INSTITUTO FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS TIANGUÁ
BACHAREL EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO - NOTURNO

RELATÓRIO
CALCULO NUMÉRICO

ANANIAS CAETANO DE OLIVEIRA
MARIA ELIZABETH DE AGUIAR LIMA
LUCAS CAVALCANTE DE AGUIAR

Tianguá

2020

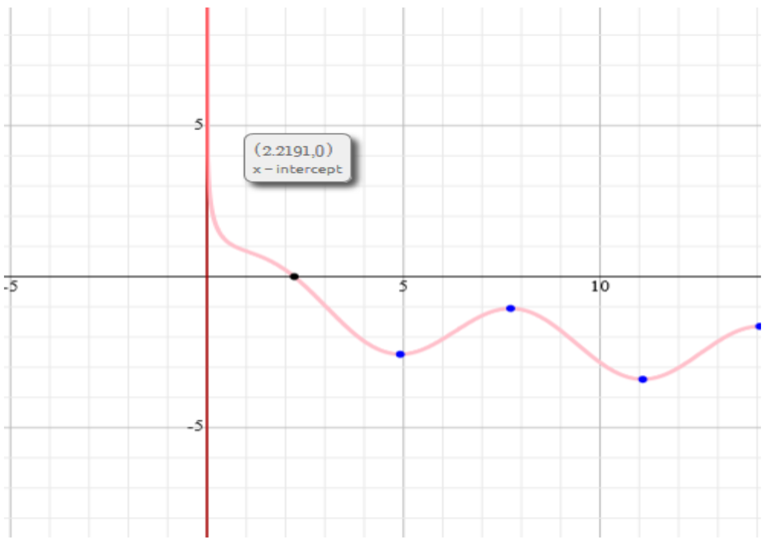
1 INTRODUÇÃO

Os métodos apresentados neste relatório tem como objetivo identificar a raiz para funções dado um intervalo específico. Para isso é necessário que a função dentro do intervalo [a, b] possuam determinadas características no geral. A primeira delas é que a função seja contínua dentro desse intervalo. Em segundo, 'a' e 'b' devem ser de sinais opostos, pois assim é garantido que haja uma raiz dentro do intervalo. Isso pode ter sua variâncias de método para método, detalhes específicos ao algoritmo. A partir disso, temos os métodos bisseção, falsa-posição, ponto fixo e método de newton.

O método da Bisseção, de forma geral, consiste em uma busca binária pelo zero da função problema. Já método Falsa-posição, consiste na utilização de pares [a,b] de aproximações que englobam a raiz nesse intervalo. O método Newton, por sua vez, consiste em aproximações baseadas nas derivadas das funções em determinados pontos. Portanto, claramente precisamos de uma função contínua que seja diferenciável em todos os pontos do intervalo estudado. No método de Ponto Fixo temos o objetivo de se calcular pontos fixos de funções. Dada uma aproximação inicial x_0 para x^*, o método realiza iterações sucessivamente a função dada sobre x_0 (BURDEN; FAIRES, 2008).

Tendo o objetivo de cada um dos métodos, é realizado então o desenvolvimento dos algoritmos para resolução numérica dos problemas. A função no qual será explorada é dada por $f(x) = sen(x) - ln(x)$. Cada método teve seus resultados e eles serão explorados no capítulo sobre a Metodologia. Nesse capítulo, além dos resultados, será explorado qual linguagem foi usada, problemas e sobre a sua eficiência comparado aos resultados dos outros métodos.

Figura 1 – Função $f(x) = sen(x) - ln(x)$



2 METODOLOGIA

A realização dos códigos foram feitos pelo os alunos Ananias, Elizabeth e Lucas na qual foi utilizado o phyton como linguagem para a realização dos algoritmos. Cada um dos métodos teve seus resultados, sendo alguns positivos e outros negativos para a equipe. O método com melhor rendimento encontrado para a função foi o de Newton e o com menor eficiência foi o realizado pelo o Ponto Fixo. A decisão quanto ao algoritmo com melhores resultados será discutido mais a frente.

Como pode ser observado no capítulo anterior na figura 1, temos que o ponto onde a função $f(x) = sen(x) - ln(x)$ cruza a reta x é dada por $x = 2.2191071...$ A ferramenta para visualização gráfica dessa função e de outras que irão aparecer foram feitas no site Symbolab (EQSQUEST, 2017).

2.1 Método da Bisseção

Considerando a equação proposta $f(x)$ com uma taxa de erro de 0.001 obteve o resultado de $x = 2.218750$ depois de 7 iterações resultando em $f(2.218750) = 0.000377$, conforme ilustrado logo abaixo:

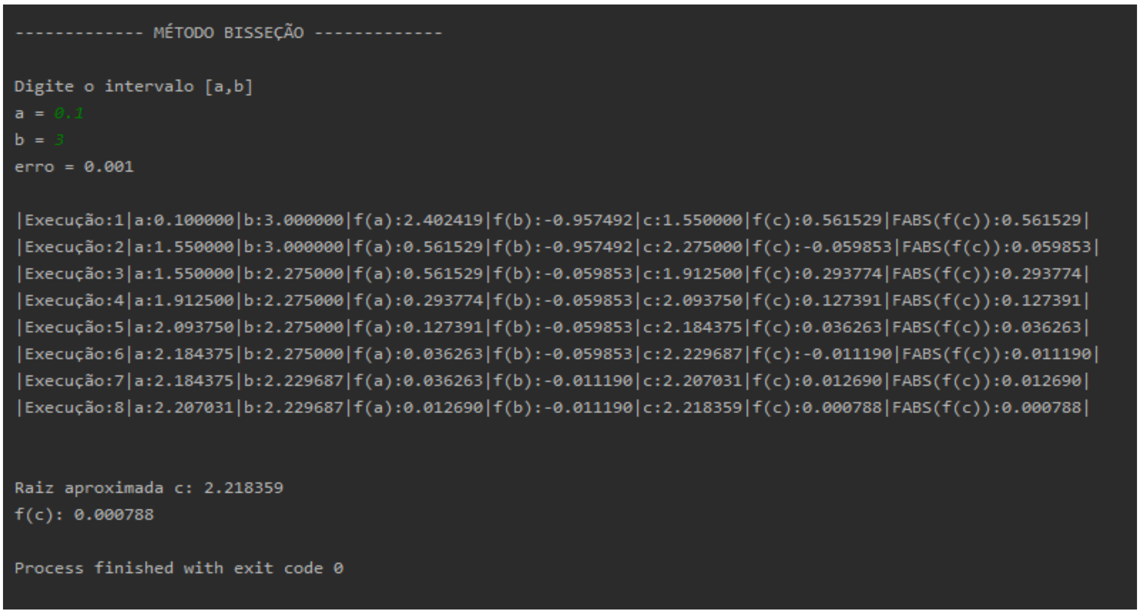
Figura 2 – Resultados

```
------------ MÉTODO BISSEÇÃO ------------

Digite o intervalo [a,b]
a = 0.1
b = 2.5
erro = 0.001

|Execução:1|a:0.100000|b:2.500000|f(a):2.402419|f(b):-0.317819|c:1.300000|f(c):0.701194|FABS(f(c)):0.701194|
|Execução:2|a:1.300000|b:2.500000|f(a):0.701194|f(b):-0.317819|c:1.900000|f(c):0.304446|FABS(f(c)):0.304446|
|Execução:3|a:1.900000|b:2.500000|f(a):0.304446|f(b):-0.317819|c:2.200000|f(c):0.020039|FABS(f(c)):0.020039|
|Execução:4|a:2.200000|b:2.500000|f(a):0.020039|f(b):-0.317819|c:2.350000|f(c):-0.142942|FABS(f(c)):0.142942|
|Execução:5|a:2.200000|b:2.350000|f(a):0.020039|f(b):-0.142942|c:2.275000|f(c):-0.059853|FABS(f(c)):0.059853|
|Execução:6|a:2.200000|b:2.275000|f(a):0.020039|f(b):-0.059853|c:2.237500|f(c):-0.019495|FABS(f(c)):0.019495|
|Execução:7|a:2.200000|b:2.237500|f(a):0.020039|f(b):-0.019495|c:2.218750|f(c):0.000377|FABS(f(c)):0.000377|


Raiz aproximada c: 2.218750
f(c): 0.000377

Process finished with exit code 0
```

Execução:	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	fabs(f(c))
1	0.100000	2.402419	2.500000	-0.317819	1.300000	0.701194	0.701194
2	1.300000	0.701194	2.500000	-0.317819	1.900000	0.304446	0.304446
3	1.900000	0.304446	2.500000	-0.317819	2.200000	0.020039	0.020039
4	2.200000	0.020039	2.500000	-0.317819	2.350000	-0.142942	0.142942
5	2.200000	0.020039	2.350000	-0.142942	2.275000	-0.059853	0.059853
6	2.200000	0.020039	2.275000	-0.059853	2.237500	-0.019495	0.019495
7	2.200000	0.020039	2.237500	-0.019495	2.218750	0.000377	0.000377

Considerando a equação proposta $f(x)$ com uma taxa de erro de 0.001 obteve o resultado de $x = 2.218359$ depois de 8 iterações resultando em $f(2.218359) = 0.000788$, conforme ilustrado logo abaixo:

Figura 3 – Resultados



```
------------ MÉTODO BISSEÇÃO ------------

Digite o intervalo [a,b]
a = 0.1
b = 3
erro = 0.001

|Execução:1|a:0.100000|b:3.000000|f(a):2.402419|f(b):-0.957492|c:1.550000|f(c):0.561529|FABS(f(c)):0.561529|
|Execução:2|a:1.550000|b:3.000000|f(a):0.561529|f(b):-0.957492|c:2.275000|f(c):-0.059853|FABS(f(c)):0.059853|
|Execução:3|a:1.550000|b:2.275000|f(a):0.561529|f(b):-0.059853|c:1.912500|f(c):0.293774|FABS(f(c)):0.293774|
|Execução:4|a:1.912500|b:2.275000|f(a):0.293774|f(b):-0.059853|c:2.093750|f(c):0.127391|FABS(f(c)):0.127391|
|Execução:5|a:2.093750|b:2.275000|f(a):0.127391|f(b):-0.059853|c:2.184375|f(c):0.036263|FABS(f(c)):0.036263|
|Execução:6|a:2.184375|b:2.275000|f(a):0.036263|f(b):-0.059853|c:2.229687|f(c):-0.011190|FABS(f(c)):0.011190|
|Execução:7|a:2.184375|b:2.229687|f(a):0.036263|f(b):-0.011190|c:2.207031|f(c):0.012690|FABS(f(c)):0.012690|
|Execução:8|a:2.207031|b:2.229687|f(a):0.012690|f(b):-0.011190|c:2.218359|f(c):0.000788|FABS(f(c)):0.000788|


Raiz aproximada c: 2.218359
f(c): 0.000788

Process finished with exit code 0
```

Execução:	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	fabs(f(c))
1	0.100000	2.402419	3.000000	-0.957492	1.550000	0.561529	0.561529
2	1.550000	0.561529	3.000000	-0.957492	2.275000	-0.059853	0.059853
3	1.550000	0.561529	2.275000	-0.059853	1.912500	0.293774	0.293774
4	1.912500	0.293774	2.275000	-0.059853	2.093750	0.127391	0.127391
5	2.093750	0.127391	2.275000	-0.059853	2.184375	0.036263	0.036263
6	2.184375	0.036263	2.275000	-0.059853	2.229687	-0.011190	0.011190
7	2.184375	0.036263	2.229687	-0.011190	2.207031	0.012690	0.012690
8	2.207031	0.012690	2.229687	-0.011190	2.218359	0.000788	0.000788

2.2 Método da Falsa Posição

Considerando a equação proposta $f(x)$ com uma taxa de erro de 0.001 obteve o resultado de $x = 2.219596$ depois de 1 iteração resultando em $f(2.219596) = 0.000516$, conforme ilustrado logo abaixo:

Figura 4 – Resultados

```
------------ MÉTODO FALSA POSIÇÃO ------------

Digite o intervalo [a,b]
a = 0.1
b = 2.5
erro = 0.001

|Execução:1|a:0.100000|b:2.500000|f(a):2.402419|f(b):-0.317819|c:2.219596|f(c):-0.000516|FABS(f(c)):0.000516|


Raiz aproximada c: 2.219596
f(c): -0.000516

Process finished with exit code 0
```

Execução:	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	fabs(f(c))
1	0.100000	2.402419	2.500000	-0.317819	2.219596	-0.000516	0.000516

Considerando a equação proposta $f(x)$ com uma taxa de erro de 0.001 obteve o resultado de $x = 2.218185$ depois de 3 iterações resultando em $f(2.218185) = 0.000972$, conforme ilustrado logo abaixo:

Figura 5 – Resultados

```
------------ MÉTODO FALSA POSIÇÃO ------------

Digite o intervalo [a,b]
a = 0.1
b = 3
erro = 0.001

|Execução:1|a:0.100000|b:3.000000|f(a):2.402419|f(b):-0.957492|c:2.173571|f(c):0.047394|FABS(f(c)):0.047394|
|Execução:2|a:2.173571|b:3.000000|f(a):0.047394|f(b):-0.957492|c:2.212549|f(c):0.006903|FABS(f(c)):0.006903|
|Execução:3|a:2.212549|b:3.000000|f(a):0.006903|f(b):-0.957492|c:2.218185|f(c):0.000972|FABS(f(c)):0.000972|


Raiz aproximada c: 2.218185
f(c): 0.000972

Process finished with exit code 0
```

Execução:	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	fabs(f(c))
1	0.100000	2.402419	3.000000	-0.957492	2.173571	0.047394	0.047394
2	2.173571	0.047394	3.000000	-0.957492	2.212549	0.006903	0.006903
3	2.212549	0.006903	3.000000	-0.957492	2.218185	0.000972	0.000972

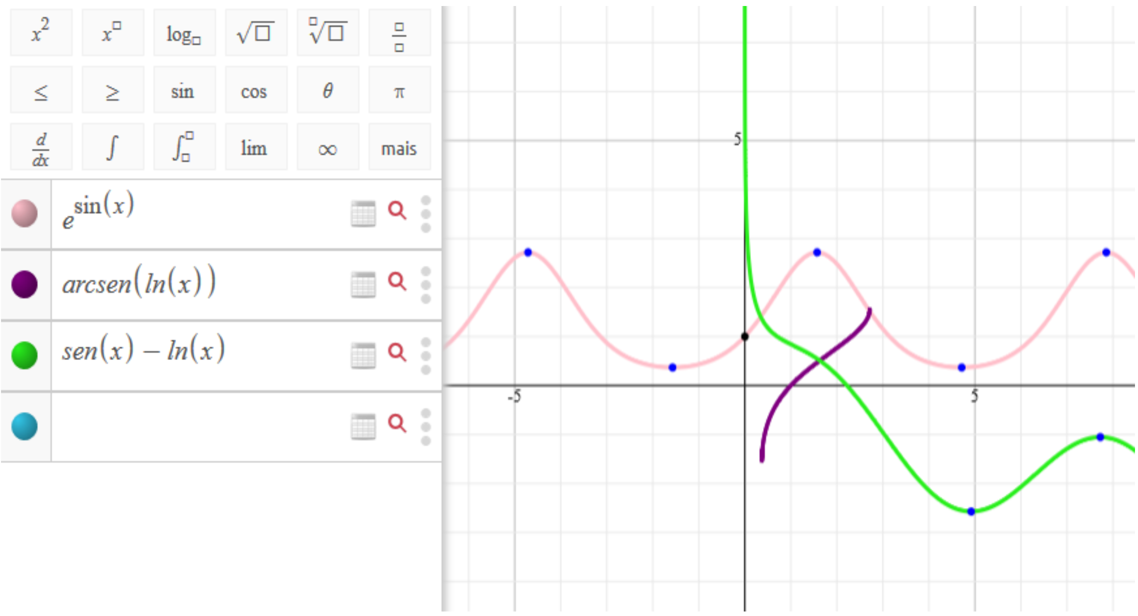
2.3 Método Ponto Fixo

Nesse método, temos como algoritmo usar uma função $g(x)$ gerada da nossa função $f(x) = 0$ a partir de uma transformação de equivalência $x = \varphi(x)$. No nosso problema em questão, temos nossa função $f(x) = sen(x) - ln(x)$ que pode gerar duas funções para o nosso método. As funções geradas são:

- $g(x) = e^{sen(x)}$
- $z(x) = arcsen(ln(x))$

A imagem a seguir ilustra tanto nossa função $f(x)$ quantos as geradas $g(x)$ e $z(x)$:

Figura 6 – Funções: $g(x)$, $z(x)$ e $f(x)$



Na resolução do algoritmo, é necessário que as funções geradas possuam características específicas para servir ao nosso objetivo.

Seja ξ uma raiz da equação f(x)=0, isolando num intervalo I centrado em ξ. Seja φ uma função de iteração para a equação f(x)=0:

1. Se $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I.
2. Se $|\varphi(x)| \leq M < 1$ para todo x em I.
3. A aproximação inicial x_0 pertence a I.

Então a sequência x_k gerada pelo processo iterativo $x_k + 1 = \varphi(x_k)$ converge para a raiz ξ.

A seguir temos os resultados com cada uma das funções geradas por $f(x)$:

Figura 7 – Resultado para $z(x)$

```
------------ MÉTODO DE PONTO FIXO-----------

Digite o valor inicial xo
xo = 2
erro = 0.001

|Execução:1|x0:2.000000|f(x0):0.216150|g(x0):0.765846|FABS(f(x1)):0.216150|
|Execução:2|x1:0.765846|f(x1):0.959921|g(x1):-0.270044|FABS(f(x2)):0.959921|
Traceback (most recent call last):
  File "C:/Users/anani/PycharmProjects/calculonumerico/calculonumerico/MetodoPontoFixo.py", line 40, in <module>
    raiz = pontoFixo(xo, erro)
  File "C:/Users/anani/PycharmProjects/calculonumerico/calculonumerico/MetodoPontoFixo.py", line 26, in pontoFixo
    fx = f(x)
  File "C:/Users/anani/PycharmProjects/calculonumerico/calculonumerico/MetodoPontoFixo.py", line 6, in f
    r = math.sin(x) - math.log(x, math.e)  # FUNÇÃO: sen(x) - ln(x)
ValueError: math domain error

Process finished with exit code 1
```

Usando a função $z(x) = sen(x) - ln(x)$ tivemos um erro de domínio de função. O erro se dá devido ao retorno da função $z(x) = -0.270044$. Esse número não pertence ao conjunto domínio de $f(x)$ fazendo assim de $z(x)$, inválida para a solução do problema.

Assim sendo, a equipe partiu para a função $g(x) = e^{sen(x)}$ para a solução do problema, porém ela possuí uma característica que pode ser observada na figura 6. Essa característica não é desejável para a nossa problemática. Com isso o que acontece é que $g(x)$ não converge para x gerando o problema de loop infinito.

Figura 8 – Resultado para $g(x)$ - 1

```
File - MetodoPontoFixo
C:\Users\anani\projectpython\CalculoNumerico\venv\Scripts\python.exe C:/Users/anani/projectpython/CalculoNumerico/MetodoPontoFixo.py

------------ MÉTODO DO PONTO FIXO ------------

Digite o valor inicial xo
xo = 2
erro = 0.001

|Execução:1|x0:2.000000|f(x0):0.216150|x1:2.482578|f(x1):-0.296959|FABS(f(x1)):0.296959|
|Execução:2|x1:2.482578|f(x1):-0.296959|x2:1.844740|f(x2):0.350373|FABS(f(x2)):0.350373|
|Execução:3|x2:1.844740|f(x2):0.350373|x3:2.618788|f(x3):-0.463399|FABS(f(x3)):0.463399|
|Execução:4|x3:2.618788|f(x3):-0.463399|x4:1.647588|f(x4):0.497741|FABS(f(x4)):0.497741|
|Execução:5|x4:1.647588|f(x4):0.497741|x5:2.710283|f(x5):-0.578992|FABS(f(x5)):0.578992|
|Execução:6|x5:2.710283|f(x5):-0.578992|x6:1.519013|f(x6):0.580598|FABS(f(x6)):0.580598|
|Execução:7|x6:1.519013|f(x6):0.580598|x7:2.714641|f(x7):-0.584561|FABS(f(x7)):0.584561|
|Execução:8|x7:2.714641|f(x7):-0.584561|x8:1.513006|f(x8):0.584232|FABS(f(x8)):0.584232|
|Execução:9|x8:1.513006|f(x8):0.584232|x9:2.713748|f(x9):-0.583420|FABS(f(x9)):0.583420|
|Execução:10|x9:2.713748|f(x9):-0.583420|x10:1.514236|f(x10):0.583490|FABS(f(x10)):0.583490|
|Execução:11|x10:1.514236|f(x10):0.583490|x11:2.713938|f(x11):-0.583663|FABS(f(x11)):0.583663|
|Execução:12|x11:2.713938|f(x11):-0.583663|x12:1.513973|f(x12):0.583649|FABS(f(x12)):0.583649|
```

Figura 9 – Resultado para $g(x)$ - 2

```
|Execução:92|x91:2.713905|f(x91):-0.583621|x92:1.514019|f(x92):0.583621|FABS(f(x92)):0.583621|
|Execução:93|x92:1.514019|f(x92):0.583621|x93:2.713905|f(x93):-0.583621|FABS(f(x93)):0.583621|
|Execução:94|x93:2.713905|f(x93):-0.583621|x94:1.514019|f(x94):0.583621|FABS(f(x94)):0.583621|
|Execução:95|x94:1.514019|f(x94):0.583621|x95:2.713905|f(x95):-0.583621|FABS(f(x95)):0.583621|
|Execução:96|x95:2.713905|f(x95):-0.583621|x96:1.514019|f(x96):0.583621|FABS(f(x96)):0.583621|
|Execução:97|x96:1.514019|f(x96):0.583621|x97:2.713905|f(x97):-0.583621|FABS(f(x97)):0.583621|
|Execução:98|x97:2.713905|f(x97):-0.583621|x98:1.514019|f(x98):0.583621|FABS(f(x98)):0.583621|
|Execução:99|x98:1.514019|f(x98):0.583621|x99:2.713905|f(x99):-0.583621|FABS(f(x99)):0.583621|
|Execução:100|x99:2.713905|f(x99):-0.583621|x100:1.514019|f(x100):0.583621|FABS(f(x100)):0.583621|
|Execução:101|x100:1.514019|f(x100):0.583621|x101:2.713905|f(x101):-0.583621|FABS(f(x101)):0.583621|
Função de iteração não está convergindo


Raiz aproximada xi: 2.713905
f(xi): -0.583621

Process finished with exit code 0

```

Para a visualização da execução, optou-se por limitar o número de iterações para 100 linhas e logo após exibir uma mensagem sobre a não convergência da função. Temos então que o método do Ponto Fixo para nossa problemática específica é ineficaz para uso.

2.4 Método de Newton

Considerando a equação proposta $f(x)$ com uma taxa de erro de 0.001 obteve o resultado de $x = 2.219979$ depois de 2 iterações resultando em $f(2.219979) = -0.000920$, conforme ilustrado logo abaixo:

Figura 10 – Resultados

```
------------- MÉTODO DE NEWTON -------------

Digite o valor inicial xo
xo = 3
erro = 0.001

|Execução:1|x0:3.000000|f(x0):-0.957492|x1:2.276450|f(x1):-0.061430|FABS(f(x1)):0.061430|
|Execução:2|x1:2.276450|f(x1):-0.061430|x2:2.219979|f(x2):-0.000920|FABS(f(x2)):0.000920|


Raiz aproximada xi: 2.219979
f(xi): -0.000920

Process finished with exit code 0
```

Execução:	x_0	$f(x_0)$	x_1	$f(x_1)$	$fabs(f(x_1))$
1	3.000000	-0.957492	2.276450	-0.061430	0.061430
2	2.276450	-0.061430	2.219979	-0.000920	0.000920

Considerando a equação proposta $f(x)$ com uma taxa de erro de 0.001 obteve o resultado de $x = 2.219181$ depois de 2 iterações resultando em $f(2.219181) = -0.000078$, conforme ilustrado logo abaixo:

Figura 11 – Resultados

```
------------- MÉTODO DE NEWTON -------------

Digite o valor inicial xo
xo = 2.5
erro = 0.001

|Execução:1|x0:2.500000|f(x0):-0.317819|x1:2.235403|f(x1):-0.017262|FABS(f(x1)):0.017262|
|Execução:2|x1:2.235403|f(x1):-0.017262|x2:2.219181|f(x2):-0.000078|FABS(f(x2)):0.000078|


Raiz aproximada xi: 2.219181
f(xi): -0.000078

Process finished with exit code 0
```

Execução:	x_0	$f(x_0)$	x_1	$f(x_1)$	$fabs(f(x_1))$
1	2.500000	-0.317819	2.235403	-0.017262	0.017262
2	2.235403	-0.017262	2.219181	-0.000078	0.000078

Esse método por sua vez foi escolhido como o método mais eficaz para o devido problema, primeiramente, por conta da baixa quantidade de iterações e, em segundo, devido a sua constância na quantidade mesmo modificando o x_0. No método Falsa Posição ao mudar os parâmetros para o intervalo [a, b], mesmo sendo uma pequena alteração de tamanho, houve um aumento de iterações superior aos resultados do método de Newton.

3 CONCLUSÃO

Com todos os resultados obtidos pela equipe, podemos organizar-los através de uma tabela para melhor visualização:

Métodos	**Nº de Execuções**	**x**	**f(x)**	**Erro Médio**
Bisseção	7	2.218750	0.000377	0.178335142
Falsa Posição	1	2.219596	0.000516	0.000516
Ponto Fixo	-	-	-	-
Newton	2	2.219181	-0.000078	0.00867

Para tabela foi usado o melhor resultado de cada método. O critério para decisão do método mais eficiente a princípio se seria pelo número de execuções somente. Porém podemos notar que a precisão do método Newton foi superior em seu melhor resultado. Além disso, ele teve uma constância superior onde mesmo na mudança de parâmetros não houve aumento de iterações, diferente do método Falsa Posição que subiu para três execuções. A partir dessa análise temos definido como conclusão o seguinte posicionamento de eficiência:

- (1º Lugar de Eficiência) Método de Newton
- (2º Lugar de Eficiência) Método Falsa Posição
- (3º Lugar de Eficiência) Método Bisseção
- (Ineficiente) Método Ponto Fixo

REFERÊNCIAS

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise numérica*. [S.l.]: Cengage Learning, 2008. Citado na página 1.

EQSQUEST. *Symbolab*. 2017. Disponível em: <https://pt.symbolab.com>. Citado na página 2.