TP n° 1
Recherche de zéro d'une fonction à une seule variable

## I Énoncé

Soit à élaborer des programmes en Python qui déterminent le zéro d'une fonction à une seule variable donnée dans un intervalle[a,b] (fonction réelle d'une variable réelle et **continue** sur l'intervalle en question) par les méthodes de : **dichotomie ; substitution ; Newton-Raphson.**

## II Méthodes de résolution

### II-1 Méthode de dichotomie

On supposera connu un intervalle [a,b] sur lequel la fonction change de signe, c'est à dire f(a)*f(b)<0
On prévoit comme données : les valeurs des bornes **a** et **b** ; la précision désirée **eps**, et le nombre d'itération maximum **Nmax**

**Analyse**

La démarche consiste, après avoir vérifié que l'intervalle donné est convenable de répéter le traitement suivant :

- prendre le milieu m de [a,b] : m=(a+b)/2
- calculer f(m)
- si f(m)=0 le zéro est m
- si f(a).f(m) <0, il existe un zéro dans l'intervalle [a,m], on remplace donc l'intervalle [a,b] par [a,m] en faisant ceci : b=m
- si f(m).f(b)<0, il existe un zéro dans l'intervalle [m,b], on remplace donc l'intervalle [a,b] par [m,b] en faisant ceci : a=me

Le traitement est interrompu soit lorsque l'intervalle [a,b] aura été suffisamment réduit, (b-a<eps,soit lorsque le zéro a été localisé exactement (f(m)=0)

### II-2 Méthode de substitution (point fixe)

**Principe de la méthode**

Si f(x)=0 alors il est possible d'écrire :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=g_1(x) \\ x=g_2(x) \\ \ldots\ldots. \\ x=g_i(x) \end{cases}$$

D'autre part, si on peut estimer la valeur du zéro de la fonction par $x^{(0)}$ on peut obtenir d'autre estimations par :

$$x^{(1)}=g(x^{(0)})$$
$$x^{(2)}=g(x^{(1)})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(n)}=g(x^{(n-1)})$$

On montre que si $\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|<1_{x\in[a,b]}$ où [a,b] est l'intervalle dans lequel la fonction s'annule, le calcul itératif précédant est convergeant.

**Algorithme de la méthode**

- Soit $x^{(0)}$ une estimation de la solution
- Soit eps la précision souhaitée et Nmax le nombre d'itération maximum

Pour k=1 à Nmax

1 calculer $x_{k+1} = g(x_k)$

2 si $|x_{k+1}-x_k|$<eps alors convergence afficher $x_{k+1}$ aller à la fin

3 si k=Nmax alors pas de convergence aller à la fin

4 fin

**II-3 Méthode de Newton-Raphson**

**Principe de la méthode**

Soit x0 une valeur approchée de la solution f(x)=0, En supposant que f(x0) puisse être développée en série de Taylor autour de x0, on a en se limitant à la dérivée du premier ordre :

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0).(x-x_0)+.......$$

Comme f(x)=0 : on peut exprimer x par : $x=x_0-\frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$

La méthode de Newton Raphson consiste à exploiter cette dernière équation dans la formule de récurrence, donnée ci-dessous :

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)} \quad k=0,1,2......$$

**Algorithme de la méthode de Newton Raphson**

Etant donné une précision donnée eps

Un nombre d'itération maximum Nmax

Une solution initiale x0

Pour k=1 à Nmax

1 calculer $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$

2 si $|x_{k+1}-x_k|$<eps alors convergence afficher $x_{k+1}$ aller à la fin

3 si k=Nmax alors pas de convergence aller à la fin

4 fin

**III Travail à effectuer**

0) Ecrire un programme en python qui permet de tracer le graphe de la fonction $f(x)=3x+\sin(x)-e^x$ ceci pour localiser la ou les solution(s) de f(x)=0.
1) Proposer des programmes qui permettent de calculer le zéro de la fonction f(x), en utilisant :
   a) la méthode de dichotomie voir (II-1) ;
   b) la méthode de substitution voir (II-2) ;
   c) la méthode de Newton Raphson (II-3).

2) Comparer les trois méthodes du point de vue :
   - facilité de mise en ouvre ;
   - rapidité de convergence ;
   - sensibilités à la valeur initiale.

3) Conclure