



# സ്പന്തംഭങ്ങൾ

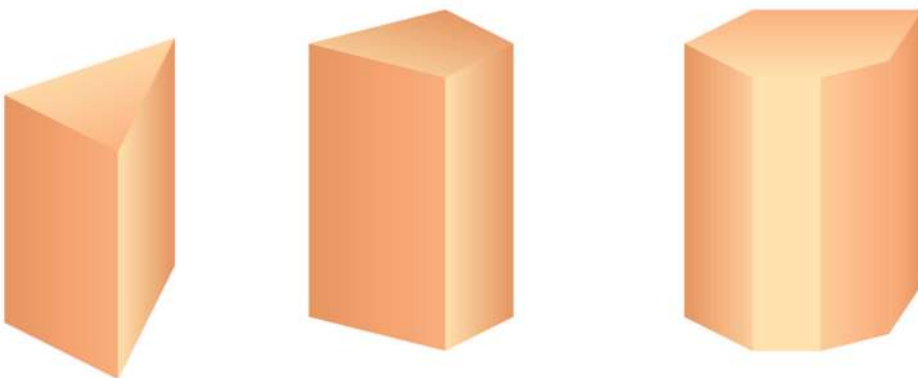
## പാദം പലതരം

ചതുരക്കട്ടകളെക്കുറിച്ചും, അവയുടെ വ്യാപ്തത്തെ കുറിച്ചും ആറാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചല്ലോ:



പല ചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഇതിന്റെ പുറംകൂട്, അഥവാ ഉപരിതലം. താഴെയും മുകളിലും ഒരേ പോലുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ, ഇടതും വലതും രണ്ടെണ്ണം, മൂന്നിലും പിന്നിലും മൂന്നാമതൊരു ജോടി; ആകെ ആറു ചതുരങ്ങൾ.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



പരപ്പും, ഉയരവുമുള്ള ഇവയെ ത്രിമാനരൂപങ്ങൾ (three dimensional shapes) അല്ലെങ്കിൽ ഘനരൂപങ്ങൾ (solids) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇവയ്ക്കെല്ലാം പൊതുവായ മറ്റു ചില സവിശേഷതകളുണ്ട്.

### ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ

വിവിധതരം ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി തുടക്കത്തിൽ ചില തയ്യാറെടുപ്പുകൾ ആവശ്യമാണ്.

- ജിയോജിബ്ര തുറന്ന് View വിൽനിന്ന് Algebra, Graphic, 3D എന്നിവ തുറക്കുക.
- 3D Graphics ൽ വലതുകിഴക്ക് ചെയ്ത് Graphic എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന Preferences എന്ന ജാലകത്തിൽ Show Axes, Use clipping, Show clipping എന്നിവയ്ക്ക് നേരെയുള്ള ✓ അടയാളം കളയുക.
- Options → Labelling → No New Object നൽകിയാൽ വരയ്ക്കുന്ന രൂപങ്ങളുടെ പേര് എഴുതിവരുന്നത് ഒഴിവാക്കാം. ഇനി സ്തംഭങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.

Graphic ൽ ത്രികോണം, ചതുരം എന്നിങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം വരയ്ക്കുക (ഇതിനായി Grid ഉപയോഗിക്കാം). ഈ രൂപം 3D Graphics ലും കാണാൻ കഴിയും. 3D Graphics ൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Extrude to Prism or Cylinder ഉപയോഗിച്ച് 3D Graphics ൽ കാണുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ തുറക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം നൽകുക. 3D Graphics ൽ ഒരു സ്തംഭം ലഭിക്കും. Rotate 3D Graphics View ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തംഭത്തിനെ തിരിച്ചും മറിച്ചുമൊക്കെ നോക്കാൻ കഴിയും.

Graphics ൽ വരച്ച ജ്യാമിതീയരൂപത്തിന്റെ ആകൃതി മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച് സ്തംഭത്തിന്റേയും ആകൃതി മാറുന്നത് കാണാം. ഒരു സ്നൈഡർ ഉണ്ടാക്കി സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായി സ്നൈഡറിന്റെ പേര് കൊടുത്താൽ ഉയരം ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് മാറ്റാം.

ആദ്യത്തെ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലം, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും, മൂന്നു ചതുരങ്ങളും ചേർന്നതാണ്. രണ്ടാമത്തേതിൽ ത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം ചതുർഭുജങ്ങളും, മൂന്നാമത്തേതിൽ ഷഡ്ഭുജങ്ങളുമാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ബഹുഭുജങ്ങളും, അവയുടെ വശങ്ങളോരോന്നും എതിർവശങ്ങളായി ഒരേ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുമാണ് ഇവയുടെയെല്ലാം ഉപരിതലം. ഇത്തരം രൂപങ്ങളുടെ പൊതുവായ പേര് ബഹുഭുജസ്തംഭം (prism) എന്നാണ്.

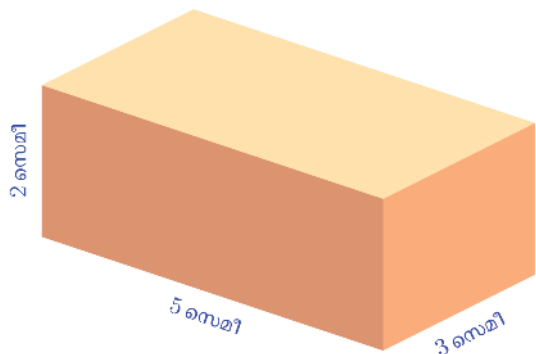
ഒരു സ്തംഭത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളെയും ചതുരങ്ങളെയുമെല്ലാം അതിന്റെ മുഖങ്ങൾ (faces) എന്നാണ് പറയുന്നത്. താഴത്തും മുകളിലുമുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളെ പാദ മുഖങ്ങളെന്നും, ചതുരങ്ങളെ പാർശ്വമുഖങ്ങളെന്നും പറയുന്നു. പാദമുഖങ്ങളുടെ ആകൃതിയനുസരിച്ച്, സ്തംഭങ്ങളെ, ത്രികോണസ്തംഭം, ചതുർഭുജസ്തംഭം എന്നെല്ലാം തരംതിരിക്കാം.

മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്, ഒരു ത്രികോണസ്തംഭവും, ഒരു ചതുർഭുജസ്തംഭവും, ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭവുമാണ്. ഇതുവരെ ചതുരക്കട്ട എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന രൂപത്തിനെ (അല്പം കൂടി കനത്തിൽ) ചതുരസ്തംഭം എന്നു വിളിക്കാം.

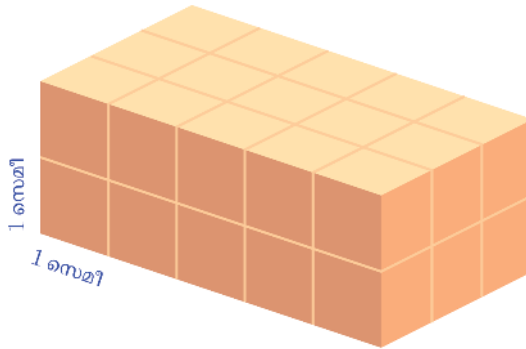
ബഹുഭുജങ്ങളും ചതുരങ്ങളും കാർഡ് ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് പൊള്ളയായ പലതരം സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.

### വ്യാപ്തം

ആറാംക്ലാസിൽ ചതുരസ്തംഭങ്ങളുടെ (ചതുരക്കട്ടകളുടെ) വ്യാപ്തം കണക്കാക്കിയത് ഓർമയുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരസ്തംഭം നോക്കുക.



ചുവടെ കാണുന്നതു പോലെ ഇതിനെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരക്കട്ടകളായി ഭാഗിക്കാം:

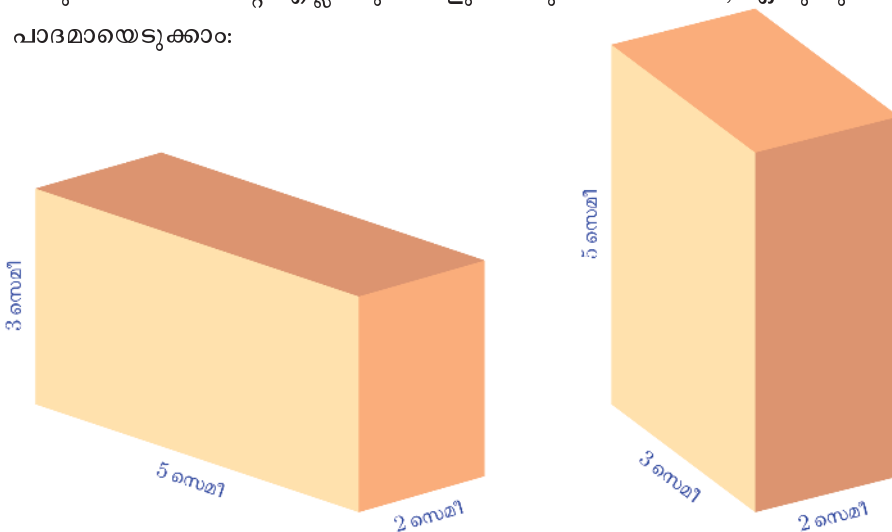


ഇതിൽ  $5 \times 3 \times 2 = 30$  ചെറുസമചതുരക്കട്ടകളുണ്ട്. അതിനാൽ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 30 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ആറാംക്ലാസിൽ ഭാഗങ്ങളുടെ ഭാഗം എന്ന പാഠത്തിലെ ഭിന്നപ്പരപ്പ് എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെയും നീളവും വീതിയും ഉയരവുമെല്ലാം ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും വ്യാപ്തം, ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നു കാണാം. പുതിയസംഖ്യകൾ എന്ന പാഠത്തിലെ ഗുണനം എന്ന ഭാഗത്തിൽ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ അളവുകൾ അഭിന്നകസംഖ്യകളാണെങ്കിലും, വ്യാപ്തം അവയുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നും കാണാം.

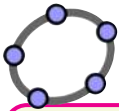
ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം ഒരു ചതുരമാണ്: വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും; പരപ്പളവ്  $5 \times 3$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഈ പരപ്പളവിന്റെയും സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായ 2 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ് വ്യാപ്തം.

ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ എല്ലാ മുഖങ്ങളും ചതുരമായതിനാൽ, ഏതു മുഖവും പാദമായെടുക്കാം:

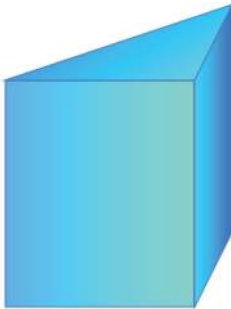


എങ്ങനെയാണിത്? പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം തന്നെയല്ലേ വ്യാപ്തം?

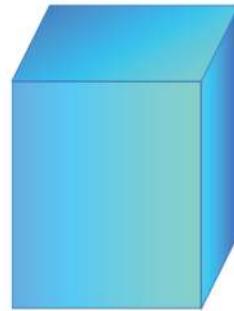
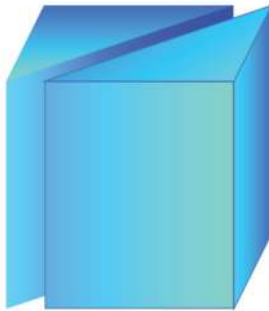
ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യമൊരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭമെടുക്കാം:



ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണാൻ Volume ഉപയോഗിച്ച് സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. സ്തംഭം വരയ്ക്കുമ്പോൾ Algebra ജാലകത്തിൽ Prism എന്നതിന് താഴെ ഒരു അക്ഷരവും സംഖ്യയും കാണാം. സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തെയാണ് സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

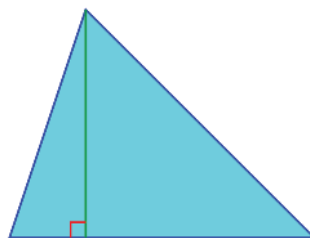


ഇതേപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭം കൂടി ചേർത്തു വെച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭമുണ്ടാക്കാമല്ലോ:



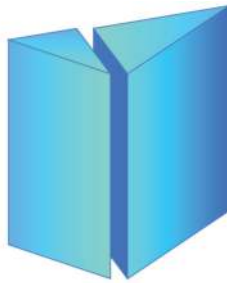
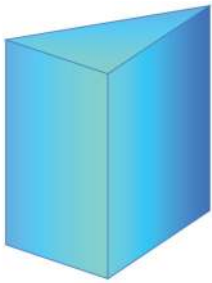
പാദമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്  $a$  എന്നെടുത്താൽ, ഇത്തരം രണ്ടെണ്ണം ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് (പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം)  $2a$ ; ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ് ചതുരസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉയരം. അത്  $h$  എന്നെടുത്താൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം  $2ah$ . ഇത് ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ട് ത്രികോണസ്തംഭങ്ങൾ ചേർന്ന വ്യാപ്തമാണ്. അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം  $ah$ . അതായത്, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം.

ഇനി പാദം മട്ടമല്ലാത്ത ത്രികോണമാണെങ്കിലോ? ഏതു ത്രികോണത്തെയും, ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ ലംബം വെച്ച്, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കാം.





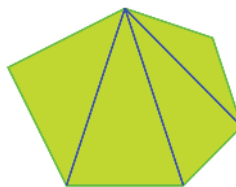
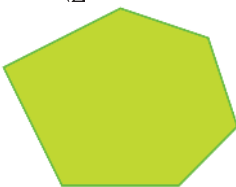
അപ്പോൾ പാദം മട്ടത്രികോണമല്ലാത്ത സ്തംഭത്തിന്റെയും പാദവും, മുകളിലെ ത്രികോണവും സമാന്തരവരകൾ കൊണ്ടു ഭാഗിച്ച്, ഈ വരകളിലൂടെ സ്തംഭത്തെ നെടുക്കെ മുറിച്ചാൽ, രണ്ടു മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളാകും.



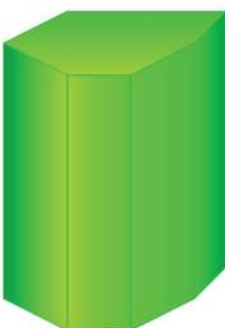
ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം കൂട്ടിയാൽ, ആദ്യത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കിട്ടുകയും ചെയ്യും. ഭാഗിക്കുന്നതിനു മുമ്പുള്ള സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ്  $a$ , ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന സ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ്  $b, c$  എന്നെടുത്താൽ  $a = b + c$ . എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്. ഇത്  $h$  എന്നെടുത്താൽ, മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക  $bh + ch = (b + c)h = ah$ . ഇത് ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തമല്ലേ?

അങ്ങനെ ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്നു കിട്ടി.

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും, ഒരു നിശ്ചിത മൂലയും മറ്റൊരു മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം; ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അങ്ങനെ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയുമാണ്:

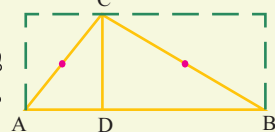


അപ്പോൾ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തെയും, ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം:



ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച് അതുപയോഗിച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭം വരയ്ക്കുക. Graphics ലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Reflect about Point ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും ഈ ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രതിബിംബമായി മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടും. രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളും ചേർന്ന് ഒരു ചതുരം രൂപപ്പെടുന്നത് കാണാം. പുതിയ മട്ടത്രികോണം പാദമാക്കിക്കൊണ്ട് ആദ്യത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ അതേ ഉയരത്തിൽ മറ്റൊന്ന് വരയ്ക്കുക. രണ്ട് മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളും ചേർന്ന് ഒരു ചതുരസ്തംഭം കിട്ടും.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതുപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണസ്തംഭം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച് എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഈ ബിന്ദു മട്ടമൂലയായിവരുന്ന രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളും വരയ്ക്കുക. ഓരോ മട്ടത്രികോണത്തിനും അതിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലുള്ള പ്രതിബിംബം വരയ്ക്കുക (Reflect about Point ഉപയോഗിക്കാം). ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭം മറച്ചതിനുശേഷം അതേ ഉയരത്തിൽ, ഇപ്പോൾ ലഭിച്ച നാല് മട്ടത്രികോണങ്ങളും പാദങ്ങളാകുന്ന നാല് ത്രികോണസ്തംഭങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ നാലും ചേർന്ന് ഒരു ചതുരസ്തംഭം ആകുന്നത് കാണാം. ഇതിന്റെ വ്യാപ്തവും, ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ്  $a$  ആണെന്നും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം  $h$  ആണെന്നും എടുക്കാം. പാദത്തെ  $n$  ത്രികോണങ്ങളാക്കാമെങ്കിൽ ചിത്രത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ സ്തംഭത്തെ  $n$  ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി മുറിക്കാം. ഇവയുടെ പാദപ്പരപ്പ്  $b_1, b_2, \dots, b_n$  എന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തം  $b_1h, b_2h, \dots, b_nh$  എന്നാകും. അപ്പോൾ ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$b_1h + b_2h + \dots + b_nh = (b_1 + b_2 + \dots + b_n)h = ah$$

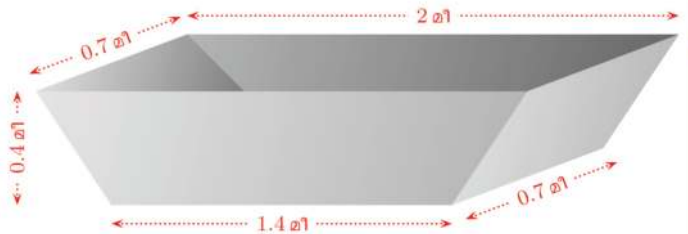
അതായത്,

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാദം, വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജത്രികോണവും, ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം

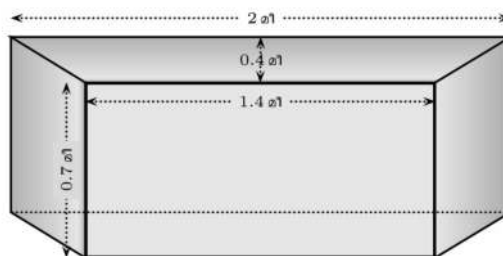
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ ഘനസെന്റിമീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ചിത്രമാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇതിലെത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?



മുന്നിലെയും പിന്നിലെയും

മുഖങ്ങൾ ഒരേപോലെയുള്ള സമപാർശ്വലംബകങ്ങളായ സ്തംഭമാണിത്. ഇതൊരു സ്തംഭമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ ഈ സ്തംഭത്തെ ചരിച്ച് ഇങ്ങനെ വയ്ക്കുന്നതായി കരുതുക:



ഈ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times (2 + 1.4) \times 0.4 = 0.68 \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

സംഭരണിയുടെ വ്യാപ്തം,

$$0.68 \times 0.7 = 0.476 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$



ഒരു ഘനമീറ്ററെന്നാൽ ആയിരം ലിറ്റർ. അപ്പോൾ സംഭരണിയിൽ 476 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

(സ്തംഭം എപ്പോഴും പാദം താഴെയായി വയ്ക്കണമെന്നില്ല)

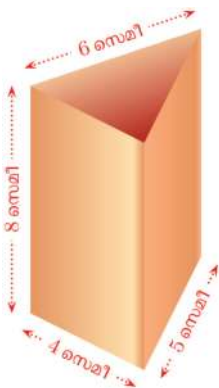
?



- (1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- (2) മഴവെള്ളം ശേഖരിക്കാനായി, സ്കൂൾമുറ്റത്ത് സമഷഡ്ഭുജാകൃതിയിൽ ഒരു കുഴിയുണ്ട്. ഇതിന്റെ ഒരു വശം 2 മീറ്ററും, കുഴിയുടെ ആഴം 3 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ ഒരു മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. അത് എത്ര ലിറ്ററാണ്?
- (3) സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പാദം, വശങ്ങളെല്ലാം 16 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരമാണ്. പാത്രത്തിൽ 10 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. ഇതിൽ, വക്കുകളെല്ലാം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ട മുക്കിയാൽ, വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പ് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ഉയരും?

## പരപ്പളവ്

കട്ടിക്കടലാസുകൊണ്ട് ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു കുഴലുണ്ടാക്കണം:



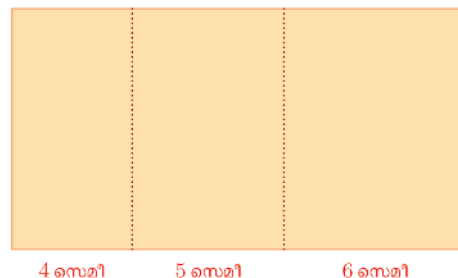
മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചെടുത്ത് ഉണ്ടാക്കാം. ഒറ്റച്ചുരുരം മടക്കിയൊട്ടിച്ചും ഉണ്ടാക്കാം:

ഇതുണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

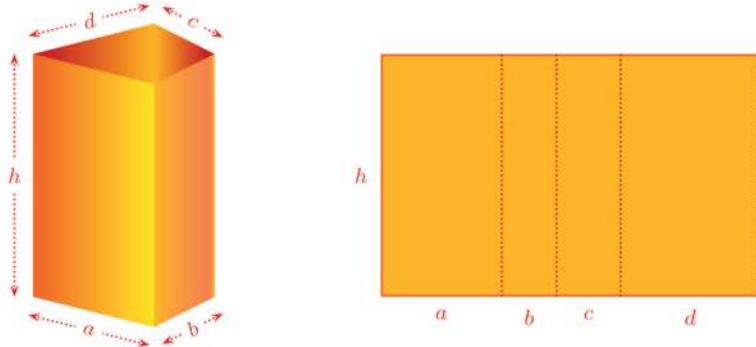
ഒരു സ്തംഭത്തെ പൊളിച്ച് നിവർത്തിവയ്ക്കുന്ന രൂപം എങ്ങനെയുണ്ടാകുമെന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ കഴിയും. ഒരു സ്തംഭം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics ലെ Net ഉപയോഗിച്ച് സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ സ്തംഭം പൊളിച്ച് നിവർത്തിയ രൂപം കിട്ടും. ഇതിനോടൊപ്പം Graphics ൽ ഒരു സ്റ്റേഡറും കിട്ടും. സ്റ്റേഡർ നീക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് സ്തംഭം രൂപപ്പെട്ടുവരുന്നത് കാണാം. ആദ്യം വരച്ച സ്തംഭം മറച്ചു വയ്ക്കണമെങ്കിൽ Algebra View ലെ Prism എന്നതിൽ സ്തംഭത്തിന്റെ പേരിനു നേരെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. വരച്ച ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ മറച്ചുവയ്ക്കാൻ Algebra View യിലെ Point എന്ന് എഴുതിയിരിക്കുന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഒരമിച്ചെടുക്കുക. തുടർന്ന് വലതു ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Show Object എന്നതിന് നേരെയുള്ള ✓ അടയാളം കളയുക.



ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് കൂട്ടിയതാണിത്. പൊതുവെ ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവിന്റെ തുകയെ അതിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ് (lateral surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത് ചുരുക്കി, പാർശ്വപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, 15 നെ 8 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്; ഇതിലെ  $4 + 5 + 6 = 15$ , പാദമായ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, 8 സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവുമല്ലേ? അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമെന്നു കാണാം.

പാദം ത്രികോണത്തിനു പകരം ചതുർഭുജമായാലോ?



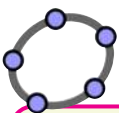
ഈ ചതുർഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ്  $(a + b + c + d)h$ ; അതായത്, പാദചതുർഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം. ഇതുപോലെ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാം:

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ ഉപരിതലത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, പാർശ്വപ്പരപ്പിനോട് പാദപ്പരപ്പുകൾ കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഒരു കണക്കു നോക്കാം:

മരം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് 48 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, അതിന്റെ ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം ആറെണ്ണം ചേർത്തുവെച്ച് ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭമുണ്ടാക്കി:



Net ഉപയോഗിച്ച് ഒരു സ്തംഭത്തിനെ പൊളിച്ചുനിവർത്തിയ രൂപം നിർമ്മിക്കുമ്പോൾ Algebra ജാലകത്തിൽ Net എന്ന് എഴുതിയതിനു ചുവടെ ഒരക്ഷരവും ഒരു സംഖ്യയും കാണാം (ഉദാഹരണമായി  $h=22$ ). സ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവിനെയാണ് ഈ സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.





ഇതു മുഴുവൻ വർണക്കടലാസൊട്ടിച്ച് ഭംഗിയാക്കാൻ, എത്ര ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

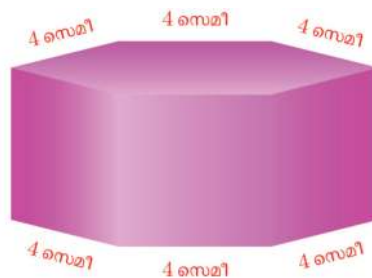
ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ മുഴുപ്പുരപ്പാണിവിടെ വേണ്ടത്; അതിന് പാർശ്വപ്പുരപ്പും, പാദപ്പുരപ്പുകളും കൂട്ടണം.

പാർശ്വപ്പുരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് വേണം. അതിന് ത്രികോണപാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കണം.

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പുരപ്പിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, പാദ ചുറ്റളവു കിട്ടും. അപ്പോൾ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ്  $48 \div 4 = 12$  സെന്റിമീറ്റർ.

പാദം ഒരു സമഭുജത്രികോണമായതിനാൽ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ മൂന്നുമടങ്ങാണ് ചുറ്റളവ്; ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം  $12 \div 3 = 4$  സെന്റിമീറ്റർ.

കണക്കിലെ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് ഇനി കണക്കാക്കാമല്ലോ.



വശങ്ങളെല്ലാം 4 സെന്റിമീറ്ററായ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്  $6 \times 4 = 24$  സെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും 4 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പാർശ്വപ്പുരപ്പ്  $24 \times 4 = 96$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി രണ്ടു പാദങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടണം. ഒരു ത്രികോണപാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

ഇവ ആരെണ്ണം ചേർന്ന ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്  $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലം മുഴുവനെടുത്താൽ പരപ്പളവ്  $96 + (2 \times 24\sqrt{3}) = 96 + 48\sqrt{3} = 48(2 + \sqrt{3})$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

$\sqrt{3}$  നോക് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയായി 1.73 എടുത്താൽ, ഇത് 179 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിനേക്കാൾ അല്പം കൂടുതലെന്നു കാണാം. ഏതായാലും 180 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് മതിയാകും.

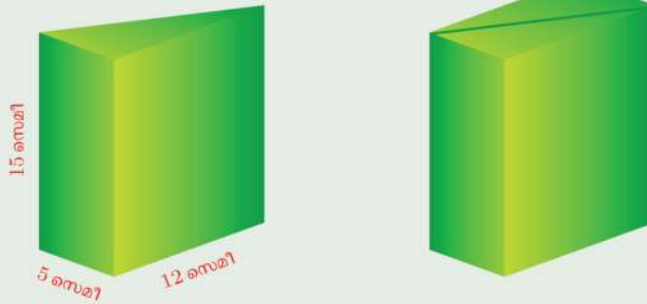




?

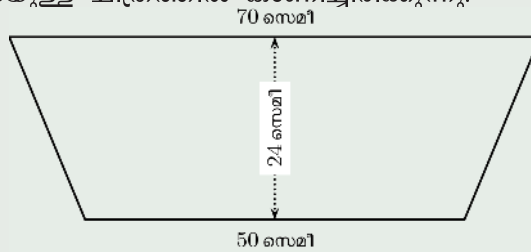


- (1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 12 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കുക.
- (2) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, പാദം മട്ടത്രികോണമായ രണ്ടു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി.



ഈ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പത്രയാണ്?

- (3) സ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ലംബകമുഖങ്ങളുടെ അളവുകൾ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



സംഭരണിയുടെ നീളം 80 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇതിന്റെ അകത്തും പുറത്തും ചായമടിക്കാൻ, ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 100 രൂപാ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ വേണം?

### വൃത്തസ്തംഭം

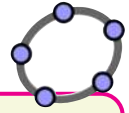
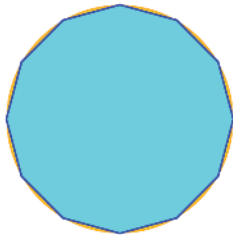
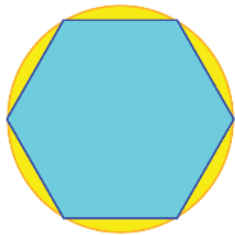
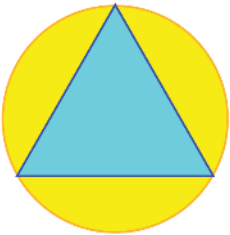
അറ്റത്ത് തുല്യമായ ബഹുഭുജങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമായ രൂപങ്ങളാണ് ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങൾ. അറ്റത്ത് വൃത്തങ്ങളും, വശങ്ങൾ ചതുരങ്ങളായി മടങ്ങാതെ ഒഴുക്കൻ വളവുമായ സ്തംഭങ്ങളുമുണ്ട്; കട്ടിയും പൊള്ളയുമായ ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ധാരാളം കണ്ടിട്ടുണ്ടാകുമല്ലോ:



ഇത്തരം ഘനരൂപത്തെ വൃത്തസ്തംഭം (cylinder) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

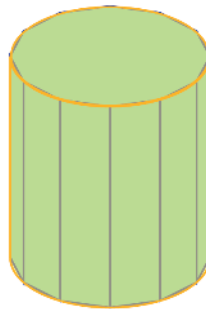
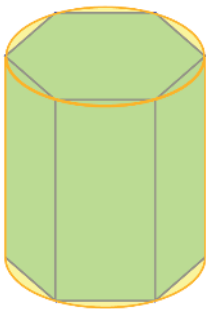
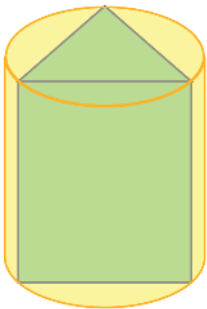
വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണോ?

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കിയത്, അതിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുതലാക്കിയിട്ടാണല്ലോ:



$n$  എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer Slider ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, മൂലകൾ വൃത്തത്തിൽ ആയി  $n$  വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics തുറന്ന്, ബഹുഭുജസ്തംഭവും വൃത്തസ്തംഭവും വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടി നോക്കൂ. ബഹുഭുജസ്തംഭം വൃത്തസ്തംഭത്തിനോട് അടുത്തുവരുന്നതായി കാണാം.

അപ്പോൾ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളിൽ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ അവ വൃത്തസ്തംഭത്തിനോട് അടുക്കും:



വൃത്തസ്തംഭത്തിനുള്ളിലെ വിവിധ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ്  $P_1, P_2, P_3, \dots$  എന്നും, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ തന്നെ പാദപ്പരപ്പ്  $c$  എന്നുമെടുത്താൽ,  $P_1, P_2, P_3, \dots$  എന്നീ സംഖ്യകൾ  $c$  എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും. എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്; അത്  $h$  എന്നെടുത്താൽ, ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം  $p_1h, p_2h, p_3h, \dots$  എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ സംഖ്യകൾ  $ch$  എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിനോടാണ്. അങ്ങനെ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം  $ch$  എന്നു കിട്ടും.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ  $\pi$  കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം

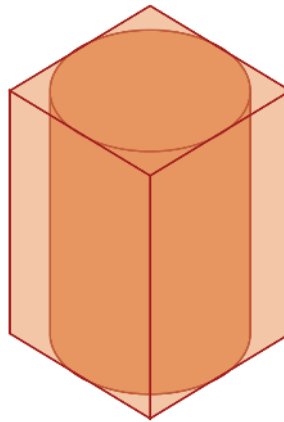


3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം  $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$  ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുണ്ട്. സ്തംഭത്തിന് 20 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവുമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തമാണ് ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം; ഉയരം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റേതുതന്നെ:



അതായത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു തുല്യമാകണം.

അപ്പോൾ, പാദവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്റർ; പാദപരപ്പളവ്  $25\pi$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തം  $25\pi \times 20 = 500\pi$  ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

?



- (1) ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 32 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരൂക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 20 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി. ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?
- (2) ഒരേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

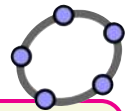


(3) രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഉയരം 5:4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമാണ്.

- ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?
- ആദ്യത്തെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 720 ഘനസെന്റിമീറ്റർ; രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

### വക്രതലം

ചതുരാകൃതിയിലുള്ള കടലാസോ തകിടോ വളച്ച്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള കുഴലുണ്ടാക്കാം; മറിച്ച്, പൊള്ളയായ, രണ്ടറ്റവും തുറന്ന ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിനെ മുറിച്ച് വളവു നിവർത്തിയാൽ ഒരു ചതുരമാകും:



ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതലപരപ്പളവ് (curved surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി വക്രപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ്. മറ്റേ വശം പാദവൃത്തം നിവർത്തിയെടുത്തതാണ്; അതായത്, അതിന്റെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്. ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണ് വക്രപ്പരപ്പ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ Algebra ജാലകത്തിൽ Cylinder എന്നതിനു ചുവടെ കാണുന്ന സംഖ്യ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യപ്തവും Surface എന്നതിനു ചുവടെ കാണുന്ന സംഖ്യ വക്രതല പരപ്പളവുമാണ്.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ  $\pi$  മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വക്രപരപ്പ്  $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇത് അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ, ഉപരിതലത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കിട്ടാൻ, രണ്ടറ്റത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കൂടി കൂട്ടണം. അതായത്,  $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$  ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.



(1) ഒരു കിണറിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം 2.5 മീറ്ററും, ആഴം 8 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിന്റെ ഉൾഭാഗം സിമന്റ് തേയ്ക്കുന്നതിന്, ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 350 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(2) 1.20 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു റോളറിന്റെ വ്യാസം 80 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. ഇത് ഒരു പ്രാവശ്യം കറക്കുമ്പോൾ, നിരപ്പാവുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പ് ഉവ് എത്രയാണ്?



(3) ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പും തുല്യമാണ്. പാദത്തിന്റെ ആരവും സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?



ഒരു അലമാരയുടെ ചിത്രമാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. നീളങ്ങൾ എല്ലാം ഇഞ്ചിലാണ്. മുൻഭാഗത്ത് രണ്ട് അടപ്പുകളും വേണം. ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ ഓരോ പ്ലൈവുഡ് കഷണത്തിന്റെയും ചിത്രം പ്രത്യേകം വരച്ച് അളവുകൾ എഴുതുക (ഒരേ അളവുകൾ ഉള്ളത് ഒരെണ്ണം വരച്ച് എണ്ണം എഴുതിയാൽ മതി). അലമാര ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ പ്ലൈവുഡിന്റെ ആകെ പരപ്പ് എത്രയാണ്?

18 മില്ലിമീറ്റർ (ഏകദേശം  $\frac{3}{4}$  ഇഞ്ച്) കനമുള്ള പ്ലൈവുഡാണ് നിർമ്മാണത്തിന് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്. മാർക്കറ്റിൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വലിപ്പത്തിലുള്ള ഷീറ്റുകൾ കിട്ടും.  $96 \times 48$  ഇഞ്ച് വലിപ്പമുള്ളതും  $72 \times 48$  ഇഞ്ച് വലിപ്പമുള്ളതും.

ഈ അലമാരയുണ്ടാക്കാൻ ഇത്തരത്തിലുള്ള ഓരോ ഷീറ്റും എത്രവീതം വാങ്ങണം? (ഓരോ ഷീറ്റും പരമാവധി ഉപയോഗപ്പെടുത്താൻ ശ്രദ്ധിക്കുക). കട്ടിയുള്ള കാർഡ് ബോർഡ് ഉപയോഗിച്ച് ഇതിന്റെ ഒരു ചെറുമാതൃക ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.

