11

സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും

KT- 513-3/Maths (M)-7(Vol-2)

ഒറ്റയും ഇരട്ടയും

ഈ തുകകൾ നോക്കൂ:

$1+2 = 3$

$2+3 = 5$

$3+4 = 7$

എല്ലാ തുകകളും ഒറ്റസംഖ്യകളല്ലേ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്നത്?

n ഏതെങ്കിലുമൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയെ $n+1$ എന്നെഴുതണം. ഇവയുടെ തുക എന്താണ്?

$$n+(n+1)=2n+1$$

$2n+1$ എന്ന സംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം n, ശിഷ്ടം 1

അതായത് n എന്നത് ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും, $2n+1$ എന്നത് ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.

അങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്നു കാണാം.

ഇനി ഈ തുകകൾ നോക്കൂ:

$1+3=4$

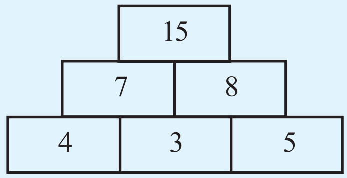
$2+4=6$

$3+5=8$

ഒന്നിടവിട്ട ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാമോ?

സംഖ്യാഗോപുരം

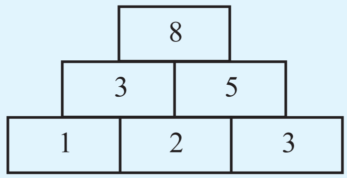
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



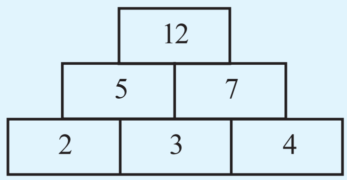
സംഖ്യകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ചുവട്ടിലെ മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ അടുത്തടുത്തുള്ളവ കൂട്ടിയതാണ് അതിനു മുകളിലുള്ള വരിയിലെ സംഖ്യകൾ. അവ രണ്ടും കൂട്ടിയതാണ് ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ.

1, 2, 3 എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങി ഇത്തരമൊരു ഗോപുരം ഉണ്ടാക്കിനോക്കാം:



തുടങ്ങുന്നത് 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ നിന്നാണെങ്കിലോ?



ഇതുപോലെ അടുത്തടുത്ത മറ്റേതെങ്കിലും മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി എഴുതിനോക്കൂ.

അവസാനം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും പറയാമോ?

അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ തുടങ്ങിയാലാണ് അവസാനം 100 കിട്ടുക?

ബീജഗണിതസഹായം

അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങിയാലും നമ്മുടെ സംഖ്യാഗോപുരം 4 ന്റെ ഗുണിതത്തിൽ അവസാനിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യ x എന്നെടുത്തു നോക്കാം. അപ്പോൾ താഴത്തെ വരിയിൽ x, $x + 1$, $x + 2$

x	$x + 1$	$x + 2$

മുകളിൽ അടുത്ത വരിയിലെ സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

$$(x + 1) + (x + 2) = 2x + 3$$

$2x + 1$	$2x + 3$	
x	$x + 1$	$x + 2$

അപ്പോൾ ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യയോ?

$$(2x + 1) + (2x + 3) = 4x + 4$$

$4x + 4$		
$2x + 1$	$2x + 3$	
x	$x + 1$	$x + 2$

ഇതിലെ $4x + 4$ എന്നതിനെ അൽപ്പം മാറ്റി എഴുതാം.

$$4x + 4 = 4(x + 1)$$

അതായത്, അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങിയാലും, അവസാനിക്കുന്നത് അതിലെ നടുക്കുള്ള സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങാണ്. (ഇതു നേരത്തേ ശ്രദ്ധിച്ചിരുന്നോ?)

അപ്പോൾ 100 ൽ അവസാനിക്കണമെങ്കിൽ 24, 25, 26 എന്നീ സംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങണം.

ഇനി തുടങ്ങുന്നത് ഒന്നിടവിട്ട മൂന്നു സംഖ്യകളായാലോ?

രണ്ടിടവിട്ട സംഖ്യകളായാൽ?

എഴുതിനോക്കൂ.

സംഖ്യാതത്ത്വങ്ങൾ

സംഖ്യകളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചില കാര്യങ്ങൾ എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ് എന്ന് ബോധ്യപ്പെടാൻ ബീജഗണിതം ആവശ്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി, അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയും ഒറ്റസംഖ്യയാണ് എന്ന് സമർഥിക്കാൻ, n എന്ന് ഏതെങ്കിലും എണ്ണൽ സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ അതിനടുത്തത് $n + 1$ ആണെന്നും അവയുടെ തുക $2n + 1$ ആണെന്നും അറിയണം. കൂടാതെ n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n + 1$ ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്നും കാണേണ്ടതുണ്ട്.

മറ്റു പല ശാസ്ത്രങ്ങളിലും, കുറേയേറെ സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഒരു വസ്തുത ശരിയാണെന്നു കണ്ടാൽ അതൊരു പൊതുതത്ത്വമായി അംഗീകരിക്കാറുണ്ട്. ഗണിതത്തിൽ ഇതു മതിയാകില്ല. എന്തുകൊണ്ട് അത് ശരിയാകുന്നു എന്നും സമർഥിക്കണം. സംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള കാര്യങ്ങളാണെങ്കിൽ, ഈ കാര്യകാരണബന്ധം ബീജഗണിതത്തിലൂടെയാണ് വെളിവാകുന്നത്.

അനേകം സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകുന്ന കാര്യങ്ങൾ പിന്നീട് ശരിയല്ലാതാകുന്ന പല സന്ദർഭങ്ങളും ഗണിതത്തിലുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, 2^2 നെ 2 കൊണ്ടും, 2^3 നെ 3 കൊണ്ടും 2^4 നെ 4 കൊണ്ടുമെല്ലാം ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 കിട്ടുന്നില്ല. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, 4700063497 നെക്കാൾ ചെറിയ ഏത് സംഖ്യ n ആയി എടുത്താലും 2^n നെ n കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 ആകില്ല. എന്നാൽ n ആയി 4700063497 എടുത്താൽ ശിഷ്ടം 3 തന്നെയാവുകയും ചെയ്യും.

ഇവിടെ, നാനൂറ്റി എഴുപത് കോടിയിലധികം സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകുന്ന ഒരു വസ്തുതയാണ് പിന്നീട് തെറ്റുന്നത്!

മൂന്നു സംഖ്യകൾ

അടുത്തടുത്ത ഏത് രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയോ?

$$1+2+3=6$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5=12$$

ഇവയെല്ലാം 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണ്. ഏതു സംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങിയാലും ഇതു ശരിയാണോ?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യയെ n എന്നെഴുതിയാൽ, അടുത്ത രണ്ടു സംഖ്യകൾ $n+1$, $n+2$ എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ. ഇവയുടെ തുക

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3$$

ഇനി

$$3n+3=3(n+1)$$

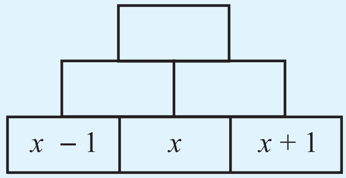
എന്നെഴുതിയാൽ, തുക 3 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്നു കാണാം.

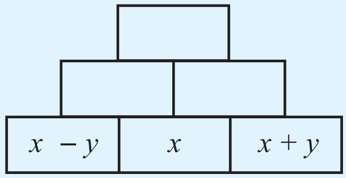
ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യംകൂടി കാണാം. നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണ് തുക. അപ്പോൾ കുറേക്കൂടി കൃത്യമായ ഒരു പൊതു തത്ത്വം കിട്ടുന്നു.

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

അടുത്തടുത്ത നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക നാലിന്റെ ഗുണിതമാണോ?

ഈ ഗോപുരങ്ങൾ മുഴുമിപ്പിക്കൂ:

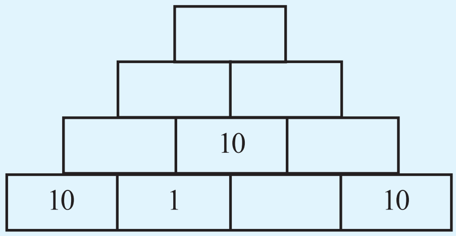




രണ്ടാമതെഴുതിയ തരത്തിലുള്ള ഗോപുരങ്ങളുടെ സവിശേഷത സാധാരണ ഭാഷയിലെഴുതാമോ?

മറ്റൊരു ഗോപുരം

അൽപ്പം കൂടി വലിയ ഗോപുരം:



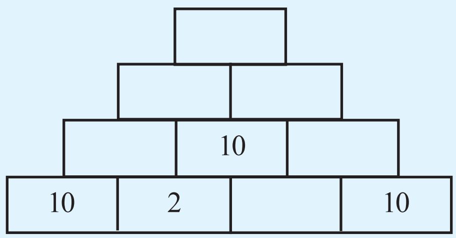
ഇതിലെ മറ്റു സംഖ്യകളെല്ലാം എഴുതാമോ?

താഴത്തെ വരിയിൽ ഇനി ഏതു സംഖ്യകൂടി എഴുതണം?

അതിനോട് 1 കൂട്ടിയാൽ 10 കിട്ടണമല്ലോ.

ഇനിയുള്ള സംഖ്യകളുംകൂടി എഴുതൂ. ഏറ്റവും മുകളിൽ 50 കിട്ടിയില്ലേ?

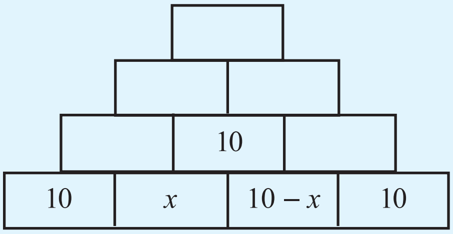
ഇനി ഈ ഗോപുരത്തിലെ സംഖ്യകളെല്ലാം എഴുതൂ.



ഇപ്പോഴും ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ 50 തന്നെയല്ലേ?

2 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ എഴുതി ചെയ്തു നോക്കൂ. എപ്പോഴും 50 ൽ അവസാനിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

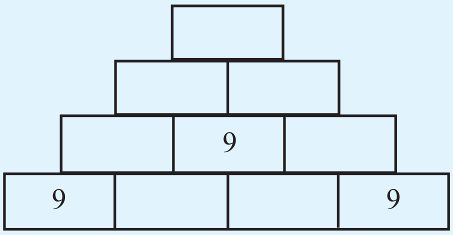
ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുനോക്കാം. ചുവട്ടിലെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ x എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ അടുത്ത സംഖ്യ എന്തെഴുതണം?



ഇനി ഇതിനു മുകളിലെ രണ്ടു വരികൾ എഴുതാമല്ലോ? മൂന്നാമത്തെ വരിയിലെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ $20 + x$, $30 - x$ എന്നു കിട്ടിയില്ലേ? അപ്പോൾ അവസാനത്തെ സംഖ്യ

$$(20 + x) + (30 - x) = 50$$

ഇനി 10 നു പകരം 9 ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയൊരു ഗോപുരം തുടങ്ങിയാലോ?



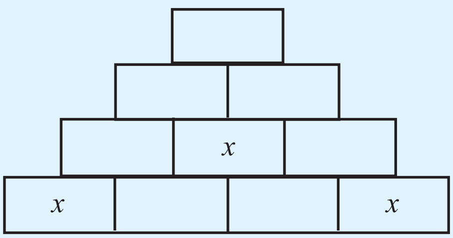
ചുവട്ടിലെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 9 ൽ താഴെയുള്ള ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത് ഗോപുരം മുഴുവനാക്കൂ (എന്തിന് 9 ൽ താഴെയാകണം?)

കൂട്ടുകാർ ചെയ്തതുമായി ഒത്തുനോക്കൂ. എല്ലാവർക്കും കിട്ടിയത് 45 തന്നെയല്ലേ?

ഇനി 9 നു പകരം 11 ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയാൽ, തുടർന്ന് (11 നേക്കാൾ ചെറിയ) ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും അവസാനം കിട്ടാൻ പോകുന്നത് എന്താണെന്നു പറയാമോ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് എപ്പോഴും തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യയുടെ 5 മടങ്ങുതന്നെ കിട്ടുന്നത്?

തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യ x എന്നെടുക്കാം:



മറ്റൊരു മാർഗം

തുടർച്ചയായ ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നു കാണാൻ മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്.

നടുവിലെ സംഖ്യ n എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $n - 1$, അവസാനസംഖ്യ $n + 1$. ഇവയുടെ തുക

$$(n-1) + n + (n + 1) = 3n$$

ഇതിൽ $n - 1$, $n + 1$ എന്നിവയുടെ തുക $2n$ ആണെന്ന് എളുപ്പം കാണാം എന്നതാണ് സൗകര്യം.

ഇനി തുടർച്ചയായ അഞ്ച് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നടുവിലെ (മൂന്നാമത്തെ) സംഖ്യ n എന്നെടുത്താൽ ഈ അഞ്ചു സംഖ്യകളെ

$$n - 2,\quad n - 1,\quad n,\quad n + 1,\quad n + 2$$

എന്നെഴുതാം. ഇവയുടെ തുക കാണാൻ, ആദ്യം

$$(n - 2) + (n + 2) = 2n$$

$$(n - 1) + (n + 1) = 2n$$

എന്നിങ്ങനെ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned}(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) &= (n-2) + (n+2) + (n-1) + (n+1) + n \\ &= 2n + 2n + n \\ &= 5n\end{aligned}$$

എന്നു വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാം. തുക നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കുകയും ചെയ്യാം.

തുടർച്ചയായ ഏഴ് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

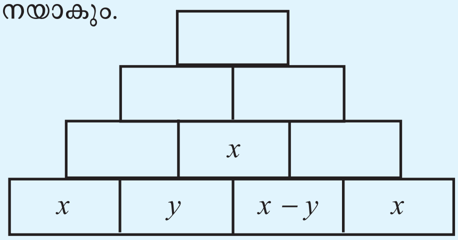
പൊതുരൂപങ്ങൾ

2, 4, 6, 8 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളെല്ലാം 2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണല്ലോ. അഥവാ, 1, 2, 3... എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണ് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ. അപ്പോൾ n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n$ എന്നത് ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. മറിച്ച് ഏത് ഇരട്ടസംഖ്യയെയും $2n$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം.

2,4,6,8...എന്നീ ഇരട്ടസംഖ്യകളിൽ നിന്നെല്ലാം 1 കുറച്ചാൽ 1, 3, 5, 7... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകൾ കിട്ടും. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ എണ്ണൽസംഖ്യകളെല്ലാം 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 1 കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നവയാണ് ഒറ്റസംഖ്യകൾ. ബീജഗണിതരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, n എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $2n$ ഉം 1 കുറച്ചാൽ $2n-1$ ഉം ആകും. അതായത് n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n - 1$ ഒറ്റസംഖ്യയാണ്. മറിച്ച് ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും $2n - 1$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുകയും ചെയ്യാം.

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n + 1$ എന്നതും ഒറ്റസംഖ്യതന്നെ. പക്ഷേ, n ആയി 1, 2, 3... എന്നിങ്ങനെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്താൽ $2n + 1$ എന്നതിൽ നിന്ന് 1 കിട്ടില്ല. എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും കിട്ടാൻ n ആയി 0, 1, 2... എന്നിങ്ങനെ എടുക്കണം.

അടുത്ത സംഖ്യ y എന്നുമെടുക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യ വരി ഇങ്ങനെയാകും.

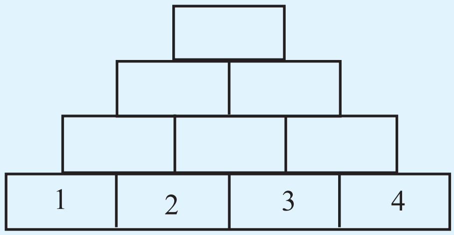


അടുത്ത പടിയിലെ സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

അതിനടുത്ത പടിയിലോ? $2x + y$, $3x - y$ എന്നു കിട്ടിയില്ലേ? അപ്പോൾ അവസാന സംഖ്യയോ?

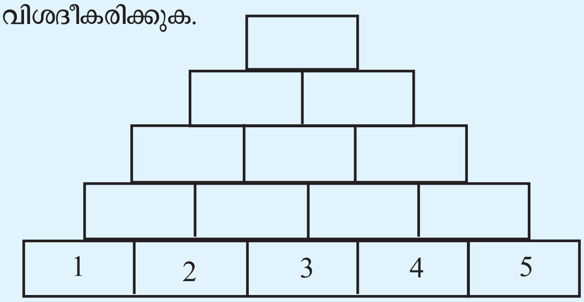
$$(2x + y) + (3x - y) = 5x$$

- ചുവടെയുള്ള ഗോപുരം എല്ലാ കളങ്ങളും പൂരിപ്പിക്കുക.



  തുടർച്ചയായ നാലു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതുപോലെ കുറേയെണ്ണം എഴുതിനോക്കൂ. തുടങ്ങിയ സംഖ്യക്ക് അവസാനം കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുമായുള്ള ബന്ധം എന്താണ്? താഴെ പടിയിലെ നടുവിലുള്ള രണ്ട് സംഖ്യകൾക്ക് ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യയുമായി എന്താണ് ബന്ധം? ഈ ബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

- ഇനി സംഖ്യകൾ അഞ്ചായാലോ? ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യക്ക് ഏറ്റവും താഴത്തെ പടിയിലെ നടുവിലുള്ള സംഖ്യയുമായുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.



- മുകളിലെ ഗോപുരങ്ങളിൽ അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകൾക്കു പകരം ഒന്നിടവിട്ട്, രണ്ടിടവിട്ട് എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതി ചെയ്തു നോക്കുക. ബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

11 ന്റെ കളികൾ

ഈ സംഖ്യകൾ നോക്കൂ:

$$12, 23, 34, ..., ...$$

12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 11 കൂട്ടി, വീണ്ടും 11 കൂട്ടി, അങ്ങനെ പോകുന്നു.

ഇതു തുടർന്നാൽ 100 കിട്ടുമോ?

എഴുതിനോക്കാം:

$$12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100$$

ഇനിയും തുടർന്നാൽ എപ്പോഴെങ്കിലും 1000 കിട്ടുമോ?

എല്ലാം എഴുതിനോക്കുക എളുപ്പമാണോ?

സംഖ്യകൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ:

11 നോട് 1 കൂട്ടിയത് 12

22 നോട് 1 കൂട്ടിയത് 23

33 നോട് 1 കൂട്ടിയത് 34

ഈ സംഖ്യകളെല്ലാം 11 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്.

മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഇവയെല്ലാം 11 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകളാണ്.

ഇനി ഇക്കൂട്ടത്തിൽ 1000 വരുമോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ.

1000 നെ 11 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 അല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ സംഖ്യാക്രമത്തിൽ 1000 ഉണ്ടാവില്ല.

ഇനി ഇതിൽ 10000 ഉണ്ടാകുമോ എന്നു നോക്കൂ.

100000 ആയാലോ?

ഈ ക്രമം ഉണ്ടാക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ആദ്യം പറഞ്ഞത്, 12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടരെ 11 കൂട്ടുക എന്നാണല്ലോ.

ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യാക്രമം മുഴുവനും ഒരു ക്രിയയായി എഴുതാം:

> എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം 11 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടുക.

ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് പറഞ്ഞാലോ?

> $11n + 1$ എന്നതിൽ n ആയി, 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുക്കുക.

(എണ്ണൽസംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ബീജഗണിതത്തിൽ സാധാരണയായി n, m, p, k എന്നിങ്ങനെയുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുകയാണു പതിവ്. നിർബന്ധമൊന്നുമില്ല - ഒരു കീഴ്‌വഴക്കം എന്നു മാത്രം)

വീണ്ടും ചില തുകകൾ

രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത് ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത്?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം. രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകളെ $2m$, $2n$ എന്നെടുക്കാം. ഇവയുടെ തുക.

$$2m + 2n = 2(m + n)$$

ഇതിൽനിന്ന് തുകയും 2 ന്റെ ഗുണിതം, അഥവാ ഇരട്ടസംഖ്യ, ആണെന്നു കാണാം.

ഇനി രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടുന്നതെങ്കിലോ? അവയെ $2m - 1$, $2n - 1$ എന്നെടുത്താൽ തുക

$$\begin{aligned}(2m-1)+(2n-1) &= 2m+2n-2\\ &= 2(m+n-1)\end{aligned}$$

ഇത് 2 ന്റെ ഗുണിതമാണല്ലോ. അതായത് ഇരട്ടസംഖ്യ.

രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾക്കുപകരം മൂന്ന് ഇരട്ടസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടുന്നതെങ്കിലോ? നാല് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

മൂന്ന് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം? നാല് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയോ?

സംഖ്യകളും അക്ഷരങ്ങളും

പൊതുവായ തത്ത്വങ്ങൾ പറയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, അക്ഷരങ്ങൾ ഏതുതരം സംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്നു വ്യക്തമാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, $2n - 1$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഒറ്റസംഖ്യകളാണ് എന്നു പറയുമ്പോൾ, ഇതിലെ n എന്നത് എണ്ണൽസംഖ്യകളെ മാത്രമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്നുകൂടി പറയണം. $2n - 1$ ൽ n ആയി $1\frac{1}{2}$ എന്ന ഭിന്ന സംഖ്യ എടുത്താൽ

$$2n - 1 = (2 \times 1\tfrac{1}{2}) - 1 = 2$$

എന്ന ഇരട്ടസംഖ്യയാണു കിട്ടുന്നത്.

ഇനി 12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്നതിനു പകരം 21 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി തുടരെ 11 കൂട്ടിയാലോ?

$$21, 32, 43, \ldots$$

ഈ സംഖ്യകളെയും ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് എഴുതാമോ?

ഇവയെ $11 + 10, \quad 22 + 10, \quad 33 + 10, \ldots$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. അതായത്,

$11n + 10$ എന്നതിൽ n എന്ന സംഖ്യ $1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുക്കുക.

ഈ ക്രമം തുടർന്നാൽ, 100, 1000, 10000, 100000 എന്നിവയിൽ ഏതൊക്കെ കിട്ടുമെന്നു പറയാമോ?

ഈ സംഖ്യകളെ 11 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എന്താണ്?

ഇനി ഈ രണ്ടു സംഖ്യാ ക്രമങ്ങളും ഒരുമിച്ചു നോക്കാം:

12	23	34	45	...
21	32	43	54	...

മുകളിലെയും താഴത്തെയും സംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടിയാലോ?

33 55 77 99 ...

എന്തുകൊണ്ടാണ് 11 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രം കിട്ടുന്നത്? ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു നോക്കാം.

ആദ്യത്തെ ക്രമത്തിലെ ഏതു സംഖ്യയെയും $11n + 1$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. രണ്ടാമത്തെ ക്രമത്തിൽ അതേ സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന സംഖ്യ $11n + 10$ ആണ് (ആദ്യത്തെ n ആണ് ഇതിലും).

ഇവയുടെ തുക എന്താണ്?

$$\begin{aligned}(11n + 1) + (11n + 10) &= 22n + 11 \\ &= 11(2n + 1)\end{aligned}$$

11 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം മനസ്സിലായില്ലേ?

ഇങ്ങനെ കിട്ടിയ തുകകൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ:

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രം കിട്ടുന്നത്?

തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതിനോക്കൂ: അതിൽ n ആയി $1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ $2n + 1$ ആയി ഏതുതരം സംഖ്യകളാണ് കിട്ടുന്നത്?

ഇവിടെ $11n + 1$, $11n + 10$, $2n + 1$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള പൊതുരൂപങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയെല്ലാം ഓരോ ക്രിയകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $11n + 1$ എന്നതിന്റെ അർഥം, n എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന

സംഖ്യയെ 11 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 1 കൂട്ടുക എന്നാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രിയകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പൊതുരൂപങ്ങളെ ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ (algebraic expressions) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, 1 നോട് തുടരെ 11 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന 12, 23, 34, ... എന്നീ സംഖ്യകളെയെല്ലാം $11n+1$ എന്ന ഒറ്റ ബീജ ഗണിതവാചകത്തിൽ ഒതുക്കാം.

- 1 നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 10 കൂട്ടി കിട്ടുന്ന സംഖ്യക ളുടെ ബീജഗണിതവാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- 9 നോട് തുടർച്ചയായി 10 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതവാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ആദ്യത്തെ രണ്ടു ക്രമങ്ങളിലെയും ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക. 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രം കിട്ടു ന്നതെന്തുകൊണ്ടാണ്? 10 ന്റെ എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളും ഇങ്ങനെ കിട്ടുമോ?

രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ

10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 10, 20, 30, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ യെല്ലാം പൊതുവായി $10n$ എന്നെഴുതാം; ഇതിൽ n ആയി ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയുമെടുക്കാം.

ഇതിലെ രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയെങ്കിലോ? n ആയി 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം എടു ത്താൽ മതി.

$$10n \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

എന്നെഴുതാം. അൽപ്പംകൂടി ചുരുക്കി

$$10n \quad (n = 1, 2, 3, ..., 9)$$

എന്നുമാകാം.

ഇതുപോലെ 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന 11, 21, 31, ... എന്നീ സംഖ്യകളെയെല്ലാം പൊതുവായി $10n+1$ എന്നെഴുതാം; ഇതിൽ n ആയി ഏത് എണ്ണൽസം ഖ്യയുമെടുക്കാം.

ഇവയിലെ രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയെങ്കിൽ

$$10n+1 \quad (n = 1, 2, 3, ..., 9)$$

എന്നുമെഴുതാം.

10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 2 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന 12, 22, 32, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ എങ്ങനെ ബീജഗണിത വാചകമായി എഴുതും? അവയിലെ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളെയോ?

ഇതുവരെ കിട്ടിയ രണ്ടക്കസംഖ്യകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു

ബീജഗണിതരൂപങ്ങൾ

ഏതു സംഖ്യയേയും 10 കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്; അവസാനം ഒരു പൂജ്യം ചേർത്താൽ മതി:

$$18 \times 10 = 180$$

$$250 \times 10 = 2500$$

എന്നാൽ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചെഴുതു മ്പോൾ

$$10 \times n = 10n$$

എന്നു മാത്രമേ എഴുതാറുള്ളൂ; $n0$ എന്നെഴുതാറില്ല.

ഇതുപോലെ 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടി യാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം അവ സാന അക്കങ്ങൾ 1 ആണ്. എന്നാൽ ഇവയു ടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം $10n + 1$ എന്ന ല്ലാതെ $n1$ എന്നെഴുതില്ല.

10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ എന്നതിനുപകരം 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെന്നും പറയാം. ഇവയെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ശിഷ്ടം 1 തന്നെ. കാരണം

$$10n+1 = (5 \times 2n) + 1$$

എന്നെഴുതാം. ഇത്തരം സംഖ്യകളെ $n1$ എന്നെഴുതിയാൽ ഇതുപോലുള്ള വിശക ലനങ്ങൾ സാധിക്കില്ല.

രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ

3 നെ 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 5 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ ചുരുക്കെഴുത്താണ് 35 എന്ന രണ്ടക്കസംഖ്യ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഒരക്കസംഖ്യകളെടുത്ത്, ആദ്യത്തേതിനെ 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, രണ്ടാമത്തേത് കൂട്ടിയാൽക്കിട്ടുന്നതിനെയാണ്, ഈ അക്കങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച രണ്ടക്കസംഖ്യയായി എഴുതുന്നത് എന്നു ഭാഷയിൽ പറയാം.

ബീജഗണിതത്തിലാകുമ്പോൾ m എന്ന ഒരക്കസംഖ്യയെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് n എന്ന ഒരക്കസംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യ $10m + n$ എന്നു മാത്രമേ എഴുതാറുള്ളൂ.

m, n ഇവ ചേർത്തുവച്ച് mn എന്ന് എഴുതില്ല.

എന്നാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരക്കസംഖ്യയെ 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ആ സംഖ്യ തന്നെ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നതിനെ

$$10\,n + n = 11n$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽനിന്ന് ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെല്ലാം 11 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് കാണുകയും ചെയ്യാം.

നോക്കാം:

$10n$	:	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$10n + 1$	:	11	21	31	41	51	61	71	81	91
$10n + 2$	:	12	22	32	42	52	62	72	82	92

ഇങ്ങനെ എല്ലാ രണ്ടക്കസംഖ്യകളും വേണമെങ്കിൽ ഏതെല്ലാം ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ എടുക്കണം?

$10n$, $10n + 1$, $10n + 2$ എന്നിങ്ങനെ $10n + 9$ വരെയുള്ള ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ രൂപമെന്താണ്?

$10n$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തോട് പല സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നു (ആദ്യം കൂട്ടിയത് 0).

ഈ കൂട്ടുന്ന സംഖ്യകളെയും ഒരു അക്ഷരംകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഇവയെല്ലാം $10n + m$ എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ m ആയി 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകളാണ് എടുക്കേണ്ടത്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, എല്ലാ രണ്ടക്കസംഖ്യകളും

$$10n + m \ (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 9;\ m = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 9)$$

എന്ന രൂപത്തിലാണ്. ഉദാഹരണമായി $n = 5$, $m = 3$ എന്നെടുത്താൽ

$$10n + m = (10 \times 5) + 3 = 53$$

എന്നു കിട്ടും.

$n = 3$, $m = 5$ എന്നായാലോ?

അപ്പോൾ, രണ്ടക്കസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപമായ $10n + m$ ൽ ആദ്യത്തെ (പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത്) അക്കമാണ് n; രണ്ടാമത്തെ (ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ) അക്കമാണ് m.

ഇനി ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യ എടുക്കുക. ഉദാഹരണമായി 25. ഇത് തിരിച്ചെഴുതിയാൽ 52; അവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ 77.

36 ഉം 63 ഉം കൂട്ടിയാലോ?

എപ്പോഴും അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുമോ?

28 ഉം 82 ഉം ആയാലോ?

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളിലെല്ലാം പൊതുവായി എന്തെങ്കിലും കാണുന്നുണ്ടോ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് എപ്പോഴും 11 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്?

പൊതുവായ കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ ബീജഗണിതമാണ് സഹായം.

ഏത് രണ്ടക്കസംഖ്യയെയും $10m + n$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാമല്ലോ. ഇത് തിരിച്ചെഴുതുകയെന്നാൽ, അക്കങ്ങളുടെ

സ്ഥാനം പരസ്പരം മാറ്റുക; അതായത് $10n + m$.

ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned}(10m + n) + (10n + m) &= (10m + m) + (10n + n)\\ &= 11m + 11n\\ &= 11(m + n)\end{aligned}$$

ഇനി ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യ തിരിച്ചെഴുതി കൂട്ടുന്നതിനു പകരം വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറച്ചുനോക്കൂ. കുറേ രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഇത് ചെയ്തുനോക്കൂ.

കുറച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെല്ലാം ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ ഗുണിതങ്ങളാണോ?

എന്താണു കാരണം?

$$\begin{aligned}(10m + n) - (10n + m) &= 10m + n - 10n - m\\ &= 9m - 9n\\ &= 9(m - n)\end{aligned}$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യ എടുത്ത് അതിലെ അക്കങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുക. ഈ തുക സംഖ്യയിൽനിന്നു കുറയ്ക്കുക. ഇത് കുറേ സംഖ്യകളിൽ ചെയ്തുനോക്കുക. ഇങ്ങനെ കുറച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും സ്വഭാവം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഏതു രണ്ടക്കസംഖ്യയിൽനിന്നും അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക കുറച്ചാൽ 9 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

- മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.
- ഒരു മൂന്നക്കസംഖ്യയുടെ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും അവസാനത്തെയും (നൂറിന്റെയും പത്തിന്റെയും ഒന്നിന്റെയും സ്ഥാനത്തുള്ള) അക്കങ്ങളെ m, n, p എന്നെടുത്താൽ, സംഖ്യയെ എങ്ങനെ എഴുതാം? ഈ സംഖ്യയെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ എങ്ങനെ എഴുതാം?
- ഏതു മൂന്നക്കസംഖ്യയെയും തിരിച്ചെഴുതി, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 99 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.
- ഏതു മൂന്നക്കസംഖ്യയിൽനിന്നും അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക കുറച്ചാൽ 9 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുമെന്ന് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

വീണ്ടും മൂന്നു സംഖ്യകൾ

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്ത് ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക. ഈ തുകയ്ക്ക് നടുവിലെ സംഖ്യയുമായി എന്താണു ബന്ധം?

ഇങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെടുത്തു ചെയ്താലും തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് സമർഥിക്കുക.

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ (ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6) എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമോ? ഒറ്റസംഖ്യകളായാലോ?

ഇനി 3 ന്റെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു ഗുണിതങ്ങൾ (ഉദാഹരണമായി 3, 6, 9) എടുത്താൽ ഇതു ശരിയാകുമോ?

3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ (ഉദാഹരണമായി 4, 7, 10) ആയാലോ?

3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾക്കു പകരം 4 ന്റെയോ മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയുടെയോ ഗുണിതമായാലോ?

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നിഗമനങ്ങളെല്ലാം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സംഖ്യാബന്ധങ്ങളെ ബീജഗണിത സഹായത്തോടെ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ക്രിയകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബീജഗണിത വാചകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപങ്ങൾ ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സംഖ്യാ പ്രത്യേകതകൾ ബീജഗണിത വാചകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സമർഥിക്കുന്നു.			