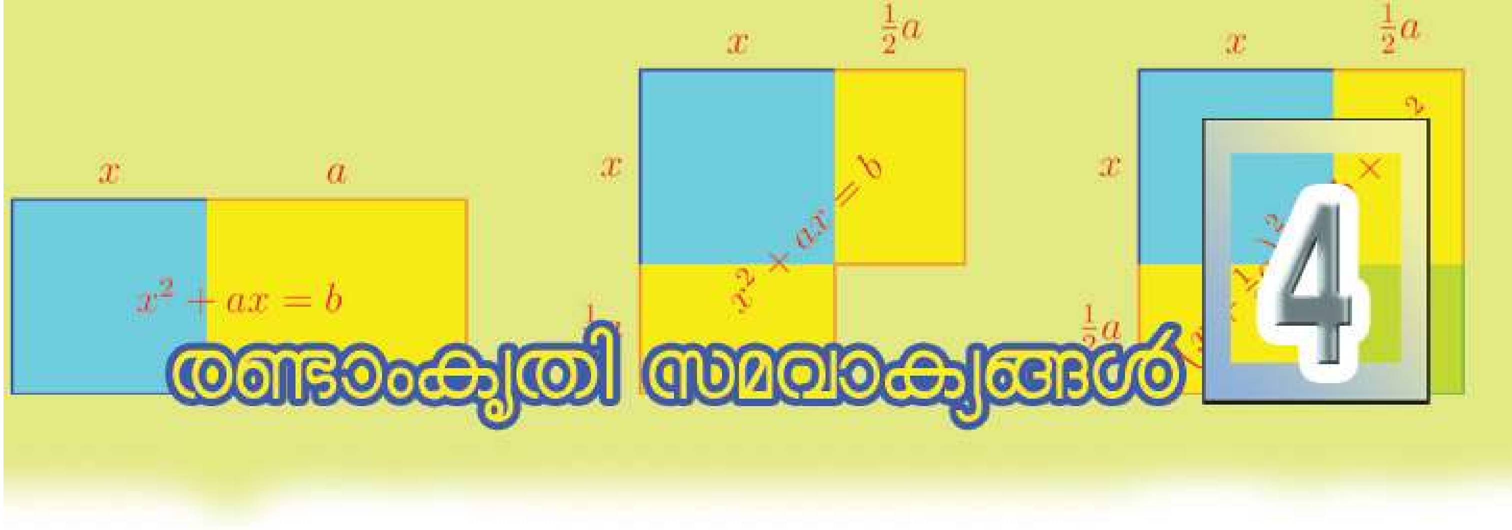


4 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

വർഗപ്രശ്നങ്ങൾ

ഒരു കണക്കിൽനിന്നു തുടങ്ങാം:

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 മീറ്റർ ആയി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $36 \div 4 = 9$ മീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $9 - 1 = 8$ മീറ്റർ എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചോദ്യം ഇങ്ങനെയായാലോ?

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു?

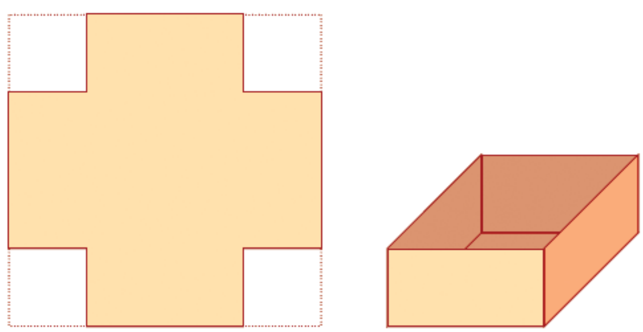
പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

6 മീറ്റർ, അല്ലേ?

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 1 = 5$ മീറ്റർ

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

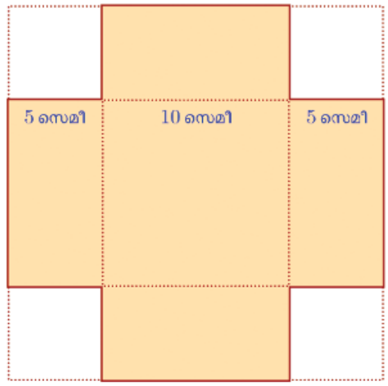
സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള കട്ടിക്കടലാസിന്റെ നാലു മൂലകളിൽ നിന്നും ഓരോ ചെറിയ സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റി, മേലോട്ടു മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കണം. പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററും വേണം.



ആദ്യം എടുക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ്, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണല്ലോ. ഈ കണക്കിൽ, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററാണ്. അതായത്, 500 ഘനസെന്റിമീറ്റർ. ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്റർ.

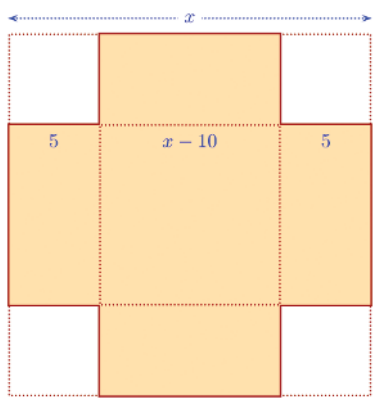
അപ്പോൾ പെട്ടിയുടെ പാദപരപ്പളവ് $500 \div 5 = 100$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. പാദം ഒരു സമചതുരമായതിനാൽ (കാരണം?) അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്റർ.



ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിൽ നിന്നും $2 \times 5 = 10$ സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ചാണ് ഈ സമചതുരം കിട്ടിയത്.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശം $10 + 10 = 20$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ പുറകോട്ട് ആലോചിക്കുന്നതിനുപകരം, ആദ്യം നേരേ ആലോചിച്ച് പ്രശ്നം ബീജഗണിത രൂപത്തിലാക്കാം. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, പെട്ടിയുടെ പാദം $(x - 10)$ സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരമാണെന്നു കാണാം.



പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉള്ളളവ് $5\,(x - 10)^2$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയാകും:

$5\,(x - 10)^2 = 500$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

തുടർന്ന് ഇങ്ങനെ പുറകോട്ടാലോചിക്കാം:

- $5(x - 10)^2 = 500$ ആകണമെങ്കിൽ, $(x - 10)^2 = 500 \div 5 = 100$ ആകണം.
- $(x - 10)^2 = 100$ ആകണമെങ്കിൽ, $x - 10 = \sqrt{100} = 10$ ആകണം.
- $x - 10 = 10$ ആകണമെങ്കിൽ, $x = 10 + 10 = 20$ ആകണം.

?

ഈ കണക്കുകൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയോ അല്ലാതെയോ ചെയ്യുക.

(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ കുറച്ച് ചെറുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 49 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര മീറ്ററായിരുന്നു?

(2) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(3) 2, 5, 8, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ എത്രാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗമാണ് 2500?

n എന്ന പേരിൽ ഒരു integer സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് (3n - 1)^2 എന്ന input നിർദേശം കൊടുക്കാം. n മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് 2, 5, 8, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ കിട്ടും.

(4) വാർഷികമായി കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു പദ്ധതിയിൽ 2000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. രണ്ടു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 2205 രൂപയായി. പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്?

വർഗത്തികവ്

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

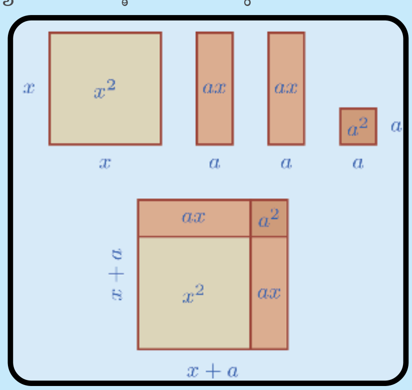
പച്ച നിറത്തിലൊരു സമചതുരവും, അതേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങളും, നില നിറത്തിലൊരു ചെറുസമചതുരവും ചേർത്തു വച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടു മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങളുടെ വീതിയും, നീല സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവുമെല്ലാം 1 മീറ്ററാണ്; ചിത്രത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

ജ്യാമിതീയ വർഗം

x, a ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

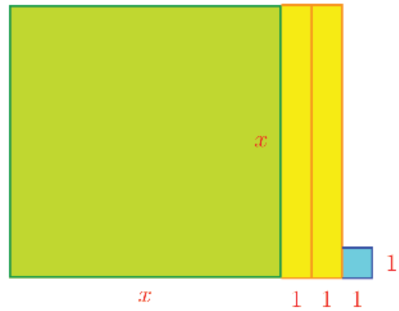
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. x, a അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഇക്കാര്യത്തിന് ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം കൊടുക്കാം:



പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം.

നേരിട്ടാലോചിച്ചു കണക്കാക്കാൻ വിഷമമാണ്, അല്ലേ?



ബീജഗണിതം പരീക്ഷിക്കാം. പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം:

ആകെ പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം:

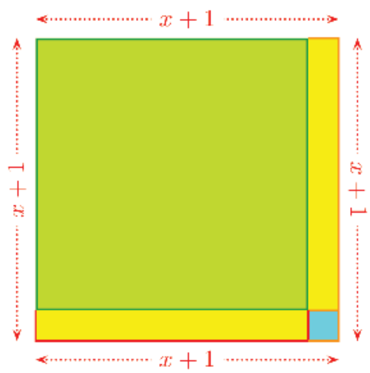
$x^2 + 2x + 1 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

$x^2 + 2x + 1$ എന്ന രൂപം പരിചയമുണ്ടോ?

എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



ചിത്രത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ മാറ്റിയടുക്കിയും ഇതു കാണാം.

അപ്പോൾ പ്രശ്നം മാറ്റിയെഴുതാം:

$(x + 1)^2 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇനി, $x + 1 = 10$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = 9$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത്, പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 9 മീറ്ററാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

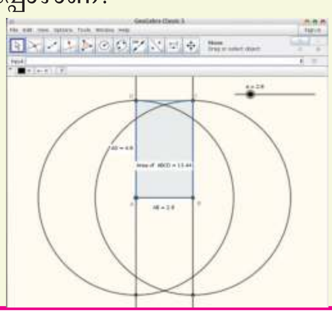
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ആദ്യം പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 2$ മീറ്റർ;

പരപ്പളവ് $x(x + 2) = x^2 + 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

71E5V4

വലിയവശം ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 കൂടുതലായ ചതുരങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരക്കാം. ഇതിനായി min = 0 ആയ a എന്ന സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. നീളം a ആയി ഒരു വര AB വരച്ചശേഷം അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി AB യ്ക്കു ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായി ആരം a + 2 വരത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഓരോ വൃത്തവും ലംബങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ABCD എന്ന ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇനി വരകളും വട്ടങ്ങളും മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 224 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?



ഇനി ചതുരപ്രശ്നം, ബീജഗണിതപ്രശ്നമാക്കാം:

$x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

ആദ്യത്തെ പ്രശ്നം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ; അതിൽ $x^2 + 2x + 1$ നെ $(x + 1)^2$ എന്നു മാറ്റിയെഴുതിയാണ് മുന്നോട്ട് പോയത്. ഈ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 2x$ മാത്രമേയുള്ളൂ.

1 കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ തുടരാം:

- $x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$
- അതായത് $(x + 1)^2 = 225$
- $(x + 1)^2 = 225$ ആണെങ്കിൽ $x + 1 = \sqrt{225} = 15$
- $x + 1 = 15$ ആണെങ്കിൽ $x = 14$

അങ്ങനെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശം 14 മീറ്റർ എന്നു കിട്ടി. അപ്പോൾ വലിയ വശം $14 + 2 = 16$ മീറ്റർ.

ഈ ചോദ്യം തന്നെ അൽപമൊന്നു മാറ്റി ഇങ്ങനെ ആക്കിയാലോ?

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ മാറും:

$x^2 + 20x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇവിടെയും 1 കൂട്ടിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ സംഖ്യ $225 = 15^2$ ആകും; പക്ഷേ, ഇടതുവശം $x^2 + 20x + 1$ എന്നാണാകുന്നത്. ഇതിനെ $(x + a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ? $x^2 + 20x$ നെ വർഗരൂപത്തിലാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

a ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

എന്നറിയാം.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ, പൊതുവായ സമവാക്യത്തിലെ $2ax$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $20x$ ആണ്.

അപ്പോൾ, a ആയി 10 എടുത്തു നോക്കിയാലോ?

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x = 224$ ആണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച് 100 കൂട്ടി തുടരാം.

വ്യത്യസ്തമാർഗം

$x(x + 20) = 224$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $x + 20$ നെ $(x + 10) + 10$ എന്നും, x നെ $(x + 10) - 10$ എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ

$$x(x + 20) = \left((x + 10) - 10\right)\left((x + 10) + 10\right)$$
$$= (x + 10)^2 - 10^2$$

തുടങ്ങിയ സമവാക്യം

$$(x + 10)^2 - 100 = 224$$

എന്നാകും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x + 10)^2 = 324$$

എന്നെഴുതി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x = 3000$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 20x &= 224 \\
x^2 + 20x + 100 &= 324 \\
(x + 10)^2 &= 324 \\
x + 10 &= \sqrt{324} = 18 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

അങ്ങനെ ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 മീറ്ററും, 28 മീറ്ററുമാണെന്നു കണക്കാക്കാം.

സമചതുരം വീണ്ടും!

20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള പലപല ചതുരങ്ങളിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ് എന്നറിയാമല്ലോ.

ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം. ഇത്തരത്തിലൊരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്,

$$p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2 = -(x^2 - 10x)$$

ഇത്തരം ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ്, ഈ ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. വർഗം തികച്ച്,

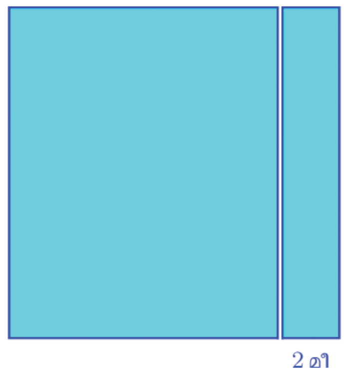
$$p(x) = -\left((x-5)^2 - 25\right) = 25 - (x-5)^2$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $(x - 5)^2$ ന്യൂനസംഖ്യയാകില്ല; അതിനാൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യ 25 നേക്കാൾ കൂടുതലാകില്ല. $x = 5$ എന്നെടുത്താൽ, $p(x) = 25$ എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

ഇത് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്താലോ? ചുറ്റളവ് 20 ആയ ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ min = 0, max = 10 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം a, 10 − a ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

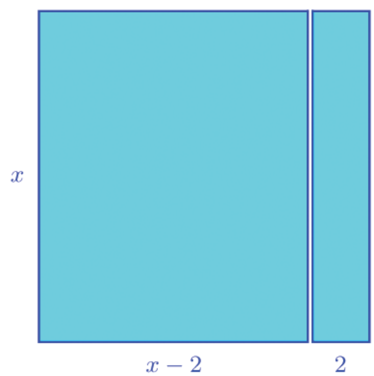
വേറൊരു ചതുരക്കണക്ക്:

ഒരു സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ വീതിയുള്ള ഒരു കഷണം മുറിച്ചുമാറ്റുന്നു;



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 99 ചതുരശ്രമീറ്റർ. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, $(x - 2)$ മീറ്റർ എന്നാകും:



അപ്പോൾ മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$x(x - 2) = x^2 - 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും:

$x^2 - 2x = 99$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

$x^2 + 2x$ നെപ്പോലെ $x^2 - 2x$ നെയും വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ?

എട്ടാം ക്ലാസിലെ മറ്റൊരു സമവാക്യം ഓർത്തുനോക്കൂ:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

ഇനി പ്രശ്നത്തിലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

$$x^2 - 2x = 99$$

$$x^2 - 2x + 1 = 100$$

$$(x - 1)^2 = 100$$

$$x - 1 = 10$$

$$x = 11$$

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 11 മീറ്റർ.

ഈ കണക്കുനോക്കൂ:

> ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ തുക 50 മീറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $(50 - x)$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ് $x(50 - x) = 50x - x^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

> $50x - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇടതു ഭാഗം $x^2 - 50x$ ആയിരുന്നുവെങ്കിൽ, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ തുടരാമായിരുന്നു. അതിന് സമവാക്യം അൽപം മാറ്റിയെഴുതാം. $50x$ എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ 525 കിട്ടണമെങ്കിൽ, തിരിച്ചു കുറച്ചാൽ അതിന്റെ ന്യൂനമായ -525 കിട്ടണമല്ലോ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാക്കാം.

> $x^2 - 50x = -525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇനി $x^2 - 50x$ നോട് ഒരു സംഖ്യകൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കണം. കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ്?

$$(x - 25)^2 = x^2 - 50x + 625$$

ഇനി നമ്മുടെ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ പരിഹരിക്കാം:

$$x^2 - 50x = -525$$

$$x^2 - 50x + 625 = -525 + 625 = 100$$

കൂട്ടിയും കുറച്ചും

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക 50 മീറ്റർ ആയതിനാൽ നീളം $(25 + x)$ മീറ്റർ എന്നും വീതി $(25 - x)$ മീറ്റർ എന്നും എടുക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ പരപ്പളവ് $(25 - x)(25 + x) = 625 - x^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇനി x ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം

$625 - x^2 = 525$

$x^2 = 100$

$x = 10$

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ

$25 - 10 = 15$ മീറ്റർ,

$25 + 10 = 35$ മീറ്റർ

$$(x-25)^2 = 100$$
$$x-25 = 10$$
$$x = 35$$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 മീറ്ററും 15 മീറ്ററും.

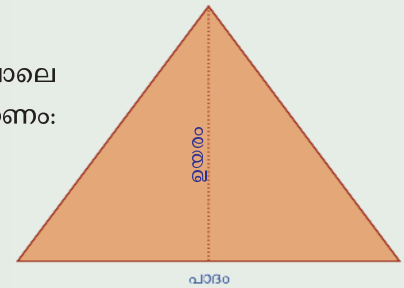
(1) അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൂടെ 1 കൂട്ടിയാൽ 289 കിട്ടും. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

(2) 6 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൂടെ 9 കൂട്ടിയാൽ 729 കിട്ടും. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

(3) 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലുള്ള ആദ്യത്തെ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് 140 കിട്ടുക?

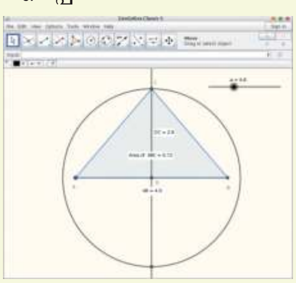
(4) 9, 11, 13, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയും 16 ഉം കൂട്ടിയപ്പോൾ 256 കിട്ടി. എത്ര പദങ്ങളാണ് കൂട്ടിയത്?

(5) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം:



ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര മീറ്ററുമാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

a എന്ന പേരിൽ min = 10 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി, നീളം a ആയ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും ലംബസമഭാജിയും അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം a – 2 ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തം ലംബസമഭാജിയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണം പൂർത്തിയാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 12 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?



(6) 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ചുവരിൽവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട് ഭിത്തിയിൽ നിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കമ്പിന്റെ താഴത്തെ അറ്റം ചുവരിൽനിന്ന് അല്പം മുന്നോട്ടു നീക്കിയപ്പോൾ, മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ താഴോട്ട് നീങ്ങി. എത്ര ദൂരമാണ് മുന്നോട്ട് നീക്കിയത്?

രണ്ട് ഉത്തരം

വേഗവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ചില കാര്യങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു നേർവരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാൻ, വേഗത്തെ സമയംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി. ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതസമവാക്യമായി എഴുതാം. ഒരു നേർവരയിലൂടെ u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു t സെക്കന്റുകൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$s = ut$$

ഇനി വേഗം മാറുന്നുണ്ടെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി, നേരെ മേൽപ്പോട്ടെറിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഓരോ സെക്കന്റിലും സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവും കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ദൂരം മാറുന്നതിനുമൊരു കണക്കുണ്ട്. മേൽപ്പോട്ടെറിഞ്ഞ വേഗം u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും, t സെക്കന്റിൽ തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നും എഴുതിയാൽ

$$s = ut - 4.9t^2$$

ഇനി നേരെ മേലോട്ടെറിയുന്നതിനു പകരം, ചരിഞ്ഞ ഒരു പ്രതലത്തിലൂടെ മേലോട്ട് ഉരുട്ടുകയാണു ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, വേഗം കുറയുന്നതിന്റെ നിരക്ക് 9.8 നേക്കാൾ ചെറിയസംഖ്യ ആയിരിക്കും. u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയുന്നുവെന്നു കരുതുക. t സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$s = ut - \frac{1}{2}at^2$$

ഉദാഹരണമായി, ചരിച്ചുവച്ച ഒരു പലകയിലൂടെ 16 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മേലോട്ടുരുട്ടുന്ന ഒരു പന്തിന്റെ വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുന്നുവെന്നു കരുതുക. t സെക്കന്റിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$s = 16t - \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 = 16t - 4t^2$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഏതു സമയത്തും തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ് എന്നു കണക്കാക്കാം:

സമയം :	1	2	3
അകലം :	12	16	12

രണ്ടാമത്തെ സെക്കന്റിൽ അകലം കൂടി, മൂന്നാം സെക്കന്റിൽ കുറഞ്ഞു. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണ്?

16 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയുന്നതിനാൽ, 2 സെക്കന്റ്

71N1HR

ആകുമ്പോൾ വേഗം 0 ആകും; തുടർന്നുള്ള സമയം പന്ത് കീഴോട്ടുരുളാൻ തുടങ്ങും. നാലാം സെക്കന്റിൽ തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം കണക്കാക്കി നോക്കൂ:

സമയം	:	1	2	3	4
അകലം	:	12	16	12	0

അതായത്, നാലാം സെക്കന്റിൽ പന്തു തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുതന്നെ തിരിച്ചെത്തും.

ഈ പട്ടികയനുസരിച്ച്, ഓരോ സമയത്തെയും അകലം കണ്ടുപിടിക്കാം. മറിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത അകലത്തെത്താനുള്ള സമയം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഉദാഹരണമായി,

ഏതു സമയത്താണ്, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് പന്ത്, 15 മീറ്റർ അകലെയാകുന്നത്?

അത് കണക്കാക്കാൻ $16t - 4t^2 = 15$ ആകുന്ന t കണ്ടുപിടിക്കണം. മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ ഈ സമവാക്യം മാറ്റിയെഴുതാം:

$$4t^2 - 16t = -15$$

ഇതിൽ t^2 ന്റെ ഗുണകം 4 ആണല്ലോ. ആദ്യം അത് 1 ആക്കണം (ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം അങ്ങനെ ആയിരുന്നല്ലോ). അതിന് 4 കൊണ്ടു ഹരിക്കണം.

$$t^2 - 4t = \frac{-15}{4}$$

ഇനി, മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ, t യുടെ ഗുണകത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം 4 കൂട്ടി, വർഗരൂപത്തിലാക്കി, തുടരാം:

min = 0, increment = 0.01 ആകത്തക്കവിധം t എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. input ൽ s = 16t - 4t^2 എന്നു നൽകുക. t മാറുന്നതനുസരിച്ച് ആദ്യം s കൂടുന്നതായും പിന്നീട് കുറയുന്നതായും കാണാം. s ഏറ്റവും കൂടുന്നത് എപ്പോഴാണ്? s എന്ന സംഖ്യ 15 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 4 &= 4 - \frac{15}{4} = \frac{1}{4} \\ (t-2)^2 &= \frac{1}{4} \\ t - 2 &= \frac{1}{2} \\ t &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

അപ്പോൾ $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 15 മീറ്റർ അകലെയായിരിക്കും.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട്. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, 2 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞാൽ പന്ത് താഴോട്ടുരുളാൻ തുടങ്ങും. അപ്പോൾ $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റ് എന്നത്, മടക്കയാത്രയിൽ 15 മീറ്റർ അകലെയെത്തുന്ന സമയമാണ്. മേലോട്ടുള്ള ആദ്യയാത്രയിലും ഈ സ്ഥാനത്തുകൂടി കടന്നുപോകേണ്ടേ? അതെപ്പോഴാണ്?

2 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞ് $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റുകൂടി ആകുമ്പോഴാണ് മടക്കയാത്രയിൽ 15 മീറ്റർ അകലെയാകുന്നത്. $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റ് മുമ്പോ? $1\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ പന്ത് മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽത്തന്നെയാണല്ലോ. ഈ സമയത്ത്, തുടങ്ങിയ സ്ഥലത്തുനിന്ന് എത്ര അകലെയായിരിക്കും?

സമയ-ദൂര സമവാക്യത്തിൽ $t = 1\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ ഈ ദൂരം കിട്ടും:

$$\left(16 \times 1\frac{1}{2}\right) - 4 \times \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 24 - \left(4 \times 2\frac{1}{4}\right) = 24 - 9 = 15$$

അതായത്, $1\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 15 മീറ്റർ അകലെയെത്തും; നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ താഴോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ ഇതേ അകലത്തിലേക്ക് മടങ്ങിയെത്തും.

$16t - 4t^2 = 15$ ആകാൻ t എന്താകണമെന്നു കണക്കാക്കിയപ്പോൾ $t = 1\frac{1}{2}$ എന്ന രണ്ടാമത്തെ ഉത്തരം കിട്ടാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

$t = 2\frac{1}{2}$ എന്ന ഉത്തരം കിട്ടിയ വഴികൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കാം. അതിലൊരിടത്ത് $(t-2)^2 = \frac{1}{4}$ ആകണമെങ്കിൽ $t - 2 = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്തല്ലോ. ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം $\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ, സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ എന്ന് മാത്രമെടുത്തത് ശരിയാണോ? വർഗം $\frac{1}{4}$ ആയ സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ മാത്രമാണോ?

$-\frac{1}{2}$ ന്റെ വർഗം എന്താണ്?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം $\frac{1}{4}$ എന്നു കിട്ടിയാൽ, സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{1}{2}$ എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ.

അതിനാൽ, നമ്മുടെ കണക്കിൽ,

$$(t-2)^2 = \frac{1}{4}$$

എന്നതിൽനിന്ന്

$$t - 2 = \frac{1}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } t - 2 = -\frac{1}{2}$$

എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ. ഇതിൽ $t - 2 = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യം കണ്ടു

പിടിച്ചതുപോലെ $t = 2\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും. $t - 2 = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമതു കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ $t = 1\frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം ഇങ്ങനെ ന്യൂനവർഗമൂലവും എടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ മറ്റൊരുത്തരം കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നോ?

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത ഒരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതൽ നീളവും, പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x + 1)^2 = 225$ എന്നു കിട്ടുമെന്നു കണ്ടു. തുടർന്ന് $x + 1 = 15$ എന്നെടുത്ത്, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 14 മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ബീജഗണിതം മാത്രം നോക്കിയാൽ $x + 1 = -15$ എന്നും ആകാം;

അതായത്, $x = -16$

പക്ഷേ ഈ കണക്കിൽ x ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ അതൊരു അധിസംഖ്യയാണ്. അപ്പോൾ $x = -16$ എന്ന ഉത്തരം ചതുരക്കണക്കിനു പറ്റിയതല്ല.

നേരത്തെ ചെയ്ത മറ്റൊരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x - 25)^2 = 100$ എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽനിന്ന്, $x - 25 = 10$ എന്നെടുത്ത്, ഒരു വശം 35 മീറ്റർ, മറ്റെ വശം $50 - 35 = 15$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ന്യൂനവർഗമൂലം എടുത്താലോ? $x - 25 = -10$ എന്നും, ഇതിൽ നിന്ന് $x = 15$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 15 മീറ്റർ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - 15 = 35$ മീറ്റർ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളിൽ ഏതെടുത്താലും ഒരേ ചതുരം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതസമവാക്യമാക്കി, ഗണിതപരമായി മാത്രം ആലോചിക്കുമ്പോൾ, ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഉത്തരങ്ങൾ കിട്ടിയെന്നിരിക്കും. ഇവയിൽ ചിലതു മാത്രമോ, എല്ലാം തന്നെയോ, തുടങ്ങിയ പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തിന് യോജിച്ചതല്ലെന്നും വരാം.

അപ്പോൾ സാധാരണയായി ബീജഗണിതരീതിയിൽ എല്ലാ ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, തുടർന്ന് ഇവയിൽ നിന്ന് സന്ദർഭത്തിന് യോജിച്ചവ മാത്രം എടുക്കുകയുമാണ് പതിവ്.

(1) ഒരു സംഖ്യയും, അതിനോടു 2 കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചപ്പോൾ 168 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(2) തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) 99, 97, 95, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 900 കിട്ടുന്നത്?

(4) 28 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി വളച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം.

(i) വികർണത്തിന്റെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായി ചതുരമുണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

(ii) വികർണത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററായി ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

(iii) വികർണത്തിന്റെ നീളം 14 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ആയി പല സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നു. ഉദാഹരണമായി,

$$p(1) = 4 + 24 + 11 = 39$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(24 \times \frac{1}{2}\right) + 11 = 1 + 12 + 11 = 24$$

$$p(-1) = 4 - 24 + 11 = -9$$

മറിച്ച്, $p(x)$ ആയി ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കിട്ടാൻ x ആയി എന്തു സംഖ്യ എടുക്കണം എന്നും ചോദിക്കാം. ഉദാഹരണമായി,

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ x ആയി ഏത് സംഖ്യ എടുക്കണം?

ഈ ചോദ്യം അൽപംകൂടി ലഘൂകരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$4x^2 + 24x = -11$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

ഇത്തരം കണക്കുകൾ ധാരാളം ചെയ്തു കഴിഞ്ഞല്ലോ.

അൽപം ചരിത്രം

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയ്ക്ക് ഏറെ പഴക്കമുണ്ട്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1500 ൽ തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർ, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഈ രീതി പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതു കാണാം.

എന്നാൽ ഇന്നത്തെപ്പോലെ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്ന രീതിയൊന്നും അന്നില്ലായിരുന്നു. (ഈ രീതിയ്ക്ക് ഏറിയാൽ അഞ്ഞൂറു വർഷത്തെ പഴക്കമേയുള്ളൂ.) പ്രശ്നങ്ങളും, അവയുടെ പരിഹാരമാർഗങ്ങളുമെല്ലാം സാധാരണ ഭാഷയിലാണ് പറഞ്ഞിരുന്നത്. ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങളാകുമ്പോൾ, പരിഹാരമാർഗങ്ങളും ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽത്തന്നെ ആയിരുന്നു.

അതായത്, ബീജഗണിതരീതികളുടെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായി നാം ഇന്നവതരിപ്പിക്കുന്ന പലതും, ചരിത്രപരമായി നോക്കിയാൽ, ഈ ബീജഗണിതരീതികളുടെ ആദിരൂപമാണ്.

x കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്റെ ഘട്ടങ്ങൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുക: $x^2 + 6x = -\frac{11}{4}$

x ന്റെ ഗുണകത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടുക

: $x^2 + 6x + 9 = -\frac{11}{4} + 9$

വർഗമായി എഴുതുക : $(x+3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

വർഗമൂലമെടുക്കുക : $x + 3 = \frac{5}{2}$

അല്ലെങ്കിൽ

$x + 3 = -\frac{5}{2}$

x കണക്കാക്കുക : $x = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

അല്ലെങ്കിൽ

$x = -\frac{5}{2} - 3 = -5\frac{1}{2}$

അതായത്, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ $x = -\frac{1}{2}$ എന്നോ $x = -5\frac{1}{2}$ എന്നോ എടുക്കണം.

ഇനി $p(x) = 1$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ?

$p(x) = 1$ എന്നതിനെ $p(x) - 1 = 0$ എന്നെഴുതാമല്ലോ; അതായത്,

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$4x^2 + 24x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $q(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ, ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും.

$q(x) = 4x^2 + 24x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $q(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ x ആയി എന്തു സംഖ്യ എടുക്കണം?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ മുന്നോട്ടു പോകാം:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 24x + 10 &= 0 \\ 4x^2 + 24x &= -10 \\ x^2 + 6x &= -\frac{5}{2} \\ x^2 + 6x + 9 &= 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} \\ (x+3)^2 &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$x + 3 = \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x = -3 + \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$-3 + \sqrt{\frac{13}{2}}$ അല്ലെങ്കിൽ $-3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നതിനെ ചുരുക്കി $-3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. അതായത് $p(x) = 1$ എന്നു കിട്ടാൻ $x = -3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നതിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ എടുക്കണം.

ഇനി ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് 0 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പൊതുവായ മാർഗം ബീജഗണിതരീതിയിൽ എഴുതി നോക്കാം. ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിനെയും

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ $p(x) = 0$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

- $ax^2 + bx + c = 0$ എന്നതിനെ മാറ്റിയെഴുതുക

$$ax^2 + bx = -c$$

- x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുക

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- x ന്റെ ഗുണകമായ $\frac{b}{a}$ യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടുക

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- വർഗമായി എഴുതുക

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- വർഗമൂലമെടുക്കുക

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- x കണക്കാക്കുക

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

വികർണക്കണക്ക്

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ മാത്രമല്ല, വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കാണാനും, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി പണ്ടേ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം.

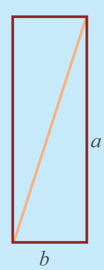
ഉദാഹരണമായി വീതി കുറഞ്ഞ, ഉയരം കൂടിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി, പുരാതന ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്, ഇങ്ങനെയാണ്.

വീതിയുടെ വർഗത്തിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, അതിന്റെ പകുതി ഉയരത്തോട് കൂട്ടുക.

ഇത്, ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

എന്നാകും.



ഇതിന്റെ യുക്തിയും ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

അതായത്

$p(x) = ax^2 + bx + c$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

എന്നെടുക്കണം

ഇതൽപം ചുരുക്കിയെഴുതാം:

$ax^2 + bx + c = 0$ ആകണമെങ്കിൽ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ആകണം

നേരത്തെ ചെയ്ത പല കണക്കുകളിലും, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പല ഘട്ടങ്ങളെ ഒരുമിച്ചെടുത്ത് ഒറ്റവരിയിൽ ഉത്തരമെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി **രണ്ട് ഉത്തരം** എന്ന ഭാഗത്തിലെ ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 15 മീറ്റർ അകലെയെത്തുന്ന സമയമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. t സെക്കന്റിൽ അകലം $16t - 4t^2$ ആണെന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ $16t - 4t^2 = 15$ ആകാൻ t എതു സംഖ്യയായിരിക്കണം എന്നതാണ് പ്രശ്നം. അതായത്,

$4t^2 - 16t + 15 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ t എന്തായിരിക്കണം?

ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെഴുതിയ പൊതുതത്വത്തിൽ a, b, c ആയി $4, -16, 15$ എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ മതി:

$$t = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 4 \times 15}}{2 \times 4}$$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8}$$

അതായത്,

$$t = \frac{16 \pm 4}{8} = \frac{5}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{3}{2}$$

ഇതിൽ നിന്ന്, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ $t = 2\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $1\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കുക:

30 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ ഒരു കല്ല് നേരെ മുകളിലോട്ടെറിയുന്നു. t സെക്കന്റിൽ നിലത്തുനിന്നുള്ള ഉയരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, s, t ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$s = 30t - 4.9t^2$$

എന്നാണ്. ഏതു സമയത്താണ് കല്ല് നിലത്തുനിന്ന് 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലാകുന്നത്?

ഇവിടെ $30t - 4.9t^2 = 20$ ആകുന്ന t ആണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, പ്രശ്നം ഇതാണ്:

$4.9t^2 - 30t + 20 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ t എന്തായിരിക്കണം?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഒറ്റവരിയിൽ

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \times 4.9 \times 20}}{9.8}$$

എന്നെഴുതാം. ഇതു കണക്കാക്കാൻ കാൽക്കുലേറ്ററോ, കമ്പ്യൂട്ടറോ ഉപയോഗിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം. അങ്ങനെ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി

$$t \approx 5.36 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 0.76$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇതിൽ 0.76 സെക്കന്റ് എന്നത്, മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലെത്തുന്ന സമയവും, 5.36 സെക്കന്റ് എന്നത്, താഴോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലെത്തുന്ന സമയവുമാണ്.

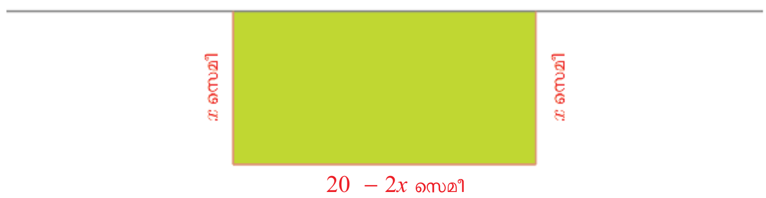
ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

20 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് നിലത്ത് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം ഒരു മതിലും:

ചതുരത്തിന് 50 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവ് വേണം. ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയായിരിക്കണം?

ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നിളം $20 - 2x$ മീറ്റർ, പരപ്പളവ് $x(20 - 2x) = 2x(10 - x)$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം a, 20 - 2a ആയ ഒരു ചതുരം വരച്ച് അതിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് പരപ്പളവ് മാറുന്നത് നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 50 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്? പരപ്പളവ് 50 നേക്കാൾ കൂട്ടാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?



അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇതാണ്:

$2x(10-x) = 50$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ആദ്യം സമവാക്യം ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

അതായത്,

$$(x-5)^2 = 0$$

വർഗം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, സംഖ്യയും പൂജ്യംതന്നെ. അതായത്, $x - 5 = 0$, അഥവാ $x = 5$.

അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 5 മീറ്ററും, $20 - 10 = 10$ മീറ്ററും.

വശങ്ങൾ മാറ്റി പരപ്പളവ് അൽപം കൂട്ടാൻ പറ്റുമോ? 1 ചതുരശ്രമീറ്ററെങ്കിലും?

$$2x(10-x) = 51$$

$$2x^2 - 20x + 51 = 0$$

സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിച്ചാൽ,

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-408}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

എന്താണിതിന്റെയർഥം? ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കൊന്നും വർഗമൂലമില്ലല്ലോ (അധിസംഖ്യയായാലും, ന്യൂനസംഖ്യയായാലും, വർഗം അധിസംഖ്യതന്നെയല്ലേ?)

ഈ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല എന്നാണ് ഇതിന്റെ അർഥം. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, x ആയി ഏതു സംഖ്യയെടുത്താലും $2x^2 - 20x + 51$ എന്ന സംഖ്യ 0 ആവില്ല.

സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുപകരം, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയിൽ തുടർന്നിരുന്നെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെയാകുമായിരുന്നു:

മതിലും കയറും

നിശ്ചിത നീളമുള്ള ഒരു കയറുകൊണ്ട് പല ചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം. അത്തരമൊരു ചതുരത്തിനുള്ളിലെ പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുതലാകുന്നത് സമചതുരമാകുമ്പോഴാണെന്നും കണ്ടു (**വീണ്ടും സമചതുരം എന്ന ഭാഗം**).

ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശമായി ഒരു മതിൽ എടുക്കാമെങ്കിലോ? കയറിന്റെ നീളം a എന്നും ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നുമെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $a - 2x$; ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$p(x) = x(a-2x) = ax - 2x^2$$

ഈ ബഹുപദം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം

$$p(x) = 2\left(\frac{1}{16}a^2 - \left(x - \frac{1}{4}a\right)^2\right)$$

x ആയി പല സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ആയി കിട്ടുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യ $2 \times \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{8}a^2$ ആണെന്ന് (സമചതുരക്കണക്കിലെപ്പോലെ) കാണാം. ഈ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതാകട്ടെ $x = \frac{1}{4}a$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും. അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{2}a$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഈ കണക്കിൽ, വലിയ വശം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായ ചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്.

$$x^2 - 10x + 25\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = -\frac{1}{2}$$

$$(x - 5)^2 = -\frac{1}{2}$$

ഒരു സംഖ്യയുടെയും വർഗം ന്യൂനമല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന സംഖ്യയൊന്നുമില്ലെന്ന് ഈ ഘട്ടത്തിൽ തിരിച്ചറിയാം.

ചതുരക്കണക്കിലേക്ക് തിരിച്ചു വരാം. പരപ്പളവ് 51 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നാണ് ഇതുവരെ പറഞ്ഞതിന്റെ ചുരുക്കം. ഇതുപോലെതന്നെ ആലോചിച്ചാൽ, പരപ്പളവ് 50 ചതുരശ്രമീറ്ററിൽനിന്ന് അൽപംപോലും കൂട്ടാൻ കഴിയില്ല എന്നു കാണാം.

?

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 42 മീറ്ററും, അതിന്റെ വികർണം 15 മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

(2) 1 മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എത്ര വരെ കൂട്ടിയാലാണ് 300 കിട്ടുക?

(3) ഏതു സംഖ്യയുടെ കൂടെ 1 കൂട്ടിയാലാണ് സംഖ്യയുടെ വർഗം കിട്ടുക?

(4) നിശ്ചിത ചുറ്റളവും പരപ്പളവുമുള്ള ചതുരം നിർമിക്കാനുള്ള പ്രശ്നത്തെ സമവാക്യമാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 42 നുപകരം, 24 എന്നു തെറ്റായി എഴുതിപ്പോയി. ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 10 എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്തു. പ്രശ്നത്തിലെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? ശരിയായ പ്രശ്നത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

min = 0, max = 21 ആയി a എന്ന സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം a യും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം 21 – a യും ആയി ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ ഒരു വികർണം വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. a മാറ്റുമ്പോൾ വികർണത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. എപ്പോഴാണ് വികർണത്തിന്റെ നീളം 15 ആകുന്നത്? വികർണത്തിന്റെ നീളം എപ്പോഴെങ്കിലും 14 ആകുന്നുണ്ടോ? വികർണത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ നീളം എത്രയാണ്? അത് കൃത്യമായി കണക്കാക്കാമോ?

(5) ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പകർത്തിയെഴുതിയപ്പോൾ, x ഇല്ലാത്ത പദം -24 നുപകരം 24 എന്നെഴുതിപ്പോയി. ഉത്തരം കിട്ടിയത് 4, 6. ശരിയായ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉത്തരം എന്തൊക്കെയാണ്?