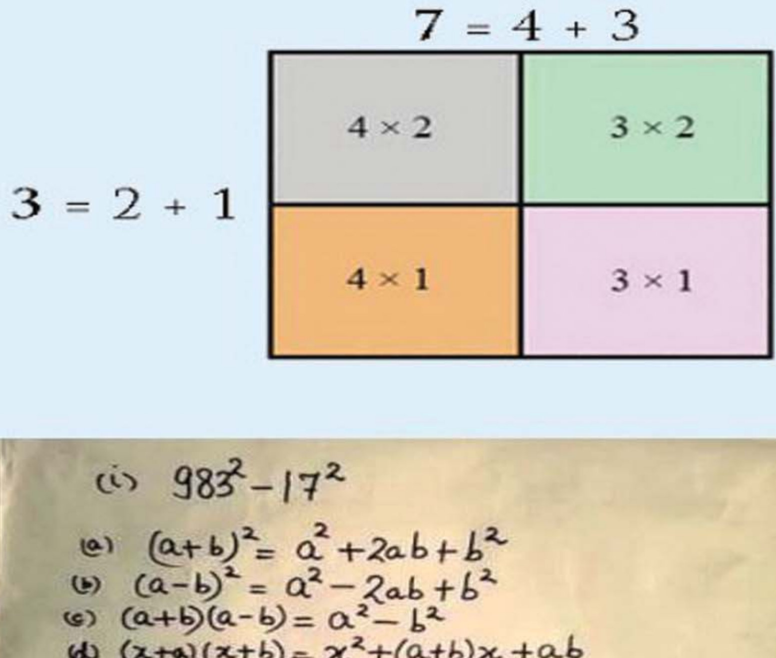
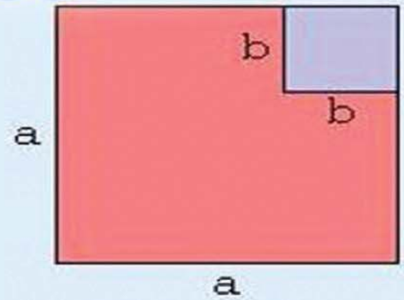
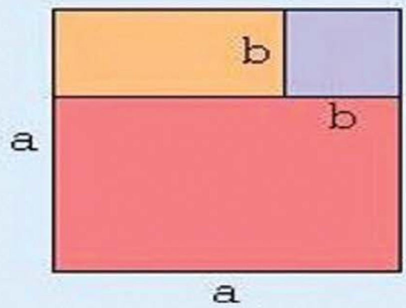
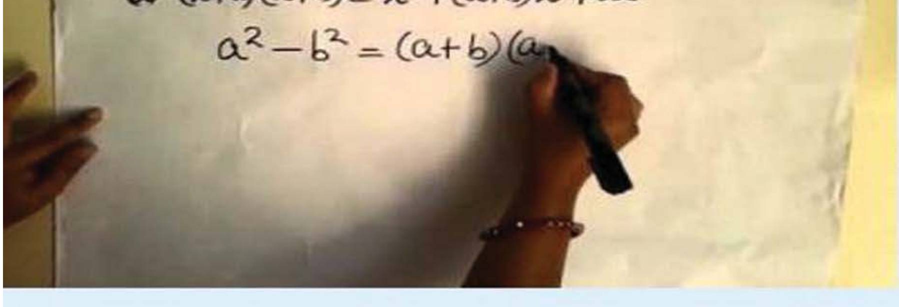
4

സർവസമവാക്യങ്ങൾ



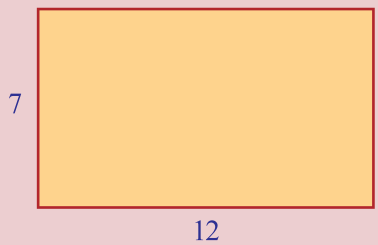




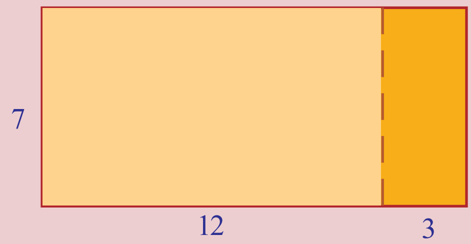


തുകകളുടെ ഗുണനം

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 12 സെന്റിമീറ്റർ, വീതി 7 സെന്റിമീറ്റർ. പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി ചതുരം അൽപം വലുതാക്കി.



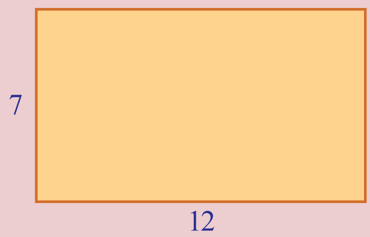
പരപ്പളവ് എത്ര കൂടി?

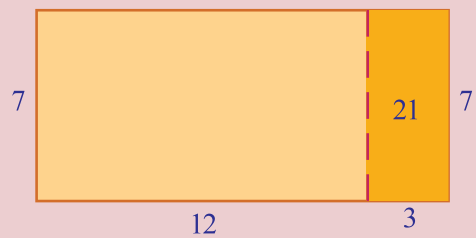
ആദ്യത്തെ പരപ്പളവ് 84. വലുതാക്കിയപ്പോൾ പരപ്പളവ് $15 \times 7 = 105$. കൂടിയത് $105 - 84 = 21$ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഗുണനഫലങ്ങൾ വെവ്വേറെ കണക്കാക്കാതെയും ഇതു ചെയ്യാം.

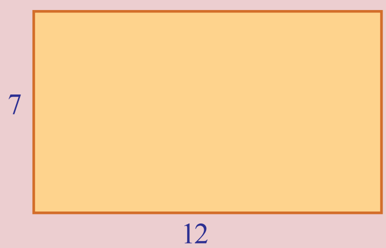
$$(12 + 3) \times 7 = (12 \times 7) + (3 \times 7) = (12 \times 7) + 21$$

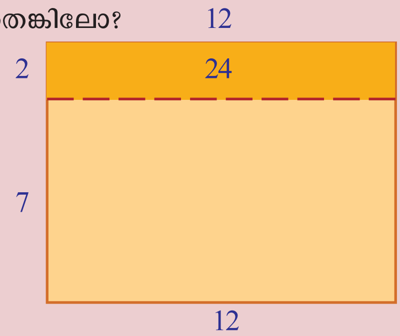
കൂടിയത് 21 ആണെന്ന് ഇതിൽ നിന്ന് കാണാമല്ലോ.





ഇനി ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ, നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, വീതിയാണ് 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയതെങ്കിലോ?





ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ, പരപ്പളവ് എത്ര കൂടിയെന്നു കണക്കാക്കാം:

$$12 \times (7 + 2) = (12 \times 7) + (12 \times 2) = (12 \times 7) + 24$$

അപ്പോൾ, കൂടിയത് 24.

സർവസമവാക്യം

$2x + 3 = 3x + 2$ എന്ന സമവാക്യം, x എന്ന സംഖ്യ 1 ആയി എടുത്താൽ മാത്രമാണ് ശരിയാകുക.

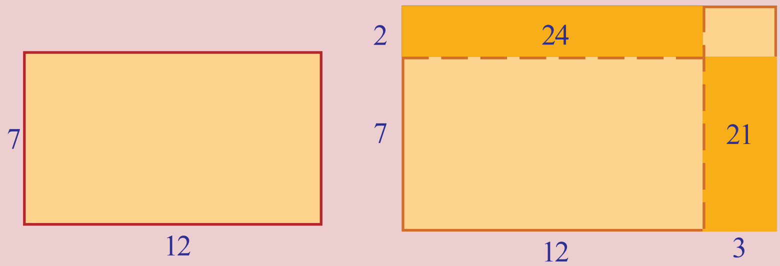
$x + (x + 1) = 2x + 1$

എന്ന സമവാക്യമോ?

x ആയി ഏത് സംഖ്യ എടുത്താലും ശരിയാകും.

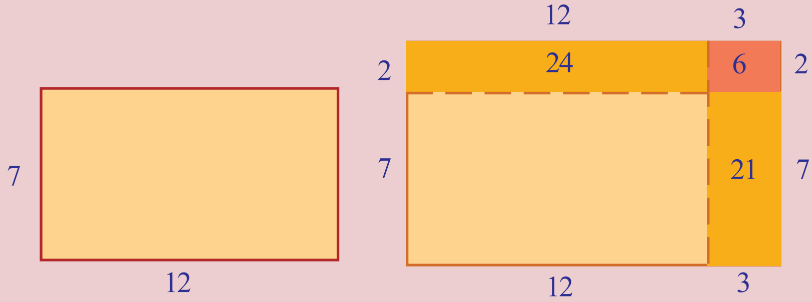
എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുന്ന സമവാകത്തെ സർവസമവാക്യം (identity) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇനി നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, വീതി 2 സെന്റിമീറ്ററും കൂട്ടിയാലോ?



നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, നീളം കൂട്ടിയപ്പോൾ പരപ്പളവ് കൂടിയത് 21; വീതി കൂട്ടിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് കൂടിയത് 24; ആകെ കൂടിയത് $21 + 24 = 45$ എന്നു കണക്കാക്കാം.

പക്ഷെ ചതുരമായില്ലല്ലോ. അതിന് മൂലയിൽ ഒരു ചെറുചതുരം കൂടി വേണം.



വലിയ ചതുരമാകുമ്പോൾ പരപ്പളവ് കൂടിയത് $21 + 24 + 6 = 51$

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 12×7 ഉം, ഇപ്പോഴത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 15×9 ഉം ആണല്ലോ. ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലത്തിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലത്തിലെത്താൻ എന്തെല്ലാമാണ് കൂട്ടിയത്?

$$15 \times 9 = (12 \times 7) + 24 + 21 + 6$$

കൂട്ടിയതെല്ലാം ഗുണനങ്ങളായി എഴുതിയാലോ?

$$15 \times 9 = (12 \times 7) + (12 \times 2) + (3 \times 7) + (3 \times 2)$$

അതായത്

$$(12 + 3) \times (7 + 2) = (12 \times 7) + (12 \times 2) + (3 \times 7) + (3 \times 2)$$

ഇവിടെ ചെയ്തത് എന്താണ്?

12×7 നെ 15×9 ആക്കാൻ,

- 15×9 നെ $(12 + 3) \times (7 + 2)$ എന്ന് പിരിച്ചെഴുതി.
- 12 കൊണ്ട് 7 നെയും 2 നെയും ഗുണിച്ചു;

- 3 കൊണ്ട് 7 നെയും 2 നെയും ഗുണിച്ചു.
- അതെല്ലാം കൂട്ടി.

ഇതുപോലെ 13×15 നെ 14×16 ആക്കാൻ എന്ത് കൂട്ടണമെന്നു നോക്കാം.

$$14 \times 16 = (13 + 1) \times (15 + 1)$$
$$= (13 \times 15) + (13 \times 1) + (1 \times 15) + (1 \times 1)$$

അതായത്, കൂട്ടേണ്ടത് $13 + 15 + 1 = 29$.

രണ്ടു കണക്കിലും ഒരു തുകയെ മറ്റൊരു തുകകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്. ഇതിനുള്ള പൊതുവായ രീതി എന്താണ്?

അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയെ തുക കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യയേയും രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, കൂട്ടണം.

ഇതുപയോഗിച്ച്, 26×74 ചെയ്തുനോക്കാം.

$$26 \times 74 = (20 + 6) \times (70 + 4)$$
$$= (20 \times 70) + (20 \times 4) + (6 \times 70) + (6 \times 4)$$
$$= 1400 + 80 + 420 + 24$$
$$= 1924$$

103×205 ആയാലോ?

$$103 \times 205 = (100 + 3)\ (200 + 5)$$
$$= (100 \times 200) + (100 \times 5) + (3 \times 200) + (3 \times 5)$$
$$= 20000 + 500 + 600 + 15$$
$$= 21115$$

ഇനി തുകകളുടെ ഗുണനത്തെക്കുറിച്ചു പറഞ്ഞ കാര്യം ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതാം.

ആദ്യത്തെ തുക $x + y$ എന്നും, രണ്ടാമത്തെ തുക $u + v$ എന്നും എടുക്കാം, ഇവയുടെഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, xu, xv, yu, yv ഇവയെല്ലാം കൂട്ടണം. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെയാകും.

x, y, u, v എന്ന ഏതു നാല് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x + y)\ (u + v) = xu + xv + yu + yv$$

ഗുണനക്രിയ

24×36 സാധാരണരീതിയിൽ കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

$$\begin{array}{r} 24\ \times \\ 36 \\ \hline 144 \\ 720 \\ \hline 864 \end{array}$$

ഇതിലെ ഓരോ വരിയിലെയും ഗുണനഫലങ്ങൾ കിട്ടിയത് എങ്ങനെയാണ്?

$$\begin{array}{rl} 24\ \times & \\ 36 & \\ \hline 144 & \rightarrow 6 \times (4+20) = 24 + 120 \\ 720 & \rightarrow 30 \times (4+20) = 120 + 600 \\ \hline 864 & \end{array}$$

ഒരു കണക്കു കൂടി:

$$6\frac{1}{2}\times 8\frac{1}{3} = \left(6+\frac{1}{2}\right)\times\left(8+\frac{1}{3}\right)$$

$$= (6\times 8)+\left(6\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times 8\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$= 48+2+4+\frac{1}{6}$$

$$= 54\frac{1}{6}$$

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം. കലണ്ടറിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചില രസകരമായ കാര്യങ്ങൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. (**മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ, **കലണ്ടർ കണക്ക്, മറ്റൊരു കലണ്ടർ കണക്ക്** എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ). ഇനി അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു കണക്ക് നോക്കാം.

കലണ്ടറിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മാസമെടുത്ത്, ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചു നോക്കൂ.

$$14\times 6 = 84$$

$$13\times 7 = 91$$

ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$91-84 = 7$$

ഇതുപോലെ സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന മറ്റു നാലു സംഖ്യകൾ എടുത്തു നോക്കൂ.

$$22\times 30 = 660$$

$$23\times 29 = 667$$

$$667-660 = 7$$

വ്യത്യാസം എപ്പോഴും 7 തന്നെയാകാൻ കാരണമെന്താണ്?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം:

സമചതുരത്തിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, നാലു സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

x	$x + 1$
$x + 7$	$x + 8$

(ഏഴാം ക്ലാസിൽ **മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **കലണ്ടർ കണക്ക്** എന്ന ഭാഗത്ത് ഇതു കണ്ടതാണല്ലോ.)

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചാലോ?

$$x\,(x + 8) = x^2 + 8x$$

$(x + 1)\ (x + 7)$ എന്ന ഗുണനത്തെ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം?

$$(x + 1)\ (x + 7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

രണ്ടു ഗുണനഫലങ്ങളും നോക്കൂ; വ്യത്യാസം 7 അല്ലേ?

ഇതിൽ x ആയി ഏതു അധിസംഖ്യയും എടുക്കാമല്ലോ; അതായത്, കലണ്ടറിന്റെ ഏതു ഭാഗത്തും ഇതു ശരിയാണ്.

വേറൊരു കണക്ക്. ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ഗുണനപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

കലണ്ടറിൽ ചെയ്തതുപോലെ സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

12	15
16	20

കോണോടുകോൺ ഗുണിക്കുന്നതിനു പകരം കൂട്ടി നോക്കൂ.

$$12 + 20 = 32$$

$$16 + 15 = 31$$

മറ്റേതെങ്കിലും നാല് സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ എടുത്താലോ?

35	40
42	48

$$35 + 48 = 83$$

$$40 + 42 = 82$$

എപ്പോഴും വ്യത്യാസം 1 തന്നെ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

പട്ടികയിൽ ഒരു വരിയിലെ സംഖ്യകളെല്ലാം ഒരേ സംഖ്യയുടെ ഗുണിതങ്ങളാണല്ലോ. പൊതുവെ ഒരു വരിയിലെ സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയാണ്;

$$x \quad 2x \quad 3x \quad 4x \quad 5x \quad 6x \quad 7x \quad 8x \quad 9x$$

അടുത്ത വരിയിലെ സംഖ്യകളും കൂടി നോക്കാം.

x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$	$7x$	$8x$	$9x$
$x+1$	$2(x+1)$	$3(x+1)$	$4(x+1)$	$5(x+1)$	$6(x+1)$	$7(x+1)$	$8(x+1)$	$9(x+1)$

ആദ്യമെഴുതിയ വരിയിലെ ഒരു സംഖ്യ yx എന്നെടുക്കാം. ഈ വരിയിലെ അടുത്ത സംഖ്യ x ന്റെ അടുത്ത ഗുണിതമാണല്ലോ; അതായത്, $(y + 1)\ x$.

അടുത്ത വരിയിൽ, yx നു ചുവട്ടിൽ വരുന്ന സംഖ്യ എന്താണ്?

അത് $x + 1$ ന്റെ ഗുണിതമാണ്; ഏതു ഗുണിതം?

ഈ വരിയിൽ അതിനടുത്ത സംഖ്യയോ?

അപ്പോൾ നാലു സംഖ്യകളുടെ സമചതുരത്തിന്റെ പൊതുവായ രൂപം ഇങ്ങനെയാണ്.

yx	$(y + 1)\ x$
$y\ (x + 1)$	$(y + 1)\ (x + 1)$

ഇവയിൽ

$$(y+1)\,x = yx + x$$
$$y\,(x+1) = yx + y$$

ഇവയുടെ തുക

$$(y+1)\,x + y\,(x+1) = 2yx + y + x$$

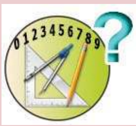
മറ്റു രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളിൽ yx നെ ഒന്നും ചെയ്യാനില്ല; $(y + 1)$ $(x + 1)$ എന്നതിനെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാലോ?

$$(y+1)\,(x+1) = yx + y + x + 1$$

രണ്ടാമത്തെ ജോടി ഗുണിതങ്ങളുടെ തുക

$$yx + (y+1)\,(x+1) = 2yx + y + x + 1$$

അപ്പോൾ കോണോടുകോണുള്ള ഒരു തുക $2yx + x + y$;മറ്റേ തുക $2yx + y + x + 1$; ഇവയുടെ വ്യത്യാസം 1



ഈ കണക്ക് ചെയ്യുന്നതിനിടയിൽ,

$(y + 1)\,(x + 1) = yx + y + x + 1$ എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി സാധാരണ ഭാഷയിൽ എങ്ങനെ പറയാം? ഇതുപയോഗിച്ച് ചില ഗുണനങ്ങൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യാൻ കഴിയുമോ?

ഈ തത്വത്തിൽ, 1 നു പകരം 2 എടുത്താലോ?

(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് പോലെ സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

i) കലണ്ടറിൽ ചെയ്തതുപോലെ നാലു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരം അടയാളപ്പെടുത്തി, കോണോടുകോൺ ഗുണിച്ച് വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഏതു സമചതുരത്തിലെയും നാലു സംഖ്യകളെടുത്താൽ ഒരേ വ്യത്യാസമാണോ കിട്ടുന്നത്?

ii) ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

iii) നാലു സംഖ്യകളുള്ള സമചതുരത്തിനു പകരം, ഒൻപതു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നാലു മൂലകളിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക.

8	9	10
13	14	15
18	19	20

കോണോടുകോൺ ഗുണനഫലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എന്താണ്? ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) നേരത്തെ കണ്ട ഗുണനപ്പട്ടികയിൽ, നാല് സംഖ്യകളുള്ള സമചതുരത്തിനു പകരം, ഒൻപത് സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നാലു മൂലകളിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക:

6	8	10
9	12	15
12	16	20

i) കോണോടു കോൺ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം എന്താണ്?

ii) ഇങ്ങനെയുള്ള സമചതുരങ്ങളിലെല്ലാം വ്യത്യാസം ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

iii) പതിനാറ് സംഖ്യകളുടെ സമചതുരമെടുത്താലോ?

(3) ചുവടെയുള്ള ക്രിയകൾ നോക്കുക:

$$1 \times 4 = (2 \times 3) - 2$$
$$2 \times 5 = (3 \times 4) - 2$$
$$3 \times 6 = (4 \times 5) - 2$$
$$4 \times 7 = (5 \times 6) - 2$$

i) ഈ ക്രമത്തിൽ അടുത്ത രണ്ടു വരികളിലെ ക്രിയകൾ എഴുതുക.

ii) അടുത്തടുത്ത നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും, നടുവിലെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

iii) ഈ പൊതുതത്വം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതി, കാരണം വിശദീകരിക്കുക.

(4) 46×28 എന്ന ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു രീതി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$4 \times 2 = 8$	8×100	800
$(4 \times 8) + (6 \times 2) = 44$	44×10	440
6×8		48
46×28		1288

i) മറ്റു ചില രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഈ രീതി പരിശോധിക്കുക.

ii) ഇത് ശരിയാകാനുള്ള കാരണം, ബീജഗണിത രീതിയിൽ വിശദീകരിക്കുക. (രണ്ടക്ക സംഖ്യകളെയെല്ലാം $10m + n$ എന്ന ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതാമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ **സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടത് ഓർക്കുക)

തുകയുടെ വർഗം

51^2 എത്രയാണ്?

ഗുണിച്ചു നോക്കാതെ കണക്കാക്കാൻ ഒരു മാർഗം ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (**വർഗവും വർഗമൂലവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **അടുത്ത വർഗം** എന്ന ഭാഗം)

അതനുസരിച്ച് 50^2 നോട് 50 ഉം, പിന്നെ 51 ഉം കൂട്ടിയാൽ മതി. അതായത്,

$$51^2 = 50^2 + 50 + 51 = 2601$$

ഇതു ശരിയാകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

അതറിയാൻ, 51^2 നെ പിരിച്ചെഴുതാം.

$51^2 = 51 \times 51 = (50 + 1)(50 + 1)$

ഇതിനെ നാലു ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാമല്ലോ.

$$\begin{aligned}(50 + 1)(50 + 1) &= (50 \times 50) + (50 \times 1) + (1 \times 50) + (1 \times 1)\\ &= 2500 + 50 + 50 + 1\\ &= 2500 + 50 + 51\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ ഏത് വർഗത്തെയും പിരിച്ചെഴുതാം.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

x^2 ൽ നിന്ന് $(x + 1)^2$ കിട്ടാൻ, x^2 നോട് x ഉം, അടുത്ത സംഖ്യയായ $x + 1$ ഉം കൂട്ടണം. ഇത് എന്തുകൊണ്ട് ശരിയാകുന്നു എന്നറിയാൻ നേരത്തെ കണ്ട ഗുണനതത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 &= (x+1)(x+1) \\
&= (x\times x) + (x\times 1) + (1\times x) + (1\times 1) \\
&= x^2 + x + (x+1)
\end{aligned}
$$

$x + (x + 1) = 2x + 1$ ആണല്ലോ; അപ്പോൾ

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$61^2 = (60+1)^2 = 60^2 + (2\times 60) + 1 = 3600 + 120 + 1 = 3721$$

എന്നു കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം.

ഇനി 75^2 കണ്ടുപിടിക്കണമെന്ന് കരുതുക. ഇതിനെ $(74 + 1)^2$ എന്നെഴുതി ചെയ്യാൻ തുടങ്ങിയാൽ 74^2 കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടിവരും.

$(70 + 5)^2$ എന്നെഴുതിയാലോ?

ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം.

$$
\begin{aligned}
75^2 &= (70+5)(70+5) \\
&= 70^2 + (70\times 5) + (5\times 70) + 5^2 \\
&= 4900 + 350 + 350 + 25 \\
&= 5625
\end{aligned}
$$

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗവും, വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും തുല്യമാണെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടു.

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗവും, വർഗങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമാണോ?

103^2 ആയാലോ?

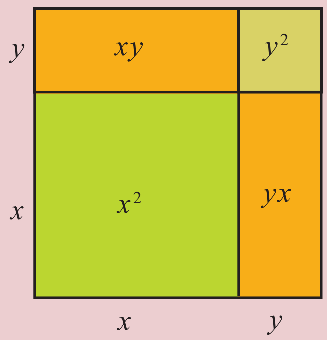
$$
\begin{aligned}
103^2 &= (100+3)(100+3) \\
&= 10000 + 300 + 300 + 9 \\
&= 10609
\end{aligned}
$$

ഇതിലെല്ലാം കണ്ട കാര്യം പൊതുവായി എഴുതാം.

രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം, സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിന്റെയും തുകയാണ്.

ഉദാഹരണമായി

$$\left(10\frac{1}{2}\right)^2 = \left(10+\frac{1}{2}\right)^2 = 10^2 + \left(2\times 10\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 + 10 + \frac{1}{4} = 110\frac{1}{4}$$



ഇത് ബീജഗണിതഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\mathbf{(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy}$$

(1) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 52 (ii) 105 (iii) $20\frac{1}{2}$ (iv) 10.2

പൂർണവർഗങ്ങളുടെ ചില ക്രമങ്ങൾ എങ്ങനെ കിട്ടുന്നുവെന്ന് ഈ തത്വമുപയോഗിച്ചു മനസിലാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ക്രിയകൾ നോക്കൂ:

$$\begin{aligned} 1 \times 3 &= 3 = 2^2 - 1 \\ 2 \times 4 &= 8 = 3^2 - 1 \\ 3 \times 5 &= 15 = 4^2 - 1 \end{aligned}$$

ഈ ക്രമത്തിലെ അടുത്ത കുറേ ക്രിയകൾ എഴുതിനോക്കൂ. ഇതുപോലെ തുടരുന്നുണ്ടോ?

ഒന്നിടവിട്ട ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലം, വിട്ട സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന് ഒന്നു കുറവായിരിക്കുമോ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം. ഒന്നിടവിട്ട സംഖ്യകളെ x, $x + 2$ എന്നെടുക്കാം. അവയുടെ ഗുണനഫലം.

$$x(x + 2) = x^2 + 2x$$

ഇവിടെ വിട്ട സംഖ്യ $x + 1$. അതിന്റെ വർഗത്തിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചാലോ?

$$(x + 1)^2 - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 1 = x^2 + 2x$$

അപ്പോൾ

$$x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$$

ഇതിൽ x ആയി 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ, മുകളിലെഴുതിയ ക്രമം കിട്ടുമല്ലോ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

$$\begin{aligned} 3 &= 2^2 - 1^2 \\ 5 &= 3^2 - 2^2 \\ 7 &= 4^2 - 3^2 \end{aligned}$$

ഒന്നിനെക്കാൾ വലിയ ഒറ്റസംഖ്യകളെയെല്ലാം ഇങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗവ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

ഒന്നിനെക്കാൾ വലിയ ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയേയും $2x + 1$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. (**സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **പൊതുരൂപങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഇതിനെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എങ്ങനെ എഴുതാം?

x^2 എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് $(x + 1)^2$ എന്ന സംഖ്യയിലെത്താൻ, $2x + 1$ എന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ കൂട്ടേണ്ടത്.

അപ്പോൾ $2x + 1$ കിട്ടാൻ $(x + 1)^2$ ൽ നിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ മതി. അതായത്

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2$$

ഇതിൽ x ആയി 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോൾ, $2x + 1$ ആയി ഒന്നിനെക്കാൾ വലിയ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും കിട്ടും; x, $x + 1$ ആയി അടുത്തടുത്ത എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളും കിട്ടും.

ഇങ്ങനെ, ഒന്നിനെക്കാൾ വലിയ ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും, അടുത്തടുത്ത പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം എന്നു കാണാം.

വർഗങ്ങളുടെ പൊതുവായ ചില സ്വഭാവങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാനും തുകയുടെ വർഗതത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങളും ഒറ്റസംഖ്യകൾ തന്നെ.

ഇതെന്തുകൊണ്ടാണ്?

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം $(2x + 1)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ.

$$(2x + 1)^2 = (2x)^2 + (2 \times 2x \times 1) + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

ഇതിൽ

$$4x^2 + 4x = 4(x^2 + x) = 4x (x + 1)$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ

$$(2x + 1)^2 = 4x (x + 1) + 1$$

ഇതിൽ $4x (x + 1)$ എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതിനാൽ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്; അതിനോട് 1 കൂട്ടിയത് ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കിട്ടി.

$4x (x + 1) + 1$ നെ 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 ആണല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന് ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനെയും 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 ആണെന്നു കാണാം.

അല്പം കൂടി ആലോചിക്കാം.

$x, x + 1$ ഇവ അടുത്തടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യകളായതിനാൽ അവയിലൊന്ന് ഇരട്ട സംഖ്യയാണ്. അതേതായാലും, $x \ (x + 1)$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്; അതിനാൽ $4x (x + 1)$ എന്ന സംഖ്യ 8 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

അപ്പോൾ ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനെയും 8 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടും എന്നും കാണാം.

76 ന്റെ കളി

$$76^2 = 5776$$
$$176^2 = 30976$$
$$276^2 = 76176$$

76 ൽ അവസാനിക്കുന്ന വേറെയും സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടെത്തി നോക്കൂ.

എന്തു പ്രത്യേകതയാണ് കാണുന്നത്? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

76 ൽ അവസാനിക്കുന്ന ഏത് സംഖ്യയേയും $100x + 76$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം. $(100x + 76)^2 = 10000x^2 + 15200x + 5776$.

x ഏത് സംഖ്യയായാലും $10000x^2$ ന്റെയും $15200x$ ന്റെയും തുകയിൽ ഒന്നിന്റെയും പത്തിന്റെയും സ്ഥാനത്ത് പൂജ്യമായിരിക്കുമല്ലോ. ഇവയുടെ തുകയോട് 5776 കൂട്ടുമ്പോൾ അവസാനത്തെ രണ്ടക്കം 76 ആയിരിക്കും.

76 ന് പകരം മറ്റേതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യകൾക്ക് ഈ പ്രത്യേകതയുണ്ടോ?

(1) $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പൊതുവായ ഏതെങ്കിലും രീതിയുണ്ടോ? അത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) 37^2 കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു രീതിയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

$3^2 = 9$	9×100	900
$2 \times (3 \times 7) = 42$	42×10	420
7^2		49
37^2		1369

i) മറ്റു ചില രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഈ രീതി പരീക്ഷിക്കുക

ii) ഇത് ശരിയാകാനുള്ള കാരണം, ബീജഗണിതരീതിയിൽ വിശദീകരിക്കുക.

iii) 5 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കാനുള്ള എളുപ്പവഴി കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) ഈ ക്രിയകൾ നോക്കൂ:

$$1^2 + (4 \times 2) = 3^2$$
$$2^2 + (4 \times 3) = 4^2$$
$$3^2 + (4 \times 4) = 5^2$$

i) തുടർന്നുള്ള രണ്ട് ക്രിയകൾ കൂടി എഴുതുക

ii) ഇതിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്? ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(4) 3 ന്റെ ഗുണിതമല്ലാത്ത ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയുടെയും വർഗത്തെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 ആണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(5) 3 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങൾ അവസാനിക്കുന്നത് 9 ൽ ആയിരിക്കും എന്ന് സമർഥിക്കുക.

5 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകളായാലോ?

4 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകളോ?

വ്യത്യാസഗുണനം

ചില ഗുണനക്രിയകൾ തുകകളായി പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗം കണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$302 \times 205 = (300 + 2) \times (200 + 5) = 60000 + 1500 + 400 + 10 = 61910$$

ഇനി 298×195 കണക്കാക്കണമെങ്കിലോ?

$$298 \times 195 = (300 - 2) \times (200 - 5)$$

എന്നു പിരിച്ചെഴുതാം. ഇത് ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ നാല് ഗുണനഫലങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

ആദ്യം

$$298 \times 195 = (300 - 2) \times 195$$

എന്നു മാത്രം എഴുതാം. ഇതു പിരിച്ചെഴുതാമല്ലോ:

$$(300 - 2) \times 195 = (300 \times 195) - (2 \times 195)$$

ഇനി $195 = 200 - 5$ എന്നെഴുതി ഈ രണ്ട് ഗുണനങ്ങളെയും പിരിച്ചെഴുതാം:

$$300 \times 195 = 300 \times (200 - 5) = 60000 - 1500 = 58500$$

$$2 \times 195 = 2 \times (200 - 5) = 400 - 10 = 390$$

ഇതെല്ലാം ചേർത്തു വായിച്ചാൽ

$$\begin{aligned} 298 \times 195 &= (300 - 2) \times 195 \\ &= (300 \times 195) - (2 \times 195) \\ &= 58500 - 390 \end{aligned}$$

58500 ൽ നിന്ന് 390 കുറയ്ക്കാനുള്ള എളുപ്പവഴി, 400 കുറച്ച് 10 കൂട്ടലാണ്.

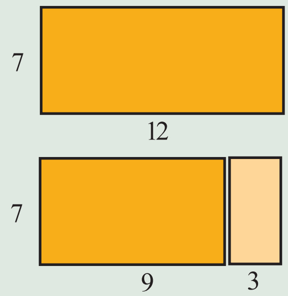
അതായത്,

$$58500 - 390 = 58500 - 400 + 10 = 58\,110$$

(ഏഴാംക്ലാസിലെ **മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **കുറയ്ക്കുന്നത് കുറഞ്ഞാൽ** എന്ന ഭാഗം)

നീളം കുറച്ചാൽ

12 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 7 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ച് ചെറിയ ചതുരമാക്കിയാലോ?



പരപ്പളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു? ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയ എന്താണ്.

$$(12 - 3) \times 7 = (12 \times 7) - (3 \times 7)$$

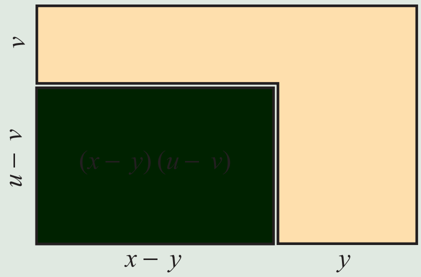
ഇതുപോലെ 397 നെ 199 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നത് ചെയ്തു നോക്കാം.

$$\begin{aligned} 397 \times 199 &= (400 - 3) \times 199 \\ &= (400 \times 199) - (3 \times 199) \\ 400 \times 199 &= 400 \times (200 - 1) \\ &= (400 \times 200) - (400 \times 1) \\ &= 80000 - 400 \\ &= 79600 \\ 3 \times 199 &= 3 \times (200 - 1) \\ &= 600 - 3 \\ &= 597 \end{aligned}$$

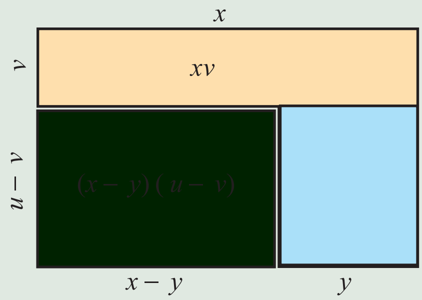
എല്ലാം ചേർത്തു വായിച്ചാലോ?

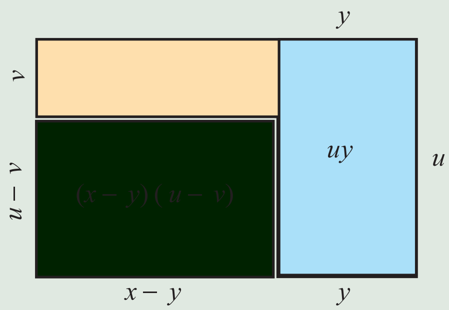
വ്യത്യാസഗുണനം ജ്യാമിതിയിലൂടെ

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും കുറച്ച് ചതുരം ചെറുതാക്കിയ ചിത്രം നോക്കൂ.

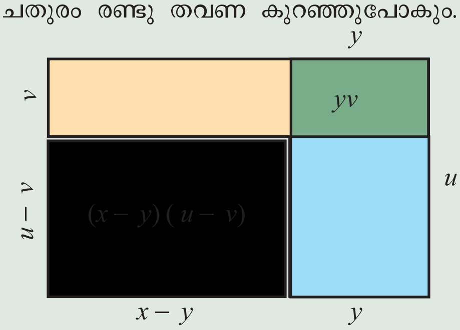


ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.





മുകളിലും വലതുവശത്തുമുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങളും കുറച്ചാൽ, മുകളിലെ മൂലയിലുള്ള ചതുരം രണ്ടു തവണ കുറഞ്ഞുപോകും.



അത് ശരിയാക്കാൻ, ഈ ചതുരം ഒരു തവണ കൂട്ടണം. അതായത്,

$$(x-y)(u-v) = xu - xv - yu + yv$$

$$397 \times 199 = 79600 - 597$$

597 കുറയ്ക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം 600 കുറച്ച് 3 കൂട്ടുന്നതാണ്.

അപ്പോൾ $397 \times 199 = 79600 - 600 + 3 = 79003$

ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയകളെല്ലാം ഒന്നിച്ച് എഴുതി നോക്കാം.

$$397 \times 199 = 80000 - 400 - 600 + 3$$

അല്പം കൂടി വിസ്തരിച്ച് എഴുതിയാൽ,

$$397 \times 199 = (400 \times 200) - (400 \times 1) - (3 \times 200) + (3 \times 1)$$

ഇതുപോലെ

$$\begin{aligned} 398 \times 197 &= (400 - 2) \times (200 - 3) \\ &= (400 \times 200) - (400 \times 3) - (2 \times 200) + (2 \times 3) \\ &= 80000 - 1200 - 400 + 6 \\ &= 78400 + 6 \\ &= 78406 \end{aligned}$$

ഇതൊരു പൊതുതത്വമായി സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാൻ വിഷമമാണ്. ബീജഗണിതത്തിലായാലോ?

$x > y$, $u > v$ ആയ ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x-y)(u-v) = xu - xv - yu + yv$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം കണക്കാക്കാനുള്ള പൊതുവായ രീതിയും കണ്ടു പിടിക്കാം:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= (x-y) \times (x-y) \\ &= (x \times x) - (x \times y) - (y \times x) + (y \times y) \\ &= x^2 - xy - yx + y^2 \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 \end{aligned}$$

ഇതിൽ ആദ്യം x^2 എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് xy എന്ന സംഖ്യ കുറയ്ക്കണം; തുടർന്ന് ഒരിക്കൽക്കൂടി അതുതന്നെ കുറയ്ക്കണം. ഇങ്ങനെ ഒന്നിനു ശേഷം മറ്റൊന്നായി കുറയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, $xy + xy = 2xy$ എന്ന തുക കുറച്ചാൽ മതിയല്ലോ. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിൽ, **കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും** എന്ന ഭാഗം).

അതായത്,

$$x^2 - xy - xy = x^2 - (xy + xy) = x^2 - 2xy$$

ഇനി നേരത്തെ നിർത്തിയ സ്ഥലത്തു നിന്ന് തുടരാം:

$$(x - y)^2 = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

ഇതു ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതിവയ്ക്കാം:

$x > y$ ആയ ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

ഇക്കാര്യം സാധാരണഭാഷയിലും പറയാം:

രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് ഗുണനഫലത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ് കുറച്ചതാണ്.

ഉദാഹരണമായി

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - (2 \times 100 \times 1) + 1^2$$

$$= 10000 - 200 + 1 = 9800 + 1 = 9801$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ നോക്കൂ:

$$2(2^2 + 1^2) = 10 = 3^2 + 1^2$$

$$2(3^2 + 2^2) = 26 = 5^2 + 1^2$$

$$2(5^2 + 1^2) = 52 = 6^2 + 4^2$$

$$2(4^2 + 6^2) = 104 = 10^2 + 2^2$$

കുറെ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ജോടിയെടുത്ത് വർഗങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക; അതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനെ ഒരു ജോടി പൂർണവർഗങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?

തുടങ്ങുന്ന ജോടിയും അവസാനമെഴുതുന്ന ജോടിയും തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

ആദ്യമെടുത്ത ജോടിയുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കൂ.

ഇതിന്റെ കാരണമെന്താണ്?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. തുടങ്ങുന്ന ജോടി x, y എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ തുകയുടെ വർഗം

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ജോടിയിലെ വലിയ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാലോ? x^2, y^2 രണ്ടു തവണ വരും; $2xy$ കൂട്ടുകയും, കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തതു കൊണ്ട് ഇല്ലാതാകും. അതായത്

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2\,(x^2 + y^2)$$

ഇതു തിരിച്ച് $2\,(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$ എന്നെഴുതിയാൽ, തുടങ്ങിയ കണക്കുകൾക്ക് കാരണമായി.

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും വർഗം കൂട്ടിയാൽ, സംഖ്യകളുടെ തന്നെ വർഗങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്ന് കണ്ടു.

തുകയുടെ വർഗത്തിൽ നിന്ന്, വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം കുറച്ചാലോ?

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2 - 2xy)$$

അതായത്, $x^2 + y^2$, $2xy$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ തുകയിൽ നിന്ന്, അവയുടെ വ്യത്യാസം കുറയ്ക്കണം. അത് $2xy$ എന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിൽ, **തുകയും വ്യത്യാസവും** എന്ന ഭാഗം). അതായത്,

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2 \times 2xy = 4xy$$

ഇത് തിരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

ഉദാഹരണമായി

$$8 = 4 \times 2 \times 1 = 3^2 - 1^2$$
$$12 = 4 \times 3 \times 1 = 4^2 - 2^2$$
$$16 = 4 \times 4 \times 1 = 5^2 - 3^2$$
$$20 = 4 \times 5 \times 1 = 6^2 - 4^2$$

ഇങ്ങനെ 8 മുതലുള്ള 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെയെല്ലാം രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം.

പൈഥാഗറസ് ത്രയങ്ങൾ

മൂന്ന് എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തേതിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായാൽ, ഈ മൂന്ന് സംഖ്യകളെ ഒരു പൈഥാഗറസ് ത്രയം എന്നാണ് പറയുക എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ

ഉദാഹരണമായി

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ആയതിനാൽ 3, 4, 5 എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകൾ ഒരു പൈഥാഗറസ് ത്രയമാണ്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. രണ്ടായിരത്തിലെ ബാബിലോണിയയിൽ നിന്നുള്ള ഒരു കളിമൺപലകയിൽ ഇത്തരം ത്രയങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടിക തന്നെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഇത്തരം എല്ലാ ത്രയങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. m, n എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുക്കുക. ചുവടെ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളതു പോലെ x, y, z എന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

ഇപ്പോൾ

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ആണെന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= z^2 \end{aligned}$$

ഏതാണ്ട് ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽത്തന്നെ ഗ്രീസിലെ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്ക് ഈ രീതി അറിയാമായിരുന്നു.

(1) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടു പിടിക്കുക.

i) 49 ii) 98 iii) $7\frac{3}{4}$ iv) 9.25

(2) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \qquad 2 = 2 \times 1^2$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2} \qquad 8 = 2 \times 2^2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2} \qquad 18 = 2 \times 3^2$$

ഇവയിലെ പൊതുതത്വം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(3) ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി രണ്ടുതരത്തിൽ എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി

$$24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$$

$$32 = 9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2$$

$$40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$$

i) 24 മുതലുള്ള 8 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെയെല്ലാം ഇങ്ങനെ രണ്ടു തരത്തിൽ എഴുതുന്ന രീതി, ബീജഗണിതത്തിലൂടെ വിശദീകരിക്കുക.

ii) 48 മുതലുള്ള 16 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെ എത്ര തരത്തിൽ പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം?

തുകയും വ്യത്യാസവും

സംഖ്യകളെ തുകകളായും, വ്യത്യാസങ്ങളായും പിരിച്ചെഴുതി ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുവല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$203 \times 302 = (200 + 3) \times (300 + 2) = 60000 + 400 + 900 + 6 = 61306$$

$$197 \times 298 = (200 - 3) \times (300 - 2) = 60000 - 400 - 900 + 6 = 58706$$

എന്നെല്ലാം കണക്കുകൂട്ടാം.

203×298 നെ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതുന്നതാണ് സൗകര്യം?

$$203 \times 298 = (200 + 3) \times (300 - 2)$$

ഇതു കണക്കാക്കാൻ മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം 203 നെ മാത്രം പിരിച്ചെഴുതാം.

$$203 \times 298 = (200 + 3) \times 298 = (200 \times 298) + (3 \times 298)$$

ഇനി 298 നെ പിരിച്ചെഴുതി, ഈ രണ്ടു ഗുണനങ്ങളും വെവ്വേറെ ചെയ്യാം.

$$200 \times 298 = 200 \times (300 - 2) = 60000 - 400 = 59600$$

$$3 \times 298 = 3 \times (300 - 2) = 900 - 6 = 894$$

എല്ലാ ക്രിയകളും ചേർത്തെഴുതിയാൽ

$$\begin{aligned} 203 \times 298 &= (200 + 3) \times 298 \\ &= (200 \times 298) + (3 \times 298) \\ &= 59600 + 894 \\ &= 60494 \end{aligned}$$

പൊതുവായ രീതി മനസ്സിലാക്കാൻ ചെയ്ത ക്രിയകളെല്ലാം ഒന്നിച്ചെഴുതാം:

$$203 \times 298 = 60000 - 400 + 900 - 6$$

വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$(200 + 3) \times (300 - 2) = (200 \times 300) - (200 \times 2) + (3 \times 300) - (3 \times 2)$$

ഇതുപോലെ

$$\begin{aligned} 105 \times 197 &= (100 + 5) \times (200 - 3) \\ &= (100 \times 200) - (100 \times 3) + (5 \times 200) - (5 \times 3) \\ &= 20000 - 300 + 1000 - 15 \\ &= 20000 + 700 - 15 \\ &= 20685 \end{aligned}$$

ഈ കണക്കുകൂട്ടലിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

x, y, u, v എന്ന അധിസംഖ്യകളിൽ $u > v$ ആണെങ്കിൽ

$$(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും തമ്മിൽ ഗുണിക്കാനുള്ള പൊതുവായ രീതിയും കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$\begin{aligned} (x + y)(x - y) &= (x \times x) - (x \times y) + (y \times x) - (y \times y) \\ &= x^2 - xy + yx - y^2 \\ &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$x > y$ ആയ ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി

$$205 \times 195 = (200+5)\times(200-5) = 200^2 - 5^2 = 40000 - 25 = 39975$$

$$9\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = \left(9+\frac{1}{2}\right)\times\left(9-\frac{1}{2}\right) = 9^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 81 - \left(\frac{1}{4}\right) = 80\ \frac{3}{4}$$

ഈ തത്വം തിരിച്ചും ഉപയോഗിക്കാം.

രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, അവയുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി

$$168^2 - 162^2 = (168+162)\times(168-162) = 330 \times 6 = 1980$$

ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. അങ്ങനെ എഴുതാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 45 നോക്കുക. $x^2 - y^2 = 45$ ആകുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ x, y കണ്ടുപിടിക്കണം. ഇത്

$$45 = (x+y)(x-y)$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ $(x+y)$, $(x-y)$ ഇവ 45 ന്റെ ഘടകങ്ങളാകണം.

45 നെ അതിന്റെ രണ്ട് ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനമായി പലതരത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ.

$$45 = 45 \times 1$$

$$45 = 15 \times 3$$

$$45 = 9 \times 5$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം. ഇതിൽ 45, 1 എന്നീ ഘടകങ്ങൾ എടുത്ത്

$$x + y = 45$$

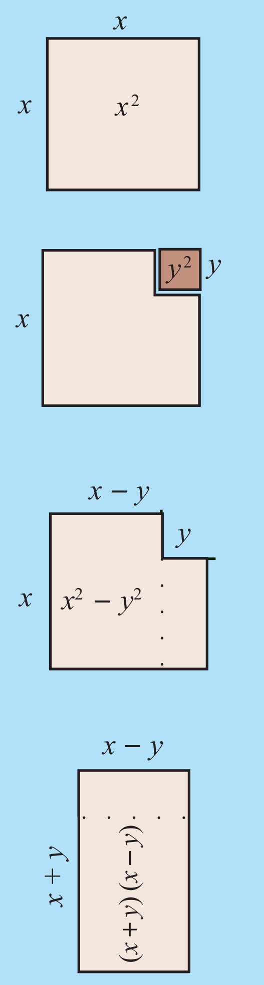
$$x - y = 1$$

എന്നെഴുതി നോക്കാം. തുകയും വ്യത്യാസവും അറിഞ്ഞാൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗം ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ തുകയും വ്യത്യാസവും എന്ന ഭാഗം).

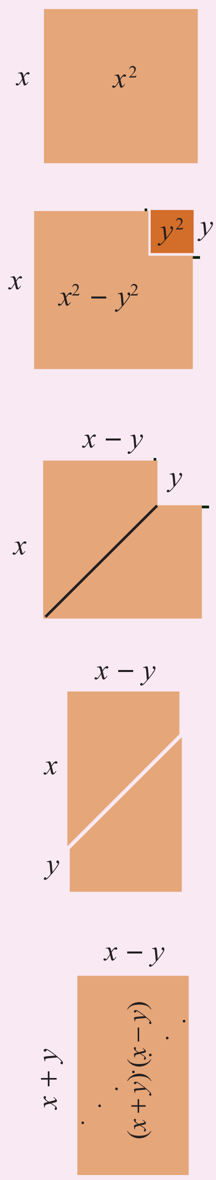
അപ്പോൾ 45, 1 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് x; വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയാണ് y

$$x = 23 \qquad y = 22$$

വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം



മറ്റൊരു രീതി



അപ്പോൾ

$$45 = 23^2 - 22^2$$

ഇതുപോലെ $45 = 15 \times 3$ എന്ന് എടുത്തുനോക്കാം. x ഉം y യും ഇല്ലാതെ ആലോചിച്ചു കൂടെ?

15, 3 ഇവയുടെ തുകയുടെ പകുതി 9; വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതി 6.

അപ്പോൾ

$$45 = 9^2 - 6^2$$

ഇനി $45 = 9 \times 5$ എടുത്താലോ?

$$45 = 7^2 - 2^2$$

ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും ഇങ്ങനെ രണ്ടു വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

ഉദാഹരണമായി 10 എടുക്കാം. $10 = 10 \times 1$.

ഘടകങ്ങളുടെ തുകയുടെ പകുതിയെടുത്താൽ $5\frac{1}{2}$; വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയെടുത്താൽ $4\frac{1}{2}$; അപ്പോൾ

$$10 = \left(5\frac{1}{2}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$$

എന്നു വേണമെങ്കിൽ എഴുതാം; പക്ഷേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളല്ലല്ലോ; അതായത്, പൂർണവർഗങ്ങളല്ല.

$10 = 5 \times 2$ എന്നെടുത്താലോ?

ഏതുതരം എണ്ണൽസംഖ്യകളെയാണ് രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയാത്തത്?

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതുന്നത് ചിലപ്പോൾ കണക്കുകൂട്ടൽ എളുപ്പമാക്കും.

ഉദാഹരണമായി 26.5×23.5 നോക്കുക. ഇതിനെ രണ്ടു വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

തുക 26.5 ഉം, വ്യത്യാസം 23.5 ഉം ആകുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരേ?

അതിന് 26.5, 23.5 എന്നിവയുടെ തുകയുടെ പകുതിയും വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയും എടുത്താൽ മതി.

അതായത് 25 ഉം 1.5 ഉം. അപ്പോൾ

$$26.5 = 25 + 1.5 \qquad 23.5 = 25 - 1.5$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$26.5 \times 23.5 = (25 + 1.5)(25 - 1.5) = 25^2 - 1.5^2 = 625 - 2.25 = 622.75$

(1) ചുവടെയുള്ള ക്രിയകൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യുക.

i) a) $68^2 - 32^2$ b) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ c) $3.6^2 - 1.4^2$

ii) a) 201×199 b) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{2}{3}$ c) 10.7×9.3

(2) ഈ ക്രിയകൾ നോക്കൂ

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

ഇവയിലെ പൊതുവായ രീതി ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരക്കുക.

(3) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ഗുണനത്തിലും ഏതിലാണ് വലിയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതെന്ന് ഗുണിച്ചു നോക്കാതെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 25×75, 26×74

ii) 76×24, 74×26

iv) 10.6×9.4, 10.4×9.6

(4) ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വ്യത്യാസങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $(125 \times 75) - (126 \times 74)$

ii) $(124 \times 76) - (126 \times 74)$

iii) $(224 \times 176) - (226 \times 174)$

iv) $(10.3 \times 9.7) - (10.7 \times 9.3)$

v) $(11.3 \times 10.7) - (11.7 \times 10.3)$

ഒരേ തുകയുള്ള കുറെ ജോടി സംഖ്യകളെടുത്ത് ഗുണനഫലം കണക്കാക്കുക. വ്യത്യാസം മാറുന്നതനുസരിച്ച്, ഗുണനഫലം എങ്ങനെയാണ് മാറുന്നത്? ഏറ്റവും വലിയ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള എളുപ്പവഴി എന്താണ്?

(1) കലണ്ടറിൽ ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരുന്ന നാല് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

4	5
11	12

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യാജോടികളുടെ വർഗങ്ങൾ കൂട്ടുക; ഈ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക;

$4^2 + 12^2 = 160 \qquad 11^2 + 5^2 = 146 \qquad 160 - 146 = 14$

i) ഇതുപോലെ മറ്റു നാല് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യുക.

ii) എല്ലാ സമചതുരത്തിലും വ്യത്യാസം 14 കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം, ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) കലണ്ടറിൽ ഒൻപത് സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നാല് മൂലകളിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക:

3	4	5
10	11	12
17	18	19

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യാജോടികളുടെ വർഗങ്ങൾ കൂട്ടുക; ഈ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക:

$3^2 + 19^2 = 370 \qquad 17^2 + 5^2 = 314 \qquad 370 - 314 = 56$

i) ഒൻപത് സംഖ്യകളുള്ള മറ്റു സമചതുരങ്ങളെടുത്ത് ഇതുപോലെ ചെയ്യുക.

(ii) എല്ലാ സമചതുരത്തിലും വ്യത്യാസം 56 കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം, ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക. (സമചതുരത്തിന്റെ നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം - ഏഴാം ക്ലാസിലെ **മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിൽ, **മറ്റൊരു കലണ്ടർ കണക്ക്** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക)

(3) കലണ്ടറിൽ ഒൻപത് സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നാല് മൂലകളിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക.

3	4	5
10	11	12
17	18	19

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഗുണിക്കുക; ഈ ഗുണനഫലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക:

$3 \times 19 = 57$ $\quad$ $17 \times 5 = 85$ $\quad$ $85 - 57 = 28$

i) ഒൻപത് സംഖ്യകളുള്ള മറ്റു സമചതുരങ്ങളെടുത്ത് ഇതുപോലെ ചെയ്യുക.

ii) എല്ലാ സമചതുരത്തിലും വ്യത്യാസം 28 കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം, ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക. (നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം)

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയെ തുക കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം കാണുന്ന രീതി ജ്യാമിതീയമായും ബീജഗണിതരീതിയിലും വ്യഖ്യാനിക്കാൻ കഴിയുന്നു.			
• രണ്ടു അധിസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം കാണുന്ന രീതി ജ്യാമിതീയമായും ബീജഗണിതരീതിയിലും വ്യഖ്യാനിക്കാൻ കഴിയുന്നു.			
• വർഗസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വ്യഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകത വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരേ തുകയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ഏറ്റവും കൂടിയ ഗുണനഫലമുള്ള സംഖ്യാജോടികളെ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• സംഖ്യാബന്ധങ്ങളെ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് പൊതുവായി പറയുന്നു.			