3 സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

ഒരു ചെപ്പിൽ പത്തു മുത്തുകളുണ്ട്, ഒമ്പതെണ്ണം കറുത്തതും, ഒരെണ്ണം മാത്രം വെളുത്തതും, ഇതിൽ നിന്ന് (നോക്കാതെ) ഒരു മുത്തെടുത്താൽ...

മിക്കവാറും കറുപ്പാകും, അല്ലേ? വെളുത്തതായിക്കൂടായ്കയില്ല.

മറ്റൊരു ചെപ്പിൽ എട്ടു കറുത്ത മുത്തും, രണ്ടു വെളുത്ത മുത്തും, ഇതിൽ നിന്ന് നോക്കാതെ ഒരെണ്ണമെടുത്താലോ?

അപ്പോഴും എടുക്കുന്ന മുത്ത് മിക്കവാറും കറുത്തതുതന്നെയാകാനാണ് വഴി. മൂന്നാമതൊരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്തതും അഞ്ചു വെളുത്തതും. ഇതിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുത്താലോ? കറുത്തതാകാം, വെളുത്തതാകാം എന്നല്ലാതെ കൂടുതലൊന്നും പറയാനില്ല, അല്ലേ?

ഇതെല്ലാം മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം; ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും കറുത്തത് കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത, മൂന്നാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നാണെങ്കിൽ, കറുപ്പാകാനും വെളുപ്പാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

ചെപ്പും മുത്തും വച്ചൊരു കളിയാകാം; ഒരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും, അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും; മറ്റൊന്നിൽ ആറു കറുത്ത മുത്തും നാലു വെളുത്ത മുത്തും. ഏതെങ്കിലുമൊരു ചെപ്പിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുക്കണം. കറുത്തതായാൽ കളി ജയിച്ചു. ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തുകൾ കൂടുതലുള്ളത്, അപ്പോൾ അതിലല്ലേ കറുത്തതു കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ?

രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നൊരു കറുത്ത മുത്തെടുത്ത് ഒന്നാം ചെപ്പിലിട്ടാലോ? ചെപ്പുകൾക്കുള്ളിലെ കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും.

ഒന്നാം ചെപ്പ്	:	6 കറുത്തത് 5 വെളുത്തത്
രണ്ടാം ചെപ്പ്	:	5 കറുത്തത് 4 വെളുത്തത്

ഇനി കളിയിൽ ജയിക്കാൻ ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

ഇപ്പോൾ ഒന്നാം ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തു കൂടുതൽ, കറുപ്പു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയും ഇതിലാണോ?

മൊത്തമായി ആലോചിച്ചുനോക്കാം; ഒന്നാം ചെപ്പിൽ മൊത്തം 11 മുത്ത്, അതിൽ 6 കറുത്തത്. അതായത്, മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{6}{11}$ ഭാഗം കറുത്തത്.

രണ്ടാം ചെപ്പിലോ? മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{5}{9}$ ഭാഗമാണ് കറുത്തത്.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ ഇവയിലേതാണു വലുത്?

$\frac{5}{9}$ അല്ലേ?

അതായത്, രണ്ടാം ചെപ്പിലാണ് കൂടുതൽ ഭാഗം കറുത്തത്, അപ്പോൾ രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെ എടുക്കുന്നതല്ലേ ഇപ്പോഴും നല്ലത്?

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യത, അൽപംകൂടി കടന്ന്, ഒന്നാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{6}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{5}{9}$ എന്നെല്ലാം പറയാം.

വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ? ഒന്നാം ചെപ്പിൽ നിന്ന് $\frac{5}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് $\frac{4}{9}$; ഇതിൽ വലുതേതാണ്? അപ്പോൾ വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടിയാലാണ് ജയമെങ്കിൽ, ഏതു ചെപ്പിൽനിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്? ഈ കണക്കിലെ സാധ്യതകളെല്ലാം ഇങ്ങനെ പട്ടികയാക്കാം.

		ഒന്നാം ചെപ്പ്		രണ്ടാം ചെപ്പ്	
		കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്	കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്
ആദ്യം	എണ്ണം	5	5	6	4
	സാധ്യത	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
പിന്നീട്	എണ്ണം	6	5	5	4
	സാധ്യത	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ഒരു ചോദ്യവുമാകാം. തുടക്കത്തിലും, മുത്തു മാറ്റിയിട്ടതിനു ശേഷവും രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെയാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയെന്നു കണ്ടു.

ഈ സാധ്യതതന്നെ ആദ്യമോ പിന്നീടോ കൂടുതൽ?

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസുകഷണത്തിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസ് എടുത്തു. കടലാസിലെ സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ആകെയുള്ള 25 സംഖ്യകളിൽ 13 എണ്ണം ഒറ്റയും, 12 എണ്ണം ഇരട്ടയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഇരട്ടസംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{12}{25}$

ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ? ഈ പെട്ടിയിൽനിന്നുതന്നെ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ആറിന്റെ ഗുണിതമോ?

(1) ഒരു പെട്ടിയിൽ 6 കറുത്ത പന്തും, 4 വെളുത്ത പന്തും. ഇതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അത് കറുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വെളുത്തതാകാനോ?

(2) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 8 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തും.

   (i) ആദ്യത്തെ സഞ്ചിയിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

   (ii) രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നെടുത്താലോ?

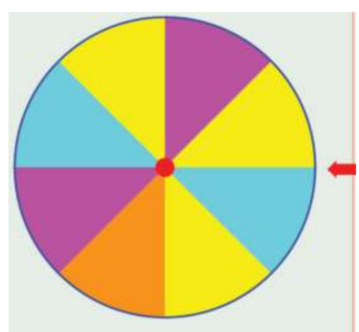
   (iii) രണ്ടു സഞ്ചിയിലെയും പന്തുകൾ ഒരു സഞ്ചിയിലാക്കി അതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(3) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. പറയുന്ന സംഖ്യ പൂർണവർഗമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(4) ഒന്നു മുതൽ അമ്പതു വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണങ്ങളിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നൊരു കടലാസെടുക്കണം. അതിനുമുമ്പ്, കിട്ടാൻ പോകുന്ന സംഖ്യയെക്കുറിച്ച് അഭാജ്യസംഖ്യ എന്നോ അഞ്ചിന്റെ ഗുണിതം എന്നോ ഒരു ഊഹവും പറയണം. ഏത് ഊഹം പറയുന്നതാണ് നല്ലത്? എന്തുകൊണ്ട്?

(5) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന മുത്തുകളും 7 പച്ച മുത്തുകളുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ ചുവന്ന മുത്തുകളും പച്ച മുത്തുകളും ഓരോന്ന് കൂടുതലാണ്. ചുവന്ന മുത്ത് കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ ഏത് സഞ്ചിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ്?

ജ്യാമിതീയ സാധ്യത



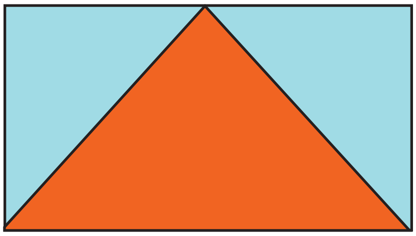
പല നിറങ്ങളുള്ള ഒരു വട്ടം, കറങ്ങാൻ പാകത്തിൽ ഒരു പലകയിൽ തറച്ചിരിക്കുന്നു.

വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, പലകയിലെ അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ മഞ്ഞനിറം വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ വട്ടത്തിന്റെ എട്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ ഏതും വരാം. അതിൽ മൂന്നെണ്ണമാണ് മഞ്ഞ. അപ്പോൾ, മഞ്ഞ വരാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{8}$.

ഇതുപോലെ മറ്റു നിറങ്ങൾ ഓരോന്നും വരാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം: കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും, എതിർവശത്തിന്റെ മൂലകളും ചേർത്തൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.



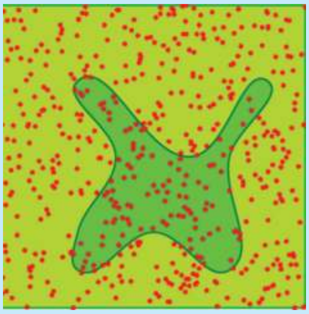
ഈ ചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ചുവന്ന ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ത്രികോണത്തിനും ചതുരത്തിനും ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമല്ലേ? അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ത്രികോണം.

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. കുത്ത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യതയും $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

പരപ്പളവും സാധ്യതയും

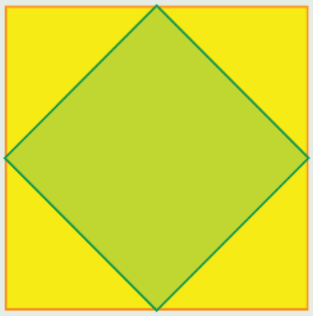
സങ്കീർണമായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് ഏകദേശമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യതയുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിനകത്ത് ഈ രൂപം വരയ്ക്കണം. എന്നിട്ട്, പ്രത്യേകിച്ചൊരു ക്രമമോ ചിട്ടയോ ഇല്ലാതെ ചിത്രത്തിൽ കുത്തുകളിടണം.



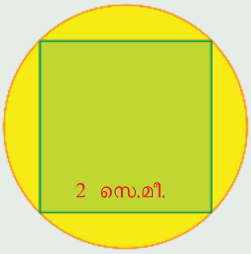
നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിനകത്തു വീണ കുത്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ കുത്തുകളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും. കുത്തുകളുടെ എണ്ണം വർധിക്കുന്തോറും ഇതു കൂടുതൽ കൃത്യമാകുകയും ചെയ്യും. ഈ ജ്യാമിതീയ ക്രിയയും, സംഖ്യകളുടെ ക്രിയയും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് വേഗം ചെയ്യാം. മോണ്ടി കാർലോ രീതി (Monte Carlo method) എന്നാണ് ഇതിന്റെ പേര്.

ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും പച്ച നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ വിശദീകരണം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് പച്ച ഭാഗത്തിലാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

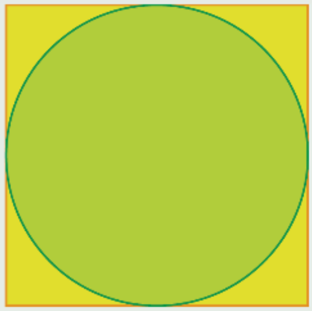
(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച സമചതുരം.



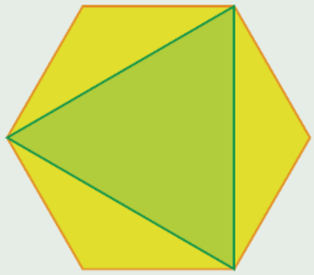
(2) മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായി വരച്ച സമചതുരം.



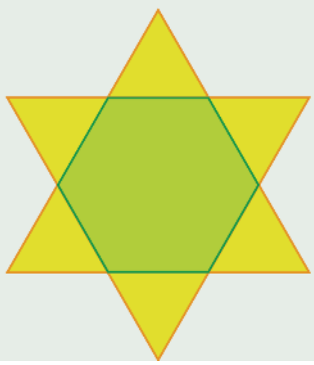
(3) ഒരു സമചതുരത്തിനകത്ത് കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം.



(4) സമഷഡ്ഭുജത്തിലെ ഒന്നിടവിട്ട മൂലകൾ ചേർത്തു വരച്ച ത്രികോണം.



(5) രണ്ടു സമഭുജത്രികോണങ്ങൾക്കിടയിൽ രൂപപ്പെടുന്ന സമഷഡ്ഭുജം.

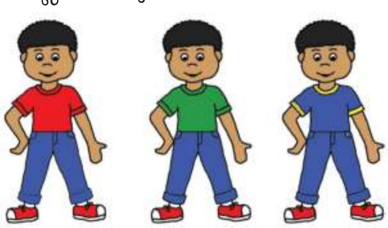


ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ മൂലകളായിവരുന്ന ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. (Polygon Tool ഉപയോഗിക്കണം). കണ്ണടച്ചുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ തൊട്ടാൽ അത് ത്രികോണത്തിനുള്ളിലാവാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? (ത്രികോണത്തിന്റെ പേര് t1 എന്നും വൃത്തത്തിന്റെ പേര് c എന്നുമാണെങ്കിൽ സാധ്യത കണക്കാക്കാൻ Input ൽ Area(t1)/Area(c) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ, തൊടുന്നത് ത്രികോണത്തിനകത്താവാനുള്ള സാധ്യത ഏറ്റവും കൂടുതലാവുന്നത് എപ്പോഴാണ്? ഏറ്റവും കുറവാകുന്നതോ? (സാധ്യത, കൂടുതൽ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണുന്നതിന് Options→ Rounding എന്നതിൽ ദശാംസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടി നോക്കിയാൽ മതി).

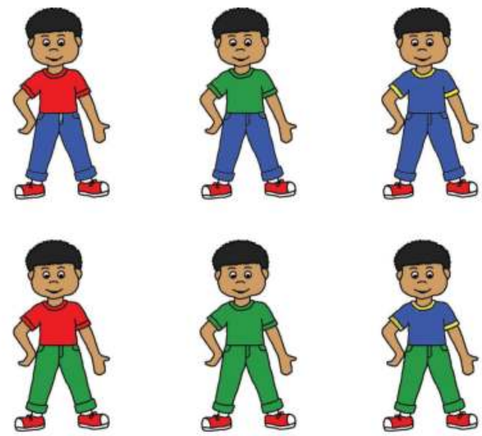
ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. n എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer Slider നിർമിച്ച്, മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലാകത്തക്കവിധം n വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക (A വൃത്തകേന്ദ്രവും B വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായാൽ, Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B യിലും A യിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവ് $(360/n)^\circ$ എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. BB' ഒരു വശമായി വരത്തക്കവിധം Regular Polygon ഉപയോഗിച്ച് സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കാം). കണ്ണടച്ചുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിനകത്ത് തൊട്ടാൽ അത് ബഹുഭുജത്തിനകത്താവാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക. ബഹുഭുജത്തിന്റെ പേര് poly1 എന്നും വൃത്തത്തിന്റെ പേര് c എന്നുമാണെങ്കിൽ Area(poly1)/Area(c) എന്ന് Input നൽകിയാൽ മതി. സാധ്യത ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്? വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ സാധ്യതയ്ക്ക് എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു?

ജോടികൾ

അലക്കിത്തേച്ചതെല്ലാം നോക്കിയപ്പോൾ, ജോണിക്ക് ഒരു നീലപ്പാന്റ്സും, ചുവപ്പും പച്ചയും നീലയുമായി മൂന്നു ഷർട്ടും കിട്ടി. എങ്ങനെയെല്ലാം ഒരുങ്ങാം, ജോണി ആലോചിച്ചു.



ഒന്നുകൂടി തിരഞ്ഞപ്പോൾ ഒരു പച്ചപ്പാന്റ്സും കിട്ടി. അപ്പോളിനി ഇത് ഓരോ ഷർട്ടിന്റെ കൂടെയുമിട്ട്, മൂന്നുതരത്തിൽ കൂടി ആകാമല്ലോ, ജോണി കണക്കു കൂട്ടി.



അങ്ങനെ ആറു വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ജോണിക്ക് ഒരുങ്ങാം. ഇതിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് പാന്റ്സും ഷർട്ടും ഒരേ നിറമാകുന്നത്?

അപ്പോൾ ജോണി, ഒരേ നിറത്തിലുള്ള ഷർട്ടും പാന്റ്സും ഇടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ അല്ലേ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും; മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളും. രണ്ടിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്തു കിട്ടുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഏതൊക്കെയാകാം?

ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് 1 എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1, 2. ഇവ ഓരോന്നും ചേർത്ത് രണ്ടു ജോടികൾ, ഇവയെ (1, 1), (1, 2) എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്ന് ഓരോ സംഖ്യകളുമെടുത്ത്, കിട്ടാവുന്ന സംഖ്യാജോടികളെല്ലാം എഴുതിയാലോ?

(1, 1), (1, 2)
(2, 1), (2, 2)
(3, 1), (3, 2)
(4, 1), (4, 2)

ആകെ 8 ജോടികൾ

ഒരു പ്രശ്നം

പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, ചൂതുകളിക്കാരനായ ഒരു സുഹൃത്ത് ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. മൂന്നു പകിട ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ, തുകയായി 9 കിട്ടുന്നതും 10 കിട്ടുന്നതും, ആറു വിധത്തിലാണ് എന്നയാൾ കണക്കാക്കി.

	9	10
1.	1+2+6	1+3+6
2.	1+3+5	1+4+5
3.	1+4+4	2+2+6
4.	2+2+5	2+3+5
5.	2+3+4	2+4+4
6.	3+3+3	3+3+4

എന്നാൽ അനുഭവത്തിൽ, 10 ആണ് 9 നേക്കാൾ കൂടുതൽ വരുന്നത്. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നാണ് ചോദ്യം.

ഇതിൽ 1, 2, 6 എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്, ഏതോ ഒരു പകിടയിൽ 1, മറ്റൊന്നിൽ 2, മൂന്നാമത്തേതിൽ 6 എന്നാണല്ലോ. ഇതിനുപകരം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 2, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 6 എന്നതിനെമാത്രം (1, 2, 6) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക, ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 6, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 2, എന്നതിനെ (1, 6, 2) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) എന്നീ ആറു വ്യത്യസ്ത ത്രയങ്ങൾ 9 തുകയായി കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കണം എന്നാണ് ഗലീലിയോയുടെ ഉത്തരം. മറ്റു ത്രയങ്ങളേയും ഇതുപോലെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ, 9 കിട്ടുന്നത് 25 രീതിയിലും, 10 കിട്ടുന്നത് 27 രീതിയിലുമാണെന്നും ഗലീലിയോ വ്യക്തമാക്കുന്നു. (ചെയ്തു നോക്കൂ)

ഇതിൽ എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്നത്?

(1, 1), (3, 1) എന്ന രണ്ടു ജോടികളിൽ മാത്രമല്ലേ? അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു പെട്ടികളിൽ ഓരോന്നിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ, രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ഇതുപോലെ രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കാമോ? ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ ഒറ്റയും, മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ? രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

?

(1) രജനിക്ക് പച്ച, നീല, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിൽ കല്ലുമാലയും കമ്മലുമുണ്ട്. എത്ര രീതികളിൽ രജനിക്ക് മാലയും കമ്മലുമണിയാം? ഒരു ദിവസം രജനി ഒരേ നിറമുള്ള മാലയും കമ്മലും അണിയാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വ്യത്യസ്ത നിറമുള്ളതോ?

(2) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(3) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും, മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഗുണനഫലം ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(4) അക്കങ്ങൾ രണ്ടും 1, 2, 3 ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ആയ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളിൽ ഒരെണ്ണമെടുത്താൽ,

(i) രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) അക്കങ്ങളുടെ തുക 4 ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(5) രണ്ടുപേർ തമ്മിലുള്ള ഒരു കളി. ഓരോരുത്തരും ഒറ്റസംഖ്യവേണോ, ഇരട്ടസംഖ്യവേണോ എന്ന് ആദ്യം തീരുമാനിക്കണം. രണ്ടുപേരും ഒരു കൈയിലെ കുറെ വിരലുകൾ ഒരുമിച്ചുയർത്തുന്നു. ആകെ വിരലുകളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അത് ആദ്യമേ എടുത്തയാൾ ജയിച്ചു; ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതെടുത്തയാളും. ഈ കളിയിൽ ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ, ഇരട്ടസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ നല്ലത്?

കൂടുതൽ ജോടികൾ

വീണ്ടും രണ്ടു പെട്ടികൾ, ഒന്നിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ പത്തു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, രണ്ടാമത്തേതിൽ 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ അഞ്ചു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, പതിവുപോലെ രണ്ടിൽനിന്നും ഓരോ കടലാസെടുക്കുന്നു. രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള വഴി എളുപ്പമാണ്, ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികൾ സാധ്യമാണെന്നു കണക്കാക്കുക, അവയിൽ എത്രയെണ്ണം നമുക്കു വേണ്ട രീതിയിൽ രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നു നോക്കുക, രണ്ടാമത് കിട്ടിയ സംഖ്യയെ ആദ്യം കിട്ടിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ സാധ്യതയായി.

സാധ്യതയും ആവൃത്തിയും

സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറേ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയോ വാലോ (Head or Tail) വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം ഏതാണ്ടു തുല്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ, നാണയം ഉണ്ടാക്കുന്നതിലെ അപാകത കൊണ്ടോ മറ്റോ, ചിലപ്പോൾ തലവശം വീഴാൻ സാധ്യത കൂടുതലായി എന്നു വരാം. ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

നാണയം ആവർത്തിച്ച് എറിയുമ്പോൾ ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം, പകുതിയിൽ നിന്ന് വല്ലാതെ മാറിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലാണ് ഇത്തരമൊരു സംശയം ഉണ്ടാകേണ്ടത്. അപ്പോൾ കൂടുതൽ തവണ എറിഞ്ഞ് ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം വെവ്വേറെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയാണ് രീതി. ഉദാഹരണമായി ഈ പട്ടിക നോക്കുക.

ഏറ്	തല	വാൽ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ഇതിൽ നിന്ന് തലയുടെ സാധ്യത 0.6 എന്നും, വാലിന്റെ സാധ്യത 0.4 എന്നും എടുക്കുന്നതാണ്, രണ്ടും 0.5 എന്നെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ ശരി എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാക്കാനുള്ള ഗണിതരീതികൾ, സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം (Probability theory) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ കാണാം.

പറയുന്നതുപോലെ എളുപ്പമാണോ ചെയ്യുന്നത്? എല്ലാ സംഖ്യാജോടികളും എഴുതി എണ്ണുക അത്ര രസമുള്ള കാര്യമല്ലല്ലോ.

ചിന്തിച്ചുനോക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ പത്തെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാകാം, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ അഞ്ചെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നും, അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്? ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആകുന്ന ജോടികളോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ നിശ്ചയിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ മാറ്റി 5 ജോടികളുണ്ടാക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യതന്നെ 10 തരത്തിലാകാം. അപ്പോൾ മൊത്തം സംഖ്യാജോടികളെ ഇങ്ങനെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.

5 എണ്ണം

10 എണ്ണം				
	(1, 1)	(1, 2)	…	(1, 5)
	(2, 1)	(2, 2)	…	(2, 5)
	…	…	…	…
	…	…	…	…
	(10, 1)	(10, 2)	…	(10, 5)

ഈ 50 ജോടികളിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാവുന്നത്? അതിന്, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5, 7, 9 എന്നീ 5 എണ്ണത്തിലൊന്നാകണം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5 എന്നീ 3 എണ്ണത്തിലൊന്നും. ആദ്യത്തെ 5 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നിനോടും രണ്ടാമത്തെ 3 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നു ചേർത്ത് ആകെ എത്ര ജോടികളുണ്ടാക്കാം?

5×3 അല്ലേ? (വേണമെങ്കിൽ വരിയും നിരയുമായി സങ്കൽപിച്ചു നോക്കൂ) അപ്പോൾ ഈ പെട്ടികളിൽ നിന്ന് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളായി കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$. ഇതുപോലെ, രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകാനുള്ള സാധ്യതയും, ഒന്ന് ഒറ്റയും മറ്റേത് ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഒരു കണക്കു കൂടി, ഒരു കുട്ടയിൽ 50 മാങ്ങയുണ്ട്, അതിൽ 20 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല, മറ്റൊരു കുട്ടയിൽ 40 മാങ്ങയുണ്ട്, 15 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങയെടുത്താൽ, രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഒരു മാങ്ങ വീതം എത്ര വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ എടുക്കാം? (വേണമെങ്കിൽ, ഓരോ കുട്ടയിലേയും മാങ്ങകൾ ഓരോ വരിയിൽ നിരത്തി വച്ചിരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കാം, ഇവയിലെല്ലാം ഓരോ സംഖ്യ എഴുതിയിരിക്കുന്നതായും സങ്കൽപ്പിക്കാം)

അപ്പോൾ ആകെ രണ്ടു മാങ്ങകളെടുക്കുന്നത് $50 \times 40 = 2000$ രീതികളിലാവാം. ഇതിലെത്ര ജോടികൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകും? ആദ്യത്തെ കുട്ടയിൽ, $50 - 20 = 30$ പഴുത്ത മാങ്ങയുണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിൽ $40 - 15 = 25$ എണ്ണം പഴുത്തതാണ്.

ആദ്യത്തെ കുട്ടയിലെ ഓരോ പഴുത്ത മാങ്ങയും, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിലെ ഒരോ പഴുത്ത മാങ്ങയുമായി ജോടിയാക്കിയാൽ ആകെ $30 \times 25 = 750$ ജോടി. അപ്പോൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$. ഇതുപോലെ രണ്ടും പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കിനോക്കൂ.

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം എന്നാൽ ഒരു പഴുത്തതും ഒരു പച്ചയും; അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും പഴുത്തത്, ഇതിൽ ഒരെണ്ണം പഴുത്തത് എന്നത് തന്നെ രണ്ടു രീതിയിൽ കിട്ടും;

ഒന്നാമത്തേത് പഴുത്തത്, രണ്ടാമത്തേത് പച്ച.

അല്ലെങ്കിൽ

ഒന്നാമത്തേത് പച്ച, രണ്ടാമത്തേത് പഴുത്തത്.

അതായത്, ഒന്ന് മാത്രം പഴുത്ത ജോടികൾ ആകെ

$$(30 \times 15) + (20 \times 25) = 450 + 500$$
$$= 950$$

രണ്ടും പഴുത്തത് 750 ജോടി എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. രണ്ടും കൂടി എടുത്താൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതുള്ള ജോടികൾ ആകെ

അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവ്

ഓരോ ദിവസവും സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്ന സമയവും, അസ്തമിക്കുന്ന സമയവും കലണ്ടറിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? കൃത്യമായ ചില ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ചു ഭൂമിയും സൂര്യനുമെല്ലാം ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം കണക്കാക്കാൻ പറ്റുന്നത്.

ഇതുപോലെതന്നെ മഴക്കാലവും വേനൽക്കാലവുമെല്ലാം ഏതു മാസങ്ങളിലാണെന്നും കണക്കു കൂട്ടാം. പക്ഷേ വേനൽക്കാലത്ത് പെട്ടെന്നൊരു മഴ വരുന്നത് മുൻകൂട്ടി കണക്കാക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല എന്നു വരും. മഴയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളുടെ പെരുപ്പവും, അവതമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളുടെ സങ്കീർണതയുമാണ് ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾ വിഷമമാക്കുന്നത്.

സാഹചര്യങ്ങളുടെ ഗണിതപരമായ വിശകലനത്തിലൂടെ സാധ്യതകൾ കണക്കുകൂട്ടാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെയാണ് ദൈനംദിന അന്തരീക്ഷസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ, സാധ്യതകളായി പറയുന്നത്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സാഹചര്യങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളാണ് ഈ പ്രവചനങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ തെറ്റിക്കുന്നതും.

യാതൊരു ശാസ്ത്രീയമായ അടിസ്ഥാനവുമില്ലാതെ, കൃത്യമെന്നപോലെ നടത്തുന്ന പ്രവചനങ്ങളേക്കാൾ, ഇത്തരം സാധ്യതാ പ്രവചനങ്ങൾക്ക് വിശ്വാസ്യത കൂടുമെന്ന് ശരിയായി നോക്കിയാൽ കാണുകയും ചെയ്യാം.

$$950 + 750 = 1700$$

അതിനാൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ എന്ന് കണക്കാക്കാം.

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകുക എന്നാൽ രണ്ടും പച്ചയാകാൻ പറ്റില്ല. ആകെ സാധ്യമാകുന്ന 2000 ജോടികളിൽ, രണ്ടും പച്ചയായത് $20 \times 15 = 300$ ആണല്ലോ.

മിച്ചമുള്ള $2000 - 300 = 1700$ ജോടികളിലെല്ലാം ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം. അതായത്, ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$.

(1) 10 A ക്ലാസിൽ 30 ആൺകുട്ടികളും, 20 പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. 10 B ക്ലാസിൽ 15 ആൺകുട്ടികളും, 25 പെൺകുട്ടികളും. ഓരോ ക്ലാസിൽനിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കണം.
- (i) രണ്ടും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
- (ii) രണ്ടും ആൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
- (iii) ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയുമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
- (iv) ഒരാൺകുട്ടിയെങ്കിലും ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(2) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാനാവശ്യപ്പെടുന്നു.
- (i) ഇതിലെ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?
- (ii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ വലുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?
- (iii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ ചെറുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

(3) രണ്ടക്കസംഖ്യകളെല്ലാം വെവ്വേറെ കടലാസുകഷണങ്ങളിലെഴുതി ഒരു പെട്ടിയിൽ ഇട്ടിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം അഭാജ്യസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയെന്താണ്? രണ്ടക്കസംഖ്യകൾക്കുപകരം മൂന്നക്കസംഖ്യകളായാലോ?

(4) 1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ള രണ്ടു പകിടകൾ ഒന്നിച്ചുരുട്ടുന്നു. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം? ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യതയുള്ള തുക എന്താണ്?