) | s \rangle)^2 \left(\frac{d\xi^j}{2} \right)^2 - \sum_{j \neq k} \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) | s \rangle \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^k \cdot \mathbf{v}^k) | s \rangle \left(\frac{d\xi^j}{2} \right) \left(\frac{d\xi^k}{2} \right)$$

Mettendo in evidenza gli elementi diagonali del tensore metrico

$$g_{jj} = \frac{1}{4} [\mathbb{1} - \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) | s \rangle^2]$$

e quelli fuori diagonale

$$g_{jk} = \frac{1}{4} \left[- \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) (\boldsymbol{\sigma}^k \cdot \mathbf{v}^k) | s \rangle - \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^j \cdot \mathbf{v}^j) | s \rangle \langle s | (\boldsymbol{\sigma}^k \cdot \mathbf{v}^k) | s \rangle \right]$$

Si mette in evidenza che g_{jk} assume la forma $\langle s|A^j A^k|s\rangle - \langle s|A^j|s\rangle \langle s|A^k|s\rangle$, dove $A^j \equiv \boldsymbol{\sigma}^j \mathbf{v}^j$, ed è evidente che se lo stato $|s\rangle$ è separabile risulta pari a 0. Infatti

$$\begin{aligned} \langle s|A^j A^k|s\rangle &= (\langle s_j| \otimes \langle s_k|) |A^j A^k| (|s_j\rangle \otimes |s_k\rangle) \\ &= \langle s_j|A^j|s_j\rangle \langle s_k|A^k|s_k\rangle \\ &= \langle s|A^j|s\rangle \langle s|A^k|s\rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

Di conseguenza, se lo stato è *entangled* gli elementi fuori diagonale risultano diversi da 0.

3.1.1 Rotazioni del tensore metrico

Nel caso di uno stato non separabile si è visto che il tensore $g_{\mu\nu}$ non appare diagonale. Presa una qualsiasi direzione, tale risultato è indice di un coinvolgimento di tutti i gradi di libertà nel definire la distanza tra uno stato di riferimento ed una sua variazione. Tramite una trasformazione ortogonale

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu},$$

dove \tilde{g} è diagonale. Si sottolinea che l'azione di diagonalizzazione del tensore corrisponde ad una ricombinazione degli indici che compaiono nell'espressione di $g_{\mu\nu}$ e tale operazione coinvolge contemporaneamente tutti i qubits del sistema, ed in questo senso può definirsi una trasformazione *non locale*.

3.2 Verifica delle proprietà di $g_{\mu\nu}$

Di seguito si esplicita il tensore g associato alla forma metrica $g_{\mu\nu}$ nei casi di massimo entanglement e di separabilità dello stato per $M = 2$.

3.2.1 Analisi di $g_{\mu\nu}$ per $|r, \phi\rangle$

Adattando le Equazioni (2.28) e (2.29) al caso particolare di $|r, \phi = 0\rangle$ si ottiene l'espressione per la metrica

$$\sum_{j,k} g_{jk} d\xi^j d\xi^k = \frac{1}{4} [(1 - w_1^2)(d\xi^1)^2 + (1 - z_1^2)(d\xi^2)^2] \quad (3.3)$$

dove i versori delle rotazioni sui due siti sono dati da $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ e $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3\}$.

In questo modo

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - w_1^2 & 0 \\ 0 & 1 - z_1^2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Il tensore è diagonale e come visto in Eq.(3.2) si può asserire che in questa situazione non sussiste correlazione tra i qubits. Per $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, lo stato $|r, \phi\rangle$ è completamente *separabile*. Infatti in questo caso

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(|00\rangle + e^{i\phi} |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right) &= \frac{1}{2} \left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|0\rangle + |1\rangle \right) \otimes \left(|0\rangle + |1\rangle \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nel caso di $|r, \phi = \pi\rangle$ si ottiene invece

$$\sum_{j,k} g_{jk} d\xi^j d\xi^k = \frac{1}{4} \left[(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + 2(-w_3 z_1 - w_2 z_2 + w_1 z_3) (d\xi)^1 (d\xi)^2 \right] \quad (3.6)$$

ponendo il termine misto uguale a $2A$ si ottiene il tensore

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & A \\ A & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Per $\phi = \pi, 3\pi, \dots$, lo stato $|r, \phi\rangle$ è *massimamente entangled*. Infatti, attraverso trasformazioni locali unitarie è possibile condurre lo stato ottenuto per tali valori di ϕ ad uno stato di Bell (vedi appendice A.3). Infatti lo stato

$$\frac{1}{2} \left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right).$$

con la trasformazione sul qubit 1

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle),$$

che corrisponde ad una rotazione attorno all'asse y di un angolo $\xi = -\frac{\pi}{2}$ (vedi appendice B.2), viene trasformato nello stato di Bell

$$R_y^1 \left(-\frac{\pi}{2} \right) R_y^2(0) |r, \pi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle).$$

3.2.2 Analisi di $g_{\mu\nu}$ per $|\beta, \theta\rangle$

Come nel caso precedente si riporta l'espressione del tensore g in alcuni casi particolari. Adattando l'Eq.(2.30) per $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ si ottiene il tensore g

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - w_3^2 & 0 \\ 0 & 1 - z_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Nuovamente, gli elementi non diagonali sono pari a 0. I qubits non sono correlati. Lo stato $|\beta, \theta\rangle$ in esame è completamente *separabile* per i suddetti valori di θ . Infatti

$$|\beta, \theta = 0\rangle = |00\rangle \quad |\beta, \theta = \frac{\pi}{2}\rangle = |11\rangle, \quad |\beta, \theta = \pi\rangle = -|00\rangle$$

Invece per $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'Eq.(2.30) porta ad un tensore della forma

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & B \\ B & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

dove $B = w_1 z_1 - w_2 z_2 + w_3 z_3$, generalmente diverso da 0. In questo caso, a meno di una trasformazione locale, lo stato si riscrive nella forma

$$|\beta, \theta = \frac{\pi}{4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

che corrisponde ad uno stato di Bell (vedi appendice A.3) *massimamente entangled*.

In merito allo stato definito dalla (2.31) si sottolinea che per $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ il tensore ha la stessa forma della (3.8), cioè risulta diagonale per gli stessi valori di θ . La trasformazione eseguita sul primo qubit non fa variare le condizioni di separabilità dello stato. Per $\theta = \frac{\pi}{4}$ la forma è simile ma non uguale, compare la dipendenza di φ negli elementi diagonali.

In questo caso il tensore ha la forma

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & B' \\ B' & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

dove $B' = w_2(s_\varphi z_1 - c_\varphi z_2) + w_1(c_\varphi z_1 + s_\varphi z_2) + w_3 z_3$.

3.3 Verifica delle proprietà della distanza

Dopo aver ottenuto un tensore metrico della forma

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

si intende studiare qualitativamente e quantitativamente la distanza ad esso associata. Data g si opera la diagonalizzazione che porta a

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

\tilde{g} è ottenuta da g mediante una trasformazione di similitudine che non modifica la traccia. Allora

$$\text{Tr } g = a + d = \alpha + \beta = \text{Tr } \tilde{g},$$

ed è chiaro che in questo caso la distanza avrà la forma

$$dS^2 = \alpha dx^2 + \beta dy^2,$$

dove dx e dy corrispondono a due spostamenti ortogonali. La distanza rappresentata da dS^2 è proporzionale alla somma degli autovalori, cioè alla traccia del tensore.

Nei paragrafi successivi si rappresenta graficamente la traccia del tensore metrico ottenuto. Si mostra la dipendenza dal parametro che identifica il grado di entanglement e dalle componenti dei versori delle rotazioni sui due siti.

3.3.1 Traccia di g per $|r, \phi\rangle$

Dalle Eq.(2.28) e (2.29) si ricava per la traccia di g l'espressione

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ 2 - c^2 \left[(cw_1 + sw_2)^2 + (cz_1 - sz_2)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 2 - c^2 \left[c^2(w_1^2 + z_1^2) + s^2(w_2^2 + z_2^2) + 2cs(w_1w_2 - z_1z_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dalla prima espressione emerge che il valore massimo della traccia si ha quando la quantità che è sottratta vale zero, poiché è certamente non negativa. La condizione più immediata è

$$c^2 = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0 \rightarrow \phi = \pi + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

che corrisponde al caso in cui $|r, \phi\rangle$ è in uno stato *massimamente entangled*.

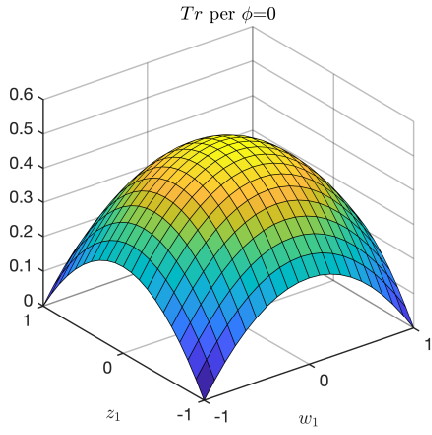
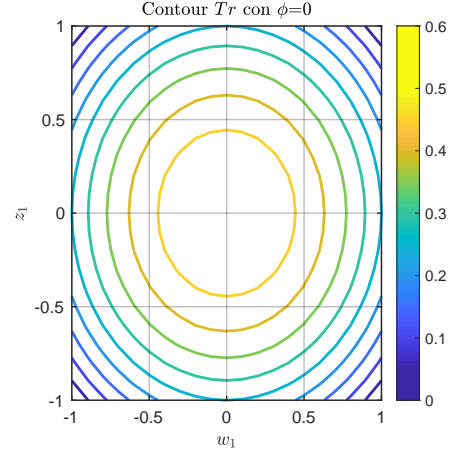
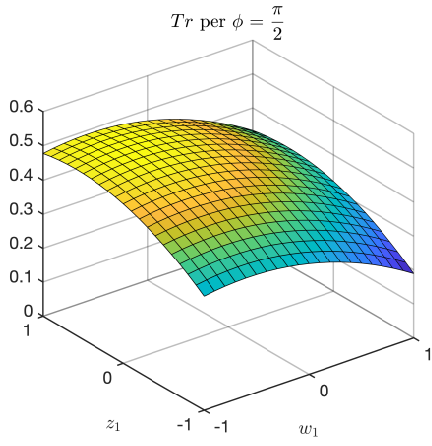
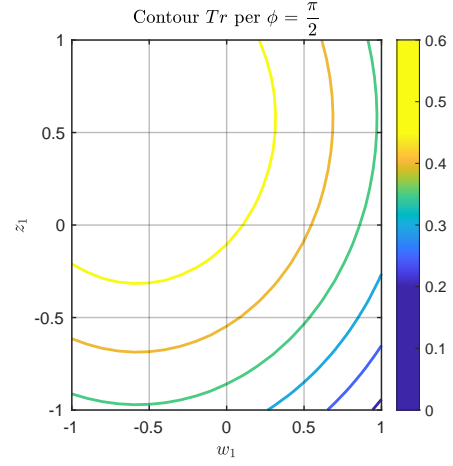
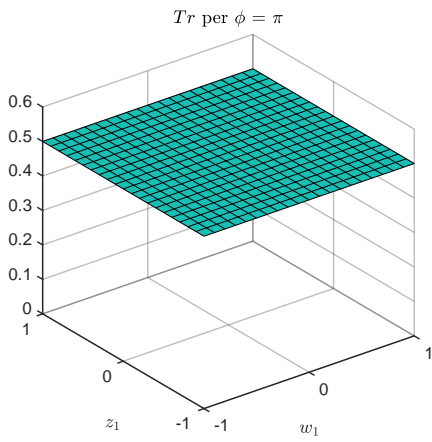
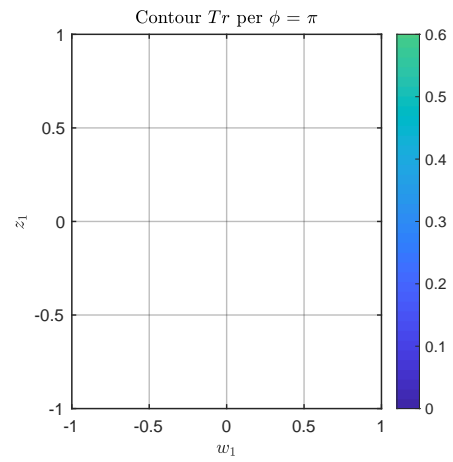
L'altra condizione risulta:

$$[c^2(w_1^2 + z_1^2) + s^2(w_2^2 + z_2^2) + 2cs(w_1w_2 - z_1z_2)] = 0 \quad (3.12)$$

che rappresenta un'equazione in 5 incognite. Per l'arbitrarietà di \mathbf{w} e di \mathbf{z} si sceglie di fissare il valore della seconda componente dei due versori

$$w_2 = z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il numero di incognite in Eq. (3.12) è ridotto a 3 ed è possibile inserire in un grafico l'andamento della traccia in funzione di w_1 e di z_1 , considerando ϕ un parametro che varia.

Figura 3.1: Tr per $\phi = 0$ Figura 3.2: Contour Tr per $\phi = 0$ Figura 3.3: Tr per $\phi = \frac{\pi}{2}$ Figura 3.4: Contour Tr per $\phi = \frac{\pi}{2}$ Figura 3.5: Tr per $\phi = \pi$ Figura 3.6: Contour Tr per $\phi = \pi$

3.3.2 Traccia di g per $|\beta, \theta\rangle$

Dall' Eq. (2.30) la traccia di g corrisponde a

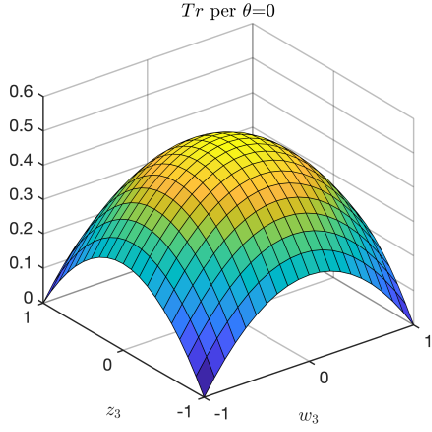
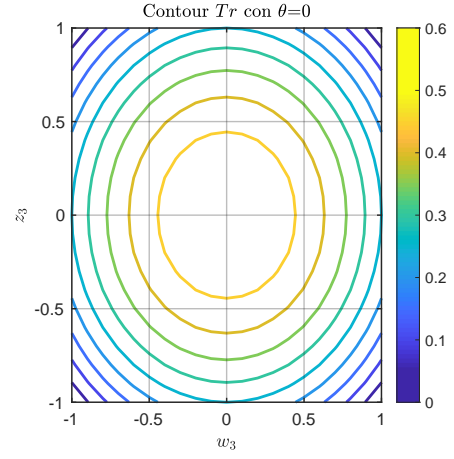
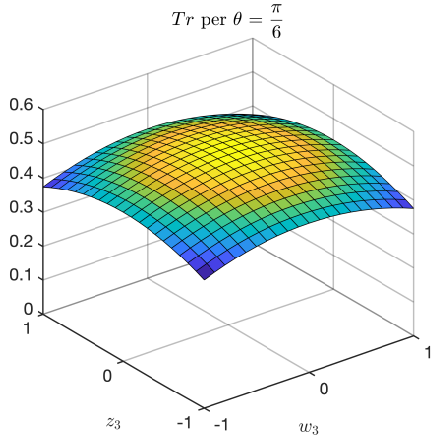
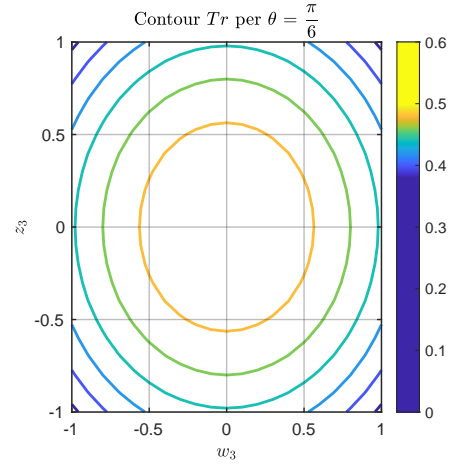
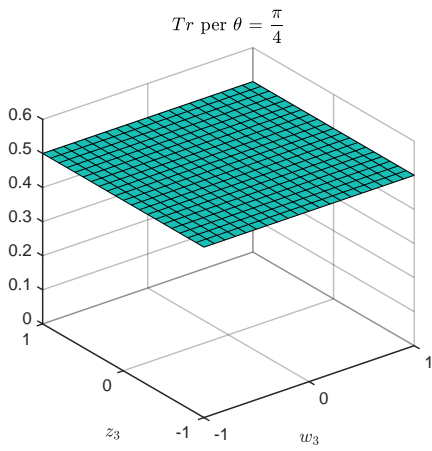
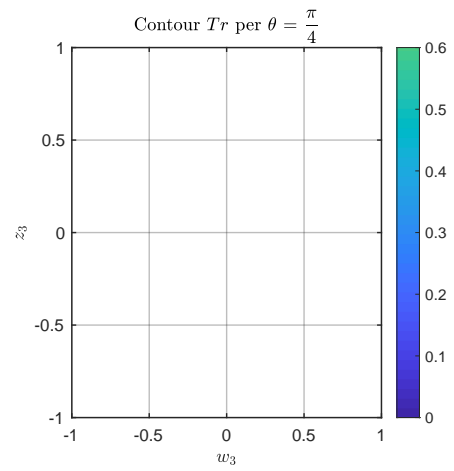
$$\frac{1}{4} [2 - \cos^2(2\theta) (w_3^2 + z_3^2)]. \quad (3.13)$$

Come nel caso precedente la traccia risulta massima quando la quantità sottratta è pari a 0. Ovvero nelle condizioni

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) = 0 & \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ w_3^2 + z_3^2 = 0 & \rightarrow w_3 = z_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La prima espressione esplicita i valori di θ per cui lo stato $|\beta, \theta\rangle$ è *entangled*. La seconda esprime un caso particolare in cui specifici valori di w_3, z_3 possono rendere massima la distanza.

A differenza del caso precedente è possibile inserire immediatamente in un grafico l'espressione della traccia.

Figura 3.7: Tr per $\theta = 0$ Figura 3.8: Contour Tr per $\theta = 0$ Figura 3.9: Tr per $\theta = \frac{\pi}{6}$ Figura 3.10: Contour Tr per $\theta = \frac{\pi}{6}$ Figura 3.11: Tr per $\theta = \frac{\pi}{4}$ Figura 3.12: Contour Tr per $\theta = \frac{\pi}{4}$

Capitolo 4

Conclusioni

La presenza di entanglement è necessaria per la generazione di correlazioni quantistiche non locali. In tutti gli esperimenti dove l'entanglement svolge un ruolo centrale è fondamentale avere una procedura che permetta di quantificare il grado di entanglement contenuto in un determinato stato quantistico. Nel presente lavoro di tesi si è definita una distanza tra raggi dello spazio di Hilbert, derivata dalla metrica di Fubini-Study, che ci permette di quantificare il grado di entanglement di uno stato puro quantistico. In particolare dopo aver derivato la forma generale del tensore metrico per uno stato generico, la metrica così ottenuta è stata calcolata nel caso di due famiglie di stati dipendenti da un parametro. Questi ultimi sono stati di M qubits che al variare del parametro hanno un differente grado di entanglement. Lo studio analitico e numerico (nel caso $M = 2$) delle proprietà della metrica derivata ha evidenziato come questa sia capace di quantificare il grado di entanglement di uno stato. Infatti è risultato che, invariabilmente con la configurazione dello stato iniziale, allo stato con il grado più alto di entanglement è sempre associata la massima distanza.

L'approccio proposto nella presente tesi risulta promettente per future indagini di autovalori e autovettori del tensore metrico introdotto, da interpretare come i “modi” collettivi del sistema da un punto di vista delle proprietà di entanglement.

Una possibile ulteriore applicazione è quella legata al problema inverso, cioè dell'individuazione dello stato che rende massima la distanza introdotta una volta dato un operatore di deformazione. La possibilità di realizzare quest'ultimo compito avrebbe ruolo nella progettazione di stati quantistici ad hoc dove l'entanglement gioca un ruolo determinante, ad esempio nel campo della trasmissione sicura dei dati, che prende il nome di crittografia quantistica, della computazione quantistica, che tratta la memorizzazione e l'elaborazione delle informazioni ad una velocità molto maggiore di qualsiasi altra macchina classica e della metrologia quantistica.

Appendice A

Quantum bits

A.1 Introduzione al qubit

Il bit è l'unità fondamentale di cui fa uso la teoria dell'informazione classica. In modo analogo il bit quantistico, o *qubit* rappresenta l'unità di informazione quantistica. Come un bit può assumere i valori 0 ed 1, i due possibili stati per il qubit sono $|0\rangle$ e $|1\rangle$, espressi nella *notazione di Dirac*. Un qubit, a differenza del bit classico, può anche trovarsi in una combinazione lineare di tali stati, chiamata anche *sovrapposizione*

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (\text{A.1})$$

dove α e β sono numeri complessi. Lo stato di un qubit corrisponde ad un vettore nello spazio complesso 2-dimensionale. I possibili risultati della misura di un qubit sono 0 con probabilità $|\alpha|^2$ oppure 1 con probabilità $|\beta|^2$, risulterà allora per la condizione di una probabilità totale pari ad 1 che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Fino a che non viene *misurato*, il qubit esiste in un *continuo* di stati tra $|0\rangle$ ed $|1\rangle$. I qubits, come i bits, corrispondono ad oggetti fisici reali rappresentabili

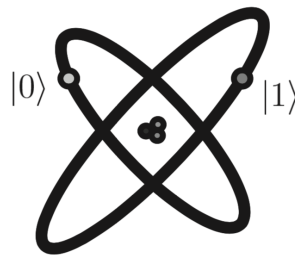


Figura A.1: Qubit rappresentato da due livelli elettronici in un atomo.

sperimentalmente. I sistemi con cui realizzare un qubit sono molteplici, ma il motivo per cui vengono trattati matematicamente come oggetti *astratti* è il vantaggio che tale metodo fornisce. È possibile costruire teorie generali di informazione quantistica senza la necessità di definire un apparato fisico. Per comprendere tuttavia come è possibile realizzare un qubit

si riportano varie situazioni: i due diversi stati di polarizzazione del fotone; l'allineamento dello spin nucleare in un campo magnetico uniforme; lo stato fondamentale che chiameremo $|0\rangle$ e quello eccitato $|1\rangle$ di un elettrone che orbita attorno ad un atomo come in Fig.(A.1). Fornendo un'opportuna quantità di energia all'atomo per un dato intervallo temporale si può indurre una transizione del tipo $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e viceversa. Il caso interessante si ha riducendo tale intervallo. Lo stato iniziale $|0\rangle$ potrà trovarsi in uno stato intermedio tra $|0\rangle$ ed $|1\rangle$.

A.2 Sfera di Bloch

L'equazione A.1 si può riscrivere come:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right). \quad (\text{A.2})$$

dove θ , φ e γ sono numeri reali. Ignorando il fattore di fase iniziale otteniamo lo stato

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (\text{A.3})$$

I valori θ e φ definiscono un punto nella cosiddetta “sfera di Bloch” come mostrato in Fig.(A.2). La sfera di Bloch è uno strumento utile per visualizzare le operazioni che si eseguono sui singoli qubit. Non esiste tuttavia una generalizzazione della sfera di Bloch per multiqubits. Sulla sfera esistono infiniti punti e in linea teorica sono rappresentabili infiniti valori. È necessario richiamare il fatto che la misura su un qubit può fornire esclusivamente due valori, 0 o 1.

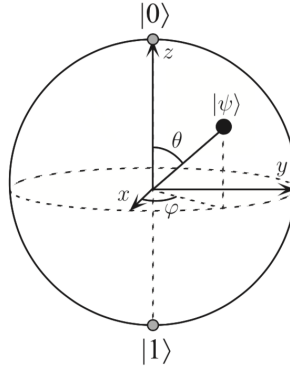


Figura A.2: Rappresentazione di un qubit tramite la sfera di Bloch.

Inoltre, le misure cambiano lo stato del qubit che, da una sovrapposizione di $|0\rangle$ ed $|1\rangle$, collassa in uno dei due stati in modo consistente con il risultato della misura. Da una singola misura si ottiene un'unica informazione sullo stato del qubit. È necessario che siano preparate infinite copie del qubit in modo da poter determinare α e β per il qubit in Eq.(A.1).

A.3 Multiple qubits e Stati di Bell

Nel caso di un sistema a due qubits, la base è denotata come $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Una coppia di qubits può anche trovarsi in una loro sovrapposizione, con coefficienti complessi chiamati anche “*ampiezze*”

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle$$

La condizione che la somma delle probabilità sia pari ad 1 $\sum_{x \in \{0,1\}^2} |\alpha_x|^2 = 1$ è detta *normalizzazione*. La notazione $\{0,1\}^2$ indica il set di stringhe di lunghezza 2, dove ogni lettera può valere 0 o 1. La probabilità di ottenere 0 misurando il primo qubit è pari a $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$, e la conseguenza di tale misura è quella di lasciare lo stato nella forma

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}},$$

dove si è già esplicitata la normalizzazione.

Si può generalizzare considerando un sistema di n qubits. La generica base è della forma $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle$ e lo stato di un tale sistema è descritto da 2^n coefficienti, o ampiezze.

Uno stato a due qubit di particolare interesse è lo *stato di Bell*

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Questo particolare stato ha un ruolo centrale nel teletrasporto quantistico e nel “superdense coding” e rappresenta un prototipo per molti altri stati quantistici. Misurando il primo qubit dello stato di Bell i possibili risultati sono: 0 con probabilità $1/2$, lasciando lo stato in $|\psi'\rangle = |00\rangle$ e 1 con probabilità $1/2$ con $|\psi'\rangle = |11\rangle$ e di conseguenza sul secondo qubit si misura lo stesso valore che si ottiene dalla misura sul primo. É in questa situazione che i risultati delle misure si intendono *correlati*. Inoltre, eseguendo operazioni del tipo LOCC (vedi appendice A.4) sul primo o sul secondo qubit la correlazione tra i risultati delle misure continua ad essere presente. Fino ad ora è stato citato un solo stato di Bell. Le stesse conclusioni possono essere tratte per i restanti tre stati, ed è possibile ottenere una loro espressione attraverso

$$|\beta_{x,y}\rangle = \frac{|0,y\rangle + (-1)^x |1,\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}},$$

selezionando $x, y \in \{0,1\}$.

A.4 LOCC

Un sistema quantistico multipartito è distribuito in molteplici *parti* che posso interagire localmente con i loro sottosistemi attraverso misure ed operazioni quantistiche. Le parti sono libere di comunicare qualsiasi informazione classica, incluse i risultati delle misure ottenute in tempi precedenti. Operazioni quantistiche implementate in tal modo sono note come LOCC, operazioni locali e comunicazione classica. Le operazioni di tipo LOCC rappresentano un particolare sottoinsieme di tutte le osservabili realizzabili fisicamente sull'intero sistema.

Si considerano i due classici interlocutori, che corrispondono a due *parti*, denominati Alice e Bob. I due sono separati in due laboratori distanti. Hanno a disposizione stati quantistici pre-condivisi precedentemente e ciò rappresenta la loro risorsa di entanglement. Sono in grado di trasmettere stati quantistici da una posizione all'altra usando LOCC. Alice e Bob possono implementare qualsiasi evoluzione fisica del loro sistema *congiunto*, fornendo una sufficiente quantità di entanglement precondiviso. Le operazioni LOCC diventano in questo senso universali.

Appendice B

Matrici di Pauli e Rotazioni

B.1 Matrici di Pauli

Manipolando sistemi di particelle con spin $1/2$ è conveniente usufruire del formalismo degli spinori a due componenti introdotto da W.Pauli nel 1926.

È necessario introdurre le matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si riportano alcune proprietà

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \mathbb{1} \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \end{aligned} \tag{B.1}$$

ed inoltre valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \sigma_i^\dagger &= \sigma_i \\ \det(\sigma_i) &= -1 \\ \text{tr}(\sigma_i) &= 0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Dalla *rappresentazione di Pauli* si nota che σ_z è diagonale e i suoi autostati si scrivono

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La relazione che sussiste tra la rappresentazione dei qubit e quella degli spin riportata è

$$|0\rangle \rightarrow |+\rangle \quad |1\rangle \rightarrow |-\rangle ,$$

per cui vale

$$\begin{aligned} \sigma_x |0\rangle &= |1\rangle & \sigma_y |0\rangle &= i |1\rangle & \sigma_z |0\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_x |1\rangle &= |0\rangle & \sigma_y |1\rangle &= -i |0\rangle & \sigma_z |1\rangle &= -|1\rangle . \end{aligned}$$

B.2 Rotazioni in rappresentazione 2×2

Nella rappresentazione 2×2 dell'operatore di rotazione $U(\hat{n}, \xi)$ si ha

$$U(\hat{n}, \xi) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\xi}{2}\right).$$

Si distinguono due casi:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n})^n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari,} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

che permettono di esplicitare l'operatore di rotazione come

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\xi}{2}\right) &= \left[1 - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n})^2}{2!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n})^4}{4!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \dots\right] \\ &\quad - i \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} \frac{\xi}{2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n})^3}{3!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \mathbf{1} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Esplicitando la forma 2×2

$$U(\hat{n}, \xi) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\xi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - in_z \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) & (-in_x - n_y) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ (-in_x + n_y) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + in_z \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Nel paragrafo 3.2.1 si fa uso di una rotazione di un qubit attorno all'asse y. Il versore è scelto lungo quest'unica direzione. La matrice di rotazione $U(\hat{n}, \xi) \equiv U_y^1(\xi)$ in questo caso risulta

avere la forma

$$U_y^1(\xi) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}\xi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) & -n_y \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ n_y \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

L'espressione del differenziale dU appare nella forma

$$dU = \frac{dU}{d\xi} d\xi + \sum_{j=1}^3 \frac{dU}{dn_j} dn_j.$$

Se si considerano rotazioni infinitesime in cui l'asse di rotazione identificato da $\hat{\mathbf{n}}$ è fisso, come quelle di cui si fa uso nel lavoro di tesi, dU si riduce a

$$dU = \frac{dU}{d\xi} d\xi = -i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{d\xi}{2}$$

con

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}.$$

Elenco delle figure

1.1	Interferometri di Mach-Zender e Ramsay	6
2.1	Entropia di Von Neumann $S(\phi)$ per lo stato $ r, \phi\rangle$	24
2.2	Entropia di Von Neumann $S(\theta)$ per lo stato $ \beta, \theta\rangle$	24
3.1	Tr per $\phi = 0$	34
3.2	Contour Tr per $\phi = 0$	34
3.3	Tr per $\phi = \frac{\pi}{2}$	34
3.4	Contour Tr per $\phi = \frac{\pi}{2}$	34
3.5	Tr per $\phi = \pi$	34
3.6	Contour Tr per $\phi = \pi$	34
3.7	Tr per $\theta = 0$	36
3.8	Contour Tr per $\theta = 0$	36
3.9	Tr per $\theta = \frac{\pi}{6}$	36
3.10	Contour Tr per $\theta = \frac{\pi}{6}$	36
3.11	Tr per $\theta = \frac{\pi}{4}$	36
3.12	Contour Tr per $\theta = \frac{\pi}{4}$	36
A.1	Qubit rappresentato da due livelli elettronici in un atomo.	38
A.2	Rappresentazione di un qubit tramite la sfera di Bloch.	39

Bibliografia

- [1] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of modern physics*, 81(2):865, 2009.
- [2] J Sperling and IA Walmsley. Entanglement in macroscopic systems. *Physical Review A*, 95(6):062116, 2017.
- [3] Vittorio Giovannetti, Stefano Mancini, David Vitali, and Paolo Tombesi. Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems. *Physical Review A*, 67(2):022320, 2003.
- [4] Chao-Yang Lu, Xiao-Qi Zhou, Otfried Gühne, Wei-Bo Gao, Jin Zhang, Zhen-Sheng Yuan, Alexander Goebel, Tao Yang, and Jian-Wei Pan. Experimental entanglement of six photons in graph states. *Nature physics*, 3(2):91, 2007.
- [5] Wei-Bo Gao, Chao-Yang Lu, Xing-Can Yao, Ping Xu, Otfried Gühne, Alexander Goebel, Yu-Ao Chen, Cheng-Zhi Peng, Zeng-Bing Chen, and Jian-Wei Pan. Experimental demonstration of a hyper-entangled ten-qubit schrödinger cat state. *Nature physics*, 6(5):331, 2010.
- [6] Dietrich Leibfried, Emanuel Knill, Signe Seidelin, Joe Britton, R Brad Blakestad, John Chiaverini, David B Hume, Wayne M Itano, John D Jost, Christopher Langer, et al. Creation of a six-atom ‘schrödinger cat’ state. *Nature*, 438(7068):639, 2005.
- [7] Hartmut Häffner, Wolfgang Hänsel, CF Roos, Jan Benhelm, Michael Chwalla, Timo Körber, UD Rapol, Mark Riebe, PO Schmidt, Christoph Becher, et al. Scalable multiparticle entanglement of trapped ions. *Nature*, 438(7068):643, 2005.
- [8] P Neumann, N Mizuochi, F Rempp, Philip Hemmer, H Watanabe, S Yamasaki, V Jacques, Torsten Gaebel, F Jelezko, and J Wrachtrup. Multipartite entanglement among single spins in diamond. *science*, 320(5881):1326–1329, 2008.
- [9] John S Bell, Mary Bell, Kurt Gottfried, and Martinus Veltman. *John S. Bell on the foundations of quantum mechanics*. World Scientific, 2001.

- [10] Masahiro Kitagawa and Masahito Ueda. Squeezed spin states. *Physical Review A*, 47(6):5138, 1993.
- [11] Barbara M Terhal. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271(5-6):319–326, 2000.
- [12] GW Gibbons. Typical states and density matrices. *Journal of Geometry and Physics*, 8(1-4):147–162, 1992.
- [13] Dariusz Chruściński. Geometric aspects of quantum mechanics and quantum entanglement. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 30, page 9. IOP Publishing, 2006.
- [14] Samuel L. Braunstein and Carlton M. Caves. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3439–3443, May 1994.
- [15] Nicola Marzari and David Vanderbilt. Maximally localized generalized wannier functions for composite energy bands. *Physical review B*, 56(20):12847, 1997.
- [16] Lorenzo Campos Venuti and Paolo Zanardi. Quantum critical scaling of the geometric tensors. *Physical review letters*, 99(9):095701, 2007.
- [17] Shunji Matsuura and Shinsei Ryu. Momentum space metric, nonlocal operator, and topological insulators. *Physical Review B*, 82(24):245113, 2010.
- [18] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, 1935.
- [19] Erwin Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 31, pages 555–563. Cambridge University Press, 1935.
- [20] T Haensch, S Leschiutta, and A Wallard. *Metrology and Fundamental Constants*, volume 166. IOS Press, 2007.
- [21] Jeffrey B Fixler, GT Foster, JM McGuirk, and MA Kasevich. Atom interferometer measurement of the newtonian constant of gravity. *Science*, 315(5808):74–77, 2007.
- [22] G Rosi, F Sorrentino, L Cacciapuoti, M Prevedelli, and GM Tino. Precision measurement of the newtonian gravitational constant using cold atoms. *Nature*, 510(7506):518, 2014.
- [23] Achim Peters, Keng Yeow Chung, and Steven Chu. Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms. *Nature*, 400(6747):849, 1999.

- [24] Rym Bouchendira, Pierre Cladé, Saïda Guellati-Khélifa, François Nez, and François Biraben. New determination of the fine structure constant and test of the quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, 106(8):080801, 2011.
- [25] Christopher R Ekstrom, Jörg Schmiedmayer, Michael S Chapman, Troy D Hammond, and David E Pritchard. Measurement of the electric polarizability of sodium with an atom interferometer. *Physical Review A*, 51(5):3883, 1995.
- [26] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, RX Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.
- [27] Jonas Hartwig, Sven Abend, Christian Schubert, Dennis Schlippert, Holger Ahlers, Katherine Posso-Trujillo, Naceur Gaaloul, Wolfgang Ertmer, and Ernst Maria Rasel. Testing the universality of free fall with rubidium and ytterbium in a very large baseline atom interferometer. *New Journal of Physics*, 17(3):035011, 2015.
- [28] Paul Hamilton, Matt Jaffe, Philipp Haslinger, Quinn Simmons, Holger Müller, and Justin Khoury. Atom-interferometry constraints on dark energy. *Science*, 349(6250):849–851, 2015.
- [29] Carlton M Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8):1693, 1981.
- [30] Bernard Yurke, Samuel L McCall, and John R Klauder. $Su(2)$ and $su(1, 1)$ interferometers. *Physical Review A*, 33(6):4033, 1986.
- [31] Georges Sagnac. The demonstration of the luminiferous aether by an interferometer in uniform rotation. *Comptes Rendus*, 157:708–710, 1913.
- [32] Marco Gabbriellini. Multipartite entanglement in quantum phase transitions. *arXiv preprint arXiv:1810.10537*, 2018.
- [33] Massimo Inguscio and Leonardo Fallani. *Atomic physics: precise measurements and ultracold matter*. OUP Oxford, 2013.
- [34] Norman Ramsey. *Molecular beams*, volume 20. Oxford University Press, 1956.
- [35] SA Diddams. Sa diddams, jc bergquist, sr jefferts, and cw oates, science 306, 1318 (2004). *Science*, 306:1318, 2004.
- [36] Robert Lynch. The quantum phase problem: a critical review. *Physics Reports*, 256(6):367–436, 1995.

- [37] C.W. Helstrom. Minimum mean-squared error of estimates in quantum statistics. *Physics Letters A*, 25(2):101 – 102, 1967.
- [38] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum metrology. *Physical review letters*, 96(1):010401, 2006.
- [39] P Hyllus. P. hyllus, w. laskowski, r. krischek, c. schwemmer, w. wieczorek, h. weinfurter, l. pezzé, and a. smerzi, phys. rev. a 85, 022321 (2012). *Phys. Rev. A*, 85:022321, 2012.
- [40] L Pezzé. L. pezzé and a. smerzi, phys. rev. lett. 102, 100401 (2009). *Phys. Rev. Lett.*, 102:100401, 2009.
- [41] Géza Tóth. Multipartite entanglement and high-precision metrology. *Physical Review A*, 85(2):022322, 2012.
- [42] J. M. Jauch. Foundations of quantum mechanics. *Addison-Wesley*, 1968.
- [43] Reinhard F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40:4277–4281, Oct 1989.
- [44] John S Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, page 195, 1964.
- [45] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.
- [46] Charles H Bennett, Herbert J Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A*, 53(4):2046, 1996.
- [47] Martin B Plenio. Mb plenio and s. virmani, quantum inf. comput. 7, 1 (2007). *Quantum Inf. Comput.*, 7:1, 2007.
- [48] Benjamin Schumacher. Quantum coding. *Physical Review A*, 51(4):2738, 1995.
- [49] Otfried Gühne and Geza Toth. Multipartite entanglement in spin chains. *Phys. Rep.* 474, 474(1), 2009.
- [50] A. S. Sørensen and K. Mølmer. Entanglement and extreme spin squeezing. *Phys. Rev. Lett.*, 86(4431), 2001.
- [51] Otfried Guehne, Geza Toth, and Hans J. Multipartite entanglement in spin chains. *New Journal of Physics*, 7, 03 2005.
- [52] A. Osterloh. Entanglement and its facets in condensed matter systems. *Leibniz University of Hannover*, 2007.

- [53] Tzu-Chieh Wei and Paul M. Goldbart. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Phys. Rev. A*, 68:042307, Oct 2003.
- [54] J Sperling and W Vogel. Multipartite entanglement witnesses. *Physical review letters*, 111(11):110503, 2013.
- [55] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Horodecki, m., horodecki, p. & horodecki, r. separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions. *phys. lett. a* 223, 1-8. *Physics Letters A*, 223:1–8, 05 1996.
- [56] R. A. Fisher. Experimental test of local hidden variable theories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 22(700), 1925.
- [57] Stefano Scali and Roberto Franzosi. Entanglement estimation in non-optimal two-qubit states. *arXiv preprint arXiv:1811.05598*, 2018.
- [58] Geza Toth. Lower bounds on the quantum fisher information based on the variance and various types of entropies. *arXiv preprint arXiv:1701.07461*, 2017.
- [59] Kerson Huang. *Quarks, leptons & gauge fields*. World Scientific, 1992.
- [60] Michael Victor Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [61] JP Provost and G Vallee. Riemannian structure on manifolds of quantum states. *Communications in Mathematical Physics*, 76(3):289–301, 1980.
- [62] Yu-Quan Ma, Shu Chen, Heng Fan, Wu-Ming Liu, et al. Abelian and non-abelian quantum geometric tensor. *Physical Review B*, 81(24):245129, 2010.
- [63] Barry Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and berry’s phase. *Physical Review Letters*, 51(24):2167, 1983.
- [64] Ran Cheng. Quantum geometric tensor (fubini-study metric) in simple quantum system: A pedagogical introduction. *arXiv preprint arXiv:1012.1337*, 2010.
- [65] Hans J Briegel and Robert Raussendorf. Persistent entanglement in arrays of interacting particles. *Physical Review Letters*, 86(5):910, 2001.