

# ターボ符号

## — 接続符号化・繰り返し復号 —

荻原春生，大橋正良

電子情報通信学会誌 2001年3月号 解説

### 概要

ターボ符号は情報理論の限界に近い伝送特性を実現する誤り訂正符号化法であり，接続符号化と繰り返し復号に特徴づけられる．本稿では，ターボ符号の符号器・復号器の構成，復号アルゴリズム，復号特性について解説し，ターボ符号の実用応用例，標準化動向，復号器のLSI構成例について紹介する．  
キーワード：ターボ符号，接続符号化，繰り返し復号

### 1 まえがき

シャノンの情報理論の教えるところによれば，通信路容量  $C$  より小さい伝送速度で送るときには，うまい符号化をすることにより，いくらでも小さい誤り率で伝送可能である．シャノンはうまい符号化の存在は示したが，具体的実現法は示さなかった．誤り訂正符号の研究の歴史は，この理論限界にできるだけ近い特性の実現をめざしたものであった．

1993年にターボ符号が発表[1]されるまでは，実用上十分低いといえる誤り率を実現するには，理論限界に比べ，少なくとも2[dB]良好な信号対雑音電力比(SNR)が要求された[2]．ターボ符号は，現実的な復号処理量で，これを0.5[dB]まで近づけた[1]．

ターボ符号は，情報系列およびそれを並べ代えた系列をそれぞれ要素符号器で符号化した系列をつないで符号語つくり出す接続符号化と，それぞれの要素符号に対応した復号を，他方の復号結果を利用しながら繰り返し行なう繰り返し復号により特徴づけられる．

本稿では，基本的なターボ符号について符号器／復号器の構成，復号アルゴリズム概略，復号特性を解説し，次に，実際の応用例等について紹介する．

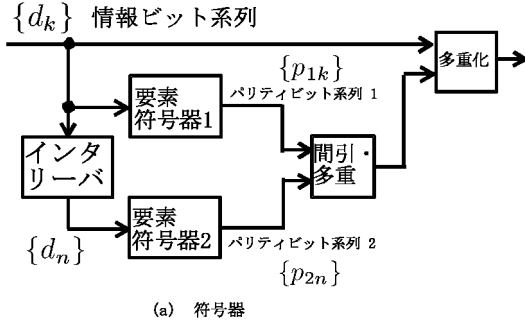
### 2 符号器・復号器の構成

図1に符号器・復号器の構成を示す．情報ビット系列  $\{d_k\}$  は要素符号器1(encoder 1)に入力され，パリティビット系列  $\{p_{1k}\}$  が作られる． $\{d_k\}$  はインタリーバで並べ替えられ，系列  $\{d_n\}$  となり，要素符号器2(encoder 2)に入力され，パリティビット系列  $\{p_{2n}\}$  が作られる．この符号器では，情報系列に対し，2個の要素符号器が並列に接続されており，これを並列接続符号化という．

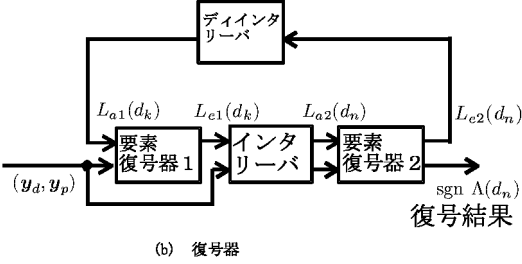
2つのパリティビット系列は間引き・多重化され，さらに，情報ビットと多重化され，2値入力伝送路に送出される．間引き・多重化とは，たとえば，奇数時点では  $\{p_{1k}\}$  の要素が出力され，偶数時点では  $\{p_{2n}\}$  の要素が送出されるというような，間引きしながら2系列を多重化することをさす．間引きしないで，単純に多重化する構成法もある．その場合，伝送路には，情報1ビットにパリティビットが2ビット送出される．

受信機では，雑音（本稿では加法的白色ガウス雑音とする）を受けた，それぞれ情報ビットとパリティビットに対応した受信信号系列  $(y_d, y_p)$  が入力され，要素復号器2から伝えられた信頼度情報である事前値  $L_{a1}(d_k)$  と共に，復号処理が行なわれ，外部値  $L_{e1}(d_k)$  が出力される．外部値とは，要素復号器によるシンボルの信頼度の増分を表す．それは，インタリーバで並べ替えられ，事前値  $L_{a2}(d_n)$  として要素復号器2に入力される．1回目の繰り返しでは，復号器2での復号が行なわれていないので， $L_{a1}(d_k)$  には0が代入される．

要素復号器2は，同じくインタリーバで並べ替えられた情報ビットに対応した受信信号と事前値  $L_{a2}(d_n)$  が入力され復号処理を行ない外部値  $L_{e2}(d_n)$  を出力する．これは，デインタリーバでインタリーバによる並べ替えを戻す操作を受け，事前値  $L_{a1}(d_k)$  として要素復号器1に入力され，繰り返し復号が行なわれる．数回から十数回の繰り返し後，要素復号器2



(a) 符号器



(b) 復号器

図 1: ターボ符号の符号器・復号器の基本構成

は、対数事後確率比として定義される事後値  $\Lambda(d_n)$  を計算し、それを硬判定することで、最終判定結果を出力する。

### 3 復号アルゴリズム

要素復号器の処理は、受信信号系列を知った後のシンボルの確率である事後確率  $P(d_k/y_d, y_p)$  の比の対数である事後値

$$\Lambda(d_k) \equiv \ln \frac{P(d_k = 1/y_d, y_p)}{P(d_k = 0/y_d, y_p)} \quad (1)$$

の計算が主となる。ここで、 $P(\cdot)$  は、確率または確率密度を表す関数、 $y_d$  は情報ビットに対応した受信信号の系列、 $y_p$  は、パリティビットに対応した受信信号の系列、 $d_k$  は時点  $k$  での情報シンボルである。事後値は、1 である確率が高い時には正の大きな値となり、1 と 0 が等確率の時 0 であり、0 の確率が高い時には、負の大きな値となるので、1 である信頼度を表している。

条件付き確率の定義と周辺分布の性質から

$$\begin{aligned} \Lambda(d_k) &= \ln \frac{P(d_k = 1, y_d, y_p)}{P(d_k = 0, y_d, y_p)} \\ &= \ln \frac{\sum_{d: d_k=1} P(d, y_d, y_p)}{\sum_{d: d_k=0} P(d, y_d, y_p)} \\ &= \ln \frac{\sum_{d: d_k=1} P(d^k, y_d^k, y_p) P(y_k/d_k) P(d_k)}{\sum_{d: d_k=0} P(d^k, y_d^k, y_p) P(y_k/d_k) P(d_k)} \end{aligned}$$

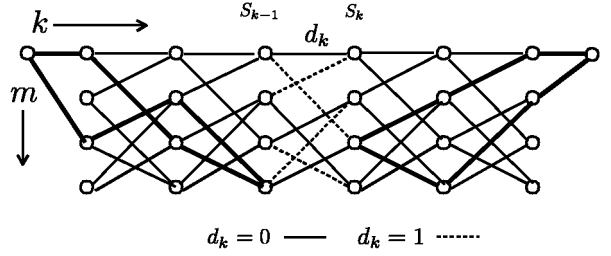


図 2: トレリス線図

$$\begin{aligned} &= \ln \frac{\sum_{d: d_k=1} P(d^k, y_d^k, y_p)}{\sum_{d: d_k=0} P(d^k, y_d^k, y_p)} + \ln \frac{P(y_k/d_k = 1)}{P(y_k/d_k = 0)} \\ &\quad + \ln \frac{P(d_k = 1)}{P(d_k = 0)} \end{aligned} \quad (2)$$

が成立する。ここで、 $d^k$  は  $d$  から  $d_k$  を除いた系列、 $y^k$  は  $y$  から  $d_k$  に対応した受信信号  $y_{dk}$  を除いた系列である。最後の式の第 3 項は、復号処理の前にわかっている  $d_k = 1$  である信頼度であり、事前値とよばれ、第 2 項は、通信路から受信した一つのビットの受信信号から即座にわかる値で、通信路値と呼ばれる。第 1 項は、それら以外の要素復号器に入力された情報による  $d_k = 1$  の信頼度の増分を示し、外部値と呼ばれる。外部値は次の要素復号器に事前値として入力される。

また、

$$P(d_k = 1, y_d, y_p) \quad (3)$$

$$= \sum_{d, p: d_k=1} P(y_d, y_p, d, p) \quad (4)$$

$$= \sum_{d, p: d_k=1} P(y_d/d) P(y_p/p) P(p/d) P(d) \quad (5)$$

$$= \sum_{d: d_k=1} P(y_d/d) P(y_p/p) P(d) \quad (6)$$

$$= \sum_{d: d_k=1} \prod_{n=1}^{N+M} P(y_{dn}/d_n) P(y_{pn}/p_n) P(d_n) \quad (7)$$

ここで、 $N$  は情報系列長、 $M$  は後述する終端系列長、 $p$  はパリティビット系列であり、式 (4) から (5) への変形は、雑音が無色であることを、(5) から (6) への変形は、情報系列が定まれば、パリティ系列も一意に定まることを、(6) から (7) への変形は再び雑音の白色性を使っている。式 (7) の  $\prod$  の第 1、第 2 因子は、雑音の確率密度関数が与えられれば計算できる。また、 $y_d \equiv \{y_{d1}, y_{d2}, \dots, y_{dN+M}\}$ 、 $y_p \equiv \{y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pN+M}\}$  である。

畳み込み符号の復号動作は、図 2 に示すような符

号のトレリス線図を用いて説明される．ここで，横方向は時点の進行を示し，縦方向は符号器の状態を示す．状態は，符号器のシフトレジスタの記憶内容に対応する．情報系列の入力により可能な遷移のみが状態間を結ぶ直線で示されている．このような可能な遷移の連なりをパスという．

通常，符号器の初期状態は，シフトレジスタの記憶内容がすべて 0 である全ゼロ状態とする．情報系列が全て入力された後の状態は，系列に依存し，復号器で確定的には知ることができない．このとき，最後に近い部分の誤り率が劣化する傾向があり，情報系列に続けて，全ゼロ状態に終端するための系列（終端系列）が符号器に入力される．この長さは，シフトレジスタの長さに等しく，情報系列長に比べ十分短い．

トレリス線図を参照し，式 (7) の最後の形に着目すると，これは次のように計算できる．

$$\begin{aligned} P(d_k = 1, y_d, y_p) \\ = \sum_{m' \rightarrow m: d_k=1} \alpha_{k-1}(m') \\ \gamma(S_{k-1} = m' \rightarrow S_k = m) \beta_k(m) \quad (8) \end{aligned}$$

ここで， $S_k$  は情報  $d_k$  が入力された直後の状態を示し， $\gamma$  は各遷移に対応した確率

$$\begin{aligned} \gamma(S_{k-1} = m' \rightarrow S_k = m) \\ \equiv P(y_{dk}/d_k)P(y_{pk}/p_k)P(d_k) \quad (9) \end{aligned}$$

を示す． $\alpha_{k-1}(m')$  は，始点  $S_0 = 0$  から終点  $S_{k-1} = m'$  となるようなパスに沿った確率の総和， $\beta_k(m)$  は，始点  $S_k = m$  で終点  $S_{N+M} = 0$  となるパスに沿った確率の総和で，以下のように再帰的に計算できる．

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1}(S_{k-1} = m') \\ \equiv \sum_{d^{k-1}: S_{k-1}=m'} \prod_{n=1}^{k-1} P(y_{dn}/d_n)P(y_{pn}/p_n)P(d_n) \\ = \sum_{S_{k-2}} \alpha_{k-2}(S_{k-2})\gamma(S_{k-2} \rightarrow S_{k-1} = m') \quad (10) \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \beta_k(S_k = m) \\ = \sum_{S_{k+1}} \gamma(S_k = m \rightarrow S_{k+1})\beta_{k+1}(S_{k+1}) \quad (11) \end{aligned}$$

この計算法は，ビット誤り率を最小とする復号法として提案された BCJR アルゴリズム [3] に含まれており，これを用いて，事後値等を計算する手法を修正 BCJR アルゴリズムという．

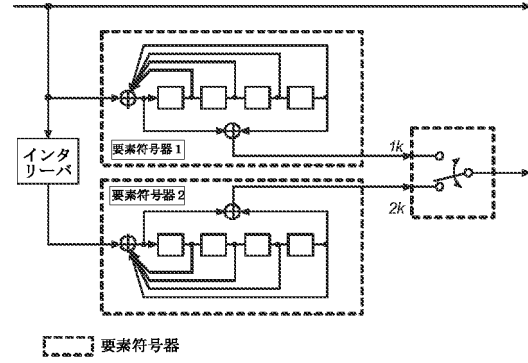


図 3: ターボ符号の符号器の構成例

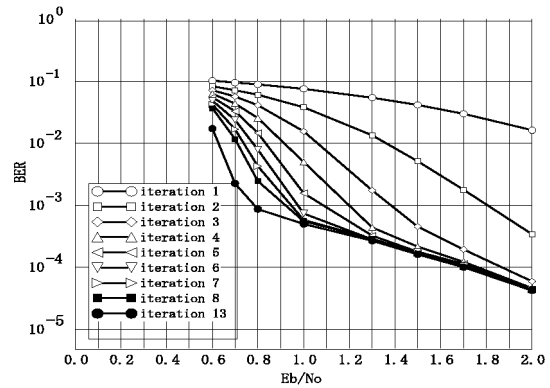


図 4: 行・列変換ブロックインターリーブを用いた場合の繰り返し復号特性

## 4 復号特性

図 3 に示す 4 ビットのシフトレジスタを用いた要素符号器による伝送速度（通信路上の 1 個のシンボルあたりの情報伝送ビット数）0.5 ビット / シンボルのターボ符号の特性を示す．要素符号器には，図 3 に示すような帰還のある畳み込み符号（再帰形畳み込み符号器）が使われる．復号には修正 BCJR アルゴリズムを用いた．図 4 は行順に書き込み，列順に読み出す行・列変換ブロックインターリーブを用いた場合のシミュレーション結果である．インターリーブサイズは  $256 \times 256$  である．横軸  $E_b/N_0$  は伝送速度で正規化された SNR である．復号の繰り返しとともに，誤り率は減少するが，比較的高い誤り率で，SNR を増大しても BER がほとんど減少しない現象（これを flattening という）が生じていることがわかる．

インターリーブだけを，同じ大きさの疑似ランダムインターリーブに替えた場合のシミュレーション結果を図 5 に示す．これは，Berrou らによるターボ符号の最初の論文の構成である．疑似ランダムインター

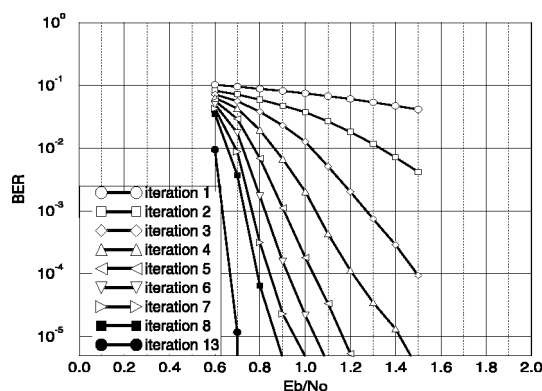


図 5: 疑似ランダムインタリーブを用いた場合の復号特性

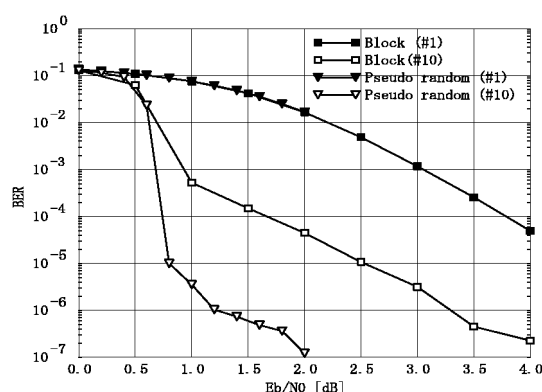


図 6: ターボ符号の復号特性の例  
繰り返し 1 回および 10 回の特徴

バとは、単純な規則性がないような、並べ替えを行なうインタリーブである。こちらでは、誤り率は繰り返しと共に、また、十分な繰り返し時には、SNR の増大とともに急速に減少している。

情報伝送速度 0.5 ビット/シンボルのとき、任意に小さいビット誤り率を実現する SNR の情報理論的条件（これをシャノン限界という）は、 $E_b/N_0$  で 0.2[dB] である。これをビット誤り率  $10^{-5}$  をシミュレーションで実現するための  $E_b/N_0$  と比較するとすれば、それが繰り返し 13 回で 0.7[dB] であるので、ターボ符号は情報理論の限界に 0.5[dB] まで迫る特性を実現したことになる。

図 4 と図 5 の比較から、行・列変換の規則的インタリーブ用いたのでは、flattening のためよい性能が実現できないことがわかる。実は、疑似ランダムインタリーブを用いても、BER が小さい領域で flattening を起こす。図 6 は、より小さい BER までシミュレーションを行なった結果であり、 $BER < 10^{-5}$  では flattening が起きている。再帰形の要素符号器

を用いた場合 flattening が起きる領域での BER の値は、インタリーブサイズに反比例することが知られている [4]。これをインタリーブピング利得という。再帰形でない場合には、インタリーブサイズを大としても、誤り率はほとんど小さくならない。

ターボ符号の良好な特性は、一方の要素符号器による系列では誤り易い場合にも、もう一方による系列で、誤りにくくしていることにより、実現されている。行・列変換のブロックインタリーブでは、インタリーブ上で正方形に配置された 4 隅の位置で大きな雑音が生じていると、どちらの系列も誤りやすいことが頻繁に生じ、よい特性が得られない。

## 5 ターボ符号の実用応用

### 5.1 実用にあたっての注意点

ターボ符号の実用化の考慮点を述べ、その後最近の実用化動向について概説する。

考慮点として第一に挙げられるのは、復号遅延である。復号遅延は、ターボ復号が開始できるまでの時間（データブロック長（インタリーブに対応したフレーム処理分を含む）/データ速度）と復号処理時間の和で考えられ、後者はターボ符号特有の繰り返し復号処理回数に比例する。従って、音声のような比較的低速な双方向通信で実時間性が要求される応用よりも、放送型のようにある程度の遅延が許される応用や、高速データ通信にターボ符号は適している。

第二に、ターボ符号の運用動作点はこれまでになく低い  $E_b/N_0$  値を想定しているため、このような環境でも安定してフレーム同期を確立、維持できる手法が必要となる。

### 5.2 衛星通信への応用

#### 5.2.1 深宇宙通信への適用

惑星探査衛星から送られてくる信号は、極めて微弱なため、オフラインで可能な限りの手段を尽くして信頼度の高い復号が求められる。このような応用にはターボ符号が最適である。最近の探査衛星の Galileo や Cassini では、地上側で繰り返し復号を実施することで、優れた復号特性（シャノン限界より約 2dB）を得ている。CCSDS(Consultative Committee for Space Data Systems)[5] でも各種符号化率のターボ符号が規格化され、次期衛星にはターボ符号が搭載されるのが確実である [6]。

### 5.2.2 移動体衛星通信システムへの適用

これまでの衛星通信でもデータ通信には、畳み込み符号化/ビット復号+リードソロモン符号の適用によって高い符号化利得(無符号化時と同じ誤り率を実現する  $E_b/N_0$  の改善量)を確保してきたが、ターボ符号によりさらに高い利得が得られるようになった。移動体衛星通信では、インマルサットが1999年に初めてターボ符号を用いた、ISDNと接続可能なマルチメディアミニM(M4)サービスを開始している[7]。

### 5.3 移動通信への応用

移動通信環境は、一般に厳しいマルチパスフェージング環境下にあり、最近ではCDMA(Code Division Multiple Access)技術によってまず対処しようとしている。CDMAでは高い干渉下(すなわち多くのユーザ下)でも要求品質を満足することが、システムの容量確保の観点から必須である。また通信速度を向上させようとするとき情報1ビットに割り当てられるエネルギーが減少するため、この点からも強力な誤り訂正符号であるターボ符号がいくつかの標準で採用されるに至った。

本年正式に標準化された第3世代移動通信(IMT-2000)[8]には、DS-CDMA(W-CDMA)規格と、MC-CDMA(cdma2000)規格がある。W-CDMAでは、通信チャネル用として、拘束長9、符号化率  $R=1/2, 1/3$  の畳み込み符号ならびに、 $R=1/3$  のターボ符号の利用が規定されている。拘束長は符号器のシフトレジスタ長+1で、符号化率は、ある時点の符号器入力ビット数と出力ビット数の比として定義される。ターボ符号は、状態数8の並列接続符号であり、40から5114までのサイズのインターリーブが採用されている[9]。

一方cdma2000においても同様に通信チャネルに適用される符号として、拘束長9の畳み込み符号に加え、状態数8、 $R=1/2, 1/3, 1/4$  のターボ符号が規定されている。インターリーブはサイズ378から20730までが使われる。

さらに最近規格化が始まったHDR(High Data Rate)[10]や1xTREM[11]などIP伝送に特化したセルラーパケット技術においても、伝送速度向上、容量拡大の面からターボ符号が採用されている。

### 5.4 LSI化の動向

フランスのcomatlas社は、40Mbit/sの復号速度を実現するターボ符号CODEC CAS5093をリリースしており[12]、 $R=1/2$ 、 $BER=10^{-5}$ にて7dBの符号化利得を実現している。その他にも最高速90Mbit/sの復号速度を実現できるチップや[13]、積符号(Product Code)に基づくターボ符号を採用した例もある[14]。

### 5.5 光通信への応用

今後のターボ符号の重要な適用分野として、光通信システムがある。一昔前は、雑音が存在せず誤り訂正は不必要と思われていた光ファイバ伝送が、近年のWDM等による超広帯域化に伴い、現在では高利得の誤り訂正符号の適用が必須となりつつあり、ターボ符号の適用も検討されている[15]。

## 6 あとがき

ターボ符号の基礎的事項と、実用化動向について解説した。前者については、性能改善にむけて、符号の理論的な性能評価法、要素符号の直列接続、多値変調への拡張、インターリーブの構成法など多方面の研究が活発に行われている。

ターボ符号は、まだリアルタイム性には若干欠けるものの、シャノン限界に迫り得るこれまでにない大きな符号化利得は、信頼度向上、伝送速度向上、容量増加の全ての面から魅力的であり、今後、各種のシステムに幅広く適用されていくことが期待される。

本稿に示した特性図は、長岡技術科学大学修士論文から許可を得て転載した。著者のF.D. Morillo氏、箕輪氏に感謝する。

## 参考文献

- [1] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: turbo codes", Proc. ICC'93, pp. 1064-1070, 1993.
- [2] D. J. Costello, Jr, J. Hagenouer, H. Imai, and S. B. Wicker, "Application of error-control coding", IEEE Trans. Inform. Theory, vol.44, pp.2531-2560, 1998.

- [3] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-20, pp. 284–287, 1974.
- [4] L. Benedetto and G. Montorsi, "Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no.2, pp. 409–428, 1996.
- [5] CCSDS, CCSDS 101.0-B-4 (<http://www.ccsds.org>)
- [6] <http://www331.jpl.nasa.gov/public/>.
- [7] <http://www.inmarsat.org>.
- [8] <http://www.arib.or.jp>.
- [9] 3GPP, 3G TS 25.212 V.3.2.0 (2000-03) (<http://www.arib.or.jp>).
- [10] <http://www.qualcomm.com/hdr/>.
- [11] <http://www.nokia.com>
- [12] <http://www.comatlas.fr>.
- [13] <http://www.sworld.cm.au>.
- [14] <http://www.aha.com>.
- [15] O. A. SAB and V. Lemaire, "Block Turbo Code Performance for long-haul DWDM optical transmission systems," *OFC2000*, Baltimore, March 2000.