	Cours	TD	TP	Total	Crédits	Coeff
V H S	22h30	15h00	07h30	45h00	3	3

Pré requis :

- Mathématiques (Calcul intégral et différentiel)
- Mécanique (les lois de la statique)

Objectifs:

- Initiation aux notions fondamentales de la RDM
- Etude de l'influence des choix des formes géométriques dans la RDM
- Etude des différentes sollicitations
- Introduction à la théorie des poutres et à l'étude élémentaire des systèmes isostatiques

https://www.youtube.com/watch?v=xJzUGTltSV8

Contenu de l'enseignement :

1. **HYPOTHESES DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX (Cours : 01h30)**
   1.1. But de la résistance des matériaux
   1.2. Hypothèses générales
   1.3. Définitions des sollicitations
2. **CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS PLANES (Cours : 04h30)**
   2.1. Caractéristiques en axe quelconque
      2.1.1. Moment statique
      2.1.2. Centre de gravité
      2.1.3. Moment d'Inertie quadratique
      2.1.4. Rayon de giration
      2.1.5. Produit d'Inertie
      2.1.6. Moment d'Inertie polaire
      2.1.7. Théorème des axes parallèles

2.2. Caractéristiques géométriques des sections planes composées

2.3. Caractéristiques Principales

2.3.1.Moment d'inertie par rapport à des axes de direction variable

2.3.2.Axes principaux d'Inertie/ Moments principaux d'inertie

3. NOTIONS DES CONTRAINTES (Cours : 03H00, TD : 03h00)

3.1. Vecteur contrainte en un point

3.2. Etat plan de contraintes et directions principales : Représentation graphique de MOHR

3.3. Axes principaux d'Inertie/ Moments principaux d'inertie

4. LES SOLLICITATIONS SIMPLES

4.1. Traction et compression simples **(Cours : 03H00, TD : 03h00)**

4.1.1.Définition

4.1.2.Relation entre l'effort normal et l'allongement

4.1.3. Loi de Hooke

4.1.4.Condition de résistance

4.2. Cisaillement simple **(Cours : 01h30, TD : 01h30)**

4.2.1.Définitions et hypothèses

4.2.2.Condition de résistance

4.2.3.Applications

4.3. Torsion **(Cours : 03h00, TD : 03h00)**

4.3.1.Définition et hypothèses

4.3.2.Etude d'une section carrée

4.3.3.Applications (arbre creux et arbre plein)

4.4. Flexion plane **(Cours : 03h00, TD : 03h00)**

4.4.1.Définition et hypothèses

4.4.2.Flexion simple (étude et répartition des contraintes)

4.4.3.Flexion pure (étude et répartition des contraintes)

4.4.4.Flexion déviée (étude et répartition des contraintes)

4.4.5.Contraintes et rayon de giration

4.5. Les poutres **(Cours : 03h00, TD : 01h30)**

4.5.1.définition et hypothèses

4.5.2.les éléments de réduction (M,N,T)

4.5.3.les diagrammes (M,N,T)

Introduction

La **résistance des matériaux**, aussi appelée RDM, est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus permettant le calcul des contraintes et déformations dans les structures des différents matériaux (machines, génie mécanique, bâtiment et génie civil).

Buts de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux. (comportement sous l’effet d’une action mécanique)
- l'étude de la résistance des pièces mécaniques. (résistance ou rupture)
- l'étude de la déformation des pièces mécaniques

Champs d'application

La RDM est couramment utilisée dans de différents domaines d'applications tels que:

- Génie mécanique (piston, essieu ,Jante , tambour ,......).

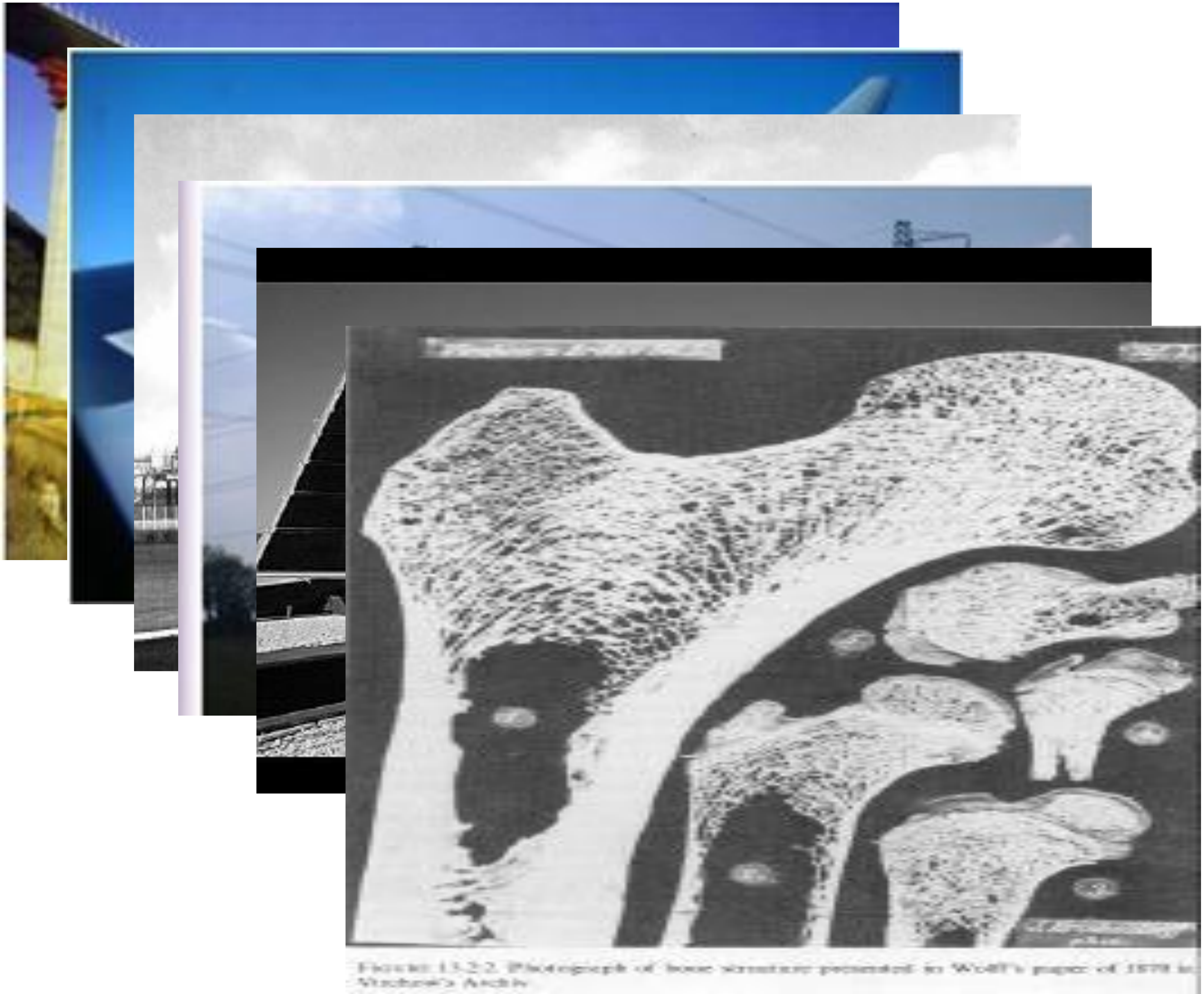
- Génie maritime (structure,.....).

- Génie civil (bâtiments, turbine, structures métalliques...).

- Aéronautique (aile).

- La physique du solide (acier, cuivre ......).

- Génie électrique (câbles, pylônes, centrales, ...).



HYPOTHÈSES DE LA RDM

Dans son utilisation courante, la RDM fait appel aux hypothèses suivantes :

Le matériau est :

élastique (le matériau reprend sa forme initiale après un cycle chargement et déchargement),

linéaire (les déformations sont proportionnelles aux contraintes),

homogène (le matériau est de même nature dans toute sa masse),

isotrope (les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions).

Hypothèse de Navier Bernouli : Les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

Le problème est :

petits déplacements (les déformations de la structure résultant de son chargement sont négligeables et n'affectent pratiquement pas sa géométrie),

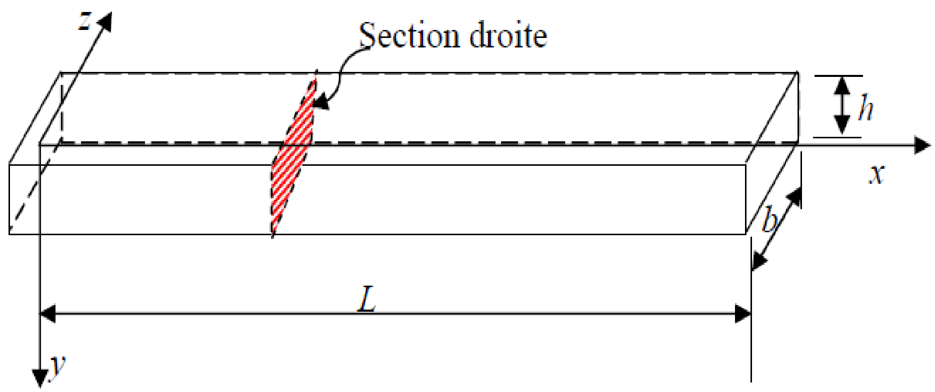
quasi-statique (pas d'effet dynamique),

quasi-isotherme (pas de changement de température).

DÉFINITIONS-GÉNÉRALITÉS.

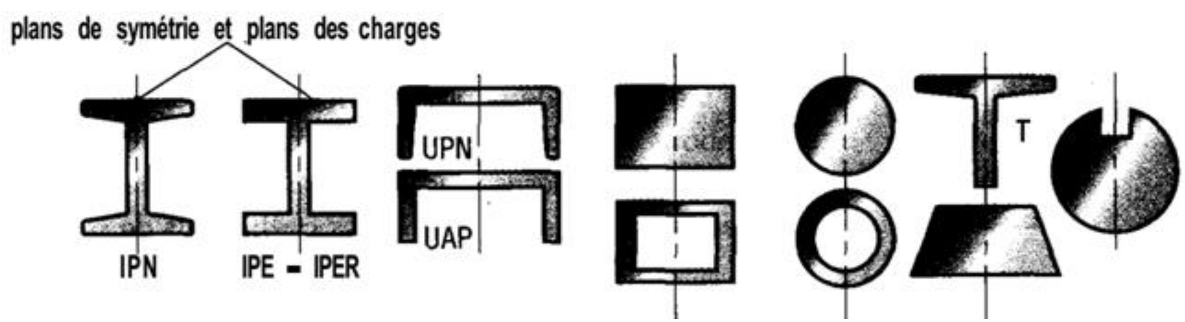
Poutre

Une poutre est une structure ou un solide dont une dimension est plus grande que les deux autres (en général dimensions de la section).



Dans les schémas de calcul, la poutre est représentée par son axe, qui est par convention l’axe ‘*x*’.

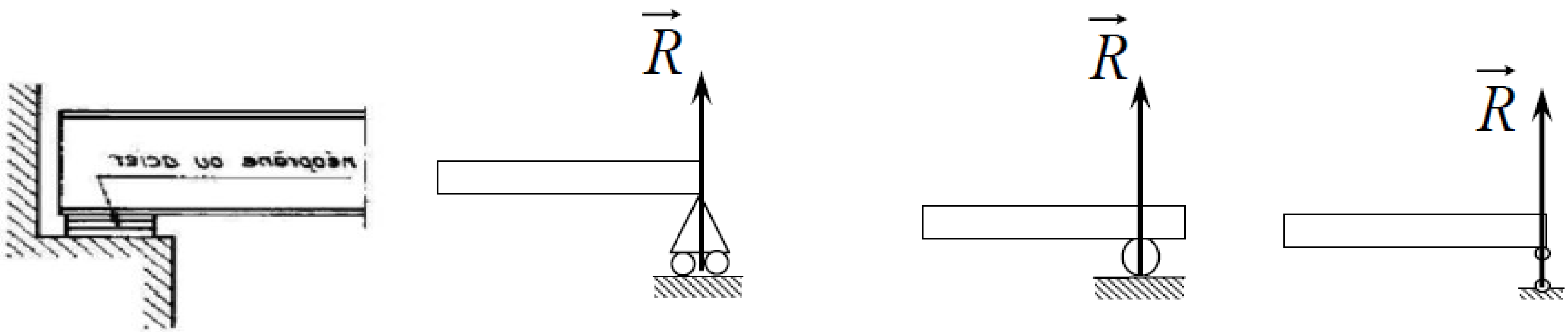
La section est l’intersection de la poutre avec un plan perpendiculaire à son axe. Celle-ci peut avoir plusieurs formes.



LES EFFORTS DANS LES POUTRES

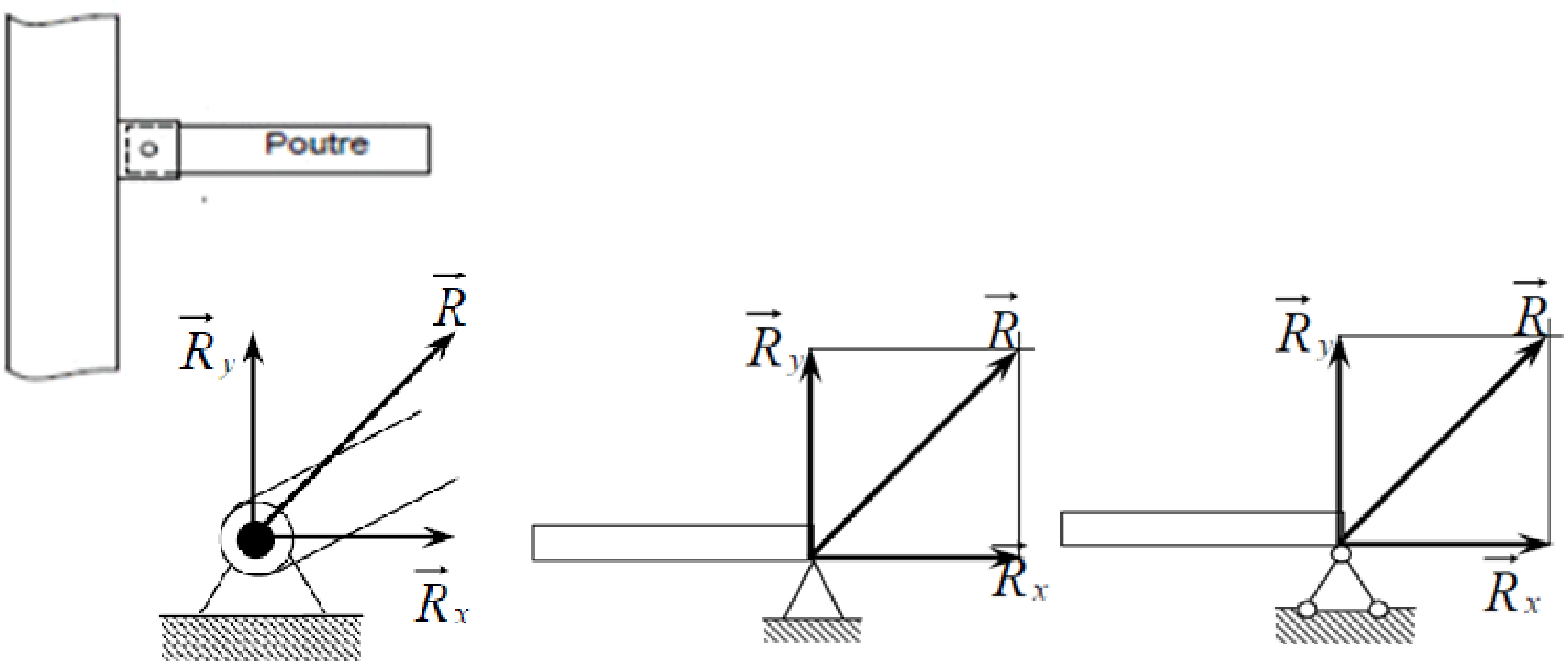
Modélisation des liaisons :
Cependant la pratique et notamment les logiciels spécifiques à la RDM utilisent fréquemment les représentations suivantes :

Appui simple : Ce type d'appui, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. .
L'appui simple introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.



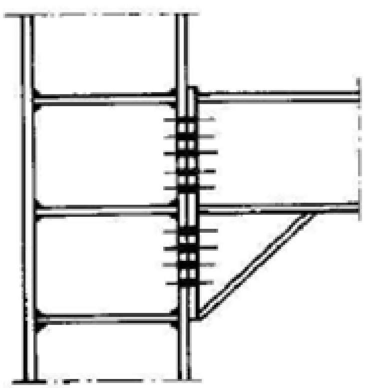
SCHEMATISATION DES LIAISONS (réaction d’appui)

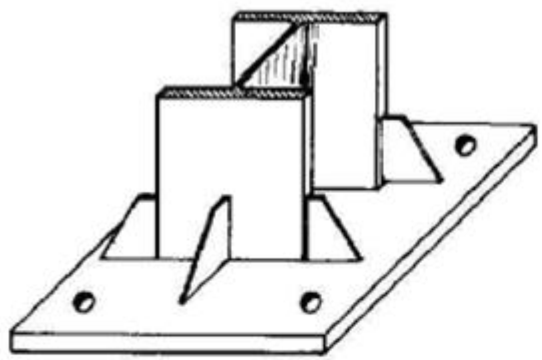
Appui double (articulation) : Matérialisé par une rotule. Cet appui autorise les rotations d’une extrémité de la poutre ou d’un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d’action passe par le centre de l’articulation. L’articulation introduit 2 inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.

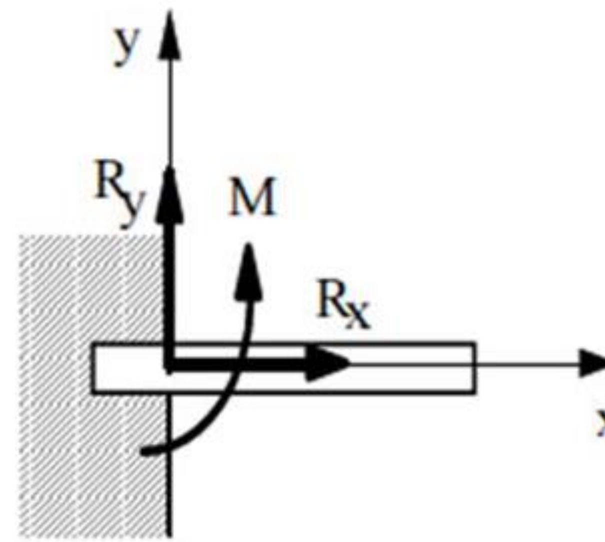


SCHEMATISATION DES LIAISONS (réaction d'appui)

Encastrement : L'encastrement interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R, et leur moment M rapportés au centre de gravité G. Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.



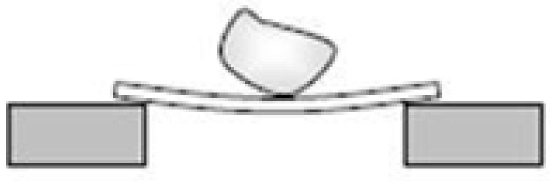


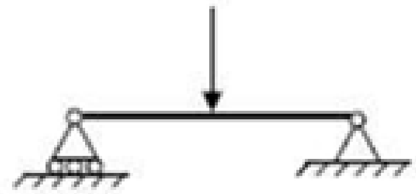


EFFORTS EXTÉRIEURS

deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre

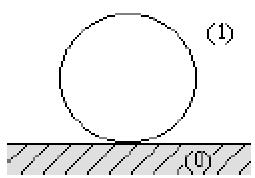
Charge concentrée

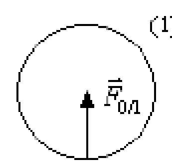




Exemples de charges

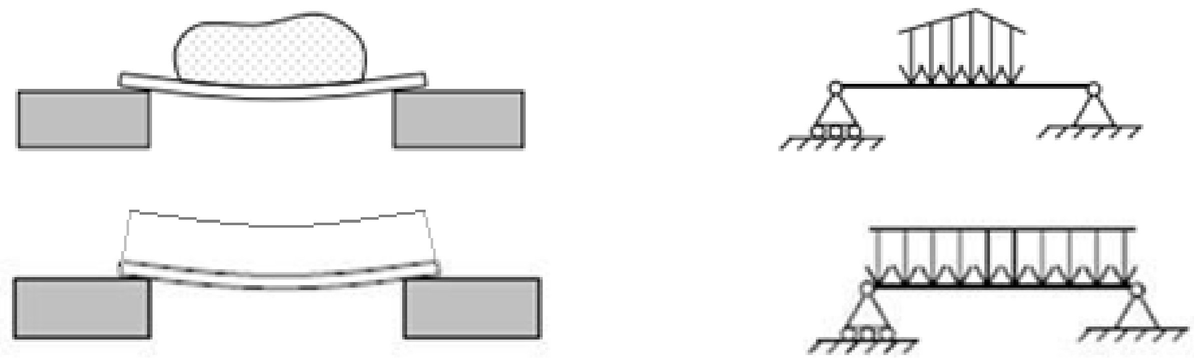
Considérons une bille sur un plan. L'action du plan sur la bille peut être représentée par une force



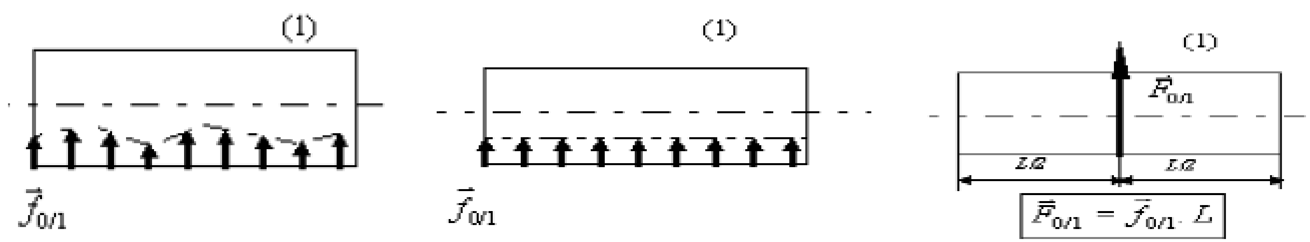


EFFORTS EXTÉRIEURS

Les **charges réparties** qui sont distribuées continûment le long d'un segment de la poutre et sont représentées par un champs de vecteurs uniforme ou non.



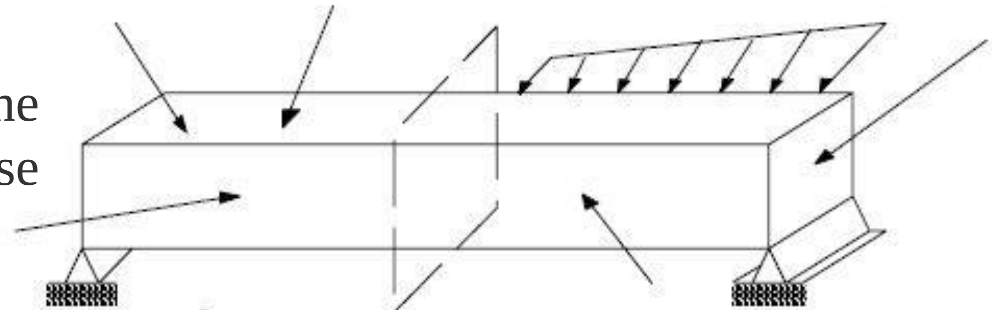
Considérons le cas d’un cylindre sur un plan. L'action du plan sur le cylindre peut être représentée par une force linéique (force répartie le long d'une ligne). Elle se mesure en (N/m).



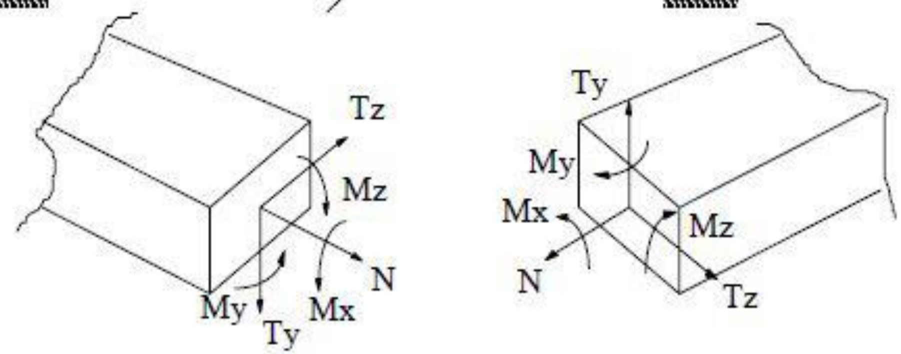
Les efforts de cohésion (ou efforts internes) :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des poutres et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées.

L'action entre les deux tronçons est une action d'encastrement qui se modélise par une résultante et un moment



N effort normal :(traction ou compression) porté par la ligne moyenne.



Ty et Tz efforts tranchants : perpendiculaires à la ligne moyenne.

Mt moment de torsion : portée par la ligne moyenne.

Mfy et Mfz Moments fléchissant : ou de flexion perpendiculaires à la ligne moyenne

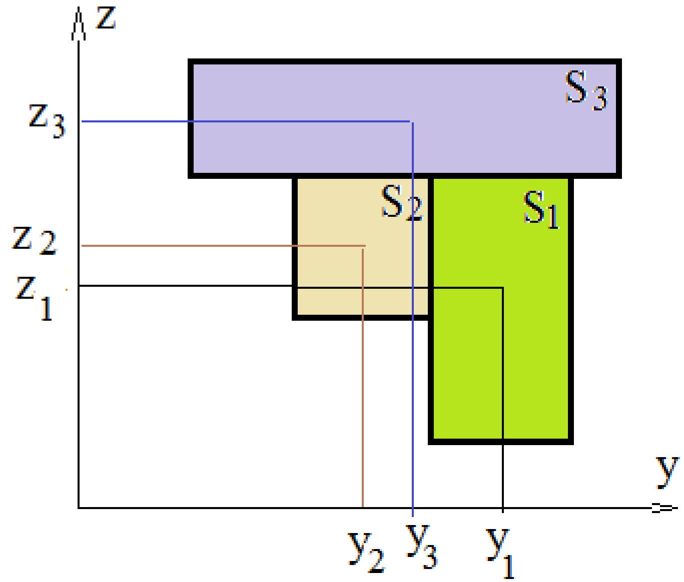
CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES FORMES

La méthode la plus simple consiste à discrétiser la section en éléments de surface s_i et faire la sommation comme suit:

Centre de gravité

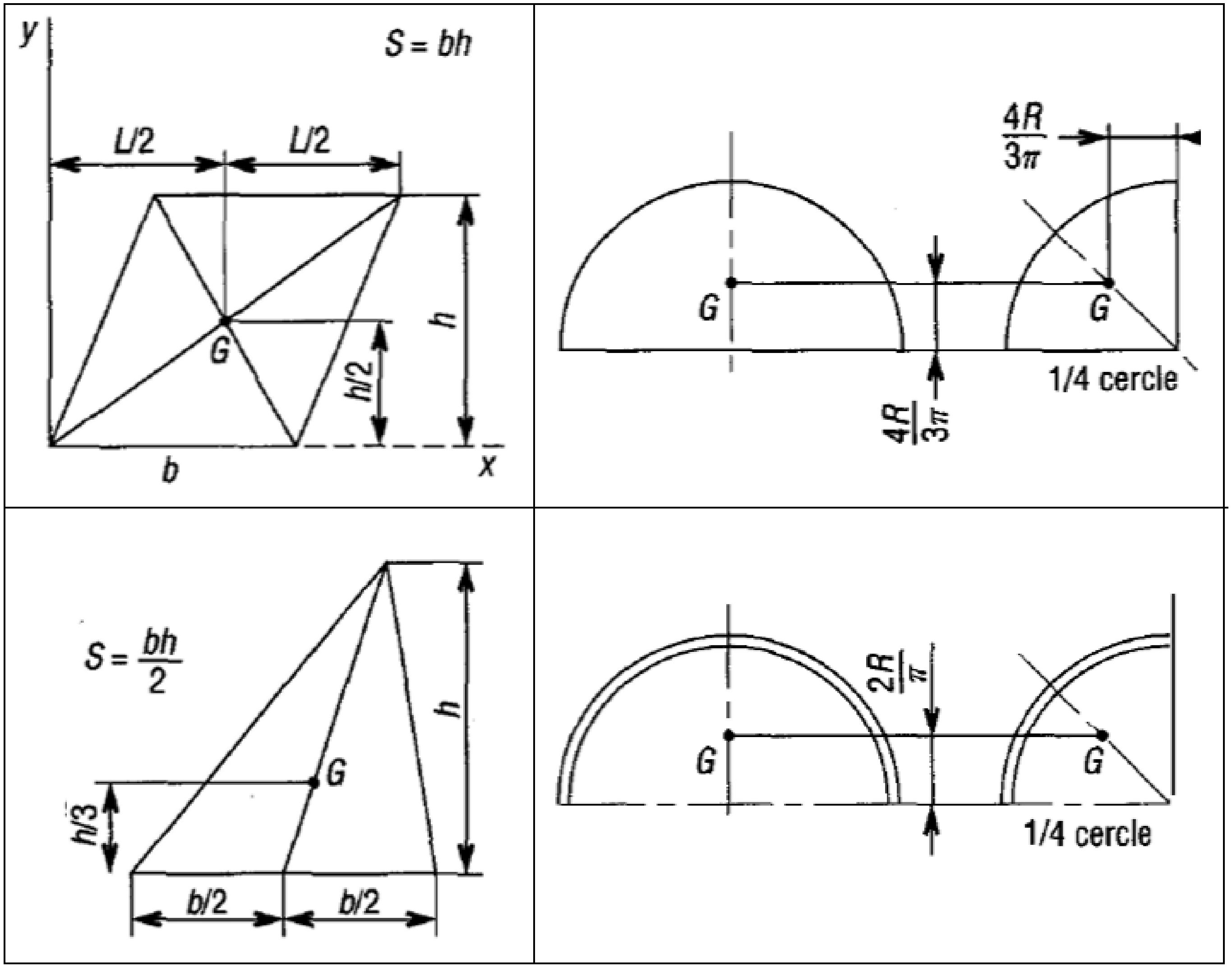
$$Y_G = \frac{1}{S}\iint_s y\,ds \qquad Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i}$$

$$Z_G = \frac{1}{S}\iint_s z\,ds \qquad Z_G = \frac{\sum z_i s_i}{\sum s_i}$$



CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES FORMES

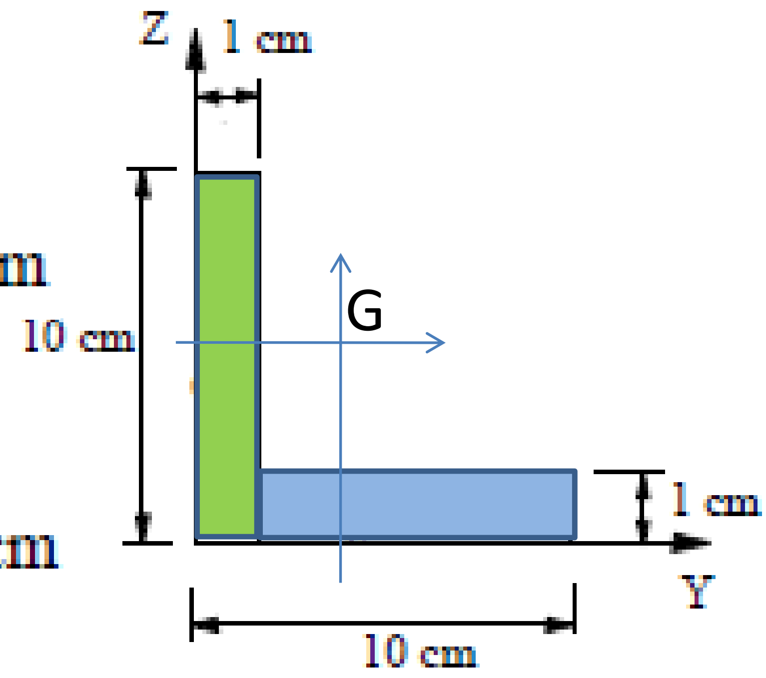
Centre de gravité



APPLICATION

$$Z_G = \frac{\sum S_i Z_i}{\sum S_i} = \frac{10 \times 5 + 9 \times 0.5}{19} := 2.87 \ \text{cm}$$

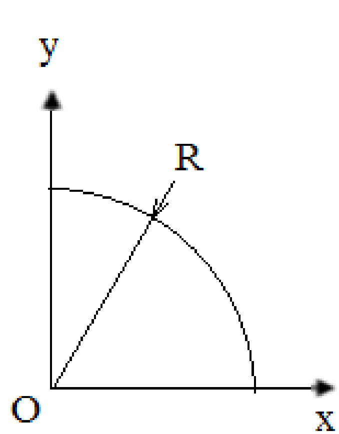
$$Y_G = \frac{\sum S_i Y_i}{\sum S_i} = \frac{10 \times 0.5 + 9 \times 5.5}{19} := 2.87 \ \text{cm}$$

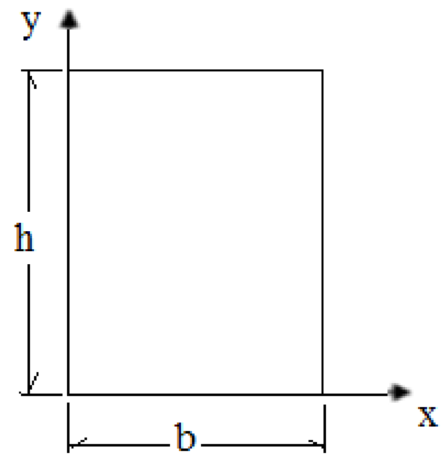


APPLICATION

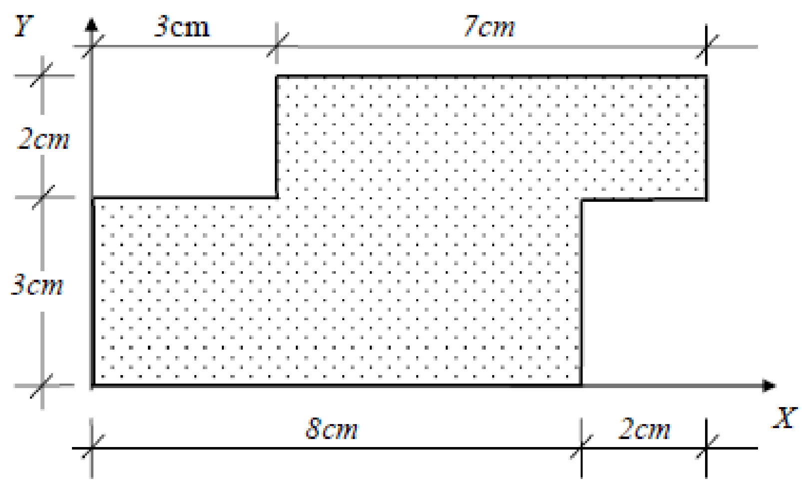
Déterminer le centre de gravité des deux sections suivantes par rapport au système xOy.

$$X_G = \frac{1}{S}\iint_S x\,ds$$





$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i}$$



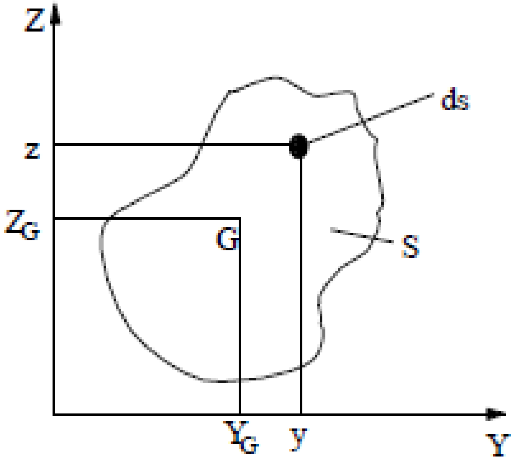
CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES FORMES

Moments statiques

On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OY et OZ les quantités:

$$S_y = \iint_S z\,ds \qquad S_y = S \,.\, Z_G$$

$$S_z = \iint_S y\,ds \qquad S_z = S \,.\, Y_G$$



$$S_y = \sum_{i=1}^{n} s_i z_i \qquad S_z = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES FORMES

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants:

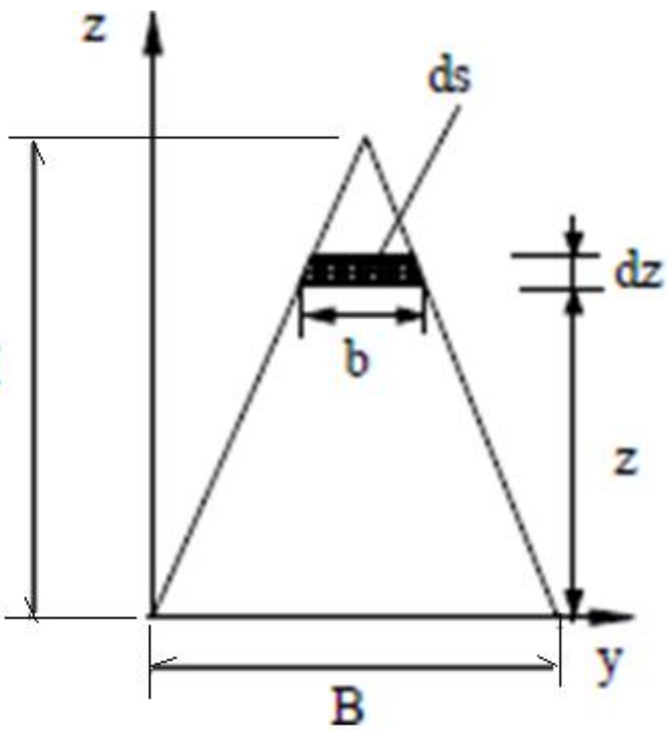
$$I_Y = \iint_S z^2 ds$$

$$I_Z = \iint_S y^2 ds$$

Le moment d'inertie de la section représente la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale.

Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

APPLICATION



$$I_Y = \iint_S z^2 ds$$

$$ds = b(z)dz$$

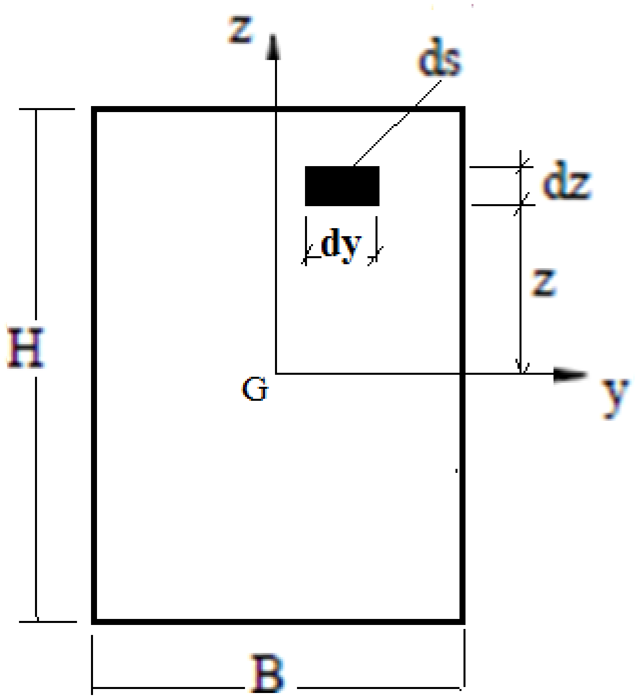
$$b(z) = \frac{B}{H}(H - z)$$

$$ds = \frac{B}{H}(H - z)dz$$

$$I_Y = \iint_S z^2 ds = \int_0^H z^2 \frac{B}{H}(H - z)dz = \frac{B}{H}\int_0^H z^2 (H - z)dz = \frac{BH^3}{12}$$

Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

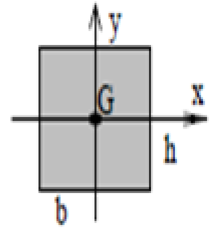
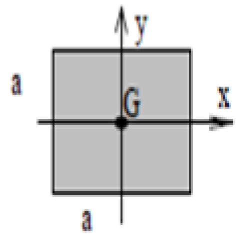
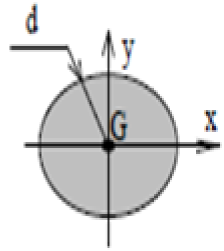
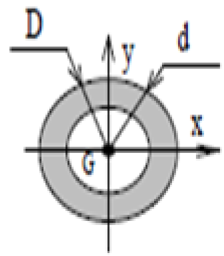
APPLICATION



$$I_y = \iint_S z^2 \, ds$$

$$ds = dy \; dz$$

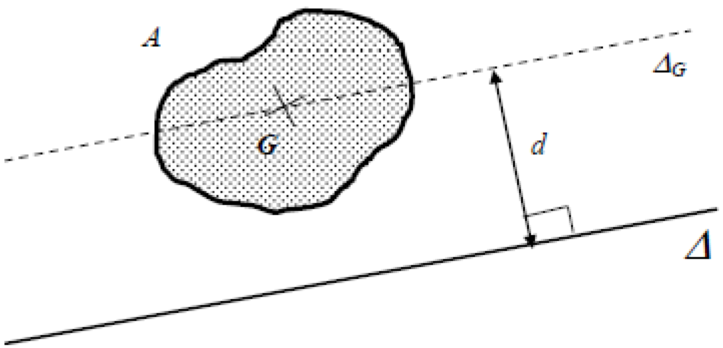
$$I_y = \iint_S z^2 \, ds = \iint_S z^2 \, dy \, dz = \int_{-H/2}^{H/2} z^2 \, dz \int_{-B/2}^{B/2} dy = \frac{B\,H^3}{12}$$

	I_{GX}	I_{GY}
	$\dfrac{bh^3}{12}$	$\dfrac{hb^3}{12}$
	$\dfrac{a^4}{12}$	$\dfrac{a^4}{12}$
	$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{\pi d^4}{64}$
	$\dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$

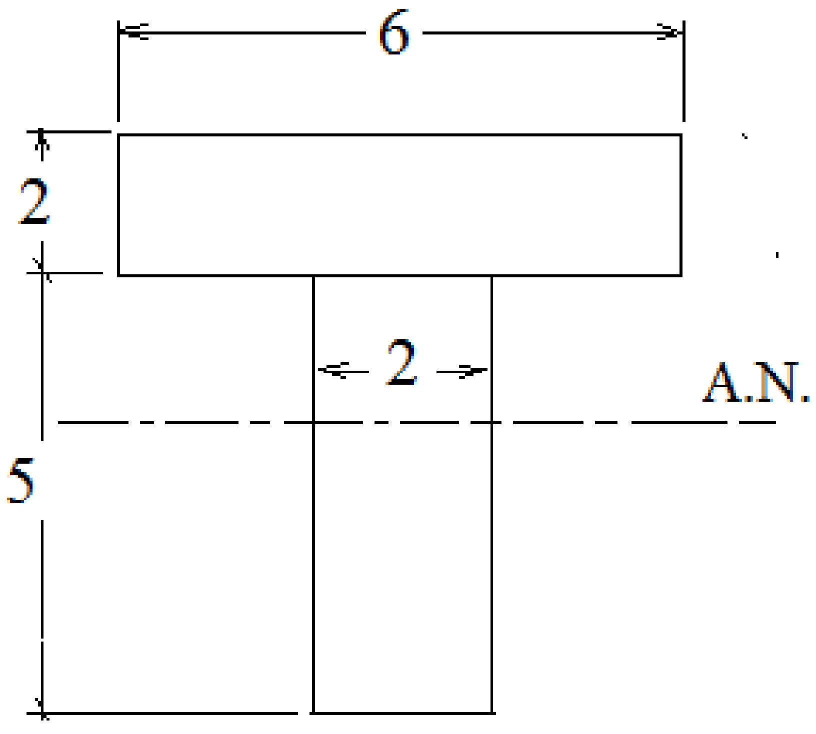
théorème d'Huygens:

Le moment d’inertie d’une section par rapport à un axe quelconque *Δ est égal au moment*
d’inertie de la section par rapport à l’axe passant par son centre de gravité et parallèle à *Δ*
augmenté du produit de l’aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + d^2 A$$



Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section en T ci-dessous

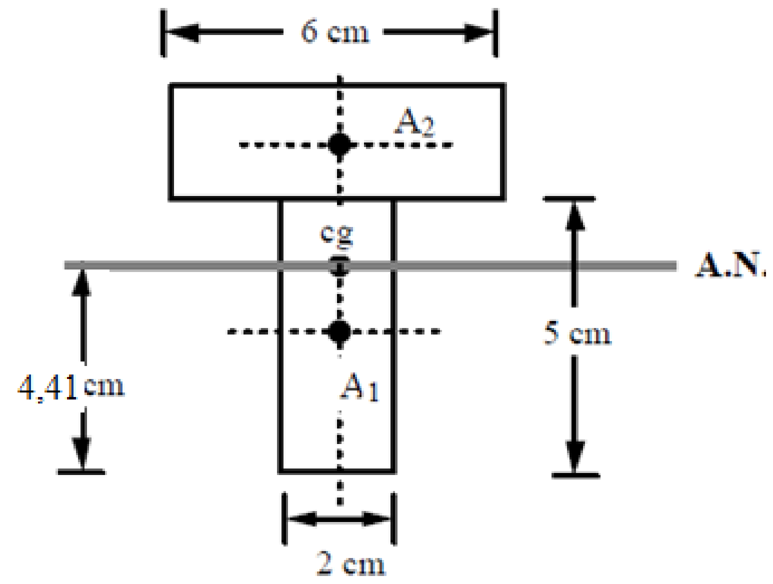


Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section en **T ci-dessous.**

$$I_{AN} = I_{AN(\text{surface 1})} + I_{AN(\text{surface 2})}$$

$$I_{AN(\text{surface 1})} = I_{cg1} + A_1 s_1{}^2$$

$$I_{AN(\text{surface 2})} = I_{cg2} + A_2 s_2{}^2$$



$$I_{cg1} = \frac{2\text{ cm }(5\text{ cm})^3}{12} = 20{,}833\ \text{cm}^4$$

$$I_{cg2} = \frac{6\text{ cm }(2\text{ cm})^3}{12} = 4\ \text{cm}^4$$

$$I_{AN(\text{surf 1})} = 20{,}833\text{ cm}^4 + (2\text{ cm x 5 cm})(1{,}91\text{ cm})^2 = 57{,}314\text{ cm}^4$$

$$I_{AN(\text{surf 2})} = 4\text{ cm}^4 + (2\text{ cm x 6 cm})(1{,}59\text{ cm})^2 = 34{,}337\text{ cm}^4$$

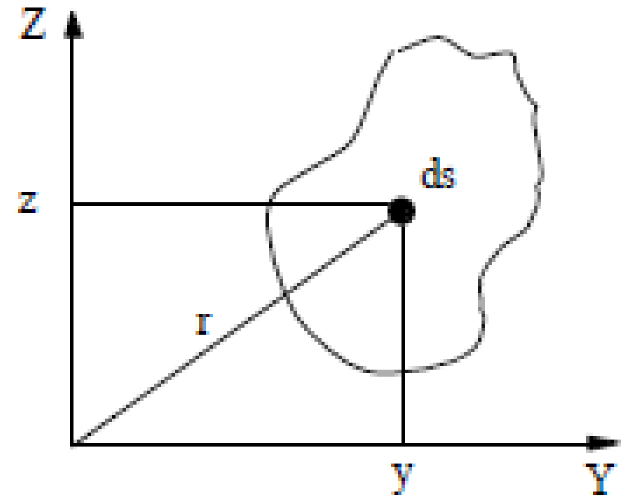
$$I_{AN} = 57{,}314\text{ cm}^4 + 34{,}337\text{ cm}^4 = \mathbf{91{,}651\ cm^4}$$

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES
DES FORMES

Moment d'inertie polaire

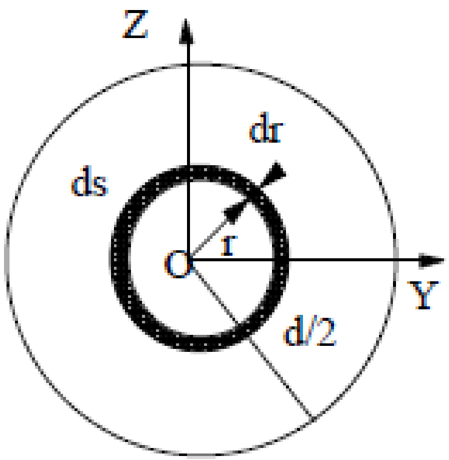
On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances r à partir du pôle. Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

$$I_p = \iint_z r^2 ds = \iint_z (z^2 + y^2) ds = I_Y + I_Z$$



Moment d'inertie polaire

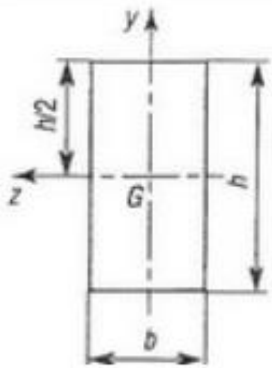
APPLICATION



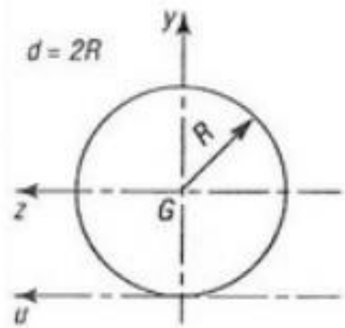
$$I_o = \iint_s r^2 ds$$

$$ds = 2\pi r\, dr$$

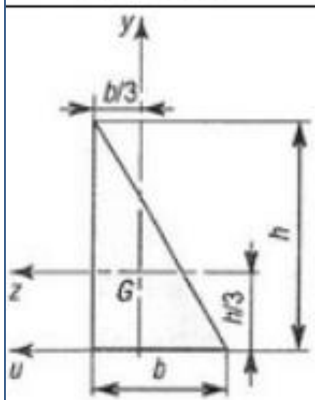
$$I_o = \iint_s r^2 ds = \int_0^{d/2} r^2 2\pi r\, dr = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}$$



$$S = b\,h$$
$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$
$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$
$$I_G = \frac{b\,h}{12}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$

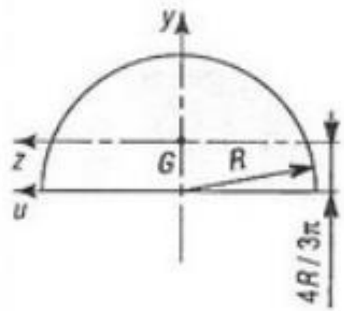


$$S = \pi R^2$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$
$$I_u = \frac{5\pi R^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$
$$I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_y + I_z$$

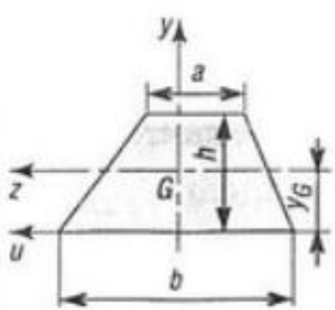


$$S = \frac{bh}{2}$$
$$I_y = \frac{h\,b^3}{36}$$
$$I_z = \frac{b\,h^3}{36}$$
$$I_u = \frac{b\,h^3}{12}$$
$$I_G = \frac{b\,h}{36}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$

1/2 cercle

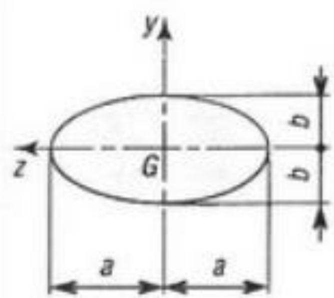


$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$
$$I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$
$$I_z \simeq 0{,}1098 \quad R^4$$
$$I_u = \frac{\pi R^4}{8}$$



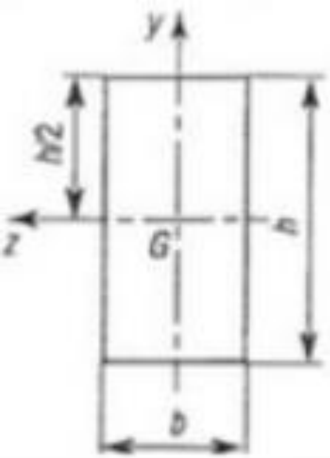
$$S = \frac{h}{2}\left(a + b\right)$$
$$y_G = \frac{h\left(2a + b\right)}{3\left(a + b\right)}$$
$$I_z = \frac{h^3\left(a^2 + 4ab + b^2\right)}{36\left(a + b\right)}$$
$$I_u = \frac{h^3\left(3a + b\right)}{12}$$

ellipse



$$S = \pi\,a\,b$$
$$I_z = \frac{\pi\,a\,b^3}{4}$$
$$I_y = \frac{\pi\,b\,a^3}{4}$$
$$I_G = \frac{\pi\,a\,b}{4}\left(a^2 + b^2\right)$$

Calculer le moment quadratique polaire par rapport à au centre de gravité de la section en I ci-dessous

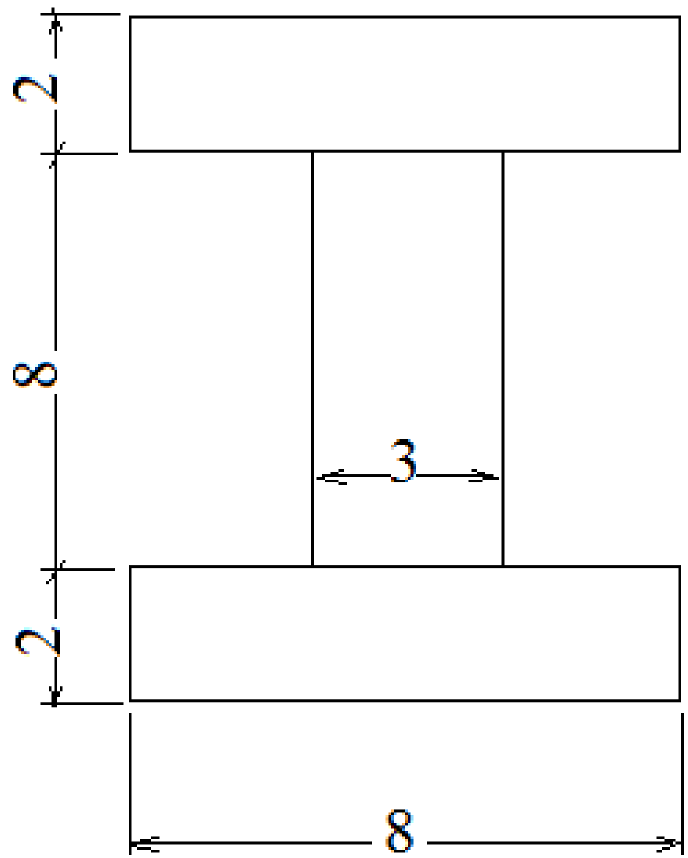


$$S = b\,h$$

$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$I_G = \frac{b\,h}{12}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



Rayon de giration

Le rayon de giration est la distance entre un axe et un point où on peut considérer que toute la surface est concentrée de telle sorte que son moment d'inertie demeure le même.

On appelle "r" le rayon de giration. D'où:

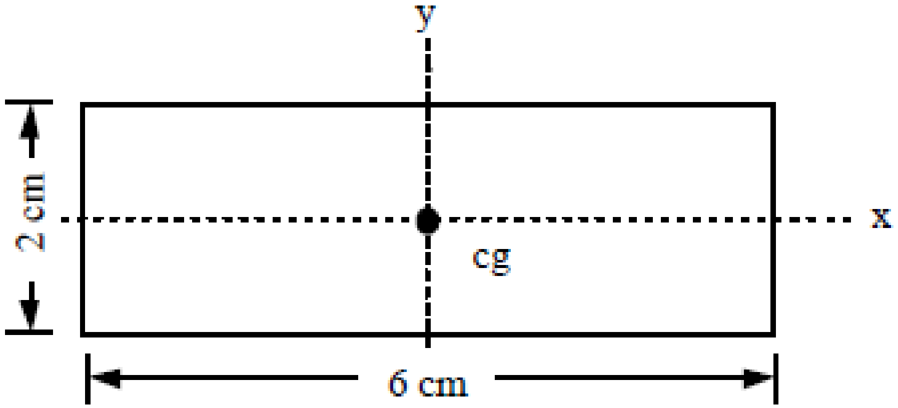
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

I = moment d'inertie de la surface au cg
A = aire de la surface

Rayon de giration

Calculer les rayons de giration horizontaux et verticaux de la figure ci-dessous.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$



$$A = 12 \text{ cm}^2$$

$$I_{cgx} = \frac{6 \text{ cm } (2 \text{ cm})^3}{12} = 4 \text{ cm}^4$$

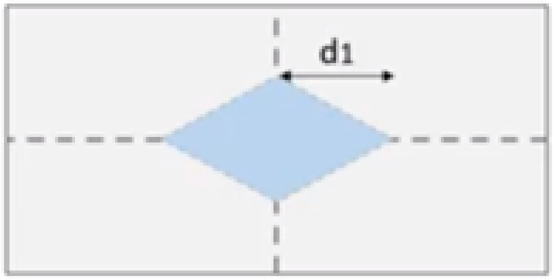
$$I_{cgy} = \frac{2 \text{ cm } (6 \text{ cm})^3}{12} = 36 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{4 \text{ cm}^4}{12 \text{ cm}^2}} = 0{,}58 \text{ cm}$$

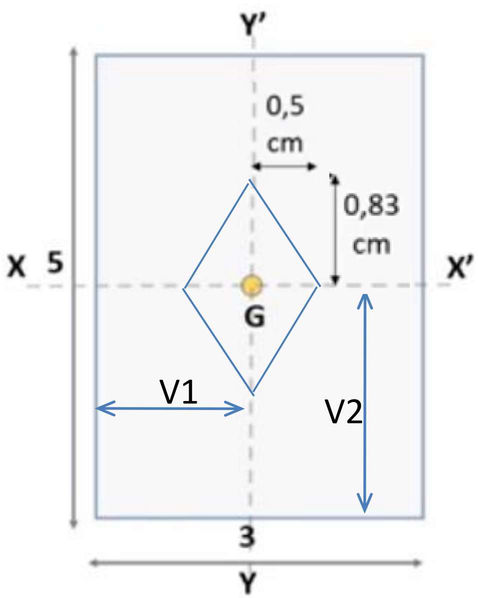
$$r_y = \sqrt{\frac{36 \text{ cm}^4}{12 \text{ cm}^2}} = 1{,}73 \text{ cm}$$

Noyau central

Le noyau central est un contour limitant le domaine ou la surface de l'application de la charge pour que la pièce soit entièrement sollicitée par cette charge.



$$d_1 = \frac{(\text{rayon de giration})^2}{v}$$



$$I_{xx'} = \frac{3.5^3}{12} = 31{,}25 \text{ cm4} \Rightarrow r_{xx'} = \sqrt{\frac{I_{xx'}}{A}} = \sqrt{\frac{31{,}25}{5x3}} = 1{,}44 \text{ cm}$$

$$I_{yy'} = \frac{5.3^3}{12} = 11{,}25 \text{ cm4} \Rightarrow r_{yy'} = \sqrt{\frac{I_{yy'}}{A}} = \sqrt{\frac{11{,}25}{5x3}} = 0{,}87 \text{ cm}$$

$r_{xx'} = 1{,}44$ cm $\quad r_{yy'} = 0{,}87$ cm

$d_1 = r_{yy}^2/(v_1) = 0{,}87^2/1{,}5 \qquad d_1 = 0{,}5$ cm

$d_2 = r_{xx}^2/(v_2) = 1{,}44^2/2{,}5 \qquad d_2 = 0{,}83$ cm