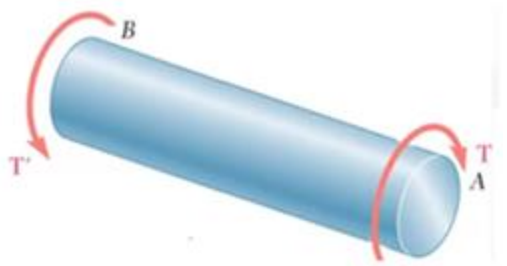
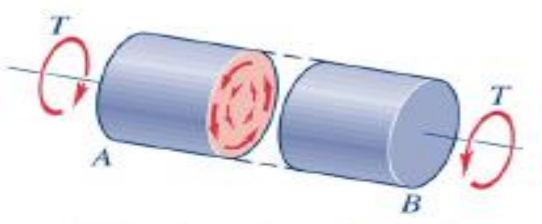
LA TORSION SIMPLE

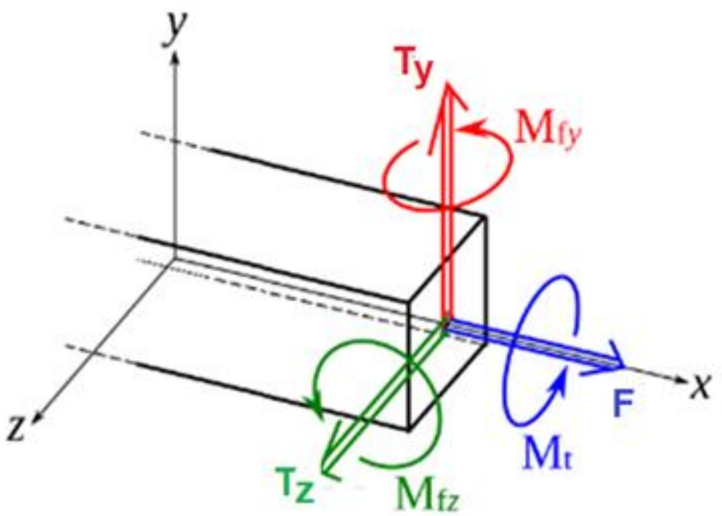
LA TORSION SIMPLE

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés qui tendent à la tordre. Cette sollicitation provoque une contrainte tangentielle (cisaillement) dans le matériau qui y est soumis.





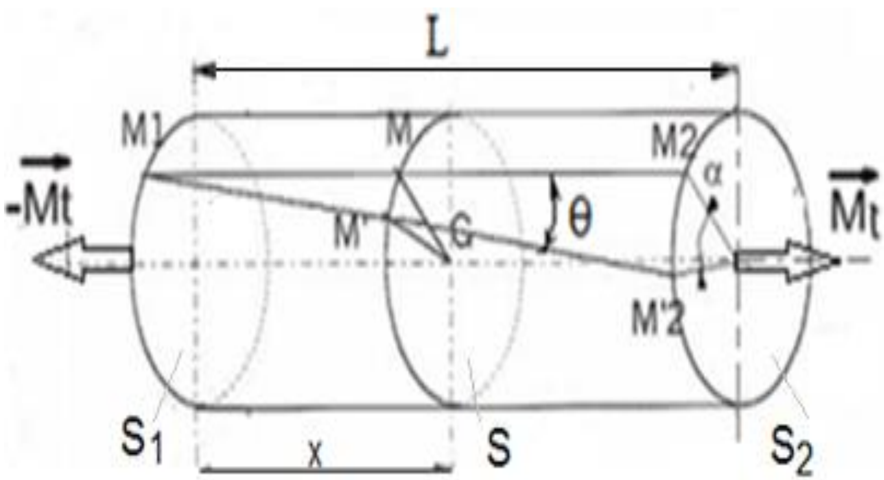
La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé.

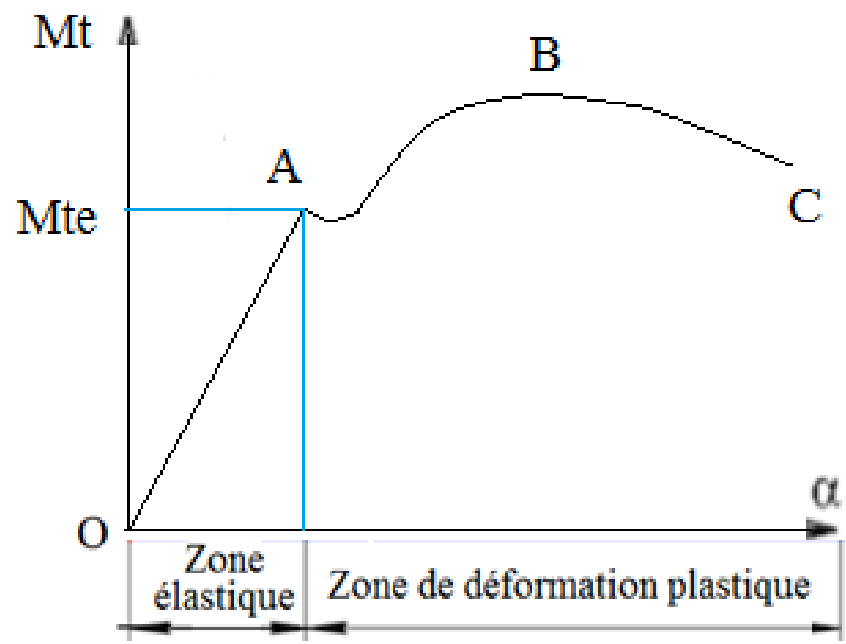


LA TORSION SIMPLE

ESSAI DE TORSION

L'essai de torsion est réalisé sur une éprouvette soumise à deux moments opposés.





$\theta = \alpha / L$

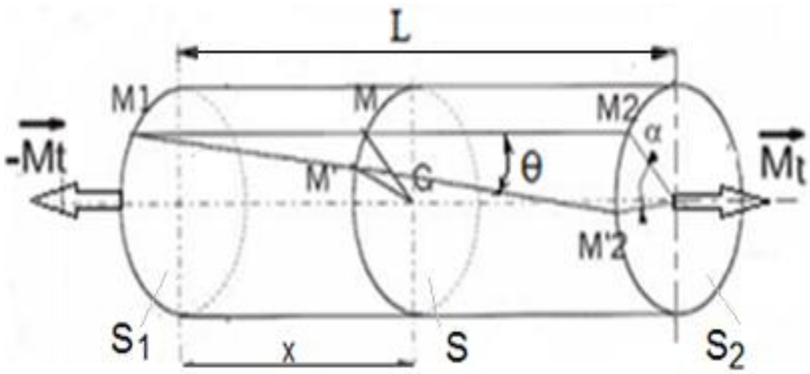
θ: Angle de rotation unitaire (rad/mm)

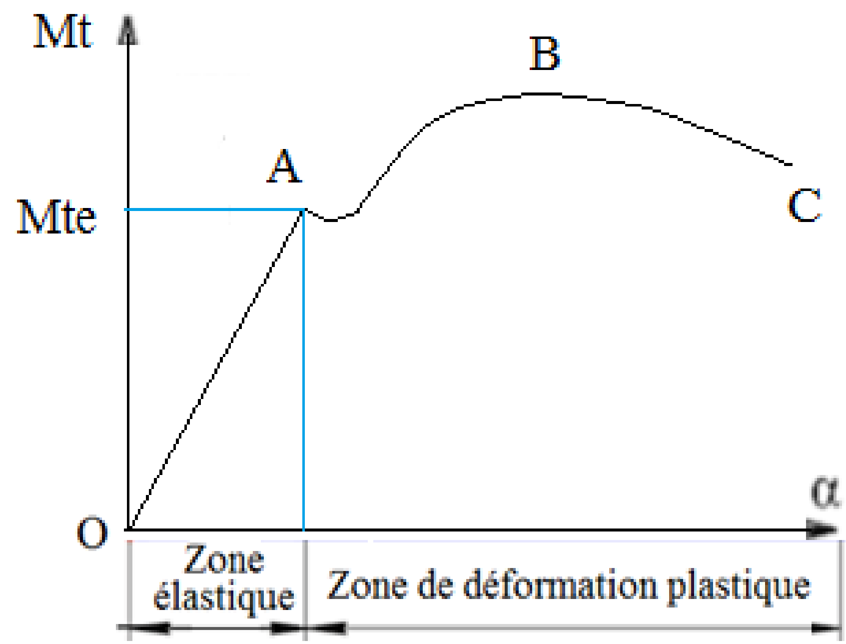
α: Déformation angulaire (rad)

L: Longueur de la pièce (mm)

LA TORSION SIMPLE

ESSAI DE TORSION





$$\theta = \alpha / L$$

Loi de Hooke

$$\tau = G\,\gamma$$

$$tg\gamma = \frac{MM'}{MM_1} = \frac{\rho\,\alpha}{l} = \rho\theta$$

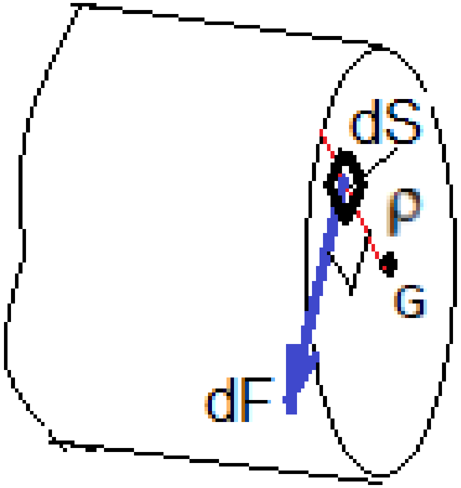
$$\gamma = \rho.\ \theta$$

$$\tau = G.\ \theta.\ \rho$$

Pour $\rho_{max} = R$ $\boxed{\tau_{\ max} = G\ \theta\ R}$

LA TORSION SIMPLE

Pour l'élément de surface dS et une force élémentaire dF



$$Mt = \int \rho \, dF$$

$$Mt = \int \rho \, \tau \, dS$$

A partir des relations $\tau = G.\ \theta.\ \rho$

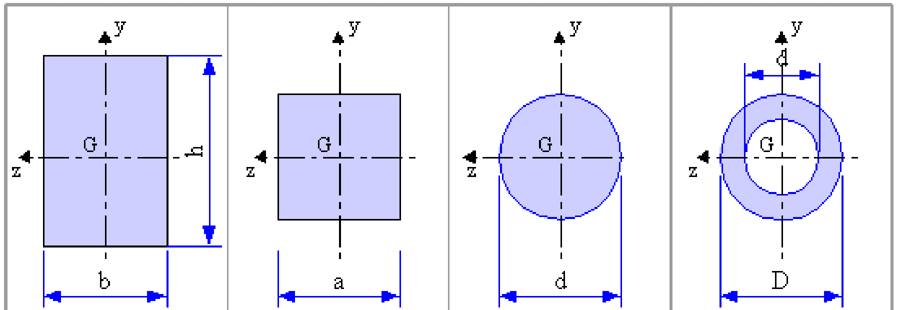
$$Mt = \int \rho \, G.\ \theta.\ \rho \, dS$$

$$Mt = G.\ \theta \int \rho 2 \, dS$$

$$Mt = G.\ \theta.\ Io$$

$$Mt = (\tau/\rho).\ Io$$

$$\boxed{\tau = \rho \frac{M_t}{I_o}}$$

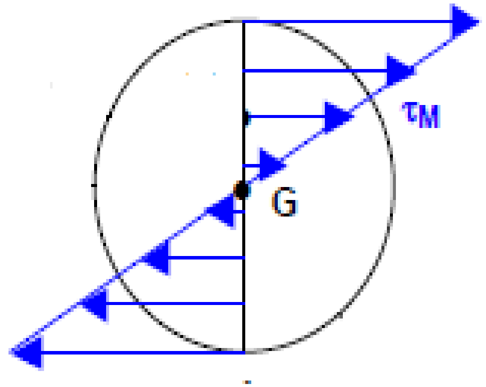


IGz (mm⁴)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi\, d^4}{64}$	$\frac{\pi\,(D^4-d^4)}{64}$
I_0 (mm⁴)	$\frac{bh^3+hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi\, d^4}{32}$	$\frac{\pi\,(D^4-d^4)}{32}$

LA TORSION SIMPLE

CONDITION DE RESISTANCE

$$\tau_{max} \leq R_{pg}$$



$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_o}\rho_{max} \leq R_{pg}$$

Reg = m.Re

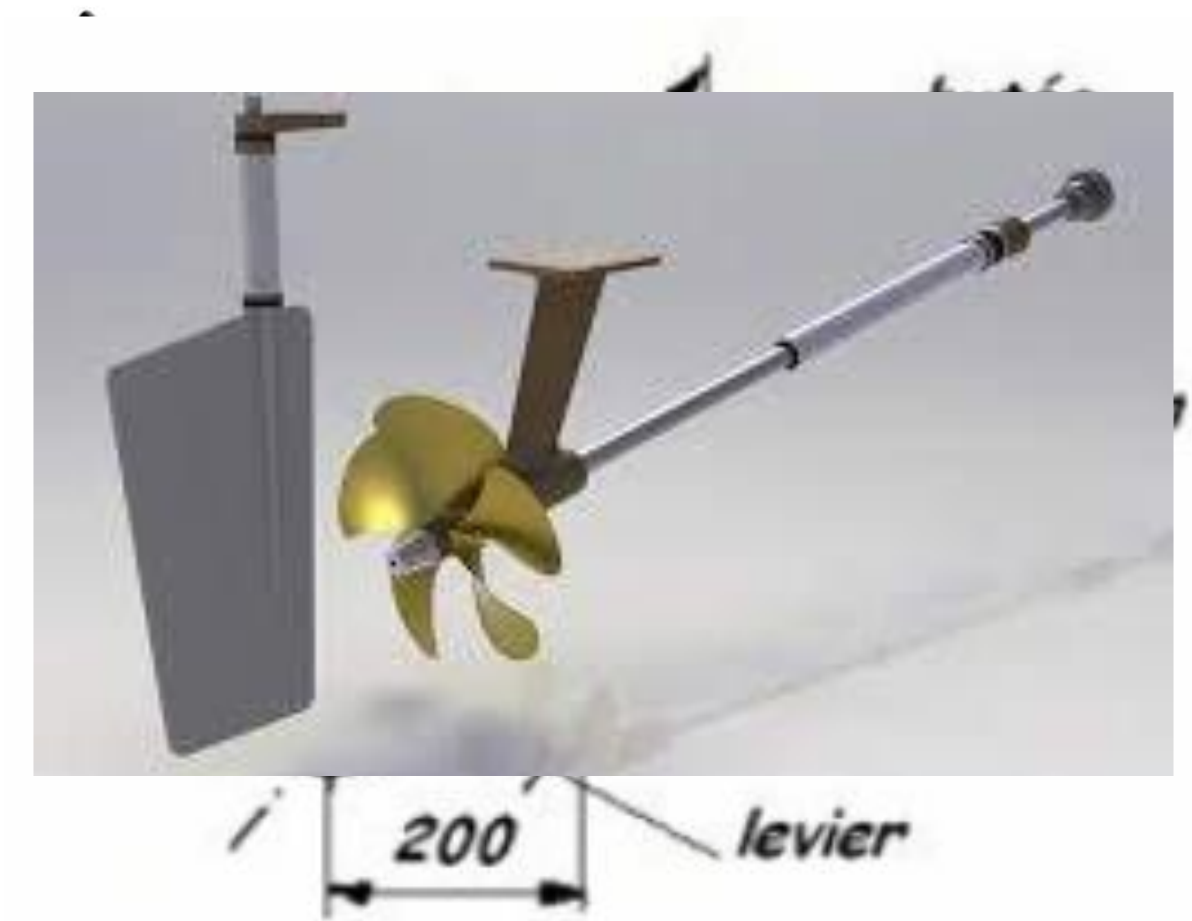
Rpg = Reg/s

CONDITION DE RIGIDITÉ

$$\theta_{max} \leq \theta_{adm}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{max} &= G.\,\theta\,.\rho_{max} \\ \tau_{max} &= \frac{M_t}{I_o}\rho_{max} \end{aligned}\right\} \quad \theta_{max} = \frac{M_t}{G.\,I_o} \leq \theta_{adm}$$

TORSION SIMPLE



TORSION SIMPLE

LA TORSION SIMPLE

Couple de rotation

Un couple, en mécanique, désigne l'effort en rotation appliqué à un axe. Les deux forces étant égales et opposées.

$$\mathbf{P = C\ \omega} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{C = P / \omega}$$

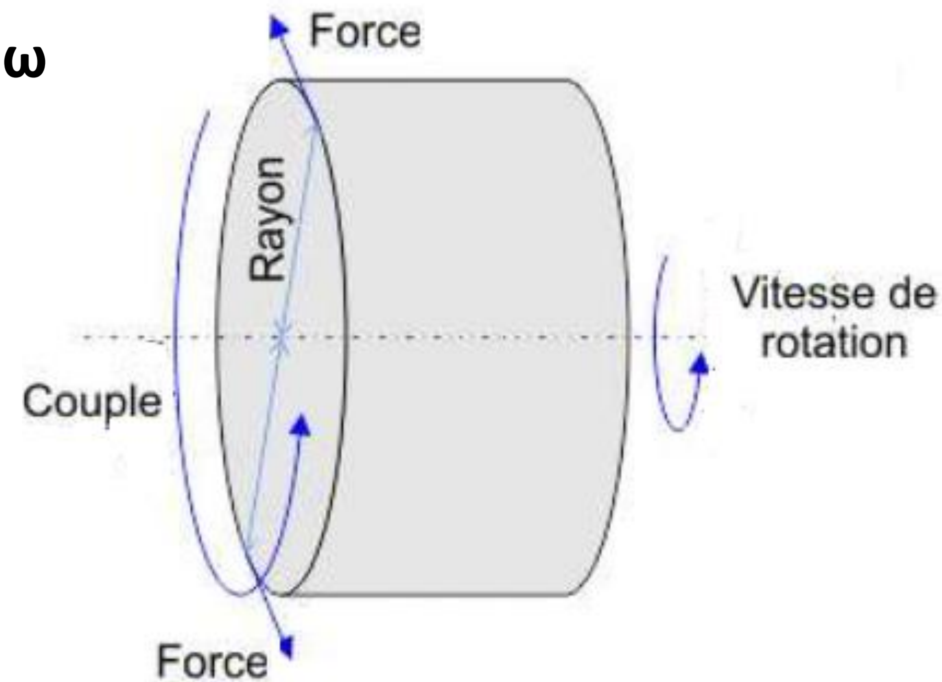
P : la puissance (W)

C : le couple (Nm)

ω: la vitesse angulaire (rad/s)

$$\boldsymbol{\omega = (2.\pi.N) / 60}$$

N: la vitesse de rotation (tr/mn)



LA TORSION SIMPLE

RÉSUMÉ

$$\tau = \rho \frac{M_t}{I_o}$$

Loi de Hooke $\gamma = \rho.\, \theta$

$$\tau = G.\, \theta.\, \rho$$

CONDITION DE RESISTANCE

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_o} \rho_{max} \leq R_{pg}$$

$R_{eg} = m.R_e$

$R_{pg} = R_{eg}/s$

CONDITION DE RIGIDITÉ

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G.\, I_o} \leq \theta_{adm}$$

Application

TORSION SIMPLE

Calculez le couple qui provoque une rotation des sections extrêmes d'un tube de 1° sachant que G = 24GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum. Si on considère un cylindre de même section que le tube et qui supporte le même couple, calculer l'angle de rotation et la contrainte tangentielle maximum.

AN : D1=90mm, d1=70mm et la longueur de la barre L=2,5m.

G=24GPa

$\alpha = 1°$

D_1=90mm,

d_1=70mm,

L=2,5m

Arbre creux

$$\alpha_{max} = \frac{M_t}{G, I_o} L \quad \Rightarrow \quad Mt = \frac{G, I_o \alpha_{max}}{L}$$

$I_o = \pi.(D_1^4 - d_1^4)/32 = 4082000 mm^4$

$\alpha = 1° = 0{,}0174$ rad

Mt = 681857,3 Nmm

$$\tau_{max} = D_1 \frac{M_t}{2. I_o}$$

$$\tau_{max} = 7{,}5 \text{ MPa}$$

Application

TORSION SIMPLE

Calculez le couple qui provoque une rotation des sections extrêmes d'un tube de 1° sachant que G = 24GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum. Si on considère un cylindre de même section que le tube et qui supporte le même couple, calculer l'angle de rotation et la contrainte tangentielle maximum.

AN : D1=90mm, d1=70mm et la longueur de la barre L=2,5m.

G=24GPa

$\alpha = 1°$

D_1=90mm,

d_1=70mm,

L=2,5m

Arbre creux

Mt = 681857,3 Nmm

$\alpha = 1° = 0{,}0174$ rad

$\tau_{max} = 7{,}5$ MPa

Arbre plein

$$\alpha_{max} = \frac{M_t}{G, I_o} L$$

$Io = \pi . d_2^4/32$ $\quad d_2 = ?$

Si Acreux = Aplein

$D_1^2 - d_1^2 = d_2^2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 56{,}57$mm

$Io = \pi.(d_2^4)/32 = 1007036{,}93 mm^4$

$\alpha_{max} = 0{,}071$rad $= 4°$

$$\tau_{max} = d_2 \frac{M_t}{2. I_o}$$

$\tau_{max} = 19{,}2$ MPa

Application

TORSION SIMPLE

Calculez le couple qui provoque une rotation des sections extrêmes d'un tube de 1° sachant que G = 24GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum. Si on considère un cylindre de même section que le tube et qui supporte le même couple, calculer l'angle de rotation et la contrainte tangentielle maximum.
AN : D1=90mm, d1=70mm et la longueur de la barre L=2,5m.

G=24GPa
$\alpha = 1°$
D_1=90mm,
d_1=70mm,
L=2,5m

Arbre creux

$\alpha = 1° = 0{,}0174$ rad

$\tau_{max} = 7{,}5$ MPa

Arbre plein

$\alpha_{max} = 0{,}071 \text{rad} = 4°$

$\tau_{max} = 19{,}2$ MPa

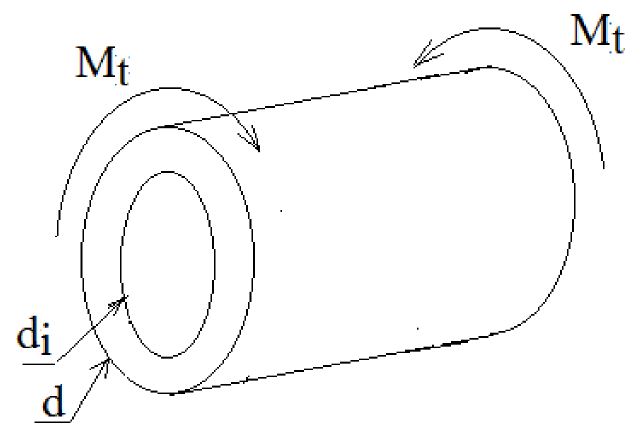
Application

TORSION SIMPLE

Déterminons les diamètres extérieur d'un arbre de section annulaire, soumis à un moment de torsion M_t=2,5kNm, la contrainte tangentielle admissible τ_{adm}=40MPa. En déduire le diamètre de l'arbre s'il est plein.

M_t=2,5kNm

τ_{adm}=40MPa.



Soit k la proportion entre le diamètre extérieur de et le diamètre intérieur d_i

$k = d_i/d$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_o}\rho \leq \tau_{adm} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = d/2 \\ Io = \pi\,(d^4 - di^4)/32 \end{array} \right.$$

M_t=2,5kNm

τ_{adm}=40MPa.

$$\tau_{max} = \frac{16\ d\ M_t}{\pi\,(d^4 - d_i^4)} = \frac{16\ M_t}{\pi\, d^3(1-k^4)} = \frac{5{,}1\ M_t}{d^3(1-k^4)} \leq \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow \quad d \geq 1{,}72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{(1-k^4)\tau_{adm}}}$$

Application

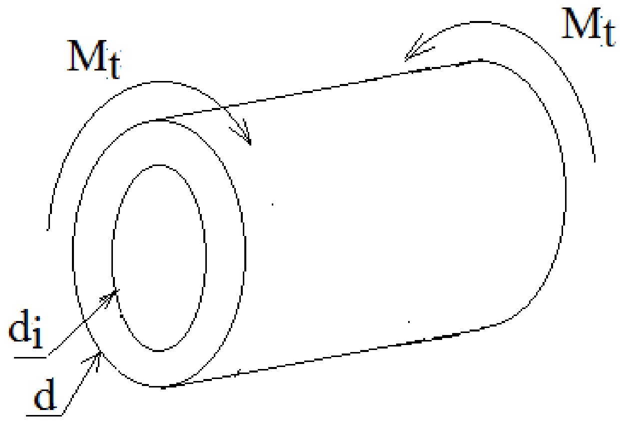
TORSION SIMPLE

Déterminons les diamètres extérieur d'un arbre de section annulaire, soumis à un moment de torsion M_t=2,5kNm, la contrainte tangentielle admissible τ_{adm}=40MPa. En déduire le diamètre de l'arbre s'il est plein.

M_t=2,5kNm $k = d_i/d$

τ_{adm}=40MPa.

$$d \geq 1{,}72\sqrt[3]{\frac{M_t}{(1-k^4)\tau_{adm}}}$$



Arbres creux,

Pour k=0,5 $d \geq 70{,}5$,mm $\left\{\begin{array}{l} d = 71\text{mm} \\ di = 35{,}5\text{mm} \end{array}\right.$

Arbres plein,

$k = d_i/d \Rightarrow d_i = 0 \Rightarrow k=0$

$d \geq 63{,}8$mm soit d=64mm

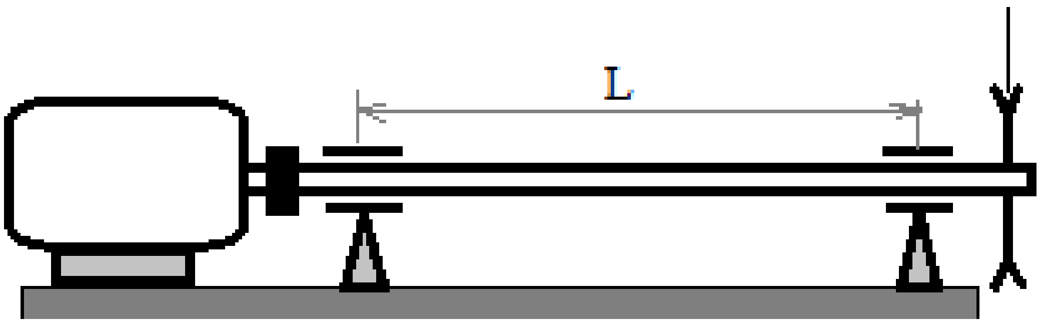
Application

TORSION SIMPLE

Exo.6 (TD): Un arbre, de longueur 0,5m, doit transmettre une puissance de 20kW d'un moteur électrique avec une vitesse de rotation 1500tr/mn**.** L'arbre est en acier de résistance élastique Re=400MPa et de G=80 GPa.

Déterminer le couple de torsion appliqué à l'arbre et son diamètre minimale. On admet un coefficient de sécurité k=5.

Pour des conditions de rigidité, on limite l'angle de torsion unitaire a $\theta_{lim} = 0{,}25\,^{o}$ /m. Calculer de nouveau le diamètre de l'arbre.



L = 0,5m P =20kW N = 1500tr/mn Re = 400MPa G = 80 GPa. k = 5

Mt = ? d = ?

$\theta_{lim} = 0{,}25\,^{o}$/m. d = ?

Application

TORSION SIMPLE

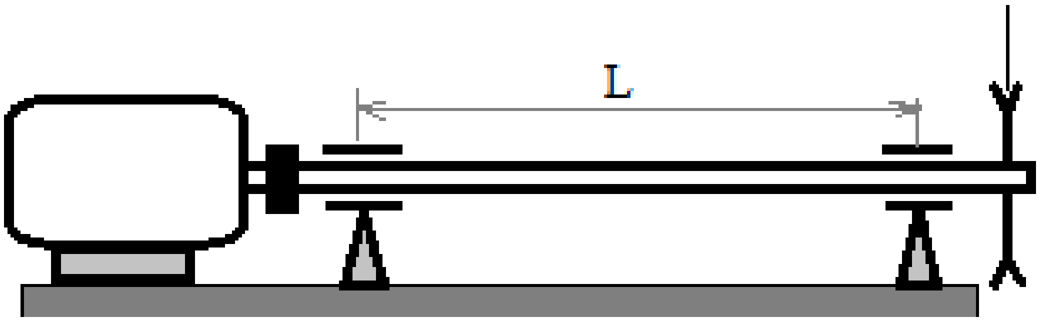
Déterminer le couple de torsion appliqué à l'arbre et son diamètre minimale. On admet un coefficient de sécurité k=5.

$L = 0{,}5m$ $\quad$ $Re = 400MPa$

$P = 20kW$ $\quad$ $G = 80\ GPa.$

$N = 1500tr/mn$ $\quad$ $k = 5$

$C = \ ? \quad d = \ ?$



$P = C.\omega \Rightarrow C = P/.\omega$

$\omega = 2.\pi.N/60$

m = 0,5 (aciers doux, alliages d'aluminium (Re ≤270Mpa),
m = 0,7 (aciers mi-durs (320 ≤ Re ≤ 520Mpa),
m = 0,8 (aciers durs, fontes (Re ≥ 600Mpa)

$Mt = C = 30.P/(\pi.N) = 30.20.10^3/(\pi.1500) = 127{,}39\ Nm$

$$\left.\begin{array}{l} \tau = Mt.y\ /\ I_o \leq R_{pg} \\ I_o = \pi.d^4/32 \\ y = d/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau = \frac{16.Mt}{d^3.\pi} \leq R_{pg} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16.Mt}{R_{pg}.\pi}}$$

$R_{pg} = m.Re/k = 0{,}7.400/5 = 56\ MPa$

$d \geq 22{,}6\ mm$

$d = 23\ mm$

Application

TORSION SIMPLE

Pour des conditions de rigidité, on limite l'angle de torsion unitaire a $\theta_{lim} = 0{,}25^{o}$ /m. Calculer de nouveau le diamètre de l'arbre.

L = 0,5m

P =20kW

N = 1500tr/mn

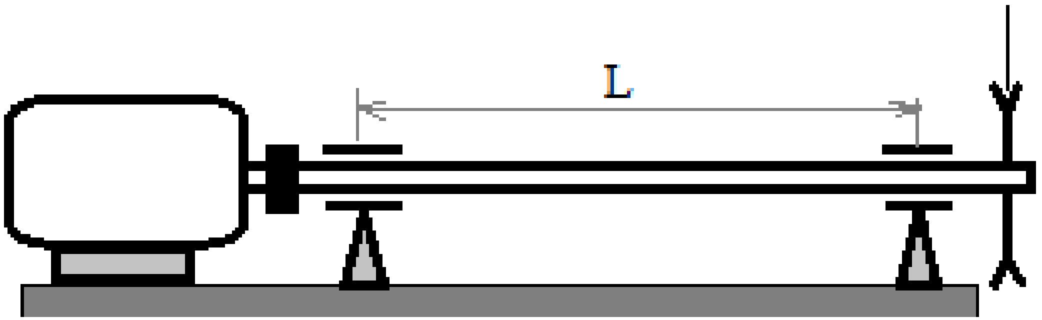
Mt= 127,39 Nm

Re = 400MPa

G = 80 GPa.

k = 5

d = 23 mm



$\theta_{lim} = 0{,}25^{o}/m$

Diamètre par conditions de rigidité d = ?

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G.I_o} \leq \theta_{adm}$$

$$I_o = \pi.d^4/32$$

$$\theta_{max} = \frac{32.M_t}{G.\pi.d^4} \leq \theta_{lim} \Rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32.M_t}{G.\pi.\theta_{lim}}}$$

rad

$180^{o} \longrightarrow \pi$ rad

$0{,}25^{o} \longrightarrow \theta_{lim}(rad) = 0{,}25.\pi / 180 = 4{,}36.10^{-3}$rad

Application

TORSION SIMPLE

Pour des conditions de rigidité, on limite l'angle de torsion unitaire a $\theta_{lim} = 0{,}25^{o}$ /m. Calculer de nouveau le diamètre de l'arbre.

L = 0,5m

P =20kW

N = 1500tr/mn

Mt= 127,39 Nm

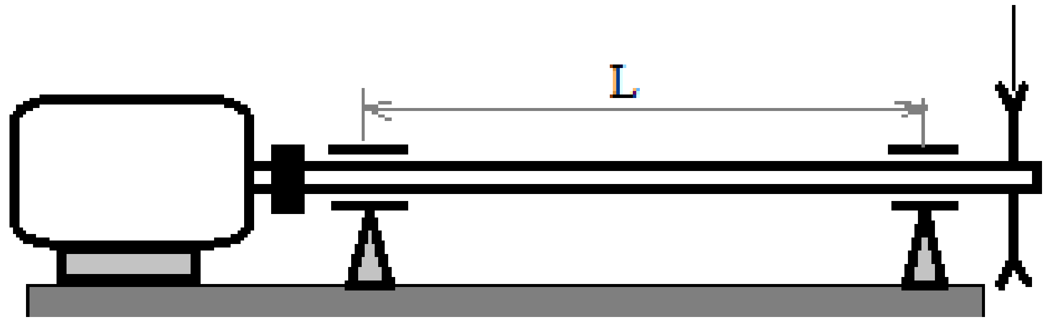
Re = 400MPa

G = 80 GPa.

k = 5

d = 23 mm

$\theta_{lim} = 0{,}25^{o}/m$



Diamètre par conditions de rigidité   d = ?

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G.I_o} \leq \theta_{adm}$$

$$I_o = \pi.d^4/32$$

$$\theta_{max} = \frac{32.M_t}{G.\pi.d^4} \leq \theta_{lim} \Rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32.M_t}{G.\pi.\theta_{lim}}}$$

$\theta_{lim} = 4{,}36.10^{-3}$rad

$\theta_{lim}(0{,}5m) = 4{,}36.10^{-3}/0{,}5$ rad/m $= 8{,}72.10^{-3}$ rad/m

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32.127390}{80000.\pi.8{,}72.10^{-6}}}$$

d ≥ 7,8 mm

d = 23 mm