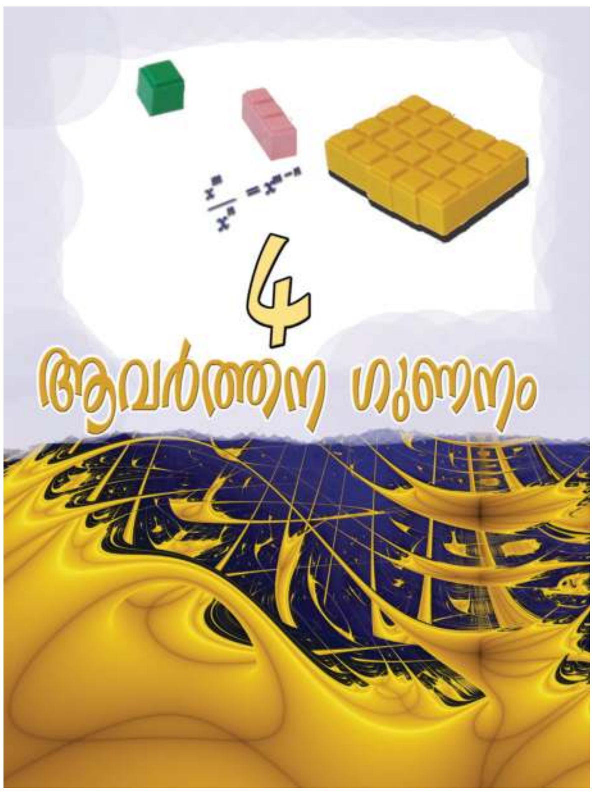
4

ആവർത്തന ഗുണനം



ഗുണനവും വലുപ്പവും

ഒരു പഴയ കഥയാണ്. ഒരു ധനികൻ സഹായം ചോദിച്ചു വന്നയാളോട് പറഞ്ഞു. “ഒന്നുകിൽ ഓരോ ദിവസവും ആയിരം രൂപ വീതം മുപ്പതു ദിവസം തരാം; അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ ദിവസം ഒരു പൈസ, രണ്ടാമത്തെ ദിവസം രണ്ടു പൈസ, മൂന്നാമത്തെ ദിവസം നാലുപൈസ എന്നിങ്ങനെ ഓരോ ദിവസവും ഇരട്ടിയാക്കി മുപ്പതു ദിവസം തരാം. ഏതാണ് വേണ്ടത്?”

ഏതാണ് നല്ലത്?

നമുക്ക് നോക്കാം.

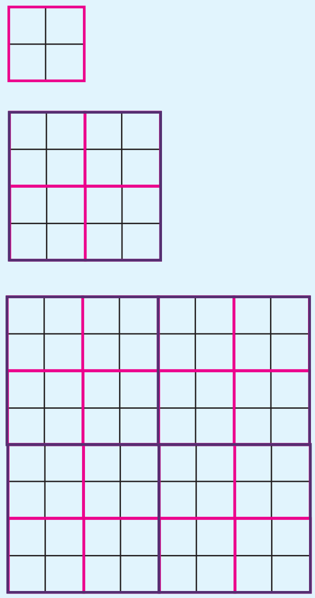
അദ്യത്തെ രീതിയിലാണെങ്കിൽ 30 ദിവസം കൊണ്ട് 30000 രൂപ കിട്ടും. രണ്ടാമത്തെ രീതിയിലാണെങ്കിലോ?

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

എന്നിങ്ങനെ 30 സംഖ്യകൾ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന അത്രയും പൈസ. ഇത് എത്രയാകുമെന്നോ? 1073741823 പൈസ. അതായത് ഒരുകോടിയിലധികം രൂപ!

ഗുണിച്ച് ഗുണിച്ച്

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ എത്ര കളങ്ങളുണ്ട്?

രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ചിത്രങ്ങളിലോ?

ഇതേ രീതിയിൽ വരച്ചാൽ അടുത്ത ചിത്രത്തിൽ എത്ര കളങ്ങളുണ്ടാകും?

ഇതിനെ ഈ രീതിയിൽ കാണാം:

ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നാലു ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന സമചതുരം. ഇത്തരം നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം.

അങ്ങനെ അതിൽ $4 \times 4 = 16$ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

രണ്ടാമത്തെ സമചതുരം പോലുള്ള നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

അപ്പോൾ അതിൽ $16 \times 4 = 64$ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

അടുത്ത സമചതുരത്തിലോ?

ആകെ $64 \times 4 = 256$ ചെറുസമചതുരങ്ങൾ.

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ചെറുസമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം

ഒന്നാം ചിത്രത്തിൽ 4

രണ്ടാം ചിത്രത്തിൽ 4×4

മൂന്നാം ചിത്രത്തിൽ $4 \times 4 \times 4$

അപ്പോൾ 10-ാം ചിത്രത്തിലോ?

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ വിസ്തരിച്ചെഴുതാതെ ചുരുക്കി 4^{10} എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. വായിക്കുന്നതോ, “നാല് കൃതി പത്ത്” ("4 raised to 10") എന്നും. ഗുണിച്ചു നോക്കിയാൽ ഈ സംഖ്യ 1048576 എന്നു കാണാം.

ഇനി ചിത്രങ്ങളിലെ സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം $4, 4^2, 4^3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയാണ് എന്നും, അങ്ങനെ ഇരുപതാം ചിത്രത്തിൽ 4^{20} കളങ്ങൾ, നൂറാം ചിത്രത്തിൽ 4^{100} കളങ്ങൾ എന്നുമെല്ലാം പറയാനും എഴുതാനും എളുപ്പമല്ലേ. ഈ സംഖ്യകൾ കണക്കുകൂട്ടി കണ്ടുപിടിക്കാൻ ബുദ്ധിമുട്ടാകുമ്പോൾ കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കുകയുമാവാം.

ഇവിടെ നമ്മൾ കണ്ട $4, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$എന്നിവയെ നാലിന്റെ കൃതികൾ (powers of 4) എന്നാണു പറയുന്നത്.

4^2 എന്നത് 4 ന്റെ രണ്ടാം കൃതി, 4^3 എന്നത് 4 ന്റെ മൂന്നാം കൃതി എന്നിങ്ങനെ.

4 എന്നതിനെ ആവശ്യമെങ്കിൽ 4^1 എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ 4 ന്റെ ഒന്നാം കൃതിയാണ് 4 എന്നും പറയാം.

4^3 ലെ 3 നെ കൃത്യങ്കം (exponent) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടാം കൃതിയെ അതിന്റെ വർഗമെന്നും (square) മൂന്നാം കൃതിയെ ഘനം (cube) എന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്.

കൃതീകരണം

ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനെ ഗുണനം എന്ന ക്രിയയായി പറയുന്നതുപോലെ ആവർത്തിച്ചു ഗുണിക്കുന്ന ക്രിയയെ കൃതീകരണം (exponentiation) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

മൂന്നിന്റെ കൃതികൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

$3^1, 3^2, 3^3, \ldots$ ഇവ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

എന്നിങ്ങനെ ഓരോന്നായി ഗുണിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

3^6 കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ? ഇങ്ങനെ ഒന്നിനുശേഷം മറ്റൊന്നായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനു പകരം കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ വഴിയുണ്ടോ എന്നു നോക്കാം.

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ഓരോന്നായി ഗുണിക്കുന്നതിനു പകരം മൂന്നു വീതം ഗുണിച്ചാൽ

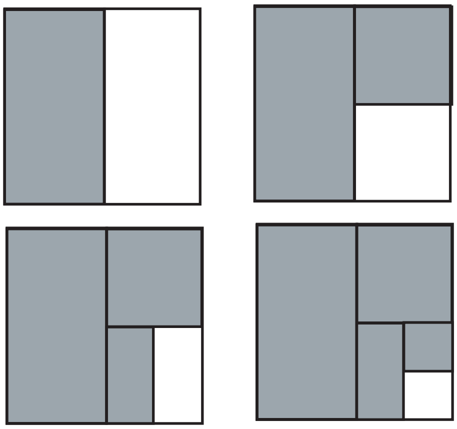
കൃതീകരണം

സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ നാലു ക്രിയകളാണല്ലോ നാം സാധാരണയായി ഗണിതത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. അഞ്ചാമത്തെ ക്രിയയാണ് കൃതീകരണം (exponentiation). എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം, ആവർത്തനസങ്കലനം ആണെന്നതുപോലെ, കൃതീകരണം ആവർത്തനഗുണനമാണ്.

മറ്റു ക്രിയകൾ എഴുതുമ്പോൾ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ ഒരു ചിഹ്നം ($+, -, \times, \div$) ഉപയോഗിക്കുന്നതുപോലെ കൃതീകരണം എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് ചിഹ്നമൊന്നുമില്ല. ഗുണിക്കപ്പെടുന്ന സംഖ്യയുടെ വലത്തു മുകളിൽ, എത്ര പ്രാവശ്യം ഗുണിക്കുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യ അൽപ്പം ചെറുതായി എഴുതുകയാണ് രീതി.

ഉദാഹരണമായി $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

കൃതികളുടെ തുക



ഓരോ ചിത്രത്തിലും നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം

രണ്ടാമത്തേതിലോ?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം.

കറുപ്പിക്കാത്തത് $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

അപ്പോൾ കറുപ്പിച്ചത്

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ഭാഗം.

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

ഇതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

നാലാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}.$$

ഇങ്ങനെ ഇനിയും മുന്നോട്ടു പോകാമല്ലോ. കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിയാൽ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 - \frac{1}{2^4}.$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}$ എന്നിങ്ങനെ കുറേ കൃതികളുടെ തുക, 1 ൽനിന്ന് അവസാനകൃതി കുറച്ചതാണ്.

$$3^6 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$
$$= 27 \times 27$$
$$= 729$$

ഇനി 2^9 കാണണമെങ്കിലോ?

$$2^9 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 16 \times 32$$
$$= 512$$

മറ്റേതെങ്കിലും രീതിയിൽ ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഇനി ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 2^6
- 3^8
- 4^4
- 2^9
- 10^6
- 1^{10}
- 100^4
- 0^{20}

പത്തിന്റെ കൃതികൾ

10 ന്റെ കൃതികൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

$10, 10^2, 10^3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയല്ലേ.

ഇവ കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ?

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

10^8 എത്രയാണ്?

ഇതുപോലെ 20 ന്റെ കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

20^4 എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$$20^4 = 20 \times 20 \times 20 \times 20$$
$$= (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10)$$
$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10)$$
$$= 16 \times 10000 = 160000$$

$2^4 \times 5^5$ എത്രയാണ്?

ഇതിനെ $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

എന്നെഴുതാം.

ഒന്നു മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 5$$
$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5$$
$$= 10^4 \times 5 = 50000$$

100^3 എത്രയാണ്?

$$100^3 = 100 \times 100 \times 100$$

ഇതിനെ $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$100^3 = 10^6$$
$$= 1000000$$

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

- നൂറ്, ആയിരം, പതിനായിരം, ലക്ഷം, പത്തുലക്ഷം, കോടി- ഇവയെല്ലാം 10 ന്റെ കൃതികളായി എഴുതുക.
- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ കണക്കാക്കുക.
  - 30^4
  - 50^5
  - 200^3

സ്ഥാനവില

3675 എന്നതിനെ സ്ഥാനവില അനുസരിച്ച് എങ്ങനെയാണ് പിരിച്ചെഴുതുന്നത്?

$$(3 \times 1000) + (6 \times 100) + (7 \times 10) + 5$$

പത്തിന്റെ കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതിനെ

$$(3 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10) + 5$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകൾ പിരിച്ചെഴുതൂ.

- 4321
- 732
- 1221
- 60504

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളായാലോ?

362.574 നെ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും?

$$362.574 = (3 \times 100) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10}\right) + \left(7 \times \frac{1}{100}\right) + \left(4 \times \frac{1}{1000}\right)$$

ഇതിനെ

$$(3 \times 10^2) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10}\right) + \left(7 \times \frac{1}{10^2}\right) + \left(4 \times \frac{1}{10^3}\right)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ.

ഇതുപോലെ ഈ സംഖ്യകളെ പിരിച്ചെഴുതിനോക്കൂ.

- 437.54
- 23.005
- 4567
- 201

ഘടകക്രിയ

ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി 72 എടുത്താൽ

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ എന്നെഴുതാം.

കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതിയാൽ

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

മറ്റൊരു തുക

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിന്റെ രണ്ടുവശത്തും 8 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 8\left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

അതായത്,

$$\left(8 \times \frac{1}{2}\right) + \left(8 \times \frac{1}{4}\right) + \left(8 \times \frac{1}{8}\right) = 8 - \left(8 \times \frac{1}{8}\right)$$
$$4 + 2 + 1 = 8 - 1$$

ഇതുപോലെ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$

എന്നതിന്റെ രണ്ടുവശത്തും 16 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$8 + 4 + 2 + 1 = 16 - 1$$

ക്രമമൊന്ന് മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$1 + 2 + 4 = 8 - 1$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1$$

അതായത്

$$2 + 4 = 8 - 2$$
$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$

കൃതികളാക്കി എഴുതിയാൽ

$$2 + 2^2 = 2^3 - 2$$
$$2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 2$$

ഇങ്ങനെ ഇനിയും മുന്നോട്ട് പോകുമല്ലോ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ 2, 2^2, 2^3 എന്നിങ്ങനെ കൃതികളുടെ തുക, അടുത്ത കൃതിയിൽനിന്ന് 2 കുറച്ചതാണ്.

സംഖ്യകൾ ശാസ്ത്രത്തിൽ

ശാസ്ത്രത്തിൽ പലപ്പോഴും വളരെ വലിയ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഉദാഹരണത്തിന്, ഭൂമിയും സൂര്യനും തമ്മിലുള്ള ശരാശരി ദൂരം 149000000 കിലോമീറ്ററാണ്. ഈ സംഖ്യ ശാസ്ത്രസമ്പ്രദായത്തിൽ (scientific notation) എഴുതുന്നത് 1.49×10^8 എന്നാണ്. ഇതുപോലെ പ്രകാശം ഒരു വർഷം കൊണ്ടു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം ഏകദേശം 9.46×10^{17} കിലോമീറ്റർ എന്നാണ് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

ഈ ദൂരത്തെ ഒരു പ്രകാശവർഷം എന്നാണ് പറയുക. നക്ഷത്രങ്ങളിലേക്കും മറ്റുമുള്ള അകലം സൂചിപ്പിക്കുമ്പോൾ പ്രകാശവർഷത്തിലാണ് പറയാറുള്ളത്. ഭൂമിയോട് ഏറ്റവും അടുത്ത നക്ഷത്രം സൂര്യനാണല്ലോ, അതു കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്ത നക്ഷത്രം പ്രോക്സിമ സെന്റോറി (Proxima centauri) ആണ്. ഈ നക്ഷത്രത്തിലേക്കുള്ള ഏകദേശ ദൂരം 4.22 പ്രകാശവർഷമാണ്. അതായത് ഏകദേശം 3.99×10^{18} കിലോമീറ്റർ. ഇത് മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറയാം. ഈ നക്ഷത്രത്തിൽനിന്നുള്ള പ്രകാശരശ്മികൾ ഭൂമിയിലെത്താൻ നാലു വർഷത്തിലധികം എടുക്കും. അതായത്, ഇന്നു ഭൂമിയിൽനിന്ന് നാം കാണുന്നത് ഈ നക്ഷത്രത്തിന്റെ നാലിലധികം വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പുള്ള അവസ്ഥയാണ്. അപ്പോൾ ഈ നക്ഷത്രം നശിച്ചുകഴിഞ്ഞാലും നാലിലധികം വർഷം നാം അതിന്റെ പ്രകാശരശ്മികൾ കണ്ടുകൊണ്ടിരിക്കും!

ഇതുപോലെ 1000 നെ എങ്ങനെയെഴുതാം?

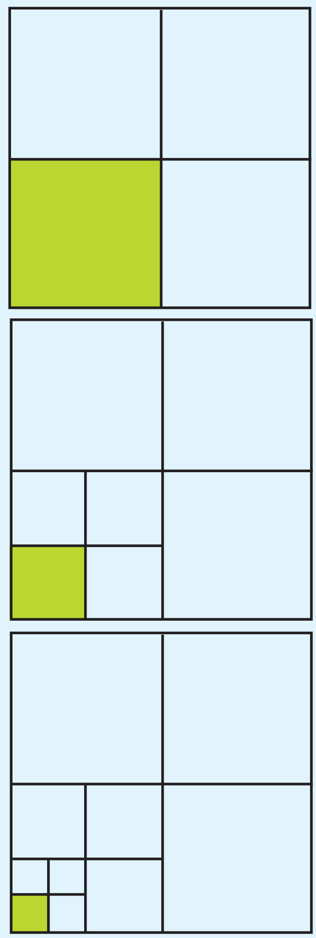
$$\begin{aligned} 1000 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= 2^3 \times 5^3 \end{aligned}$$

ഇനി ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ഇതുപോലെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിനോക്കൂ.

- 36
- 225
- 500
- 784
- 750
- 625
- 1024

ഭിന്നകൃതികൾ

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ സമചതുരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് നിറം നൽകിയിരിക്കുന്നത്?

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

$\frac{1}{4}$ ന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

അതായത്

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ ഭാഗം.}$$

മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഇതിന്റെയും $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64} \text{ ഭാഗം.}$$

ഇത് മൂന്ന് $\frac{1}{4}$ കൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ തുടർന്നാൽ, അടുത്ത ചിത്രത്തിലെ എത്ര ഭാഗം നിറം നൽകണം?

അഞ്ചാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

അഞ്ച് $\frac{1}{4}$ കൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കണം.

ഇതിനെ $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതാം.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}\right)^5 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4\times4\times4\times4\times4} \\ &= \frac{1}{4^5} \\ &= \frac{1}{64\times16} \\ &= \frac{1}{1024}\end{aligned}$$

അതായത്, അഞ്ചാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മൊത്തം ചതുരത്തിന്റെ $\frac{1}{1024}$ ഭാഗം മാത്രമാണ് നിറം നൽകേണ്ടത്.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും ആവർത്തിച്ചുള്ള ഗുണനത്തെ ഇതുപോലെ കൃതിയായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5}\right)^3 &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{3\times3\times3}{5\times5\times5} = \frac{3^3}{5^3} \\ &= \frac{27}{125}\end{aligned}$$

ഒരുദാഹരണം കൂടി നോക്കാം.

$$\begin{aligned}\left(2\frac{2}{5}\right)^3 &= \left(\frac{12}{5}\right)^3 \\ &= \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5}\end{aligned}$$

പ്രോജക്ട്

അവസാനത്തെ അക്കം

10 ന്റെ എല്ലാ കൃതികളുടെയും അവസാന അക്കം 0 ആണല്ലോ. 5 ന്റെ കൃതികളുടെയെല്ലാം അവസാന അക്കമോ?

6 ന്റെ കൃതികളായാലോ?

4 ന്റെ കൃതികൾ നോക്കുക. അവസാന അക്കം എല്ലാ കൃതികൾക്കും ഒരുപോലെയാണോ?

അവസാന അക്കം ഏതൊക്കെയാണ്?

ഇതുപോലെ മറ്റ് ഒരക്കസംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ പരിശോധിച്ചുനോക്കൂ.

ഒരു ചോദ്യം കൂടി: 2^{100}ന്റെ അവസാന അക്കം എന്താണ്?

$$= \frac{1728}{125} = 13\ \frac{103}{125}$$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ ഇതുപോലെ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^4$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
- $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$

ദശാംശകൃതികൾ

$(1.2)^2$ എത്രയാണ്?

$$(1.2)^2 = 1.2 \times 1.2$$
$$= 1.44$$

ഇതുപോലെ $(1.5)^3$ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

$(0.2)^4$ എത്രയാണ്?

$2^4 = 16$ എന്നറിയാമല്ലോ.

0.2 എന്നതിനെ $\frac{2}{10}$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ,

$$(0.2)^4 = \left(\frac{2}{10}\right)^4$$
$$= \frac{2^4}{10^4}$$
$$= \frac{16}{10000}$$
$$= 0.0016$$

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാവുന്നതല്ലേയുള്ളൂ.

$(0.3)^3$ എത്രയാണെന്ന് മനക്കണക്കായി പറയാമോ?

3^3 എത്രയാണ്?

$(0.3)^3$ ൽ എത്ര ദശാംശസ്ഥാനമുണ്ടാകും?

$12^3 = 1728$ ആണ്. ഇതിൽനിന്ന് $(1.2)^3$, $(0.12)^3$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $(1.1)^3$
- $(0.02)^5$
- $(0.1)^6$

$16^3 = 4096$ ആണ് ഇതുപയോഗിച്ച് ചുവടെയുള്ള കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $(1.6)^3$
- $(0.16)^3$
- $(0.016)^3$

കൂടുമോ? കുറയുമോ?

2 ന്റെ കൃതികളായ 2, 4, 8, 16,... എന്നിവ വളരെ വേഗം വലുതാകുന്നത് കണ്ടു. മറ്റു സംഖ്യകളുടെ കൃതികളും ഇതുപോലെ വലുതായിക്കൊണ്ടിരിക്കുമോ?

$\frac{1}{2}$ ന്റെ കൃതികൾ എടുത്താലോ? $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... ഇവ ചെറുതായിച്ചെറുതായി വരുകയാണ്.

$\frac{2}{3}$ ന്റെ കൃതികളായാലോ?

$\frac{3}{2}$ ന്റെ കൃതികളോ?

എങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾക്കാണ് കൃതികൾ വലുതായിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നത്? എങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾക്കാണ് അവ ചെറുതായിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നത്?

1 ന്റെ കൃതികളോ?

ഗുണനനിയമം

ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ തുകയെ അതേ സംഖ്യയുടെ മറ്റൊരു ഗുണിതമായി എഴുതാൻ നമുക്കറിയാം:

$$(3 \times 2) + (5 \times 2) = (3 + 5) \times 2 = 8 \times 2$$

എന്തുകൊണ്ടാണിത് ശരിയാകുന്നത്?

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2$$

$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned}(3 \times 2) + (5 \times 2) &= (2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2 + 2)\\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2\\ &= 8 \times 2\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $2^3 \times 2^5$ നോക്കാം.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned}2^3 \times 2^5 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2\\ &= 2^8\end{aligned}$$

ഇവിടെ 2 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയുടെ മൂന്നാം കൃതിയും അഞ്ചാം കൃതിയുമാണ് ഗുണിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^8\end{aligned}$$

നമ്മൾ എടുക്കുന്ന സംഖ്യയെ x എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാലോ?

$$\begin{aligned}x^3 \times x^5 &= (x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x)\\ &= x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8\end{aligned}$$

ഗുണിതങ്ങളും കൃതികളും

m ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും x ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയും (എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ) ആണെങ്കിൽ mx അഥവാ $m \times x$ ന്റെ അർഥം m എണ്ണം x കൂട്ടുക എന്നാണല്ലോ. x^m എന്നതിന്റെ അർഥം m എണ്ണം x ഗുണിക്കുക എന്നും.

ഒരേ സംഖ്യയുടെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണിതങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെയും, കൃതികൾ ഗുണിക്കുന്നതിന്റെയും നിയമങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$mx + nx = (m + n)x$$

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ഒരു സംഖ്യയെ ഭിന്നസംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിക്കാം - അത് ആവർത്തനസങ്കലനമല്ലെന്നു മാത്രം. അതനുസരിച്ച് m, n എന്നിവ ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും $mx + nx = (m + n)x$ എന്നതു ശരിയാണ്. എന്നാൽ n എന്നത് ഭിന്നസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ x^n എന്നതിന് തൽക്കാലം അർഥമൊന്നുമില്ലല്ലോ.

രണ്ടിന്റെ ഗുണിതങ്ങളും കൃതികളും

രണ്ടിന്റെ കൃതികളെല്ലാം ഇരട്ടസംഖ്യകളാണ്. പക്ഷേ ഇരട്ടസംഖ്യകളെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളല്ലല്ലോ. ഉദാഹരണമായി 6 ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്, 2 ന്റെ കൃതിയല്ല, എന്നാൽ

$$6 = 2 + 4 = 2^1 + 2^2$$

ഇതുപോലെ

$$10 = 2 + 8 = 2^1 + 2^3$$

$$12 = 4 + 8 = 2^2 + 2^3$$

$$14 = 2 + 4 + 8 = 2^1 + 2^2 + 2^3$$

ഇങ്ങനെ ഇരട്ടസംഖ്യകളെയെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാമോ എന്നു നോക്കൂ.

ഉദാഹരണമായി, 100 നെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

2 ന്റെ കൃതികൾ ഓരോന്നായി പരിശോധിച്ചാൽ $2^6 = 64$ എന്നത് 100 നേക്കാൾ കുറവാണെന്നും $2^7 = 128$ എന്നത് 100 നേക്കാൾ വലുതാണെന്നും കാണാം.

$$100 = 2^6 + 36$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി $2^5 = 32 < 36$ എന്നും

$$2^6 = 64 > 36$$

എന്നും കാണാം.

അപ്പോൾ $\quad 36 = 2^5 + 4 = 2^5 + 2^2$

എന്നെഴുതാം. അതായത്,

$$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$$

ഇതുപോലെ, 150 നെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതിനോക്കൂ.

ഇനി കൃത്യങ്കങ്ങൾ 3 നും 5 നും പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യകളായാലോ?

$$\begin{aligned} x^2 \times x^4 &= (x \times x) \times (x \times x \times x \times x) \\ &= x \times x \times x \times x \times x \times x \\ &= x^6 \end{aligned}$$

കൃത്യങ്കങ്ങളെയും പൊതുവായി m, n എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാലോ?

$$\begin{aligned} x^m \times x^n &= \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{m \text{ എണ്ണം}} \times \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{n \text{ എണ്ണം}} \\ &= \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{m+n \text{ എണ്ണം}} \\ &= x^{m+n} \end{aligned}$$

ഇപ്പോൾ നാം കണ്ട പൊതുതത്ത്വം എന്താണ്? ബീജഗണിതരീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

> x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആയാലും
> $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

ഇത് സാധാരണഭാഷയിലെങ്ങനെ പറയും?
ഇതിൽ രണ്ടു കാര്യങ്ങളുണ്ട്.

> (i) ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം ആ സംഖ്യയുടെതന്നെ കൃതിയാണ്
> (ii) ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം സംഖ്യയുടെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച് ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- 2^5 നെ 2^3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 2ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതി കിട്ടും?
- $10^2 \times 10^5$ എന്ന സംഖ്യയുടെ സാധാരണഭാഷയിലെ പേരെന്താണ്?
- 2^{10} ന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതിയാണ്?
- 2^{10} നോട് എത്ര കൂട്ടിയാൽ 2^{11} കിട്ടും?
- 3^{10} നോട് എത്ര കൂട്ടിയാൽ 3^{11} കിട്ടും?
- 2 ന്റെ കുറേ കൃതികളുടെ പട്ടികയാണിത്:

2^1	2	2^6	64	2^{11}	2048
2^2	4	2^7	128	2^{12}	4096
2^3	8	2^8	256	2^{13}	8192
2^4	16	2^9	512	2^{14}	16384
2^5	32	2^{10}	1024	2^{15}	32768

ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 16×64
- 64×256
- 32×512
- 128×256

ഹരണനിയമം

ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ, ഹരണഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനും എന്തെങ്കിലും സൂത്രം ഉണ്ടോ?

ഉദാഹരണമായി $4^5 \div 4^2$ എത്രയാണ്?

ഗുണനനിയമമനുസരിച്ച്

$$4^5 = 4^2 \times 4^3$$

അപ്പോൾ 4^5 നെ 4^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ എന്തുകിട്ടും?

$$4^5 \div 4^2 = 4^3$$

ഇതുപോലെ $5^7 \div 5^3$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

5^7 നെ 5^3 ന്റെ ഗുണിതമായി എങ്ങനെ എഴുതും?

$$5^7 = 5^3 \times \text{........}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$5^7 \div 5^3 = \text{........}$$

ഇനി $8^{23} \div 8^{16}$ ആണെങ്കിലോ?

8^{23} കിട്ടാൻ 8^{16} നെ എത്ര കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം?

അതിന് 16 നെ 23 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണമെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരേ?

$$23 - 16 = 7$$

അപ്പോൾ

$$8^{23} = 8^{16} \times 8^7$$

ഇനി $8^{23} \div 8^{16}$ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഇതുതന്നെ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ കൃതികളിലും ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണമായി $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ നെ $\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലോ?

നേരത്തേ ചെയ്തതുപോലെ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

എന്നെഴുതിയാൽ

രണ്ടിന്റെ കൃതികളും ഒറ്റസംഖ്യകളും

ഇരട്ടസംഖ്യകളെയെല്ലാം 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഒന്നൊഴിച്ചുള്ള ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്. അപ്പോൾ ഒറ്റസംഖ്യകളെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെയും 1 ന്റെയും തുകയായി എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി, 25 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ ആദ്യം

$$25 = 24 + 1$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ 24 നെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

$$24 = 16 + 8 = 2^4 + 2^3$$

അപ്പോൾ

$$25 = 2^4 + 2^3 + 1$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ ചിലതിന്റെ തുകയായി എഴുതാം.

കുറയ്ക്കലും ഹരിക്കലും

ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ ഗുണിതങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെ തത്ത്വം പോലെത്തന്നെ കുറയ്ക്കുന്നതിന്റേയും തത്ത്വം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. കുറയ്ക്കുന്നത് വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നായിരിക്കണമെന്നു മാത്രം. ഇതിന് സമാനമായ തത്ത്വം കൃതികളുടെ ഹരണത്തിനുമുണ്ട്. ഹരിക്കപ്പെടുന്നത് വലിയ കൃതി ആയിരിക്കണമെന്നുമാത്രം.

അതായത് m, n എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ $m > n$ ആണെങ്കിൽ, ഏതു സംഖ്യ x എടുത്താലും.

$$mx - nx = (m - n)x.$$

ഗുണിതങ്ങൾക്കു പകരം കൃതികളായാലോ?

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ഈ തത്ത്വത്തിൽ $x \neq 0$ എന്നും കൂടി പറയേണ്ടിവരും.

സങ്കലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെത്തന്നെ m, n എന്നിവ എണ്ണൽസംഖ്യകളല്ലെങ്കിലും ഇവിടെപ്പറഞ്ഞ വ്യവകലനതത്ത്വം ശരിയാണ്.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

എന്നു കാണാം.

ഇനി ഒരു സംഖ്യയുടെ ഏതെങ്കിലും കൃതിയെ അതിനേക്കാൾ ചെറിയ ഒരു കൃതികൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ എന്തുകിട്ടും എന്നു പൊതുവായി നോക്കാം:

സംഖ്യയെ x എന്നെടുക്കാം. ക്രിയ ഹരണമായതിനാൽ x പൂജ്യമാകരുത്. വലിയ കൃത്യങ്കം m എന്നും ചെറിയ കൃത്യങ്കം n എന്നും എടുക്കാം. ഇനി $x^m \div x^n$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

n നെ m ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം?

അപ്പോൾ

$$x^m = x^n \times x^{m-n}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്,

> x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n ഇവ $m > n$ ആയ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആയാലും
>
> $$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ഗുണനത്തിന്റെ നിയമം പോലെ ഇത് സാധാരണഭാഷയിൽപ്പറയാമോ?

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 2^5 നെ 2^3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതി കിട്ടും?
- $10^9 \div 10^4$ എന്ന സംഖ്യ എന്താണ്?
- 2^{10} ന്റെ പകുതി 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതിയാണ്?
- 2 ന്റെ കുറേ കൃതികളുടെ പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയല്ലോ (പേജ് 58). അത് ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഹരണഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.
  - $64 \div 16$
  - $512 \div 32$
  - $1024 \div 128$
  - $16384 \div 2048$
- $2^8 \times \frac{1}{2^3}$ എത്രയാണ്?
- 7^6 നെ എന്തുകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 7^2 കിട്ടും?

മറ്റൊരു ഹരണം

കഴിഞ്ഞ ചോദ്യങ്ങളിൽ അവസാനത്തേതിന് തൊട്ടുമുമ്പുള്ള ചോദ്യം നോക്കുക.

$$2^8 \times \frac{1}{2^3} = 2^8 \div 2^3 = 2^5$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഇതിൽനിന്ന്

$$2^5 \div 2^8 = \frac{1}{2^3}$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

ഇതുപോലെ മുകളിലെ അവസാന ചോദ്യത്തിൽനിന്ന് $7^2 \div 7^6$ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

$$7^6 \times \frac{1}{7^4} = 7^2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$7^2 \div 7^6 = \frac{1}{7^4}$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

> x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n എന്നിവ $m < n$ ആയ ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും
>
> $$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഇനി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കൂ:

- ലഘൂകരിക്കുക
  - $\frac{2^5 \times 2^3}{2^4}$
  - $\frac{3^7}{3^2 \times 3^4}$
  - $\frac{5^2 \times 5^4}{5^5 \times 5^4}$
  - $\frac{8^2 \times 8^7}{8^6 \times 8^3}$
  - $\frac{4^3 \times 4^5}{4^2 \times 4^4}$
  - $\frac{10^4 \times 10^5}{10^6 \times 10^7}$
- 5^6 നെ 5^{10} കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $\frac{1}{5}$ ന്റെ ഏതു കൃതി കിട്ടും?
- 10^8 നെ 10^{12} കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം എന്താണ്?
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ നെ $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യ ഏതാണ്?
- $(0.25)^6$ നെ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലാണ് $(0.25)^4$ കിട്ടുക?

ഹരിക്കലും കുറയ്ക്കലും

ഭിന്നസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ ചെറിയ സംഖ്യയെ വലിയസംഖ്യ കൊണ്ടും ഹരിക്കാം- ഫലം ഭിന്നസംഖ്യ ആയിരിക്കുമെന്നുമാത്രം. അതുകൊണ്ട്, ചെറിയ കൃതിയെ വലിയ കൃതി കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ചും ആലോചിക്കാം.

$$m < n \text{ ആണെങ്കിൽ } \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഇതിന് സമാനമായ ഒരു തത്ത്വം ഗുണിതങ്ങളിൽ ഇല്ല. ചെറിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് വലിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കാൻ തൽക്കാലം കഴിയില്ലല്ലോ.

കിഴിക്കണക്ക്

100 ഒറ്റരൂപാ നാണയങ്ങൾ പല കിഴികളിലായി കെട്ടിവയ്ക്കണം. ഇതിൽനിന്ന് നൂറു രൂപ വരെയുള്ള എത്ര രൂപ വേണമെങ്കിലും കിഴിയൊന്നും അഴിക്കാതെ എടുക്കാൻ കഴിയണം. സാധിക്കുമോ?

ഒരു കിഴിയിൽ ഒരേയൊരു നാണയം മാത്രം ഇടുക. ഇനി 2 ന്റെ കൃതികളായ 2, 4, 8 എന്നിങ്ങനെ നാണയങ്ങളിട്ട് കിഴികളുണ്ടാക്കണം.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64 - 1 = 63$$

ബാക്കിവരുന്ന $100 - 63 = 37$ നാണയങ്ങൾ ഒറ്റകിഴിയാക്കണം.

ഇനി ആവശ്യമുള്ള തുക 68 ൽ കുറവാണെങ്കിൽ 2 ന്റെ കൃതികളും വേണമെങ്കിൽ 1 ഉം ഉപയോഗിച്ചെടുക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 35 രൂപയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ

$35 = 32 + 2 + 1$ എന്നെടുക്കാം.

63 ൽ കൂടുതലാണെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണമായി, 65 രൂപ കിട്ടാൻ ആദ്യം 37 ന്റെ കിഴി എടുക്കുക. ഇനി വേണ്ടത് $65 - 37 = 28$ രൂപ. ഇത്

$$28 = 16 + 8 + 4$$

എന്നെടുക്കാമല്ലോ.

- 3 ന്റെ കൃതികളുടെ പട്ടിക തയാറാക്കുക. (3^{10} വരെ) പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ഈ ക്രിയകൾ ചെയ്യുക.
  - 81×9
  - 729×81
  - $6561 \div 243$
  - 243×81
  - $2187 \div 9$
  - $59049 \div 729$

കൃതിയുടെ കൃതി

64 നെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയുടെ കൃതിയായി എഴുതാമോ?

എങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം?

$$2^6 = 64$$
$$4^3 = 64$$
$$8^2 = 64$$
$$64^1 = 64$$

ഇതുപോലെ 3^{12} നെ മറ്റു സംഖ്യകളുടെ കൃതിയായി എഴുതൂ.

$$\begin{aligned} 3^{12} &= 3^6 \times 3^6 \\ &= (729) \times (729) \\ &= (729)^2 \end{aligned}$$

മറ്റൊരു വിധത്തിലും എഴുതാം.

$$\begin{aligned} 3^{12} &= 3^8 \times 3^4 \\ &= (3^4 \times 3^4) \times 3^4 \\ &= 81 \times 81 \times 81 \\ &= (81)^3 \end{aligned}$$

ഇനിയുമൊരു രീതിയുണ്ട്:

$$\begin{aligned} 3^{12} &= 3^6 \times 3^6 \\ &= (3^3 \times 3^3) \times (3^3 \times 3^3) \\ &= 27 \times 27 \times 27 \times 27 \\ &= (27)^4 \end{aligned}$$

ഇനി മറ്റേതെങ്കിലും രീതിയിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ? ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

മുകളിൽ കണ്ടതിൽ $3^6 \times 3^6$ എന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

രണ്ട് 3^6 കൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതല്ലേ? ഇതിനെ ചുരുക്കി $(3^6)^2$ എന്നെഴുതാം.

ഇനി $(3^6)^2 = 3^6 \times 3^6$

$$= 3^{6+6}$$

$$= 3^{6\times 2}$$

$$= 3^{12}$$

ഇതുപോലെ $3^4 \times 3^4 \times 3^4$ എന്നതിനെ $(3^4)^3$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$(3^4)^3 = 3^4 \times 3^4 \times 3^4$$

$$= 3^{4+4+4}$$

$$= 3^{4\times 3}$$

$$= 3^{12}$$

ഇതുപോലെ

$$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$$

$$= 4^{2\times 3}$$

$$= 4^6$$

$$(5^4)^6 = 5^{4\times 6}$$

$$= 5^{24}$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

ഇനി ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയാകാം.

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3$ എന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

അതായത്,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ x ഒരു സംഖ്യയും m, n എന്നിവ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആണെങ്കിൽ

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \times x^m \times \ldots \times x^m}_{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ എണ്ണം}}}$$

$$= x^{nm}$$

$$= x^{mn}$$

പ്രോജക്ട്

ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി,

$$3 = 1+2$$

$$7 = 3+4$$

$$15 = 1+2+3+4+5 = 7+8$$

എന്നാൽ ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 4 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാനാവില്ല.

തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത സംഖ്യകൾക്ക് എന്തെങ്കിലും പ്രത്യേകതയുണ്ടോ?

20 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എടുത്തു പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

അനഘസംഖ്യകൾ

6 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ 1, 2, 3, 6.

ഇവയിൽ 6 ഒഴികെയുള്ളവയുടെ തുക

$$1+2+3=6$$

ഇനി 28 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ നോക്കാം.

$$28=2^2\times 7$$

അപ്പോൾ 28 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ

1	2	2^2
7	2×7	$2^2\times 7$

ഇവയിൽ 28 ഒഴികെയുള്ളവയുടെ തുക

$$1+2+2^2+7+(2\times 7)=7+7+14=28$$

ഇനി,

$$2^4\times 31=16\times 31=496$$

എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങൾ നോക്കൂ.

31 അഭാജ്യസംഖ്യയായതിനാൽ ഘടകങ്ങൾ

1	2	2^2	2^3	2^4
31	2×31	$2^2\times 31$	$2^3\times 31$	$2^4\times 31$

ഇവയിൽ ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ഘടകങ്ങളുടെ തുക

$$1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1=31$$

(**മറ്റൊരു തുക** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ $2^4\times 31$ ഒഴികെയുള്ള ഘടകങ്ങളുടെ തുക

$$(1+2+2^2+2^3)\times 31=(2^4-1)\times 31$$
$$=(2^4\times 31)-31$$

അപ്പോൾ $2^4\times 31$ ഒഴികെയുള്ള ഘടകങ്ങളുടെയെല്ലാം തുക

$$31+(2^4\times 31)-31=2^4\times 31=496$$

ഇത്തരം സംഖ്യകളെ അനഘസംഖ്യകൾ (perfect numbers) എന്നാണു പറയുന്നത്.

അതായത്,

> x എന്ന ഏതു സംഖ്യയും m, n എന്നീ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകളും എടുത്താൽ
>
> $$(x^m)^n=x^{mn}$$

ഇനി ചുവടെയുള്ളവ ഒറ്റ കൃതിയായി എഴുതാമല്ലോ.

- $(4^2)^3$
- $(3^3)^2\times 9^4$
- $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$
- $(2^3)^4\times 2^6$

ചുവടെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയും വിവിധ സംഖ്യകളുടെ കൃതികളായി എഴുതുക.

- 3^8
- 4^6
- 2^{15}
- 5^{12}

ഘടകങ്ങൾ

32 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

$$1, 2, 4, 8, 16, 32$$

1 ഒഴികെ ബാക്കി ഘടകങ്ങളെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളല്ലേ. അപ്പോൾ 32 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ.

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$$

81 ന്റെ ഘടകങ്ങളോ?

$$81=3^4$$

അപ്പോൾ ഘടകങ്ങൾ

$$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$$

ഇനി 72 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ ഏതൊക്കെയെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$72=2^3\times 3^2$$

ഘടകങ്ങൾ ചിട്ടയായി എഴുതിനോക്കാം.

ആദ്യം 1 ഉം പിന്നെ 2 ന്റെ കൃതികളായ ഘടകങ്ങളും എഴുതാം.

$$1, 2, 2^2, 2^3$$

ഇവ ഓരോന്നിനെയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മറ്റ് നാലു ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും.

$$3, 2\times 3, 2^2\times 3, 2^3\times 3$$

ആദ്യത്തെ ഘടകങ്ങളോരോന്നിനെയും 3 നു പകരം 3^2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇനിയും നാലു ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും.

$$3^2, 2\times 3^2, 2^2\times 3^2, 2^3\times 3^2$$

ഇനി ഏതെങ്കിലും ഘടകമുണ്ടോ?

ഇതുപോലെ 200 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എഴുതിയാലോ?

$$200 = 8 \times 25 = 2^3 \times 5^2$$

ഘടകങ്ങൾ ക്രമമായി ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

1	2	2^2	2^3
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$
5^2	2×5^2	$2^2 \times 5^2$	$2^3 \times 5^2$

240 ന്റെ ഘടകങ്ങളായാലോ?

$$240 = 16 \times 15 = 2^4 \times 3 \times 5$$

ഘടകങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$	$2^4 \times 5$
3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$	$2^4 \times 3 \times 5$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയുടെയും ഘടകങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കുക.

- 64
- 125
- 48
- 45
- 105

ചെയ്തുനോക്കാം

- $2^x = 128$ ആണ് 2^{x+1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $3^x = 729$ ആണ് 3^{x-1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
- 3^x, 3^{x+1}, 3^{x-1}, $3^x + 1$ എന്നിവയിൽ ഇരട്ടസംഖ്യ ഏതാണ്?
- 6^{10} ന്റെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം എന്തായിരിക്കും?
- $5^6 \times \frac{1}{5^x} = \frac{1}{5^{10}}$ എന്നു കിട്ടണമെങ്കിൽ x എന്തായിരിക്കണം?
- ലഘൂകരിക്കുക.
  - $\dfrac{3^5 \times 3^6}{3^4 \times 3^4}$
  - $\dfrac{4^7 \times 4^8}{4^2 \times (4^3)^5}$
  - $\dfrac{(6^4)^2 \times (6^5)^3}{(6^2)^2 \times (6^4)^5}$

പ്രോജക്ട്

32	$=$	2^5	ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	6
81	$=$	3^4	ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	5
72	$=$	$2^3 \times 3^2$	ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	12

ഇതുപോലെ ഏതാനും സംഖ്യകളെ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങളുടെ കൃതിയായി എഴുതുക. അവയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണവും എഴുതുക.

ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിച്ചത് എങ്ങനെയാണ്?

കൃത്യങ്കമായി വരുന്ന സംഖ്യകളും ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണവും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ആവർത്തനഗുണനത്തിന്റെ ക്രിയാരൂപമായി കൃതീകരണത്തെ വ്യാഖ്യാനിക്കാനും വിശദീകരിക്കാനും കഴിയുന്നു.			
• ക്രിയാരീതികൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി കൃത്യങ്കനിയമങ്ങൾ സമർഥിക്കുന്നു.			
• പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനും ക്രിയകൾ എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുന്നതിനും കൃത്യങ്കനിയമങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു.			
• വലിയസംഖ്യകളെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിന് കൃത്യങ്കം പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു. ഇത്തരം വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ ഫലപ്രദമായി അവതരിപ്പിക്കുന്നു.			
• എണ്ണൽസംഖ്യകളെയും ദശാംശസംഖ്യകളെയും 10 ന്റെ കൃതികളുപയോഗിച്ച് സ്ഥാനവിലകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• കൃതികളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ യുക്തിപൂർവം സമർഥിക്കുന്നു.			