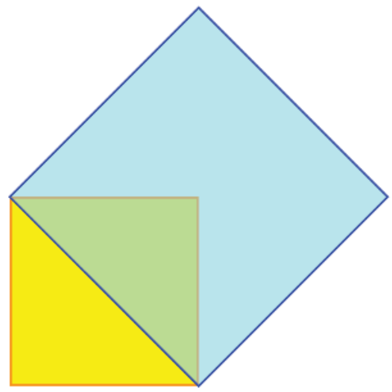
4 പുതിയസംഖ്യകൾ

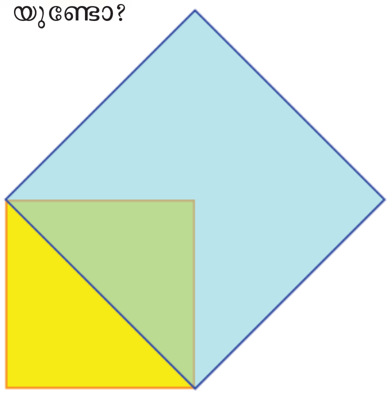
നീളങ്ങളും സംഖ്യകളും

ചിത്രം നോക്കൂ:

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം വശമായി മറ്റൊരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?



അതായത്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ഒരു മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്റർ.

അതിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

ഏതായാലും, ഒരു മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്; രണ്ടു മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവും (അതെങ്ങനെ?) ഒന്നിനും രണ്ടിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആകാം; പക്ഷേ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്ററായതിനാൽ, വശത്തിന്റെ നീളമായ ഈ സംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ടാകണം.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് രണ്ട്?

ഒന്നരയാകുമോ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

അത് കൂടുതലാണ്, ഒന്നേകാൽ ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

അത് കുറഞ്ഞുംപോയി. ഒന്നും മൂന്നിലൊന്നും ആയാലോ?

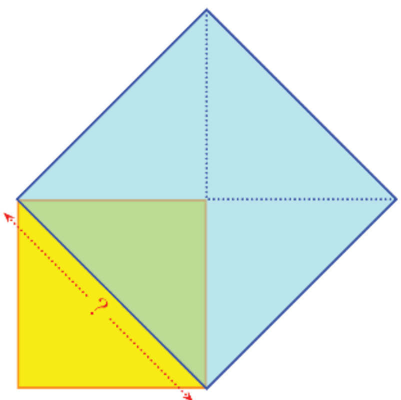
$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

അതും കുറവ് തന്നെ; പക്ഷേ ഒന്നേകാലിനേക്കാൾ മെച്ചമാണ്.

ഇങ്ങനെ പല ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്ത് പരിശോധിച്ചാലും വർഗങ്ങൾ 2 നോട് വളരെ അടുത്തുവരുമെന്നല്ലാതെ, കൃത്യം 2 കിട്ടില്ല. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇതു തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യാം (ഈ പാഠഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള അനുബന്ധം നോക്കുക).

അതായത്,

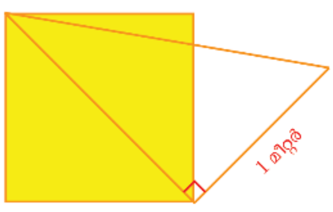
ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല.



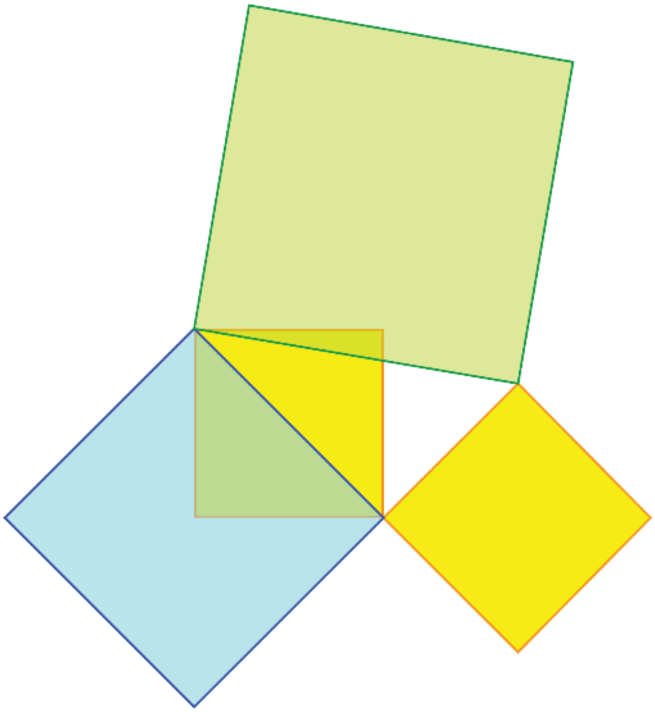
അപ്പോൾ നമ്മുടെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നം എന്തായി? വശങ്ങൾ ഒരു മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം, ഒരു മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ട് ആകണം (വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യയായാലും പരപ്പളവ് അതിന്റെ വർഗമാണെന്ന് ആറാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ) പക്ഷേ വർഗം രണ്ട് ആയ ഭിന്നസംഖ്യ ഇല്ല. അപ്പോൾ എന്തു പറയാം?

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ പലതുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളമെന്താണ്? ഇതിന്റെ വശങ്ങളിലെല്ലാം സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം.



പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമായ (പച്ച) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $1 + 2 = 3$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 3 ആകണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്നു കണ്ടതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 3 അല്ലെന്നും കാണാം. അപ്പോൾ ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: വ്യാപ്തം 2 ഘനസെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഉണ്ടാക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം? ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മൂന്നാംകൃതിയും 2 അല്ല. അപ്പോൾ ഈ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരും.

സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

എന്തിനേയും അളന്ന് സംഖ്യയാക്കുക; ഈ സംഖ്യകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക - ഇതാണ് ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ധർമം.
അളക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്വഭാവം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കേണ്ടി വരും.
പ്രകൃതിയിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് കിട്ടുന്നതു മാത്രം ഭക്ഷിച്ചു നടന്നിരുന്ന കാലത്ത് മനുഷ്യന് കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, വളർത്തുന്ന കന്നുകാലികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ മാത്രമേ ആവശ്യമായിരുന്നുള്ളു. അക്കാലത്ത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.
ബി.സി. അയ്യായിരത്തോടടുപ്പിച്ച്, നദീതീരങ്ങളിൽ സ്ഥിരമായി താമസിച്ചുകൊണ്ട് മനുഷ്യർ വ്യാപകമായ കൃഷി തുടങ്ങിയതോടെ, കൃഷിയിടങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്താനും, പാർപ്പിടങ്ങൾ പണിയാനുമെല്ലാം പലതരത്തിലുള്ള നീളവും പരപ്പുമെല്ലാം അളക്കേണ്ടതായി വന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ഭിന്നസംഖ്യകൾ എന്ന സങ്കേതം ഉണ്ടായത്. പങ്കുവയ്ക്കുമ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. എല്ലാ അളവുകളേയും ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവിൽനിന്നാണ് പുതിയ തരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നത്.
പിൽക്കാലത്ത് ഭൗതികമായ ആവശ്യങ്ങൾക്കല്ലാതെ ഗണിതത്തിന്റെ തന്നെ സൗകര്യങ്ങൾക്കായും പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കപ്പെട്ടു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ, സങ്കീർണസംഖ്യകൾ (complex numbers) എന്നിവ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായവയാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾപോലും ഊർജതന്ത്രം പോലുള്ള മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട് എന്നത് മറ്റൊരു കാര്യം.

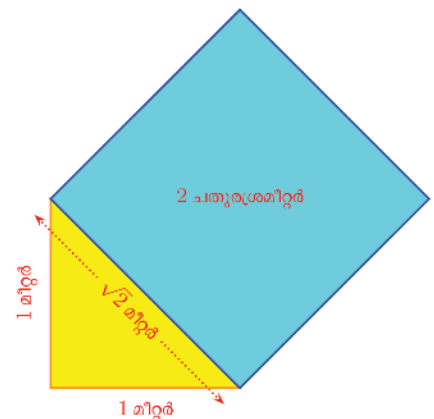
അളവുകളും സംഖ്യകളും

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളുണ്ടാക്കണം. നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണം തന്നെയെടുക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 ആയ (മീറ്ററോ, സെന്റിമീറ്ററോ എന്തുമാകട്ടെ) സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളത്തെ എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

ഈ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയും ചോദിക്കാം: പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

വശം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ സമചതുരമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം പരപ്പളവിന്റെ വർഗമൂലമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി , പരപ്പളവ് 4 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{4} = 2$; പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം.



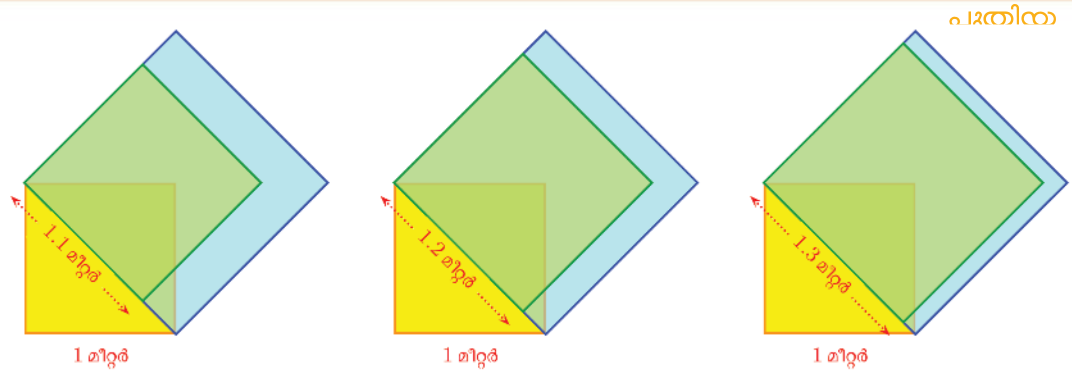
നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു ചിഹ്നം കൊടുത്തതു കൊണ്ടായില്ലല്ലോ. അതിന്റെ വലുപ്പമറിയാൻ, അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുമായി ഒത്തുനോക്കണ്ടേ? അതിനുള്ള വഴി, ഈ നീളത്തോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ്. ഇത്തരം നീളങ്ങൾ വികർണത്തിൽത്തന്നെ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ഇവ വശങ്ങളായ സമചതുരങ്ങൾ, വികർണം വശമായ സമചതുരത്തോട് അടുക്കുമല്ലോ.

തകരുന്ന വിശ്വാസങ്ങൾ

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് താരതമ്യം ചെയ്യാം എന്നായിരുന്നു ബി.സി. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പൈഥാഗറസിന്റേയും ശിഷ്യരുടേയും വിശ്വാസം. കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു രണ്ട് അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നതാണ് ഈ വിശ്വാസം. എന്നാൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റേയും വശത്തിന്റേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾകൊണ്ട് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അംശബന്ധം എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് $a : b$ എന്നെഴുതണമെങ്കിൽ, വികർണത്തിന്റെ നീളം വശത്തിന്റെ $\frac{a}{b}$ മടങ്ങാകണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വികർണത്തിന്റെ വർഗം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ മടങ്ങാകണം. വികർണത്തിലെ സമചതുരം, വശത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടല്ലോ.

പൈഥാഗറസിന്റെ തന്നെ ശിഷ്യനായ ഹിപ്പാസസ് ആണ് ഈ വസ്തുത കണ്ടെത്തിയതെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണവും വശവും പോലെ, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെ ഒരുമിച്ചളക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകൾ (incommensurable magnitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളുടെ നീളങ്ങളായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഇങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപമാണ് സൗകര്യം. ആദ്യം 1.1, 1.2, 1.3, . . . എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ.

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.5^2 = 2.25$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ പത്തിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, ഇങ്ങനെ കിട്ടും.

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

ഇനി 1.4 നും 1.5 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 1.41, 1.42, 1.43, . . . എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ

$$1.41^2 = 1.9881; \quad 1.42^2 = 2.0164$$

എന്നും കാണാം, അതായത് നൂറിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, നേരത്തെ എഴുതിയത് പോലെ,

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

1.4^2	=	1.96	1.5^2	=	2.25
1.41^2	=	1.9881	1.42^2	=	2.0164
1.414^2	=	1.999396	1.415^2	=	2.002225
1.4142^2	=	1.99996164	1.4143^2	=	2.00024449
1.41421^2	=	1.9999899241	1.41422^2	=	2.0000182084

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെയെടുത്താൽ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ഇതിൽ

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759 < 0.00002$$

ആണെന്നും കാണണം.

6U4XPK

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

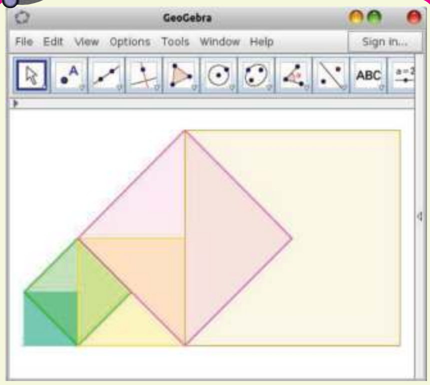
അപ്പോൾ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യ, ഒരു ദശാംശസ്ഥാനം മാത്രമെടുത്താൽ 1.4, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയെടുത്താൽ 1.41 എന്നിങ്ങനെ പറയാം. ഇതെഴുതുന്നത്

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

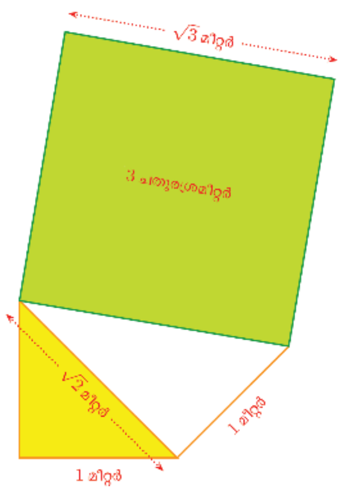
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതിൽ ≈ എന്ന ചിഹ്നത്തിന്റെ അർഥം, ഏകദേശം തുല്യം എന്നാണ്.

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 3 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ ആണെന്നു പറയാം.



ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. (Regular polygon ഉപയോഗിക്കാം) Area ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ സമചതുരത്തിന്റേയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളാണ് ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്നവ?



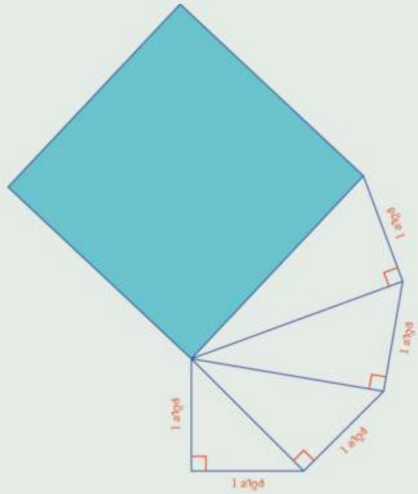
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലുള്ള കണക്കു കൂട്ടലുകളിലൂടെ, 1.7, 1.73, 1.732, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നും കാണാം. ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ എന്നെഴുതാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ x ഏത് അധിസംഖ്യ ആയാലും, പരപ്പളവ് x ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{x}$ എന്നെഴുതാം. ചിലപ്പോൾ $\sqrt{x}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകാം; അല്ലെങ്കിൽ, വർഗം x നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന, ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി, $\sqrt{x}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിലും എഴുതാം.

?

(1) ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും മുകളിലെ മട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമാക്കി സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

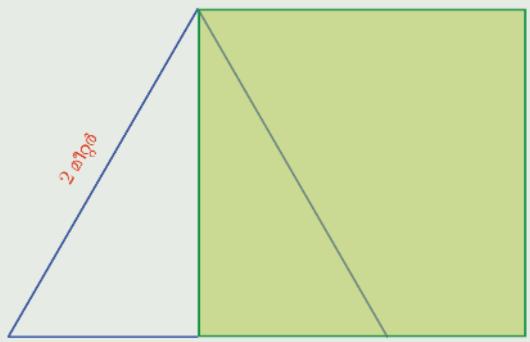
സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.



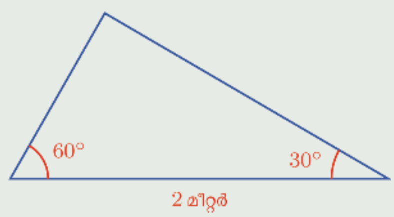
(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 2 മീറ്റർ ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി വശമാക്കി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നു.

i) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്?

ii) ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി എത്ര മീറ്ററാണ്?



iii) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളമെത്രയാണ്?



6UDTR8

(3) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച് 7 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നീ പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(4) 13 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാനുള്ള രണ്ടു വ്യത്യസ്ത മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുക.

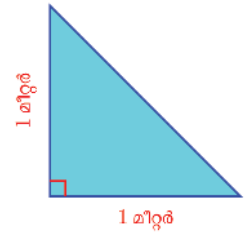
(5) $\sqrt{2}$ നേക്കാൾ വലുതും, $\sqrt{3}$ നേക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

NT-503-4-MATHS-9-M-VOL.1

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

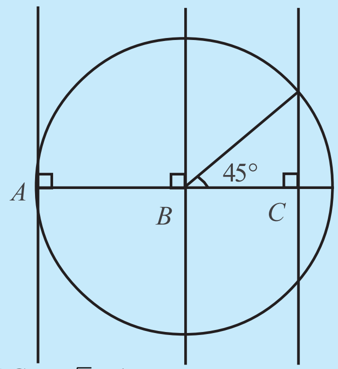
ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്ററായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

ചുറ്റളവോ?



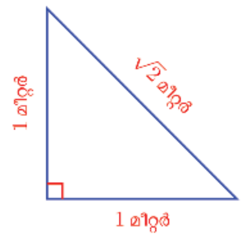
അങ്ങനെയും അംശബന്ധം

ഈ ചിത്രത്തിൽ B വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്.



$AB : BC = \sqrt{2} : 1$

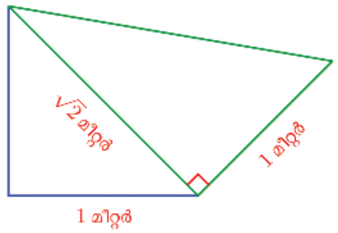
ഇതിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണല്ലോ.



അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ 2 മീറ്ററും $\sqrt{2}$ മീറ്ററും കൂട്ടണം. ഈ നീളത്തെ $2 + \sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

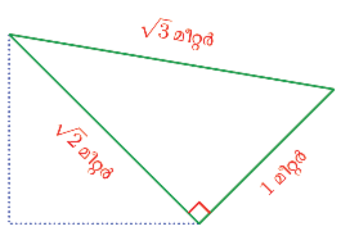
$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ 1.4, 1.41, 1.414, ...എന്നിങ്ങനെ തുടരുമല്ലോ. അപ്പോൾ $2 + \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ഇവയോടെല്ലാം 2 കൂട്ടിയതാണ്; അതായത്, 3.4, 3.41, 3.414, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ.

ഈ കണക്കിൽ, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായ അളവ് മതിയെന്നു തീരുമാനിച്ചാൽ ചുറ്റളവ് 3.41 മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇനി അതല്ല, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമാകണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ 3.414 മീറ്റർ എന്നെടുക്കണം.



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം പാദമാക്കി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയാലോ?

ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ, ഇവ ഓരോന്നിനോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടണം:

$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414
$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	:	3.1	3.14	3.146

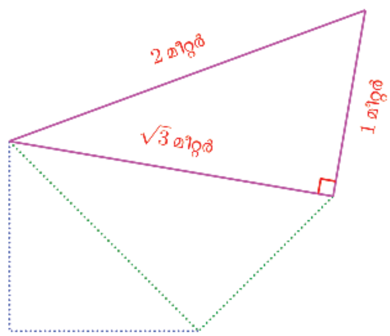
ഇവയോട് 1 കൂട്ടിയാൽ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയുടെ ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അപ്പോൾ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി 4.146 മീറ്റർ.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്? ഏകദേശം $4.146 - 3.414 = 0.732$ മീറ്റർ എന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെയും മുകളിൽ ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ്, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2+1+\sqrt{3} = 3+\sqrt{3}$ മീറ്റർ. ഇതിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാതെതന്നെ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണെന്ന് നോക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആണല്ലോ; അപ്പോൾ ചുറ്റളവിലെ വ്യത്യാസം

$$(3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{2}$$

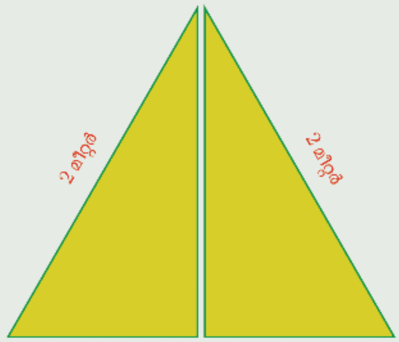
ഇത് മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി

$$2 - 1.414 = 0.586$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത്, ഏകദേശം 586 മില്ലിമീറ്റർ (അഥവാ 58.6 സെന്റിമീറ്റർ) കൂടുതലാണ്.

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

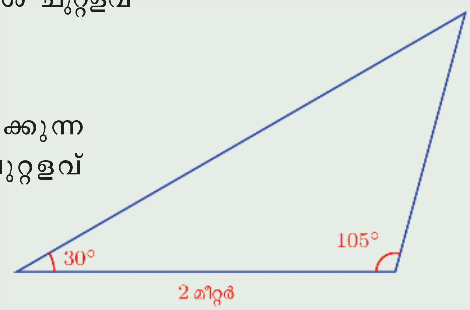
(2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിനെ ഒരു മൂലയിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



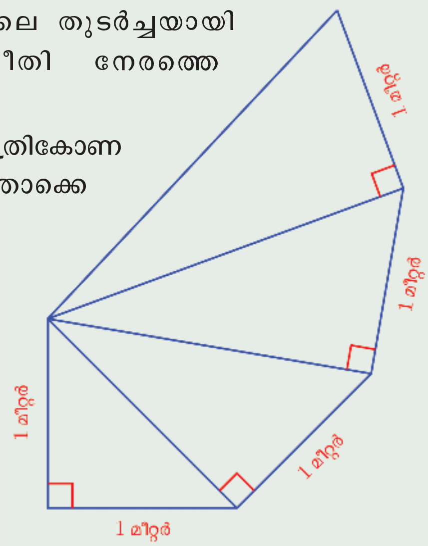
i) ഇവയിലൊന്നിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്? (കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യം നോക്കുക)

ii) മുഴുവൻ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു?

(3) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തുടർച്ചയായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



i) ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

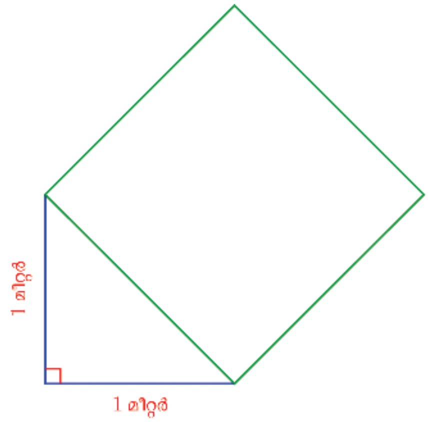
ii) പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന് ഒമ്പതാമത്തെ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണ്?

iii) ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, n-ാം ത്രികോണത്തിന്റെയും, അതിനു തൊട്ടു മുമ്പുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെയും ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എങ്ങനെ എഴുതാം?

(5) ലംബവശങ്ങൾ $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും, $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്ററും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം എത്രയാണ്? ലംബവശങ്ങളുടെ തുക കർണത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

ഗുണനം

തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം പല തവണ കണ്ടുകഴിഞ്ഞല്ലോ, ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?



അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണെന്നറിയാം, അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

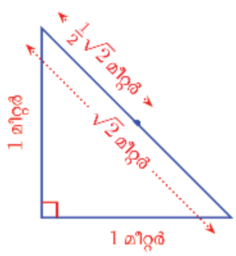
മറ്റു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ $\sqrt{2}$ന്റെ 4 മടങ്ങിനെയും $4 \times \sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം. ഇതു സാധാരണയായി ഗുണനചിഹ്നം ഇല്ലാതെ, $4\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ നാലു മടങ്ങ് എടുക്കണം.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ,

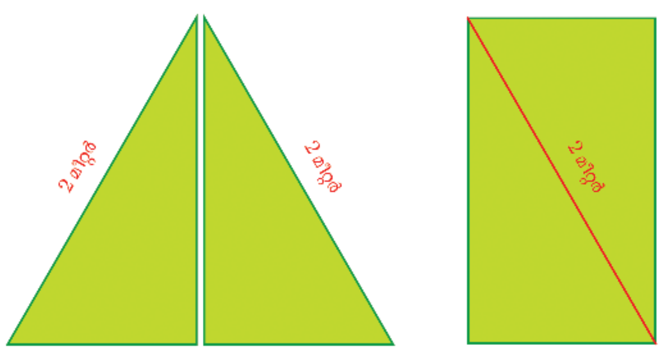
$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ മീറ്റർ}$$

ഇതുപോലെ $\sqrt{2}$ന്റെ പകുതിയെ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

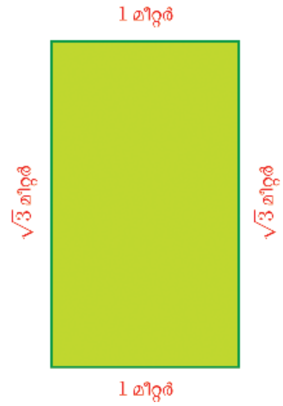


$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ പകുതി എടുത്താൽ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും. അതായത്, $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:



ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തെ തുല്യമായ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി മുറിച്ച്, മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ചതുരമാക്കിയിരിക്കുന്നു.



ഈ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോന്നിന്റെയും പാദം 1 മീറ്ററാണ്; ഉയരം $\sqrt{3}$ മീറ്ററാണെന്ന് മുമ്പൊരു കണക്കിൽ കണ്ടിട്ടുമുണ്ട്.

അപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് $2\sqrt{3} + 2$ മീറ്റർ

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$2\sqrt{3}$	:	3.4	3.46	3.464 . . .
$2\sqrt{3}+2$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

മറ്റു സംഖ്യകളിലേതുപോലെ ഇവിടെയും $2\sqrt{3} + 2$ ഉം $2(\sqrt{3} + 1)$ ഉം ഒന്നു തന്നെയാണോ? രണ്ടാമത് പറഞ്ഞ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$\sqrt{3} + 1$	:	2.7	2.73	2.732 . . .
$2\left(\sqrt{3}+1\right)$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

അതായത്, $2\sqrt{3}+2$ എന്ന സംഖ്യയോടും $2(\sqrt{3} + 1)$ എന്ന സംഖ്യയോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഒന്നുതന്നെയാണ്: അപ്പോൾ

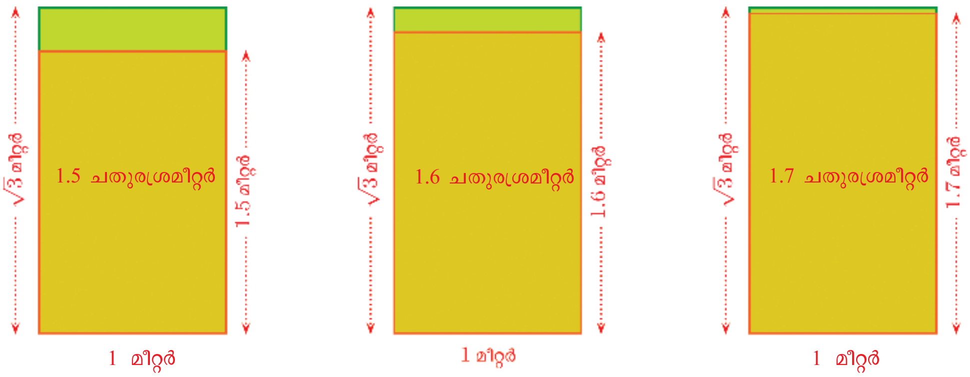
$$2\sqrt{3} + 2 = 2(\sqrt{3} + 1)$$

ഇനി മുകളിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്ന് നോക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് പരപ്പളവ്.

ഇവിടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായ $1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണോ?

ഇതുകാണാൻ, മുമ്പൊരിക്കൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു വശം 1 മീറ്ററും മറ്റേ വശം $\sqrt{3}$ മീറ്ററിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യാനീളങ്ങളും ആയ ചതുരങ്ങൾ ഇതിനുള്ളിൽ വരച്ചു നോക്കാം:



തുടർന്ന് അകത്തെ ചതുരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 1.73, 1.732,. . .എന്നിങ്ങനെ മീറ്റർ ആയി എടുക്കുമ്പോൾ അവയുടെ പരപ്പളവുകളും ഇതേ സംഖ്യകൾ ചതുരശ്രമീറ്ററിലായി കിട്ടും.

6UMPSV

അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$മീറ്ററും 1 മീറ്ററുമായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്റർതന്നെയാണ്.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നായാലോ? ഈ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ്. ഇതിനെ സംഖ്യാപരമായി വിശദീകരിക്കാൻ, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നിവയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി ഗുണിച്ച് വേണ്ടത്ര ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുക്കണം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205 . . .
$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$	:	2.4	2.44	2.449	2.4494	2.44948 . . .

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2.44948\ . . .$$

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട് 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, 1.4142^2, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ($\sqrt{2}$ = 1.41421 . . . എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥംതന്നെ ഇതല്ലേ?) 1.7^2, 1.73^2,1.732^2, 1.7320^2, 1.73205^2,. . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ ഈ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരണമല്ലോ?

മാത്രവുമല്ല, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

ദശാംശക്കണക്ക്

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനം വരെ ചുരുക്കിയെഴുതുമ്പോൾ, അടുത്ത സ്ഥാനത്തെ അക്കം അഞ്ചോ, അഞ്ചിൽ ക്കൂടുതലോ ആണെങ്കിൽ, നമുക്കു വേണ്ട സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാണ് എടുക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ആയതിനാൽ, ഈ ഗുണനഫലത്തെ ഒരു ദശാംശസ്ഥാനത്തേക്ക് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2.4 എന്നാണ്.

$$1.7^2 \times 1.4^2 = (1.7 \times 1.4)^2$$

$$1.73^2 \times 1.41^2 = (1.73 \times 1.41)^2$$

$$1.732^2 \times 1.414^2 = (1.732 \times 1.414)^2$$

എന്നെല്ലാം കാണാം. ഇതിലെ 1.7×1.4, 1.73×1.41 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ പട്ടികയിലെ അവസാന വരിയിൽ കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ 2 നോടും, 3 നോടും, 6 നോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$3 \quad : \quad 1.7^2 \quad 1.73^2 \quad 1.732^2 \quad 1.7320^2 \quad 1.73205^2 \ldots$

$2 \quad : \quad 1.4^2 \quad 1.41^2 \quad 1.414^2 \quad 1.4142^2 \quad 1.41421^2 \ldots$

$6 \quad : \quad 2.4^2 \quad 2.44^2 \quad 2.449^2 \quad 2.4494^2 \quad 2.44948^2 \ldots$

ഇതിലെ അവസാനവരിയിൽ എന്താണ് കാണുന്നത്?

2.4, 2.44, 2.449, 2.4494, 2.44948, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

പുതിയ സംഖ്യകളുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt{6} = 2.44948 \ldots$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് നേരത്തേ കണ്ടു. അപ്പോൾ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

2 നും 3 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും, ഇതുപോലെതന്നെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണെന്നു കാണാം (വർഗമൂലങ്ങൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആണെങ്കിൽ ഇതു ശരിയാണെന്ന് എഴാംക്ലാസിൽതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.)

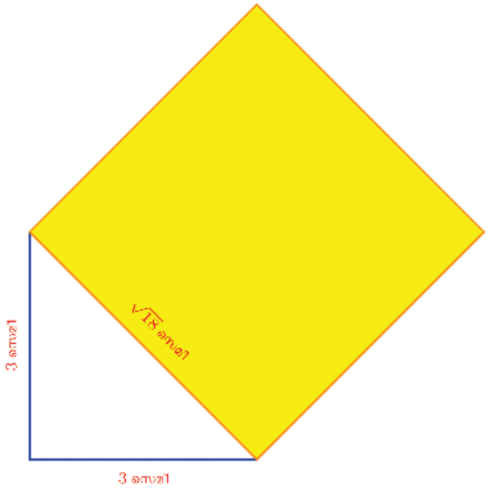
***x, y* എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$**

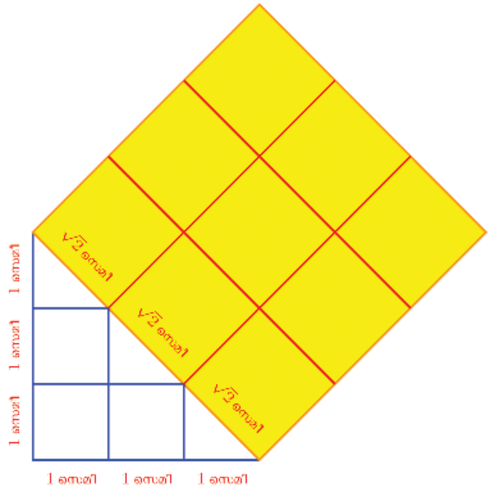
വർഗമൂലങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ലംബവശങ്ങൾ രണ്ടും 3 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം നോക്കാം. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, ഈ കർണം വശമായ സമചതുരത്തിന്റ പരപ്പളവ് $3^2 + 3^2 = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{18}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി 18 നെ 9×2 എന്നെഴുതിയാൽ ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

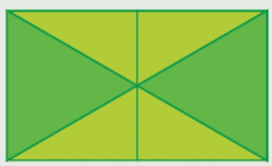
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ഇക്കാര്യം ജ്യാമിതീയമായും കാണാം.





(1) ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടെണ്ണം നെടുകെ മുറിച്ചതും, രണ്ടെണ്ണം മുഴുവനായും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കി.

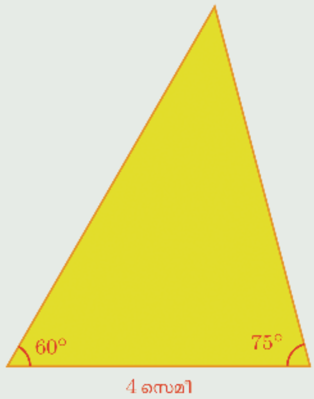


സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളമുള്ള വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ലംബകമുണ്ടാക്കുന്നു.

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(3) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.



(4) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ഗുണനഫലം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $\sqrt{3},\ \sqrt{12}$ ii) $\sqrt{3},\ \sqrt{1.2}$ iii) $\sqrt{5},\ \sqrt{8}$

iv) $\sqrt{0.5},\ \sqrt{8}$ v) $\sqrt{7\frac{1}{2}},\ \sqrt{3\frac{1}{3}}$

ഹരണം

$2 \times 3 = 6$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{6}{2} = 3$ എന്നോ, $\frac{6}{3} = 2$ എന്നോ ഹരണമായും എഴുതാമല്ലോ. ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ എന്ന ഗുണനത്തെയും ഹരണമായി എഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ഏത് x, y എടുത്താലും $x \times y = z$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{z}{x} = y$ എന്നും $\frac{z}{y} = x$ എന്നും ഹരണമായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും,

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

എന്ന ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \quad , \quad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$ **എന്നെഴുതാം.**

ഇനി $\frac{6}{2} = 3$ ഉം, $\frac{6}{3} = 2$ ഉം ആയതിനാൽ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. നേരത്തെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ഈ രണ്ടു ജോടി സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം;

ഇതുപോലെ $3 \times \frac{2}{3} = 2$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും തുടർന്ന് ഈ ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ എന്നും എഴുതാം

ഇനി ഇത്തരം വർഗമൂലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $\sqrt{\frac{1}{2}}$ കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

എന്നെഴുതാം, തുടർന്ന് $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഏതെങ്കിലും ദശാംശസംഖ്യകൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{2}}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം കണക്കാക്കാം.

$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$ (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചോളൂ.)

മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ആയതിനാൽ ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം.

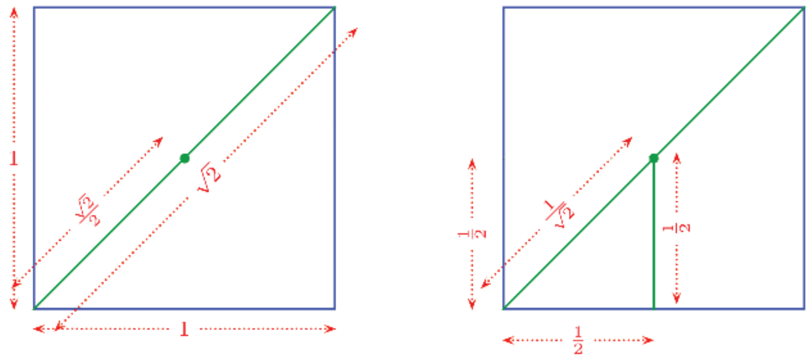
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ഇനി

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$ (ഇതിന് കാൽക്കുലേറ്റർ വേണ്ടല്ലോ?)

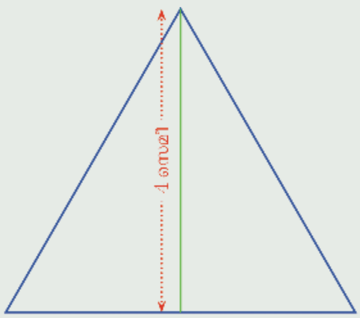
എന്നു എളുപ്പത്തിൽ കാണാമല്ലോ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്നത്, ജ്യാമിതീയമായും കാണാം



ഇതുപോലെ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ഉം കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



(2) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(4) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ ലഘൂകരിച്ചെഴുതുക. അതുപയോഗിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ഇവ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ എന്നും $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ എന്നും തെളിയിക്കുക. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(6) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സമഭുജമാണ്.

പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

അനുബന്ധം

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നു തെളിയിക്കാൻ അത്തരം ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമം വിജയിക്കില്ല എന്നു സമർഥിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്കും പല രൂപങ്ങളുണ്ടല്ലോ, അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ലാത്ത ഏറ്റവും ലളിതമായ ലഘുരൂപവുമുണ്ട്. വർഗം 2 ആയ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ അത്തരമൊരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ലഘുരൂപത്തിന്റെ അംശവും ഛേദവും എങ്ങനെയായിരിക്കണമെന്നു നോക്കാം. അവ p, q എന്നെടുത്താൽ $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ആകണം, p, q ഇവയ്ക്ക് പൊതുവായി ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടാകാനും പാടില്ല.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

എന്നതിനെ

$$p^2 = 2q^2$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ p^2 ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാകണം ($2q^2$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണല്ലോ). ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഒറ്റസംഖ്യകളും (ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഇരട്ടസംഖ്യകളും) ആയതിനാൽ, p തന്നെ ഇരട്ടസംഖ്യയാകണം. ഇനി, p, q ഇവയ്ക്ക് പൊതുഘടകമൊന്നും ഇല്ലാത്തതിനാൽ q ഒറ്റ സംഖ്യയാകണം

p ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ അതിനെ $2k$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ $p^2 = 2q^2$ എന്ന സമവാക്യം $4k^2 = 2q^2$ എന്നാകും. ഇതിൽ

$$q^2 = 2k^2$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ q^2 ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. p യുടെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ, ഇതിൽ നിന്ന് q തന്നെ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെന്നും വരും.

ആദ്യം കണ്ടത് q ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നല്ലേ? അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആകണമെങ്കിൽ അതിന്റെ ലഘുരൂപത്തിൽ ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യയും ഇരട്ടസംഖ്യയും ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതായത് വർഗം 2 ആയ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയും ഇല്ല.