



UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

FÍSICA COMPUTACIONAL

---

# Oscilador de Van Der Pol

---

*Alumno:*

Martha Anahí Iñiguez Beltrán

214202804

18 de abril del 2018

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción - Antecedentes</b>	<b>2</b>
1.1	Historia . . . . .	2
1.2	Forma Bidiimensional . . . . .	2
<b>2</b>		<b>3</b>
2.1	Hamiltoniano para el oscilador Van der Pol . . . . .	3
2.2	El oscilador de Van der Pol forzado . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Exploración de las soluciones del modelo en el espacio fase</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Conclusión</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Apéndice</b>	<b>9</b>

# 1 Introducción - Antecedentes

En ésta actividad estudiaremos el oscilador de Van Der Pol, el cual es un oscilador con amortiguamiento no lineal. Su evolución temporal obedece a una ecuación diferencial de segundo orden en la que  $x$  es la posición, función del tiempo  $t$ , y  $\mu$  es un parámetro escalar que gobierna la no linealidad y el amortiguamiento.

## 1.1 Historia

El oscilador de van der Pol fue descrito por el ingeniero y físico Balthasar van der Pol mientras trabajaba en Philips. Van der Pol encontró oscilaciones estables, que llamó oscilaciones de relajación, conocidas en la actualidad como ciclos límite, en circuitos que usaban válvulas de vacío. Cuando esos circuitos se hacen funcionar cerca del ciclo límite entran en acoplamiento y la señal entra en fase con la corriente. Van der Pol y su colega, van der Mark, informaron en el número de septiembre de 1927 de Nature que para determinadas frecuencias aparecía un ruido irregular, siempre cerca de las frecuencias de acoplamiento. Fue uno de los primeros descubrimientos experimentales de la Teoría del caos.

La ecuación de van der Pol tiene una larga historia en física y biología. Por ejemplo, en biología, Fitzhugh y Nagumo aplicaron la ecuación a un campo bidimensional en el modelo de FitzHugh-Nagumo para describir el potencial de acción de las neuronas. También se ha usado en sismología para modelar el comportamiento de dos placas en una falla.

## 1.2 Forma Bidimensional

Según el teorema de Liénard, el sistema tiene un ciclo límite. Su forma bidimensional se puede encontrar de dos formas, aplicando dos transformaciones distintas, una es:  $y = x - x^3/3 - \dot{x}/\mu$ ,  $y = x - x^3/3 - \dot{x}/\mu$ , donde el '.' indica derivada, obteniendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu \left( x - \frac{1}{3}x^3 - y \right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\mu}x\end{aligned}$$

La forma se basa en la transformación  $y = \dot{x}$ , llevándonos a encontrar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x\end{aligned}$$

## 2

Dos de las características más interesantes para este tipo de oscilador se dan cuando:  $\mu = 0$ , ya que no interviene el amortiguamiento y la ecuación toma la forma de un oscilador armónico simple, permitiendo siempre la conservación de la energía. La otra situación es cuando  $\mu > 0$ , porque el sistema entra en un ciclo límite, donde cerca del origen, éste es inestable y, lejos del origen, el sistema está amortiguado.

### 2.1 Hamiltoniano para el oscilador Van der Pol

De igual manera se puede escribir un Hamiltoniano independiente del tiempo para el oscilador, esto se logra aumentándolo a un sistema dinámico autónomo, utilizando una ecuación diferencial no lineal de segundo orden como el que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x &= 0 \\ \ddot{y} + \mu(1 - x^2)\dot{y} + y &= 0\end{aligned}$$

El oscilador no se ve afectado debido al acoplamiento unidireccional entre las evoluciones temporales de las variables  $x$  e  $y$ . Se puede demostrar que una  $H$  Hamiltoniana para este sistema de ecuaciones es:

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x p_y + xy - \mu(1 - x^2) y p_y$$

donde  $p_x y p_y$  son los momentos conjugados correspondientes a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Logrando así una manera de conducir a la cuantificación del oscilador Van der Pol.

### 2.2 El oscilador de Van der Pol forzado

El oscilador de Van der Pol forzado adapta la función 'original' agregando una función de la forma  $A \sin(\omega t)$ , resultando una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x - A \sin(\omega t) = 0$$

donde  $A$  es la amplitud, o desplazamiento, de la función de onda y  $\omega$  es su velocidad angular.

### 3 Exploración de las soluciones del modelo en el espacio fase

A continuación, mostraremos el comportamiento del oscilador de Van Der Pol generando las gráficas que aparecen en el artículo extraído de Wikipedia. Para ésto utilizaremos un código un poco similar al utilizado en las actividades anteriores, más exactamente en la 6 y 7.

El código base es el siguiente:

```
from numpy import *
import pylab as p
# Definition of parameters
mu= 2.0
def dX_dt(X, t=0):
    xp=X[1]
    yp=mu*(1-X[0]**2)*X[1]-X[0]
    return array([xp, yp ])

from scipy.integrate import odeint
from scipy import array
import matplotlib.pyplot as plt

stoptime = 15.0
numpoints = 5000

#Tiempo
t = [stoptime * float(i) / (numpoints - 1) for i in range(numpoints)]

#Condiciones iniciales
x0 = -1
v0 = 3

#Resolver ecuaciones
x, y = odeint(dX_dt,(x0,v0),t).T

with open('Prueba4.dat', 'w') as archivo:
    for t1, x1,y1 in zip(t, x, y):
        print (t1, x1,y1 ,file=archivo)

from numpy import loadtxt
```

```
from numpy import *
import pylab as p
from matplotlib.font_manager import FontProperties
from scipy import integrate
%matplotlib inline

#-----
# define a grid and compute direction at each point
nb_points = 20

x = linspace(-6, 6, nb_points)
y = linspace(-6, 6, nb_points)

X1 , Y1 = meshgrid(x, y)                # create a grid
DX1, DY1 = dX_dt([X1, Y1])              # compute growth rate on the gridt
M = (hypot(DX1, DY1))                    # Norm of the growth rate
M[ M == 0] = 1.                          # Avoid zero division errors
DX1 /= M                                # Normalize each arrows
DY1 /= M

#-----
# Draw direction fields, using matplotlib 's quiver function
# I choose to plot normalized arrows and to use colors to give information on
# the growth speed

Q = p.quiver(X1, Y1, DX1, DY1, M, pivot='mid', cmap=p.cm.bone)
p.grid()

lw=2

t1, x1, y1 = loadtxt('Prueba4.dat', unpack=True)

p.plot(x1, y1, 'blue', linewidth=lw)

p.xlim(-6, 6)
p.ylim(-6, 6)
```

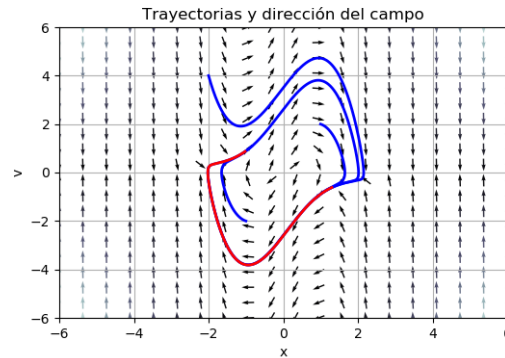


Figure 1: Trayectorias y dirección del campo

```
p.xlabel('x')
p.ylabel('v')

p.title('Trayectorias y dirección del campo')
p.savefig('Prueba4.png', dpi=100)
```

En la segunda imagen se cambiaron los coeficientes de amortiguamiento del Oscilador generando la gráfica que se aprecia a continuación (Figura 2):

En la siguiente imagen observamos la oscilación de relajación (oscilación estable) generada por el oscilador de Van Der Pol. Aquí se muestra con un coeficiente de amortiguamiento con valor igual a 5 (Figura 3).

Y en ésta última imagen podemos observar cómo al aplicar amortiguamiento sinusoidal el oscilador se comporta de manera caótica. El coeficiente de amortiguamiento no lineal tiene un valor de 8.53 y el forzamiento una amplitud  $A = 1.2$ . La frecuencia angular es de  $2\pi/10$ .

El código para ésta nueva clase de amortiguamiento será:

```
from numpy import *
import pylab as p
import numpy as np
# Definition of parameters
a=1.2
w=(2.0*np.pi)/10.0
mu= 8.53
def dX_dt(X, t=0):
    xp=X[1]
```

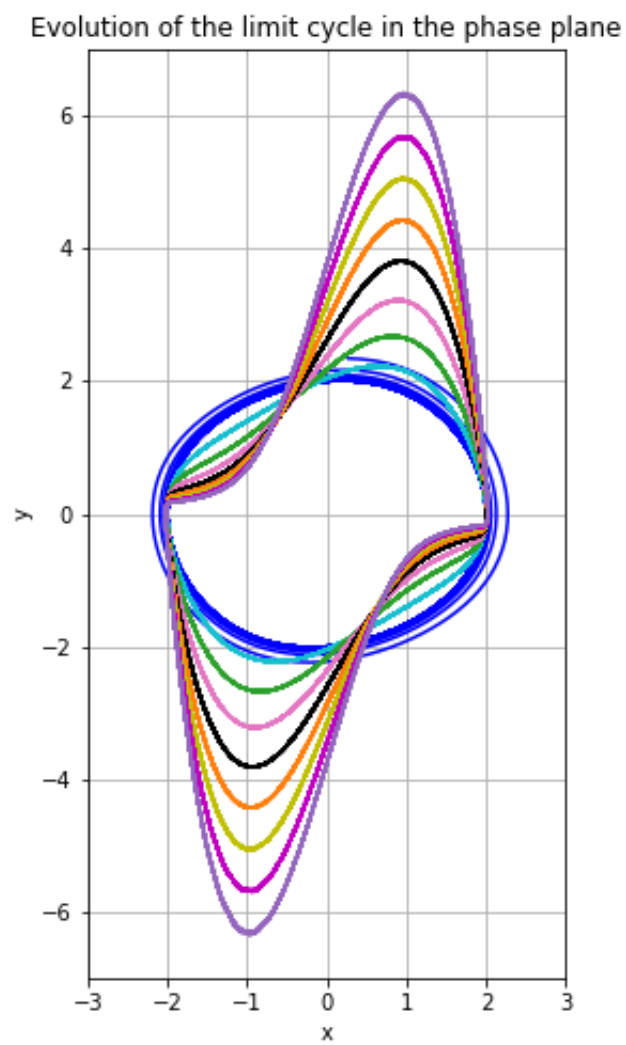


Figure 2: Evolución del ciclo límite en el espacio fase.



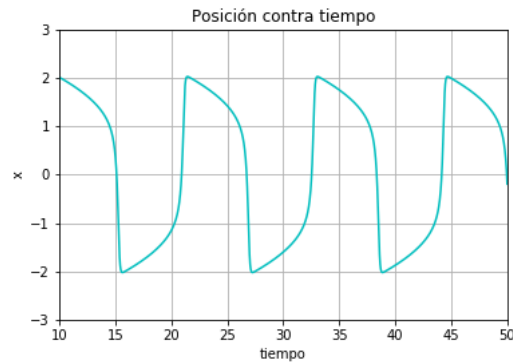


Figure 3: Posicion contra el tiempo.

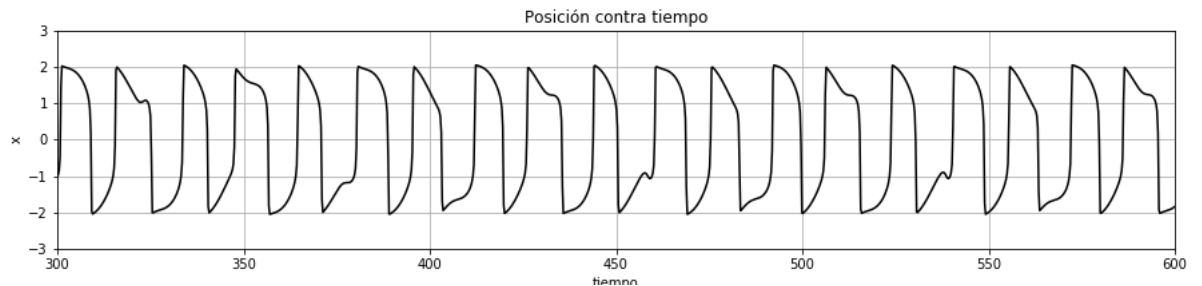


Figure 4: Posicion contra el tiempo.

```
yp=mu*(1-X[0]**2)*X[1]-X[0]+a*np.sin(w*t)
return array([xp, yp])
```

```
from scipy import integrate
t = linspace(300, 600, 1200)           # time
X0 = array([-1.0, 0.0])                 # initials conditions: 10 rabbits and 5
X, infodict = integrate.odeint(dX_dt, X0, t, full_output=True)
infodict['message']
```

## 4 Conclusión

Pudimos observar cómo en la primera imagen, en tiempos distintos, siempre se llega al ciclo límite y que el campo direccional nos indica la trayectoria fase.

De la segunda imagen, se pudo apreciar cómo afectaba el coeficiente de amor-

tiguamiento del oscilador, incluso cuando el coeficiente era pequeño. Podemos notar como al crecer el coeficiente, los extremos forman picos más visibles.

En las últimas figuras tenemos un ejemplo del oscilador forzado y del no forzado. En ambos podemos ver la posición, sin embargo, en el oscilador no forzado, el período de la oscilación es más grande.

## 5 Bibliografía

-Van der Pol Oscillator (2018). Recuperado el 18 de abril del 2018 desde wikipedia.org: [https://en.wikipedia.org/wiki/Van\\_der\\_Pol\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator)

## 6 Apéndice

**Este ejercicio pareciera similar al desarrollado en las actividades 6 y 7. ¿Qué aprendiste nuevo?**

Aprendí a añadir el campo direccional, entre otras cosas.

**¿Qué fue lo que más te llamó la atención del oscilador de Van der Pol?**

Que no importa cual sea el coeficiente de amortiguamiento, el oscilador siempre tendrá un ciclo límite, además de su comportamiento caótico.

**Has escuchado ya hablar de caos. ¿Por qué sería importante estudiar este oscilador?**

Porque el oscilador de Van der Pol presenta un comportamiento caótico. Añadiendo tambien que fue uno de los primeros descubrimientos que confirmaban la teoría del caos de manera experimental.

**¿Qué mejorarías en esta actividad?**

Me hubiera gustado poder hacer un gif con el comportamiento del oscilador.

**¿Algún comentario adicional antes de dejar de trabajar en Jupyter con Python?**

Me pareció un ambiente muy cómodo para trabajar.

**Cerramos la parte de trabajo con Python ¿Que te ha parecido?**

Sencillo de entender y utilizar.