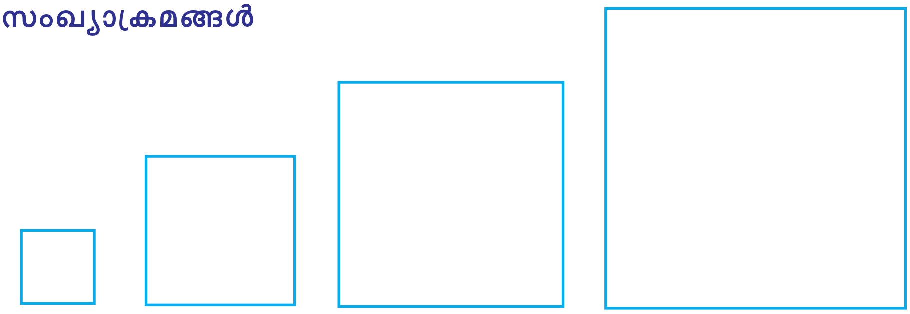
1 സമാന്തരശ്രേണികൾ

സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ



ചിത്രത്തിലെ സമചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ, അവയുടെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്? പരപ്പളവോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം

1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., 4 സെ.മീ., ...

എന്നിങ്ങനെ തുടരുമ്പോൾ, ചുറ്റളവ്

4 സെ.മീ., 8 സെ.മീ., 12 സെ.മീ., 16 സെ.മീ., ...

എന്നു തുടരുന്നു; പരപ്പളവ്

1 ച.സെ.മീ., 4 ച.സെ.മീ., 9 ച.സെ.മീ., 16 ച.സെ.മീ., ...

എന്നും.

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാലോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം

1, 2, 3, 4, ...

എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതുന്നതുതന്നെ. ചുറ്റളവ്

4, 8, 12, 16, ...

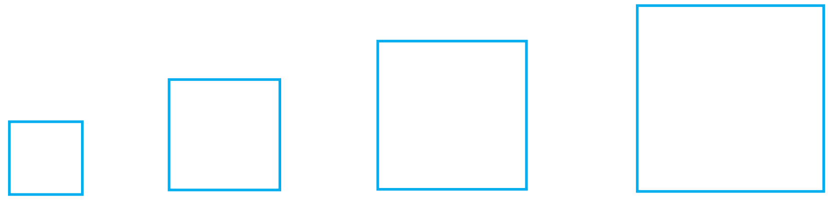
എന്നിങ്ങനെ നാലിന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ക്രമം; പരപ്പളവ്,

1, 4, 9, 16, ...

എന്ന പൂർണവർഗങ്ങളുടെ ക്രമം.

ഇവയുടെ വികർണങ്ങളുടെ നീളമോ? എഴുതിനോക്കൂ.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടുന്നതിനുപകരം അര സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാലോ?

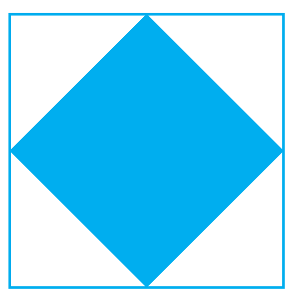


1 സെ.മീ. $1\frac{1}{2}$ സെ.മീ. 2 സെ.മീ. $2\frac{1}{2}$ സെ.മീ.

വശം	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ചുറ്റളവ്	4,	6,	8,	10,	...
പരപ്പളവ്	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
വികർണം	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച് ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെ, **സംഖ്യാശ്രേണി (number sequence)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സമചതുരങ്ങളുപയോഗിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു ശ്രേണിയുണ്ടാക്കാം; വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരു മീറ്ററായ ഒരു സമചതുരം സങ്കൽപ്പിക്കുക. വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ മറ്റൊരു സമചതുരം കിട്ടും.



1 മീറ്റർ

ഈ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

അതിന്റെ വികർണം ഒരു മീറ്ററാണ്; സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ചതുർഭുജപ്പരപ്പ്** എന്ന പാഠത്തിൽ, **സമഭുജസാമാന്തരികം** എന്ന ഭാഗം)

അപ്പോൾ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അര ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതു തുടർന്നാൽ ഓരോ തവണയും പരപ്പളവ് പകുതിയാകും, ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണിയെന്താണ്?

1 മീറ്റർ   1 മീറ്റർ   1 മീറ്റർ

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

6Y27FA

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽനിന്നും ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം; ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴോട്ടിടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം നിരന്തരം കൂടിക്കൊണ്ടിരിക്കുമല്ലോ. t സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴുള്ള വേഗം v മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താൽ

$$v = 9.8t$$

എന്നാണ് സമയ-വേഗ സമവാക്യം.

t സെക്കന്റ് സമയംകൊണ്ട് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ,

$$s = 4.9t^2$$

എന്നാണ് സമയ-ദൂര സമവാക്യം.

അപ്പോൾ ഇതുപയോഗിച്ച് രണ്ടു ശ്രേണികളുണ്ടാക്കാം.

സമയം	1,	2,	3,	4,	...
വേഗം	9.8,	19.6,	29.4,	39.2,	...
ദൂരം	4.9,	19.6,	44.1,	78.4,	...

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ നിന്നുതന്നെ മറ്റൊരു ഉദാഹരണമാകാം. ഇരുമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത 7.8 ഗ്രാം/ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്. അതായത്, 1 ഘനസെന്റിമീറ്റർ വ്യാപ്തമുള്ള ഇരുമ്പുസമചതുരക്കട്ടയ്ക്ക് 7.8 ഗ്രാം ഭാരമുണ്ടാകും. അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയായ ഇരുമ്പുസമചതുരക്കട്ടകളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ 1 ഘനസെന്റിമീറ്റർ, 8 ഘനസെന്റിമീറ്റർ, 27 ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയും, ഭാരം 7.8 ഗ്രാം, 62.4 ഗ്രാം, 210.6 ഗ്രാം എന്നിങ്ങനെയുമാണ്. സംഖ്യാശ്രേണികളായി എഴുതിയാൽ

പലതരം ശ്രേണികൾ

കൂട്ടം, നിര എന്നെല്ലാം അർഥം വരുന്ന സംസ്കൃതപദമാണ് "ശ്രേണി". ഗണിതത്തിൽ ഈ വാക്കുപയോഗിക്കുന്നത്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നവയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നത് സംഖ്യകൾ തന്നെ ആവണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

ബഹുപദങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാകാം:

$$1+x, 1+x^2, 1+x^3, \dots$$

ഒരു ഭാഷയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിൽ അടുക്കുന്നതും ഒരു ശ്രേണിതന്നെ.

വശം	1,	2,	3,	...
വ്യാപ്തം	1,	8,	27,	...
ഭാരം	7.8,	62.4,	210.6,	...

അളവുകളല്ലാതെ കേവലസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ചും ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, അഭാജ്യസംഖ്യകൾ വലുപ്പമനുസരിച്ച് ക്രമമായി എഴുതിയാൽ

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

എന്നു തുടരുന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

$\frac{21}{37}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ സ്ഥാനക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയാകും.

ഇതുതന്നെ π എന്ന സംഖ്യയിലായാൽ

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

ഒരു ശ്രേണിയെത്തന്നെ പലതരത്തിൽ വിവരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി,

$$1, 11, 21, 31, \ldots$$

ഇതിനെത്തന്നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെന്നും പറയാം.

(1) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ ശ്രേണിയിൽനിന്ന് ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കുക.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണം 3, 4, 5, ...

അകക്കോണുകളുടെ തുക

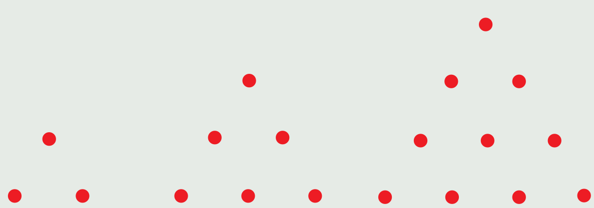
പുറംകോണുകളുടെ തുക

ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്

ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ്

(2) പൊട്ടുകളടുക്കി ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം.

ഓരോ ത്രികോണത്തിലുമുള്ള പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം എഴുതുക.



തുടർന്നുള്ള മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(3) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും, 2 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും ശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(4) 1, 6 എന്നീ അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയെ മറ്റു രണ്ടുതരത്തിൽ വിവരിക്കുക.

(5) 1000 ലിറ്റർ വെള്ളമുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽനിന്നും ഓരോ സെക്കന്റിലും 5 ലിറ്റർ വെള്ളം വീതം പുറത്തേക്കൊഴുകുന്നു.
ഓരോ സെക്കന്റിലും ടാങ്കിൽ മിച്ചമുള്ള വെള്ളം എത്രയാണ്? ഒരു ശ്രേണിയായി എഴുതുക.

ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., ... എന്നിങ്ങനെയായ സമചതുരങ്ങളുടെ ചുററളവുകൾ ക്രമമായെടുത്താൽ

$$4, 8, 12, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ അതിലെ **പദങ്ങൾ (terms)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ 4, 8, 12, ... എന്നിങ്ങനെയാണ്. കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ, ഒന്നാം പദം 4, രണ്ടാം പദം 8, മൂന്നാം പദം 12, ...

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

സ്ഥാനം	1,	2,	3,	...
പദം	4,	8,	12,	...

ഇതിലെ 5-ാം പദം എത്രയാണ്? 20-ാം പദമോ?

ഇവിടെ സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദവും, സ്ഥാനത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങാണ്.

അൽപം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം $4n$

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ സ്ഥാനക്രമത്തിൽ അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എഴുതുന്നത് $x_1, x_2, x_3, \ldots$ അല്ലെങ്കിൽ $y_1, y_2, y_3, \ldots$ എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതനുസരിച്ച്, മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണീനിയമം വീണ്ടും ചുരുക്കാം.

$$x_n = 4n$$

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത വര വശമായ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ശ്രേണി വരയ്ക്കാം.

A, B എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം, Input Bar ൽ

Sequence [Polygon [A, B, n], n, 3, 10]

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ മതി. n എന്ന സംഖ്യ, 3 മുതൽ 10 വരെ മാറ്റുക, അതിനൊപ്പം AB ഒരു വശമായി n വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഈ നിർദ്ദേശത്തിന്റെ അർഥം.

ബഹുഭുജങ്ങൾ ഓരോന്നായി വരയ്ക്കാൻ m എന്ന പേരിലൊരു Integer Slider ഉണ്ടാക്കി, വരയ്ക്കാനുള്ള നിർദ്ദേശം ഇങ്ങനെ മാറ്റുക.

Sequence [Polygon [A, B, n + 2], n, 1, m]

Slider നീക്കി m എന്ന സംഖ്യ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച്, 3, 4, 5, വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഇതിന്റെയർഥം.

ഇതിൽ n + 2 നുപകരം 2n എന്നെഴുതിയാൽ, ഏതുതരം ബഹുഭുജങ്ങളാണ് കിട്ടുക?

2n + 1 ആക്കിയാലോ?

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നീ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ,

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8$$
$$x_3 = 12$$
$$\ldots$$

എന്നിങ്ങനെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കിട്ടും.

ശ്രേണിയിലെ 100-ാം പദം

$$x_{100} = 400$$

എന്നു നേരിട്ടു കണക്കാക്കുകയുമാവാം.

ചുറ്റളവിനു പകരം പരപ്പളവെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ശ്രേണി ഇങ്ങനെയാണ്.

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

ഇതിൽ, സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ഓരോ പദവും സ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞാലോ?

$$x_n = n^2$$

ഈ സമചതുരങ്ങളുടെ വികർണങ്ങളുടെ നീളവും ഒരു ശ്രേണിയായി എഴുതാമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്? എഴുതി നോക്കൂ.

വശങ്ങളുടെ നീളം അര സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടി ശ്രേണികളുണ്ടാക്കിയത് നോക്കാം.

വശം	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ചുറ്റളവ്	4,	6,	8,	10,	...
പരപ്പളവ്	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
വികർണം	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

അതിന് ആദ്യം ഈ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ എഴുതിനോക്കാം.

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$$

ഇതിൽ പൂർണസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളുമുണ്ട്. ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ഛേദം 2 ആണ്. പൂർണസംഖ്യകളെയും ഛേദം 2 ആയ ഭിന്നസംഖ്യകളായി എഴുതിയാലോ?

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$$

അംശങ്ങളുടെ ശ്രേണി

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമെന്താണ്? എഴുതിനോക്കൂ.

അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ശ്രേണി, ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എങ്ങനെയെഴുതാം?

n-ാം ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം s_n എന്നെഴുതിയാൽ

$$s_n = \frac{n+1}{2}$$

ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമോ?

വശത്തിന്റെ നീളത്തെ നാലുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ ചുറ്റളവ്. അപ്പോൾ ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$p_n = 4 \times \frac{1}{2}\ (n+1) = 2\ (n+1)$$

ഉദാഹരണമായി, ഈ ശ്രേണിയിലെ 25-ാം സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം

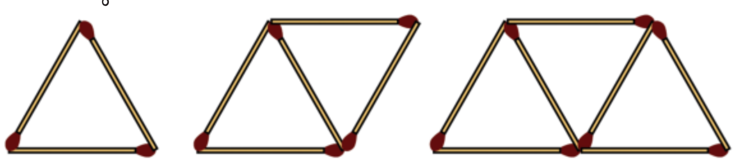
$$s_{25} = \frac{1}{2} \times (25+1) = 13$$

50-ാം സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

$$p_{50} = 2 \times (50+1) = 102$$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെയും, വികർണങ്ങളുടെ ശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതിനോക്കൂ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:



ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു തീപ്പെട്ടിക്കോല്, രണ്ടെണ്ണമുണ്ടാക്കാൻ അഞ്ചു കോല്, മൂന്നെണ്ണത്തിന് ഏഴു കോല്.

ഇങ്ങനെ നാലു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

അഞ്ചു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാനോ?

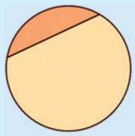
ആദ്യത്തെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു കോല് വേണം, തുടർന്ന് ഓരോ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കാനും രണ്ടുകോല് വീതം മതി. അങ്ങനെ കോലുകളുടെ എണ്ണം

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

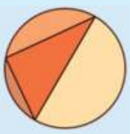
എന്ന ശ്രേണിയായി എഴുതാം.

വൃത്തവിഭജനം

ഒരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഒരു വരകൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:



വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്തു യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു ഭാഗങ്ങളാകും:



നാലു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് എല്ലാ ജോടികളേയും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ അഞ്ചായാൽ?

ആറു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളാകുമെന്നാണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഇതു ശരിയാണോ എന്നു വരച്ചു നോക്കൂ.

10 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലുവേണം?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോല്, ബാക്കി 9 ത്രികോണത്തിനു 2 വീതം, $9 \times 2 = 18$; ആകെ $3 + 18 = 21$

100 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

$$3 + (99 \times 2) = 201$$

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

n ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കോലുകളുടെ എണ്ണം എങ്ങനെ എഴുതാം?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ 3 കോലും, ബാക്കി $n - 1$ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $2(n - 1) = 2n - 2$ കോലും ;

ആകെ വേണ്ട കോല് $3 + 2n - 2 = 2n + 1$

അതായത്, n ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കോലുകളുടെ എണ്ണം

$$x_n = 2n + 1$$

ഇതാണ് 3, 5, 7, ... എന്നിങ്ങനെ 3 നോട് 2 കൂട്ടി തുടരുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം. ഇതിൽനിന്ന്, 500 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലുവേണമെന്ന് എളുപ്പം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$x_{500} = (2 \times 500) + 1 = 1001$$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, അതിലെ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാൻ കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ, 2 സെ.മീ, 3 സെ.മീ, ... എന്നിങ്ങനെയായ ഇരുമ്പു സമചതുരക്കട്ടകളുടെ ഭാരം ക്രമമായെഴുതുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 7.8n^3$$

ഇത്തരം നൂറു കട്ടകളുടെ ഭാരം ക്രമമായി എഴുതിക്കിട്ടാൻ, പൈഥൻ ഭാഷയിൽ (python3)

```
for n in range (1,101):
    print (7.8*n**3)
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി. ഇതുതന്നെ `weights.py` എന്ന പേരിൽ ഒരു പ്രോഗ്രാമായി എഴുതി

```
python3.2 weights.py > weights.txt
```

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി weights.txt എന്ന file ൽ എഴുതിക്കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം. 1, 4, 9, ... എന്നിങ്ങനെ വർഗസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പത്ത് സംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ Sequence (n^2, n,1, 10) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ മതി. m എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി Sequence (n^2, n, 1, m) എന്നു കൊടുത്താൽ m മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം മാറും.

2, 4, 8, ... എന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം 2^n ആണല്ലോ. ഈ ശ്രേണി കിട്ടാൻ Sequence (2^n, n, 1, m) എന്നു നൽകിയാൽ മതി.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഓരോന്നിന്റെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(ii) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iii) 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iv) 1 ലോ 6 ലോ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(2) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ അകക്കോണുകളുടെ തുക, പുറംകോണുകളുടെ തുക, ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്, ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ് എന്നീ ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(3) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ

6YB3GX

ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന ചെറിയ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് ആദ്യത്തെ ചിത്രം. ഇതിലെ മൂന്നു ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽനിന്നും ഇതുപോലെ നടുവിലെ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം. ഈ ക്രിയ ഒരിക്കൽകൂടി ചെയ്തതാണ് മൂന്നാം ചിത്രം.

(i) ഓരോ ചിത്രത്തിലും എത്ര ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്?

(ii) ഒന്നും വെട്ടിമാറ്റാത്ത മുഴുവൻ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 1 എന്നെടുത്ത്, ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(iii) ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ ആകെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(iv) ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഈ മൂന്നു ശ്രേണികളുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

സമാന്തരശ്രേണികൾ

വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 2, 3, 4, ... ആയ സമചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ കണക്കാക്കിയപ്പോൾ

4, 8, 12, 16, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടി. ഇവിടെ വശങ്ങളുടെ നീളം 1 വീതം കൂടുന്നതിനാൽ, ചുറ്റളവ് 4 വീതം കൂടുന്നു. വശങ്ങളുടെ നീളം $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \dots$ എന്നെടുത്താലോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $\frac{1}{2}$ വീതം കൂടുന്നതിനാൽ, ചുറ്റളവ് $4 \times \frac{1}{2} = 2$ വീതം കൂടുന്നു. കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

$$4, 6, 8, 10, \ldots$$

ഇനി തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കിയ കണക്കു നോക്കൂ. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോല്; തുടർന്നുള്ള ഓരോ ത്രികോണത്തിനും 2 വീതം കൂടുന്നു. അങ്ങനെ 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 2 കൂട്ടി

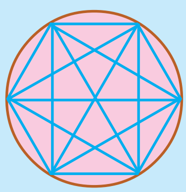
$$3, 5, 7, 9, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുന്നു.

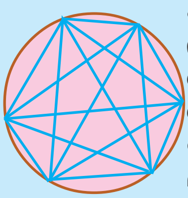
ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയ്ക്ക്, സമാന്തരശ്രേണി (arithmetic sequence) എന്നാണ് പേര്.

നിഗമനങ്ങളിലെ അപകടം

വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തവിഭജനം** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 2, 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 8, 16 എന്നു കിട്ടും. ബിന്ദുക്കൾ 6 എണ്ണമാകുമ്പോഴോ? 32 എന്നാകും ഊഹം. വരച്ചു നോക്കിയാലോ?



ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലാണെങ്കിൽ 30 ഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ 31 ഭാഗം.



ഏതായാലും, പരമാവധി 31 ഭാഗം. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ n ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പരമാവധി ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിലും 2^{n-1} എന്ന വാചകത്തിലും $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്, 1, 2, 4, 8, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണെന്നതാണ് രസകരം. $n = 6$ മുതൽ, രണ്ടു വാചകത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകും.

രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം

$$1, \; 1\frac{1}{2}, \; 2, \; 2\frac{1}{2}, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയിലാണല്ലോ. ഇതുമൊരു സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ. 1 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, $\frac{1}{2}$ ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നു.

ബഹുഭുജങ്ങളുടെ പുറംകോണുകളുടെ തുകയായി കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

$$360, 360, 360, \ldots$$

എന്നാണല്ലോ. ഇതും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. 360 ൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്നു. വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടുന്നു എന്നും പറയാമല്ലോ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഒരു നേർവരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്മേൽ സഞ്ചാരത്തിന്റെ എതിർദിശയിൽ നിശ്ചിതബലം പ്രയോഗിച്ച്, ഓരോ സെക്കന്റിലും 2 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയ്ക്കുന്നു. ഓരോ സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോഴുമുള്ള വേഗം

$$10, 8, 6, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയിലാണല്ലോ.

ഇവിടെ 10 ൽ നിന്ന് 2 തുടരെ കുറച്ചാണ് ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്. ഇതും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയായാണ് കണക്കാക്കുന്നത്. ഇത്തരം ശ്രേണികളെയും ഉൾക്കൊള്ളാൻ, ഒന്നുകിൽ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ നിർവചനത്തിൽ

“ഒരേ സംഖ്യ തുടരെ കൂട്ടുക” എന്നതിനെ “ഒരേ സംഖ്യ തുടരെ കൂട്ടുകയോ തുടരെ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക” എന്നു മാറ്റാം. അല്ലെങ്കിൽ “2 കുറയ്ക്കുക എന്നാൽ, −2 കൂട്ടുക” എന്ന് ഗണിതഭാഷയിലൂടെ ന്യായീകരിക്കാം.

സമാന്തരശ്രേണികളെ മറ്റൊരു തരത്തിലും വിവരിക്കാം. ഇത്തരമൊരു ശ്രേണിയിൽ, ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദത്തിൽനിന്ന് തൊട്ടു മുന്നിലുള്ള പദത്തിലെത്താൻ ഒരേ സംഖ്യയാണല്ലോ കൂട്ടേണ്ടത്. അപ്പോൾ ഏതു പദത്തിൽനിന്നും തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഈ സംഖ്യതന്നെയാണ്.

ഏതു പദത്തിൽ നിന്നും തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണ് സമാന്തരശ്രേണി.

ഒരു പദത്തിൽനിന്ന് തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചു കിട്ടുന്ന ഈ സ്ഥിരവ്യത്യാസത്തെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ **പൊതുവ്യത്യാസം (common difference)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

പലപ്പോഴും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നത്, പദവ്യത്യാസം സ്ഥിരമാണോ എന്നു നോക്കിയാണ്. ഉദാഹരണമായി, 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$3, 6, 9, \ldots$$

3 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 3 തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇത് പൊതുവ്യത്യാസം 3 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

ഇനി ഈ ഗുണിതങ്ങളോരോന്നിനോടും 1 കൂട്ടിയാലോ?

$$4, \quad 7, \quad 10, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

ഇതും 3 പൊതുവ്യത്യാസമായ സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ.

ഇനി 3 ന്റെ കൃതികളുടെ ശ്രേണി നോക്കൂ:

$$3, \; 9, \; 27, \ldots$$

$9 - 3 = 6$ ഉം $27 - 9 = 18$ ഉം; അതായത്, അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒരേ സംഖ്യയല്ല.

ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുമല്ല.

ഇനി ഇതുവരെ കണ്ട ശ്രേണികളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കി, അവയിലെ സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(1) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളോരോന്നും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു തീരുമാനിക്കുക. കാരണം എഴുതണം. സമാന്തരശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, പൊതുവ്യത്യാസവും എഴുതണം.

(i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

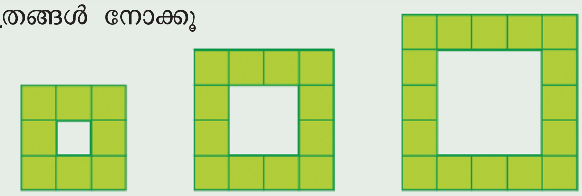
(ii) ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iii) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പകുതിയായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iv) 2 ന്റെ കൃതികളുടെ ശ്രേണി

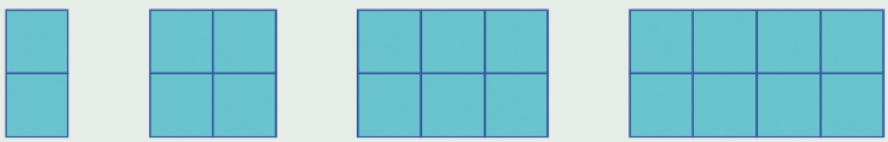
(v) എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ ശ്രേണി

(2) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ



ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങളിലെ നിറം കൊടുത്ത ചെറു സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക.



(i) ഓരോ ചതുരത്തിലും എത്ര ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

(ii) എത്ര വലിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

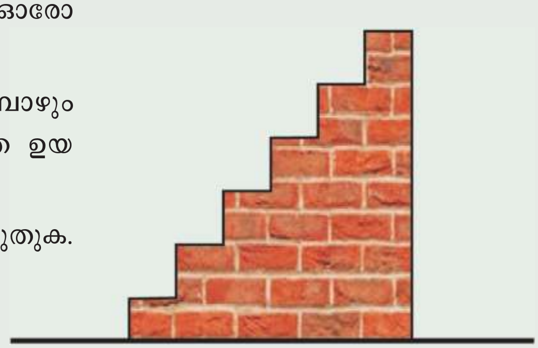
(iii) ആകെ എത്ര സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഓരോ ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

(4) ചിത്രത്തിലെ പടിക്കെട്ടിൽ ആദ്യ പടിയുടെ ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ; പിന്നീടുള്ള ഓരോ പടിക്കും 17.5 സെന്റിമീറ്റർ.

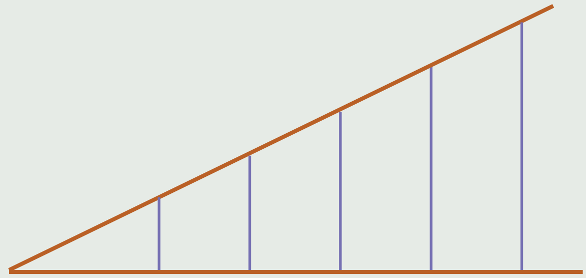
(i) ഒരാൾ ഓരോ പടി കയറുമ്പോഴും അയാൾ തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലായിരിക്കും?

(ii) ഈ ഉയരങ്ങളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക.



(5) ചിത്രത്തിൽ ഒരേ അകലം ഇട വിട്ടാണ് താഴത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഇങ്ങനെ തുടരുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



(6) ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = n^3 - 6n^2 + 13n - 7$$

ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

സ്ഥാനവും പദവും

1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ?

എളുപ്പമല്ലേ? 1 ൽ നിന്ന് 11 ൽ എത്താൻ 10 കൂട്ടണം. തുടർന്നും 10 തന്നെ കൂട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ സമാന്തരശ്രേണി ആകും.

1, 11, 21, 31, ...

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം : 1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ?

ഇങ്ങനെയൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ; അതു നമുക്കറിയില്ല. ഒരിക്കൽകൂടി പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയായ 11 കിട്ടണം.

അതായത്, 1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 11 കിട്ടേണ്ടത്.

അപ്പോൾ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് 10; പൊതുവ്യത്യാസം 5

ഇനി ശ്രേണി എഴുതാമല്ലോ.

1, 6, 11, 16, 21, ...

3-ാം പദം 37 ഉം, 7-ാം പദം 73 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയോ?

ശ്രേണിയും ശിഷ്ടവും

ഇരട്ടസംഖ്യകളായ 2, 4, 6, ... ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. ഒറ്റസംഖ്യകളായ 1, 3, 5, ... ഉം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടേയും പൊതുവ്യത്യാസം 2 തന്നെ.

2 കൊണ്ടു പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന (അഥവാ, ശിഷ്ടം 0 ആയ) എണ്ണൽസംഖ്യകളാണല്ലോ, ഇരട്ട സംഖ്യകൾ; ശിഷ്ടം 1 വരുന്നവ ഒറ്റസംഖ്യകളും.

ഇതുപോലെ 3 കൊണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2 വരുന്ന മൂന്നു സമാന്തര ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ഹരിക്കുന്നത് 4 കൊണ്ടാണെങ്കിലോ?

ഇനി മറിച്ചു ചിന്തിക്കാം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ഒരു ശ്രേണി എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതിനാൽ, ഈ പദങ്ങളെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?)

3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 7-ാം പദത്തിലെത്താൻ പൊതുവ്യത്യാസം $7 - 3 = 4$ തവണ കൂട്ടണം. കൂട്ടിയ സംഖ്യ $73 - 37 = 36$

അപ്പോൾ, പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 4 മടങ്ങ്, 36; പൊതുവ്യത്യാസം $36 \div 4 = 9$

ആദ്യപദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് രണ്ടുതവണ പൊതുവ്യത്യാസം കുറയ്ക്കണം, അതായത് $37 - (2 \times 9) = 19$

ഇനി ശ്രേണി ആദ്യം മുതൽ എഴുതാമല്ലോ:

$$19, 28, 37, \ldots$$

ഈ ശ്രേണിയിലെ 25-ാം പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

പല വഴികളുണ്ട്

3-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 3) = 22$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$37 + (22 \times 9) = 235$$

2-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 2) = 23$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$28 + (23 \times 9) = 235$$

1-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 1) = 24$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$19 + (24 \times 9) = 235$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടു പദങ്ങളും അവയുടെ പദസ്ഥാനങ്ങളും അറിഞ്ഞാൽ ശ്രേണി മുഴുവൻ കണക്കാക്കാം. അതിനു പയോഗിക്കുന്ന തത്വം എന്താണ്?

സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം, അവയുടെ സ്ഥാനങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിലും പറയാം:

സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പദവ്യത്യാസം, സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്; ആനുപാതികസ്ഥിരം പൊതുവ്യത്യാസവും.

ഒരു സംഖ്യ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ശ്രേണീ നിയമം

3, 5, 7, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്?

ഇവിടെ സമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ അടുത്ത പദം 9 തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ഉദ്ദേശിച്ചത് ഒറ്റസംഖ്യകളായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത പദം 11 ആണ്.

എന്താണിതിന്റെ ഗുണപാഠം? കുറേ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയതിൽ നിന്ന്, ശ്രേണിയിലെ തുടർന്നുള്ള പദങ്ങൾ കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ല. ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച നിയമം, അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭം വ്യക്തമാക്കിയാലേ, തുടർന്നുള്ള പദങ്ങളെന്തെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കൂ.

ഈ ശ്രേണികൾ നോക്കൂ:

$$x_n = 2n - 1$$
$$x_n = n^2 - n + 1$$
$$x_n = n^3 - 3n^2 + 4n - 1$$

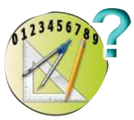
എല്ലാറ്റിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ 1, 3 തന്നെയല്ലേ?

ഉദാഹരണമായി നേരത്തെ എഴുതിയ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം;

$$19, \ 28, \ 37, \ \ldots$$

ഇതിലെ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 ന്റെ ഗുണിതമാണല്ലോ. മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയും ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 9 ന്റെ ഗുണിതമായാലോ?

ഉദാഹരണമായി 1000 എന്ന സംഖ്യയും, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദമായ 19 ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $1000 - 19 = 981$. ഇത് 9 ന്റെ ഗുണിതമാണ് $(981 = 109 \times 9)$. അപ്പോൾ ആദ്യപദമായ 19 ന്റെ കൂടെ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 109 മടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 1000 കിട്ടുന്നത്. അതിനാൽ 1000 ഈ ശ്രേണിയിലെ 110-ാം പദമാണ്.



100 മുതലുള്ള 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയും 19, 28, 37, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ?

(1) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും ചില സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടില്ല. അവയുടെ സ്ഥാനം ◯ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 24, 42, ◯, ◯, ... (ii) ◯, 24, 42 , ◯, ...

(iii) ◯, ◯, 24, 42, ... (iv) 24, ◯, 42, ◯, ...

(v) ◯, 24, ◯, 42, ... (vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

(2) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ രണ്ടു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തുള്ള പദങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിട്ടുണ്ട്. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) 3-ാം പദം 34
6-ാം പദം 67

(ii) 3-ാം പദം 43
6-ാം പദം 76

(iii) 3-ാം പദം 2
5-ാം പദം 3

(iv) 4-ാം പദം 2
7-ാം പദം 3

(v) 2-ാം പദം 5
5-ാം പദം 2

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 38 ഉം 9-ാം പദം 66 ഉം; 25-ാം പദം എന്താണ്?

(4) 13, 24, 35 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 101 ഒരു പദമാണോ? 1001 ആയാലോ?

(5) 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 3 ശിഷ്ടം വരുന്ന മൂന്നക്കസംഖ്യകൾ എത്രയുണ്ട്?

(6) തന്നിരിക്കുന്ന സമചതുരത്തിൽ, ഓരോ വരിയിലും ഓരോ നിരയിലും സമാന്തരശ്രേണി ആകുന്നവിധത്തിൽ ഒഴിഞ്ഞ കളങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

1, 4, 28, 7 എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് പകരം മറ്റേതെങ്കിലും നാല് സംഖ്യകൾ എഴുതിയാലോ?

1			4
7			28

(7) പട്ടികയിൽ ചില സമാന്തരശ്രേണികളും, ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും നേരെ രണ്ടു സംഖ്യകളും എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യകളോരോന്നും അതത് ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ടാകുമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ശ്രേണി	സംഖ്യ	ഉണ്ട്/ഇല്ല
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$	3	
	4	

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

ഇനി ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം നോക്കാം. ആദ്യം

$$19, 28, 37, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയാകാം. ഇതിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദം കണക്കാക്കാൻ, ഒന്നാം സ്ഥാനവുമായുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം, പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒന്നാം പദമായ 19 നോട് കൂട്ടണം. ഉദാഹരണമായി, ഇതിലെ 15-ാം പദത്തിന് ഒന്നാം സ്ഥാനവുമായുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $15 - 1 = 14$; അപ്പോൾ 15-ാം പദം കണക്കാക്കാൻ ആദ്യപദമായ 19 നോട് പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 ന്റെ 14 മടങ്ങ് കൂട്ടിയാൽ മതി.

$$15\text{-ാം പദം } 19 + (14 \times 9) = 145$$

ഇരുപതാം പദമോ?

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, n എന്ന ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ എടുത്താലും, n-ാം പദം

$$19 + (n - 1) \times 9 = 9n + 10$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 9n + 10$$

ഇനി

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \dots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണി ആയാലോ?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ആലോചിച്ചാൽ, n-ാം പദം

$$\frac{1}{2} + (n - 1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

അതായത്, ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{1}{4}(n + 1)$$

ആദ്യത്തെ ശ്രേണിയിൽ, സ്ഥാനസംഖ്യയായ n നെ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 10 കൂട്ടുന്നു; രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയിൽ, $\frac{1}{4}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $\frac{1}{4}$ കൂട്ടുന്നു.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഈ രൂപത്തിലാണോ?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം f എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും എടുത്താൽ, അതിലെ n-ാം പദം

$$f + (n - 1)\, d = dn + (f - d)$$

അതായത്, n നെ d എന്ന സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക.

അപ്പോൾ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം, സ്ഥാനസംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ്. അതായത്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

മറിച്ച്, $x_n = an + b$ എന്ന ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാകുമോ?

ഇതിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ടു പദവും $an + b$, $a(n + 1) + b$ എന്നതായിരിക്കുമല്ലോ; ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$a(n + 1) + b - (an + b) = a$$

അതായത്, അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം a തന്നെ ആണ്.

അതിനാൽ ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി

Sequence [Circle [A, n], n, 1, 10]

എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ, A കേന്ദ്രവും, ആരം 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആയ വൃത്തങ്ങൾ കിട്ടും. വൃത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറ്റാൻ, m എന്ന ഒരു integer slider ഉണ്ടാക്കി, നിർദേശം മാറ്റിയാൽ മതി.

Sequence [Circle [A , n], n, 1, m]

ഇനി ഇതിലെ n നു പകരം 2n എന്നോ 2n + 1 എന്നോ മാറ്റി, ആരങ്ങൾ ഇരട്ടസംഖ്യകളോ, ഒറ്റസംഖ്യകളോ മാത്രമാക്കാം.

Min = 0 ആയി a, b എന്ന രണ്ടു Slider ഉണ്ടാക്കി നിർദേശം

Sequence [Circle [A , an + b], n, 1, m]

എന്നാക്കിയാൽ, a, b മാറ്റി, ആരങ്ങൾ പല സമാന്തരശ്രേണിയിലാക്കാം.

ഒരു സമഷഡ്ഭുജം വരച്ച്, അതിന്റെ മൂലകളിലെല്ലാം ഇത്തരം വൃത്തശ്രേണികൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

m എന്ന ഒരു integer സ്ലൈഡറും a, b എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകളും നിർമിച്ച് Sequence (an + b, n, 1, m) എന്ന input നൽകിയാൽ a, b ഇവ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത സമാന്തരശ്രേണികൾ കിട്ടും. m മാറ്റി പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും മാറ്റാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ a, b നിശ്ചിതസംഖ്യകളാണ്. മറിച്ച് ഈ രൂപത്തിലുള്ള ഏത് ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

$x_n = an + b$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, പൊതുവ്യത്യാസം a ആണെന്നും കാണാം. ആദ്യത്തെ പദമോ?

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടർച്ചയായി $\frac{1}{3}$ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $\frac{1}{3}n + b$ എന്നാണ്. ഇതിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യപദം $\frac{1}{3} + b$ അപ്പോൾ

$$\frac{1}{3} + b = \frac{1}{2}$$

എന്നും അതിൽ നിന്ന്

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

എന്നും കാണാം. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

എന്നും കിട്ടും.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം ഭിന്നസംഖ്യയായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x_n = \frac{2n+1}{6}$$

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റു ചില കാര്യങ്ങളും മനസ്സിലാക്കാം. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം അംശം ഒറ്റസംഖ്യയും, ഛേദം 6 ഉം ആണ്. ഒറ്റസം ഖ്യകൾക്കൊന്നും 2 ഘടകമല്ല; അതിനാൽ 6 ഉം ഘടകമല്ല. അപ്പോൾ ശ്രേണി യിലെ ഒരു പദവും എണ്ണൽസംഖ്യ അല്ല.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിൽ എണ്ണൽസംഖ്യകളൊന്നു മില്ല. $\frac{1}{2}$ ൽ തുടങ്ങി, $\frac{1}{4}$ വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലോ?

(1) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 12 ഉം, 12-ാം പദം 8 ഉം ആണ്. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

(2) എട്ടാംക്ലാസ്സിലെ പക്ഷിക്കണക്ക് (**സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം) അൽപമൊന്നുമാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കാം.

പക്ഷി പറഞ്ഞു.

"ഞങ്ങളും, ഞങ്ങളോളവും, ഞങ്ങളിൽ പകുതിയും, അതിൽ പകുതിയും ഒന്നും ചേർന്നാൽ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാകും"

പക്ഷികളുടെ എണ്ണമാകാവുന്ന സംഖ്യകൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക. എണ്ണം ഇതിലെ ഓരോ സംഖ്യയാകുമ്പോഴും പക്ഷി പറഞ്ഞ തുകയും ക്രമമായെഴുതുക.

ഈ രണ്ടു ശ്രേണികളുടെയും ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{6}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{2}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും ഇല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

(5) 4, 7, 10, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങൾ ഈ ശ്രേണിയിൽ തന്നെ ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂർണവർഗങ്ങളൊന്നും ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) $\frac{11}{8}, \frac{14}{8}, \frac{17}{8}, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പൂർണസംഖ്യാപദങ്ങളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഇത് സമാന്തരശ്രേണി ആണോ?

തുകകളും പദങ്ങളും

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ച് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ? (**സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **മൂന്നു സംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗം)

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$$
$$2 + 3 + 4 = 9 = 3 \times 3$$
$$3 + 4 + 5 = 12 = 3 \times 4$$

എന്നിങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങു കിട്ടുമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ട്; തുടർന്ന്, അടുത്തടുത്തുള്ള അഞ്ച് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങാണെന്നും കണ്ടു (**മറ്റൊരുമാർഗം** എന്ന ഭാഗം).

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെയെന്നും ബീജഗണിതത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം: അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x - 1$, അവസാനസംഖ്യ $x + 1$. ഇവയുടെ തുകയോ?

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$$

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അഞ്ചായാൽ,

$$(x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) = 5x$$

ഇവിടെ വേറൊരു വഴിക്കും ചിന്തിക്കാം: അടുത്തടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കു പകരം, അടുത്തടുത്ത ഇരട്ടസംഖ്യകളായാലോ?

$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \times 4$$
$$4 + 6 + 8 = 18 = 3 \times 6$$
$$6 + 8 + 10 = 24 = 3 \times 8$$
....

അഞ്ച് ഇരട്ടസംഖ്യകളായാലോ? ഒറ്റസംഖ്യകൾക്കും ഇതു ശരിയാണോ? എന്നെല്ലാം ആലോചിക്കാം.

തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, ഇരട്ടസംഖ്യകൾ, ഒറ്റസംഖ്യകൾ ഇവയെല്ലാം സമാന്തരശ്രേണികളല്ലേ? അപ്പോൾ ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം പൊതുവെ സമാന്തര ശ്രേണികൾക്കും ശരിയാകുമോ എന്നാലോചിക്കാമല്ലോ?

ഏതെങ്കിലും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക നോക്കാം. നടുവിലെ പദം x എന്നെടുക്കാം. അപ്പുറത്തുമിപ്പുറത്തുമുള്ള പദങ്ങൾ എഴുതാൻ പൊതുവ്യത്യാസം എന്തെന്നറിയണം. പൊതുവ്യത്യാസം y എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x - y$, മൂന്നാമത്തെസംഖ്യ $x + y$.

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെയും തുക

$$(x - y) + x + (x + y) = 3x$$

അപ്പോൾ

> ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 12 എന്നറിഞ്ഞാൽ, രണ്ടാമത്തെ പദം 4 എന്നു കണക്കാക്കാം. മറിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെ പദം 10 എന്നറിഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 30 എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ അഞ്ചു പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലോ? ഏഴു പദങ്ങളായാലോ? ഈ ചിന്തകളിലൂടെ കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ: ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം 10 ഉം ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 250 ഉം ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 250 ആയതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ (നടുവിലെ) പദം 50 എന്നു കണക്കാക്കാമല്ലോ (എങ്ങനെ?) ഒന്നാം പദം 10 ഉം മൂന്നാം പദം 50 ഉം ആയതിനാൽ, പൊതുവ്യത്യാസം 20 എന്നു കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ശ്രേണി 10, 30, 50, ... എന്നു കാണാം.

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയെ സംബന്ധിച്ച് മറ്റൊരു കാര്യംകൂടി കാണാം: ആദ്യപദവും നടുവിലെ പദവും മൂന്നാം പദവും കൂട്ടിയപ്പോൾ, നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മുന്നു മടങ്ങായി; അപ്പോൾ ആദ്യപദവും അവസാന

പദവും മാത്രം കൂട്ടിയാൽ നടുവിലെ പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണ്ടേ? (ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങും ചേർന്നതാണല്ലോ മൂന്നു മടങ്ങ്)

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളെടുത്താൽ ആദ്യപദത്തിന്റെയും അവസാനപദത്തിന്റെയും തുകയുടെ പകുതിയാണ് നടുവിലെ പദം.

അടുത്തടുത്ത അഞ്ചു പദങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും കൂട്ടിയാലോ? രണ്ടാമത്തെയും നാലാമത്തെയും പദങ്ങളായാലോ?

ഇതുപോലെ അടുത്തടുത്ത ഏഴു പദങ്ങളിൽ, നടുക്കുനിന്ന് ഇരുവശത്തും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള പദങ്ങളുടെ ജോടികൾ കൂട്ടിനോക്കൂ.

ഇതുവരെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യ ആയിട്ടാണ് എടുത്തത്. ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാലോ?

ഏതെങ്കിലുമൊരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ നാലു പദങ്ങളെടുത്തു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 5, 8, 11, 14 ഇതിൽ നടുക്ക് എന്നു പറയാൻ ഒരു പദം ഇല്ലാത്തതിനാൽ, ആദ്യം കണ്ട പൊതുതത്വം പോലെ ഒന്നും പറയാൻ കഴിയില്ല. രണ്ടാമതു ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും പദങ്ങളുടെ ജോടിയും, രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ ജോടിയും കൂട്ടി നോക്കാം: $5 + 14 = 8 + 11$

ആറു പദങ്ങളായാലോ? ഏതൊക്കെ ജോടികളുടെ തുകകളാണ് തുല്യമാകുന്നത്?

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയെയും പൊതുവെ $an + b$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. ഇതിലെ നാലാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും പദങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ്? അവയുടെ തുകയോ?

$$(4a + b) + (5a + b) = 9a + 2b$$

ഇതേ തുക കിട്ടുന്ന മറ്റു രണ്ടു പദങ്ങൾ പറയാമോ?

9 നെ $2 + 7$ എന്നും എഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെയും ഏഴാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക എന്താണ്?

ഇതേ തുക കിട്ടുന്ന മറ്റൊരു ജോടി?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അഞ്ചാമത്തെയും പത്താമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടുന്ന മറ്റു രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങൾ പറയാമോ?

ഇതിൽനിന്നെല്ലാം കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ജോടി സ്ഥാനങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണെങ്കിൽ, ആ സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമായിരിക്കും.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ: ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം 5 ഉം ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളുടെ തുക 105 ഉം ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളെ ഒരേ തുക വരുന്ന മൂന്നു ജോടികളാക്കാമല്ലോ.

- ഒന്നാമത്തെയും ആറാമത്തെയും
- രണ്ടാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും
- മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും

ആറു പദങ്ങളും ഒരുമിച്ചു കൂട്ടിയാൽ 105; അപ്പോൾ ഓരോ ജോടിയുടെയും തുക $105 \div 3 = 35$ എന്നു കണക്കാക്കാം. ഒന്നാമത്തെയും ആറാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക ഇതാണ്. ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ 5 എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്ന് ആറാംപദം 30 എന്നു കിട്ടും. ആദ്യത്തെയും ആറാമത്തെയും പദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു പദങ്ങളെല്ലാം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

?

(1) ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ തുക 30 ആകുന്ന മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം 1 ഉം, ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു നാലു പദങ്ങളെടുത്താലും രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക, നടുക്കുള്ള രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ആയ നാല് സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(5) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(ii) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(iii) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(iv) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(6) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 150 ഉം ആദ്യത്തെ പത്തു പദങ്ങളുടെ തുക 550 ഉം ആണ്.

(i) ശ്രേണിയുടെ മൂന്നാം പദം എന്താണ്?

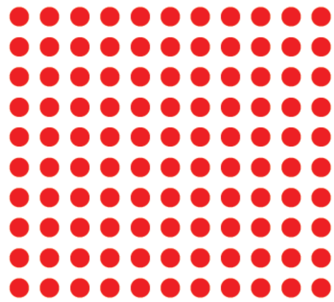
(ii) എട്ടാം പദം എന്താണ്?

(iii) ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(7) ഒരു പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്. അതിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ കോണിന്റെ വലുപ്പം 36° യിൽ കൂടുതലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

തുകകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ചിത്രത്തിൽ ആകെ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോന്നായി എണ്ണേണ്ട കാര്യമില്ലല്ലോ. ഓരോ വരിയിലും 11, അങ്ങനെ 10 വരികൾ; ആകെ $10 \times 11 = 110$

ഈ ത്രികോണത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോ വരിയായി എണ്ണിയെടുക്കാം:

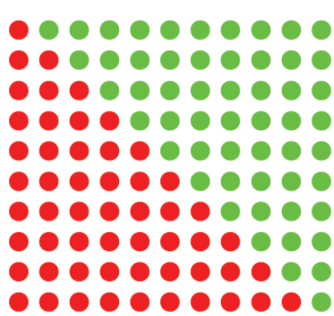
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

ഇതിനും എളുപ്പവഴി വല്ലതുമുണ്ടോ?

ഇതിനെ ചതുരമാക്കിയാലോ?

അതിന് ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക.

ഇത് തലകീഴായി, ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ഇങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുക.



നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു. എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല. അതുപോലെ, π യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന $3, 1, 4, 1, 5, 9, \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയിലേയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളു.

ഈ ചതുരത്തിൽ, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $10 \times 11 = 110$ പൊട്ടുകളുണ്ട്. ഒരു ത്രികോണത്തിലോ? 110 ന്റെ പകുതി 55

ചിത്രമുപയോഗിച്ച് ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം.

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുക്കാം. തുക തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

അപ്പോൾ

$$s = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

ഇതുപോലെ 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളും കൂട്ടിയെടുക്കാമല്ലോ.

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$
$$s = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned} 2s &= \overbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 + 101}^{100\ \text{എണ്ണം}} \\ &= 100 \times 101 \end{aligned}$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 നു പകരം ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ രീതിയിൽ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്,

ഒന്നു മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവസാന സംഖ്യയുടെയും അതിനടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം. എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ. അപ്പോൾ

ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടില്ലേ? നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രെ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നുതന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ. ആകെ തുക
$50 \times 101 = 5050$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന്

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകൾ

$$2, 4, 6, \ \ldots, \ 2n$$

ഇവയുടെ തുക

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n\,(n + 1)$$

ഇതുപോലെ 3 ന്റെ ആദ്യത്തെ n ഗുണിതങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാം.

$$x_n = 2n - 1$$

ഇതിൽ $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായെടുത്താൽ, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി കിട്ടും. അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$x_1 = (2 \times 1) - 1$$
$$x_2 = (2 \times 2) - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = (2 \times n) - 1$$

ഇവയെല്ലാം മുകളിൽ നിന്ന് താഴോട്ട് കൂട്ടിയാലോ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= \big((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)\big) - \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{n \text{ എണ്ണം}} \\ &= 2\,(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

ഇതിൽ

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

എന്നത് ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \times \frac{n\,(n+1)}{2} - n = n^2$$

എന്നു കാണാം.

അതായത്, 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ഇത് ഏഴാം ക്ലാസിൽ, **വർഗവും വർഗമൂലവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **പൂർണ വർഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോളതിന്റെ ഗണിതപരമായ തെളിവുമായി.

ഇതുപോലെ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുക കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നെഴുതി, കൂട്ടാം.

$$x_1 = a + b$$

$$x_2 = 2a + b$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = na + b$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \ldots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= a\,(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$

$$= a\,\frac{n(n+1)}{2} + nb$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$\boldsymbol{x_n = an + b}$$

ആണെങ്കിൽ, അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a\,\frac{n(n+1)}{2} + bn}$$

ഉദാഹരണമായി

$$1, 4, 7, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് നോക്കാം. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 3n - 2$$

അപ്പോൾ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{100 \times 101}{2} + \big((-2) \times 100\big) = 14950$$

വർഗങ്ങളുടെ തുക

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നതും ഒരു സർവസമവാക്യമാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന്, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ എന്നെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \frac{3}{2}\,n(n+1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}\,n(n+1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$$

എന്നാക്കാം.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അൽപം മാറ്റിയെഴുതാം.

$$a\,\frac{n(n+1)}{2} + bn = \frac{1}{2}n\,(a\,(n+1) + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n\,((an+b) + (a+b))$$

ഇതിൽ $an+b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ n-ാംപദമായ x_n ഉം, $a + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ 1-ാം പദമായ x_1 ഉം ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}n\,(x_n + x_1)$$

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇതനുസരിച്ച് 1, 4, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം 100-ാം പദം കണക്കാക്കുക.

$$1 + (99 \times 3) = 298$$

ഇനി ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (298 + 1) = 14950$$

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് പൊതുവായ ഒരു ബീജഗണിതരൂപമുണ്ട്. ഇതു കാണാൻ, തുക ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$a\,\frac{n(n+1)}{2} + nb = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

ഇതിൽ $\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}a + b$ എന്നിവ ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ തുക, n^2 നെയും n നെയും നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയതാണ്.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണാൻ sum എന്ന നിർദേശം ഉപയോഗിക്കാം.

L = Sequence (n^2, n, 1, 10) എന്ന് input നിർദേശം കൊടുത്താൽ L എന്ന പേരിൽ ആദ്യത്തെ പത്ത് വർഗസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ലഭിക്കും. sum(L) എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകളുടെ തുക കിട്ടും. sum (n^2, n, 1, 10) എന്ന് നിർദേശം നേരിട്ട് കൊടുത്താലും മതി. 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടാൻ sum (3n+2, n, 1, 20) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഈ ശ്രേണിയുടെ 10 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ sum(3n+2, n, 10, 20) എന്നു കൊടുക്കണം.

അതായത്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $pn^2 + qn$ എന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി, 3, 10, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $7n - 4$ എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയോ?

$$7 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n = \frac{1}{2}\,(7n^2 - n)$$

വിസ്തരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, $\frac{1}{2}\,(7n^2 - n)$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, നമ്മുടെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദമായ 3 കിട്ടും, $n = 2$ എന്നെടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 13 കിട്ടും; $n = 3$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 30 കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം: ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + n$ ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ്?

അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ മതി, അതായത്, $(3 \times 1^2) + 1 = 4$ ആണ് ആദ്യപദം.

ഇനി തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപമായ $3n^2 + n$ ൽ $n = 2$ എന്നെടുത്താലോ?

ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടും. അതായത്, $(3 \times 2^2) + 2 = 14$ ആണ് ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക. ആദ്യത്തെ പദം 4 എന്നു കണ്ടല്ലോ, അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ പദം $14 - 4 = 10$. ഇനി ശ്രേണി എഴുതാമല്ലോ: 4, 10, 16, ... ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $6n - 2$ എന്നു കണക്കാക്കാനും വിഷമമില്ല.

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം

$$4, 10, 16, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$x_n = 6n - 2$$

ഇതിലെ ആദ്യപദം, ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കിയാൽ

$$4, 14, 30, \ldots$$

എന്ന മറ്റൊരു ശ്രേണി കിട്ടുമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$y_n = 3n^2 + n$$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക കാണാൻ പൈഥൻ ഭാഷയിലെ sum ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ നൂറു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി.

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

(i) 11, 22, 33, ... (ii) 12, 23, 34, ...

(iii) 21, 32, 43, ... (iv) 19, 28, 37, ...

(v) 1, 6, 11, ...

(2) 6, 10, 14, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകയും അടുത്ത 20 പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

(3) 6, 10, 14, ..., എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും 15, 19, 23, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക.

(4) ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $n^2 + 2n$ (ii) $2n^2 + n$

(iii) $n^2 - 2n$ iv) $2n^2 - n$

v) $n^2 - n$

(6) ചുവടെയുള്ള സമാന്തരശ്രേണികളുടെ തുകകൾ, മനസിൽ കണക്കാക്കുക.

(i) $51 + 52 + 53 + ... + 70$

(ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

(7) 16, 24, 32, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറെ പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ കൂടെ 9 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ പൂർണ വർഗമാണെന്ന് സമർഥിക്കുക.

(8)

1			
2	3		
4	5	6	
7	8	9	10

....

....

(i) മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ടു വരികൾ എഴുതുക.

(ii) 10-ാം വരിയിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(iii) ആദ്യത്തെ പത്തുവരികളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണുക.

(9)

4			
7	10		
13	16	19	
22	25	28	31

....

....

....

മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ട് വരികൾ എഴുതുക. 20-ാം വരിയിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

ഗവേഷണം

- ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ കൃതികളെല്ലാം അതിലെതന്നെ പദങ്ങളായ സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ആദ്യത്തെ പദം മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും, പൂർണവർഗങ്ങൾ കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.