

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

POLYCOPIÉ DE COURS

Éléments d'analyse mathématique

Mohamed BOUKELOUA
École Nationale Polytechnique de Constantine
Abdelhak BERKANE
Département de mathématiques
Université les Frères Mentouri Constantine

Année 2017/2018

Table des matières

Introduction	3
1 Intégrales multiples	4
1.1 Intégrales doubles	4
1.1.1 Notions de topologie sur \mathbb{R}^2	4
1.1.2 Intégrale double sur un domaine fermé	6
1.1.3 Intégrale double généralisée	9
1.1.4 Propriétés de l'intégrale double	9
1.1.5 Théorème de Fubini	10
1.1.6 Formule de changement de variable	12
1.1.7 Quelques applications de l'intégrale double	15
1.2 Intégrales triples	20
1.2.1 Intégrale triple sur un domaine spatial fermé	20
1.2.2 Formule de Changement de variable	24
1.2.3 Quelques applications de l'intégrale triple	25
1.3 Exercices	30
2 Analyse vectorielle	32
2.1 Opérateurs différentiels	32
2.1.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs	32
2.1.2 Gradient	33
2.1.3 Divergence	36
2.1.4 Rotationnel	37
2.1.5 Laplacien	43
2.1.6 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs	44
2.2 Intégrales curvilignes	46
2.2.1 Courbes paramétrées	46
2.2.2 Intégrale curviligne d'un champ de scalaires	48
2.2.3 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs	49
2.2.4 Circulation et travail	51
2.2.5 Formule de Green	51
2.2.6 Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration	54

2.3	Intégrales de surface	55
2.3.1	Surfaces paramétrées	55
2.3.2	Intégrale de surface d'un champ de scalaires	62
2.3.3	Intégrale de surface d'un champ de vecteurs	62
2.3.4	Formule de Stokes	64
2.3.5	Formule d'Ostrogradsky	66
2.4	Exercices	66
3	Séries numériques	69
3.1	Généralités	69
3.2	Séries numériques à termes positifs	72
3.2.1	Condition nécessaire et suffisante de convergence	72
3.2.2	Règle de Cauchy	72
3.2.3	Règle de D'Alembert	73
3.2.4	Critère intégral de Cauchy	74
3.2.5	Critère de comparaison	75
3.2.6	Règle d'équivalence	76
3.3	Séries à termes quelconques	76
3.3.1	Séries absolument convergentes	76
3.3.2	Séries alternées	77
3.3.3	Critère d'Abel	78
3.4	Exercices	80
4	Suites et séries de fonctions	81
4.1	Suites de fonctions	81
4.1.1	Convergence simple et convergence uniforme	81
4.1.2	Régularité de la limite d'une suite de fonctions	84
4.2	Séries de fonctions	87
4.2.1	Modes de convergence d'une série de fonctions	88
4.2.2	Régularité de la somme d'une série de fonctions	91
4.3	Exercices	92
5	Séries entières	94
5.1	Notions de base	94
5.2	Régularité de la somme d'une série entière	98
5.2.1	Convergence normale d'une série entière	98
5.2.2	Continuité	98
5.2.3	Intégration terme à terme	99
5.2.4	Dérivation terme à terme	99
5.3	Développement en série entière	100
5.4	Résolution d'équations différentielles	105
5.5	Exercices	107

Introduction

Ce cours d'analyse mathématique est destiné aux étudiants de deuxième année des classes préparatoires aux écoles d'ingénieurs, des tronc communs des sciences et technologie et des sciences de la matière, de même qu'aux étudiants préparant une licence en mathématiques. Il fournit des éléments de base en analyse indispensables pour la formation de ces étudiants. Il est axé sur trois volets principaux : les intégrales multiples, l'analyse vectorielle et les séries. Dans le premier volet, nous étudions les intégrales doubles et triples en insistant beaucoup plus sur l'aspect calculatoire. Nous donnons deux résultats principaux dans ce cadre, à savoir le théorème de Fubini et la formule de changement de variable, et nous terminons par quelques applications en physique, notamment la détermination du centre de gravité et le calcul du moment d'inertie. Le deuxième volet, à savoir l'analyse vectorielle, représente une partie très importante de la physique mathématique. Après une introduction des opérateurs différentiels basiques dans ce cadre, nous étudions les intégrales curvilignes et les intégrales de surface. Ces notions sont souvent rencontrés en physique dans le calcul de travail et de flux des champs vectoriels. Quant au troisième volet, il s'étale sur trois chapitres. Dans le premier, nous étudions les séries numériques en insistant beaucoup plus sur la notion de convergence. Nous donnons des critères de convergence des séries à termes positifs et nous traitons également les séries à termes quelconques, et en particulier les séries alternées. En suite, nous passons aux séries des fonctions, où nous nous intéressons aux différents modes de convergence de ces séries et à la régularité de la somme (continuité, dérivabilité et intégrabilité). Le dernier chapitre est consacré aux séries entières. Nous commençons par introduire la notion du rayon de convergence et les méthodes de calcul de ce rayon. En suite, nous nous intéresserons à la régularité de la somme d'une série entière et nous terminerons par quelques applications comme le développement en série entière des fonctions et la résolution des équations différentielles. Chaque chapitre est suivi d'exercices d'application qui permettent de mieux appréhender les contenus des cours dispensés.

Chapitre 1

Intégrales multiples

1.1 Intégrales doubles

1.1.1 Notions de topologie sur \mathbb{R}^2

Nous commençons par donner quelques notions de base concernant la topologie de \mathbb{R}^2 , qui nous seront utiles tout au long de ce chapitre.

Norme euclidienne

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, la norme euclidienne de u est définie par $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Elle vérifie bien les axiomes d'une norme suivantes :

- i) Absolue homogénéité : $\forall u \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
- ii) Inégalité triangulaire : $\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- iii) Séparation : $\forall u \in \mathbb{R}^2, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

La norme euclidienne permet de mesurer la distance entre deux éléments u et v de \mathbb{R}^2 , qui est donnée par $\|u - v\|$.

Disque ouvert

On appelle disque ouvert de centre $u_0 \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble $D(u_0, r)$ défini par $D(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 / \|u - u_0\| < r\}$.

L'ensemble $\overline{D}(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 / \|u - u_0\| \leq r\}$ s'appelle le disque fermé de centre u_0 et de rayon r .

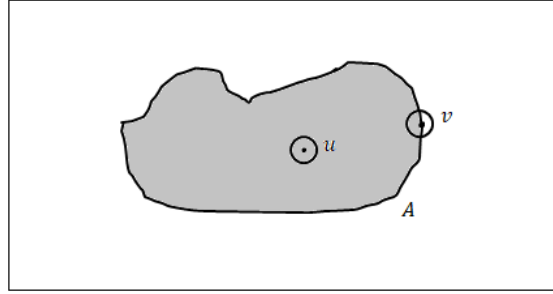
Dans la suite A représente une partie quelconque de \mathbb{R}^2 .

Voisinage

Soit $u \in \mathbb{R}^2$, on dit que A est un voisinage de u s'il existe $r > 0$ tel que $D(u, r) \subseteq A$.

Exemple :

Dans la figure suivante, l'ensemble A est voisinage de u mais il n'est pas voisinage de v .



Ensemble ouvert

L'ensemble A est dit ouvert s'il est voisinage de tous ses points.
 Par exemple le pavé $A =]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert (a, b, c et d étant des nombres réels) mais le pavé $B = [a, b] \times [c, d]$ n'est pas un ouvert car il n'est pas voisinage du point $(a, c) \in B$.
 Un disque ouvert est un ensemble ouvert.

Ensemble fermé

L'ensemble A est dit fermé si son complémentaire A^c est ouvert.
 Par exemple le pavé $[a, b] \times [c, d]$ est fermé. Un disque fermé est également un ensemble fermé.

Intérieur d'un ensemble

L'intérieur de l'ensemble A , qu'on note $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A .

Exemple :

Soient les ensembles $A = [a, b] \times [c, d[$, $B = [a, b] \times [c, d]$, $C =]a, b[\times]c, d[$, $D =]a, b[\times [c, d]$, $E = D(u, r)$ et $F = \overline{D}(u, r)$.

Nous avons $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{D} =]a, b[\times]c, d[$ et $\overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{F} = D(u, r)$.

Fermeture d'un ensemble

On appelle fermeture (ou adhérence) de A , le plus petit fermé qui contient A et on le note \overline{A} .

Exemple :

Pour les ensembles de l'exemple précédent, nous avons $\overline{A} = \overline{B} = \overline{C} = \overline{D} = [a, b] \times [c, d]$ et $\overline{E} = \overline{F} = \overline{D}(u, r)$.

Remarque :

Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nous avons

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. Si A est ouvert alors $A = \overset{\circ}{A}$.
3. Si A est fermé alors $A = \overline{A}$.

Frontière

On appelle frontière de A , qu'on note ∂A , l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
Par exemple $D(u, r)$ et $\overline{D}(u, r)$ ont la même frontière qui est le cercle de centre u et de rayon r .

Diamètre d'un ensemble

On appelle diamètre de l'ensemble A , le réel $\text{diam}(A) = \sup_{u, v \in A} \|u - v\|$.

Ensemble borné

L'ensemble A est dit borné si son diamètre est fini.
Par exemple le pavé $[a, b] \times [c, d[$ est borné mais le pavé $[a, +\infty[\times [c, d[$ ne l'est pas.

Ensemble connexe

L'ensemble A est dit connexe si on ne peut pas diviser \overline{A} en deux fermés disjoints non vides.
Un ensemble connexe est fait d'un seul “morceau”.

Domaine

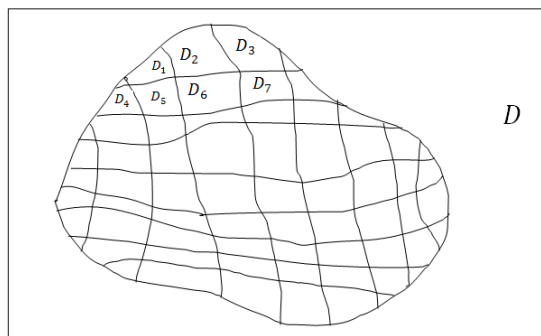
On appelle domaine dans \mathbb{R}^2 , tout ensemble ouvert et connexe.

Domaine fermé

On dit que l'ensemble A est un domaine fermé s'il est fermeture d'un domaine borné.

1.1.2 Intégrale double sur un domaine fermé

Soient D un domaine fermé de \mathbb{R}^2 , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ une subdivision de D constituée de n domaines fermés d'intérieurs deux à deux disjoints.



On appelle pas de la subdivision σ , le réel $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(D_k)$.

Notons $\mathcal{A}(D_k)$ l'aire de D_k pour $1 \leq k \leq n$, les sommes de Darboux se définissent de la même façon que dans le cas de la dimension un.

Définition 1. On appelle somme de Darboux supérieure de f relativement à la subdivision σ , la quantité

$$S_+(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n M_k \times \mathcal{A}(D_k), \text{ où } M_k = \sup_{u \in D_k} f(u)$$

et on appelle somme de Darboux inférieure de f relativement à σ , la quantité

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n m_k \times \mathcal{A}(D_k), \text{ où } m_k = \inf_{u \in D_k} f(u).$$

Définition 2. On dit que la fonction bornée $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si $\lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} S_-(f, \sigma) = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} S_+(f, \sigma)$ ¹ et cette limite commune s'appelle l'intégrale double de f sur D qu'on note $\iint_D f(x, y) dx dy$.

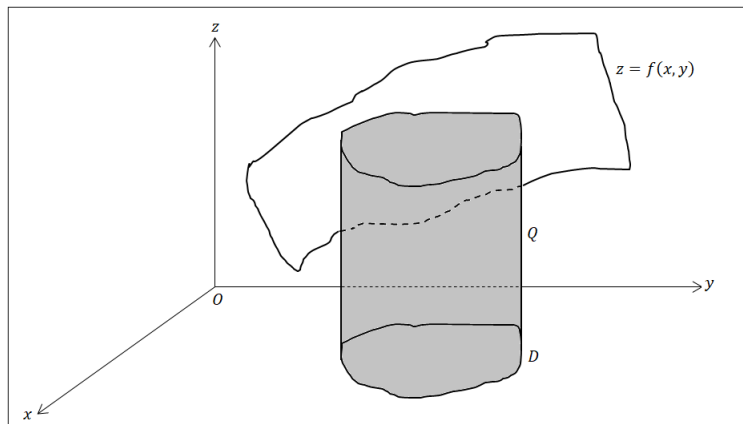
Remarques :

1. Si f est Riemann intégrable, on peut prendre une suite quelconque (u_1, \dots, u_n) , avec $u_k \in D_k$ et on peut écrire

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k) \times \mathcal{A}(D_k).$$

Cette somme s'appelle somme de Riemann.

2. Si f est positive et Riemann intégrable sur D alors $\iint_D f(x, y) dx dy$ représente le volume du corps Q situé sous le graphe de la fonction f , défini par $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Plus généralement, si f et g sont deux fonctions Riemann intégrables définies sur D , le volume du corps situé entre leurs graphes est donné par $\iint_D |f(x, y) - g(x, y)| dx dy$.



1. Pour que ces limites aient un sens, on doit considérer un filtre sur l'ensemble des subdivisions.

Comme dans le cas unidimensionnel, les fonctions continues sur un domaine fermé sont Riemann intégrables, comme le stipule le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé, toute fonction continue $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.*

Démonstration.

Voir [7], Théorème IV.7.5. page 195. □

Exemple 1 :

Considérons le pavé $D = [a, b] \times [c, d] = [0, 1] \times [0, 2]$ et la fonction f définie sur D par $f(x, y) = x^2 y$. f est Riemann intégrable car continue, calculons $\iint_D f(x, y) dx dy$ en utilisant les sommes de Riemann.

Prenons la subdivision uniforme σ définie par les points suivants :

$$x_i = a + i \times \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{i}{n}, \quad 0 \leq i \leq n$$

$$y_j = c + j \times \left(\frac{d-c}{m}\right) = \frac{2j}{m}, \quad 0 \leq j \leq m \quad (n, m \in \mathbb{N}^*).$$

La subdivision σ est constituée des domaines $D_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, le pas de σ est donc donné par

$$\delta(\sigma) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{diam}([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{m^2}},$$

on a $\delta(\sigma) \longrightarrow 0$ équivaut à $n \longrightarrow +\infty$ et $m \longrightarrow +\infty$, donc

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \mathcal{A}([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \\ &\quad \text{(la limite ne dépend pas de la subdivision choisie car } f \text{ est Riemann intégrable)} \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \frac{2}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{2j}{m}\right) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \frac{4}{n^3 m^2} \sum_{i=1}^n i^2 \sum_{j=1}^m j \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \frac{4}{n^3 m^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 2 :

1. Recalculer l'intégrale de l'exemple précédent en utilisant les primitives.
2. Calculer $\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy$.

Solution :

1.

$$\int_0^2 \int_0^1 x^2 y \, dx dy = \int_0^2 y \int_0^1 x^2 \, dx dy = \int_0^2 y \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_0^1 dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

1.1.3 Intégrale double généralisée

Comme dans le cas de la dimension un, on peut généraliser la définition de l'intégrale double au cas des domaines non bornés. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine non nécessairement borné et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ converge, on peut la calculer comme limite d'une intégrale double définie.

Exemple :

Calculer $I = \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + y^4} \, dx dy$.

Par définition, $I = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_1^\alpha \int_0^\beta \frac{1}{x^2 + y^4} \, dx dy$, donc

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + (y^2)^2} \, dx \right] dy \\ &= \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{y^2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{y^2} \right) \right]_0^{+\infty} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2y^2} dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

1.1.4 Propriétés de l'intégrale double

L'intégrale double vérifie les propriétés rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 1. Soient D un domaine fermé de \mathbb{R}^2 et f et g deux fonctions intégrables sur D . Nous avons :

i) *Linéarité :* Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur D et

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

ii) *Additivité par rapport aux ensembles* : Si $D = D_1 \cup D_2$, avec D_1 et D_2 deux domaines fermés d'intérieurs disjoints et tels que f est intégrable sur D_1 et D_2 , alors

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

iii) *Positivité* : Si f est positive, alors $\iint_D f(x, y) \, dx dy \geq 0$.

iv) *Conservation de l'ordre* : Si pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \leq g(x, y)$, alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

Démonstration.

Voir [6], pages 573–574. □

Remarque :

Ces propriétés restent vraies pour l'intégrale double généralisée.

1.1.5 Théorème de Fubini

Définition 3. (*Domaine régulier*)

Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 , on dit que D est régulier selon l'axe Oy s'il est de la forme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ vérifiant $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

On définit de la même manière un domaine régulier selon l'axe Ox .

Un domaine D est dit régulier s'il est régulier selon les deux axes Ox et Oy .

Théorème 2. (*Théorème de Fubini*)

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous avons

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx dy.$$

Démonstration.

Voir [7], Théorème V.2.1. page 209. □

Ce théorème montre qu'on peut ramener une intégrale double sur un domaine régulier à deux intégrales simples successives, et qu'on peut aussi inverser l'ordre d'intégration.

Si le domaine D est régulier selon l'axe Oy (resp. Ox) seulement, on utilise la première (resp. la deuxième) formule pour calculer l'intégrale de f sur D .

Remarque : Cas particulier :

Si $D = [a, b] \times [c, d]$ et $f(x, y) = g(x)h(y)$, où g (resp. h) est une fonction continue sur $[a, b]$ (resp. sur $[c, d]$) on aura

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) dx dy = \int_c^d h(y) \int_a^b g(x) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$

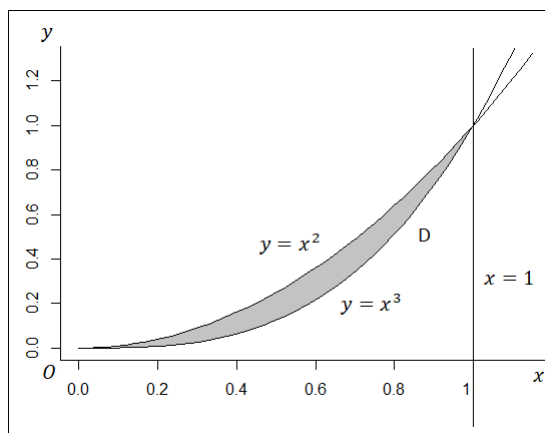
Exemple 1 :

Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$, où D est le domaine fermé délimité par les droites $x = 0$ et $x = 1$ et les courbes $y = x^3$ et $y = x^2$; et $f(x, y) = x + y$.

D'après le théorème de Fubini, nous

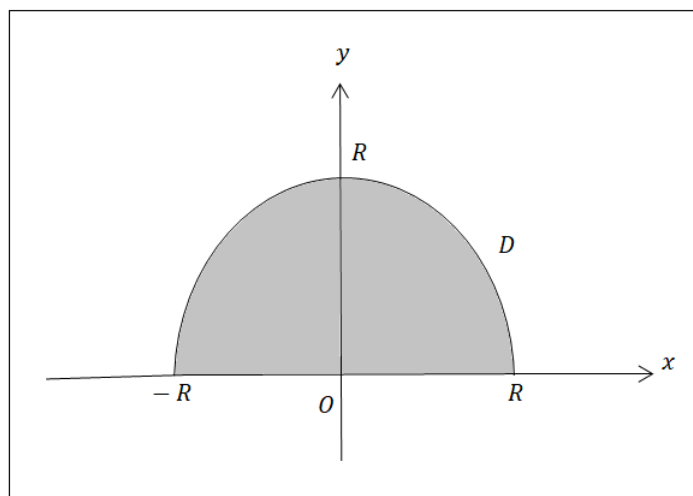
avons

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{14} \right]_0^1 = \frac{11}{140}. \end{aligned}$$



Exemple 2 :

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Calculer l'intégrale $I = \iint_D xy^2 dx dy$, où D est le demi-disque supérieur de centre O et de rayon R .



Nous avons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -R \leq x \leq R \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$, donc le théorème de

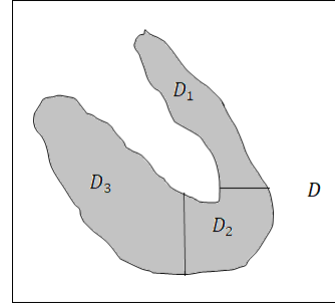
Fubini donne

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D xy^2 \, dx dy \\
&= \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xy^2 \, dy dx \\
&= \frac{1}{3} \int_{-R}^R x [y^3]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \, dx \\
&= \frac{-1}{6} \int_{-R}^R (-2x)(R^2-x^2)^{3/2} \, dx \\
&= \frac{-1}{6} \times \frac{2}{5} [(R^2-x^2)^{5/2}]_{-R}^R \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq R \text{ et } -\sqrt{R^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \right\}$, et donc on calcule I comme suit $I = \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} xy^2 \, dx dy$.

Remarque :

Si le domaine D n'est régulier ni selon Ox ni selon Oy , on essaye de le diviser en un nombre fini de domaines réguliers selon Ox ou Oy , et on utilise l'additivité de l'intégrale par rapport aux ensembles.



1.1.6 Formule de changement de variable

Les changements de variable permettent de faciliter le calcul de certaines intégrales compliquées. Un changement de variable se fait généralement à travers un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, notion définie ci-dessous.

Définition 4. (\mathcal{C}^1 -difféomorphisme)

Une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dite un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme si

- i) φ est de classe \mathcal{C}^1 .
- ii) φ est bijective.
- iii) φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 5. (Jacobien)

Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une application de classe \mathcal{C}^1 , définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On appelle jacobien de

φ au point (x, y) le déterminant de sa matrice jacobienne en ce point, et on le note $J_\varphi(x, y)$

$$J_\varphi(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3. Soient D un ouvert de \mathbb{R}^2 , φ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme défini sur D et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nous avons

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\varphi(D)} f(\varphi^{-1}(u, v)) |J_{\varphi^{-1}}(u, v)| du dv,$$

pourvu que ces intégrales existent.

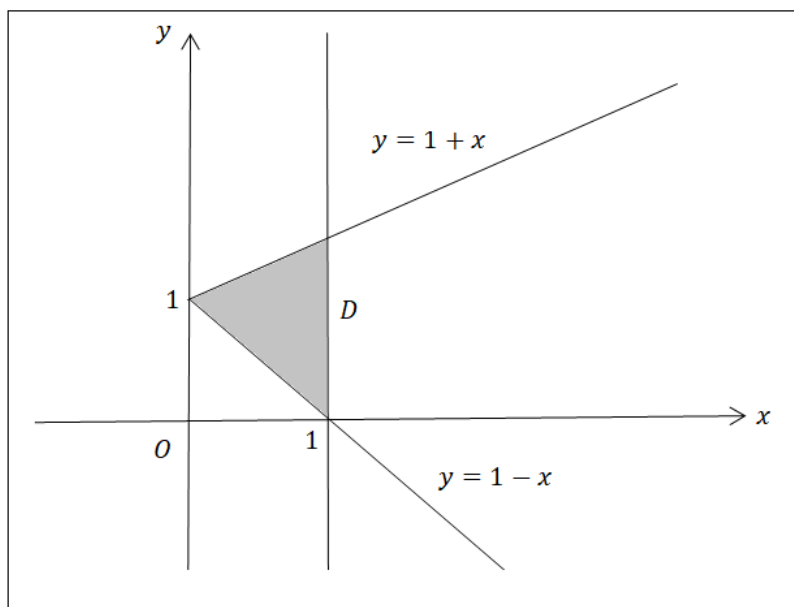
Démonstration.

La démonstration de ce théorème nécessite des outils de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue. Dans [6], on peut trouver une preuve sous des conditions plus restrictives (voir Théorème 4.7. page 593). \square

Exemple 1 :

Calculer $\iint_D (y - x) dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 1 - x \leq y \leq 1 + x\}$, en utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -x + y. \end{cases}$$



Posons $\varphi(x, y) = (u, v) = (x + y, -x + y)$. On commence par déterminer φ^{-1} , on a

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -x + y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u + v = 2y \Rightarrow y = \frac{u+v}{2}$$

$$\text{et } u - v = 2x \Rightarrow x = \frac{u-v}{2}.$$

Donc $\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$ et par conséquent

$$J_{\varphi^{-1}}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Maintenant, on détermine $\varphi(D)$, nous avons

$$y \geq 1 - x \iff \frac{u+v}{2} \geq 1 - \frac{u-v}{2} \iff u \geq 1$$

$$\text{et } y \leq 1 + x \iff \frac{u+v}{2} \leq 1 + \frac{u-v}{2} \iff v \leq 1.$$

$$\text{De plus, } 0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 \iff 0 \leq u - v \leq 2 \iff u - 2 \leq v \leq u$$

et comme $v \leq 1$ et $1 \leq u \implies v \leq u$, on déduit que

$$(u, v) \in \varphi(D) \iff u \geq 1 \text{ et } u - 2 \leq v \leq 1. \text{ Pour cela, on a nécessairement } u - 2 \leq 1 \iff u \leq 3.$$

D'où $\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq u \leq 3 \text{ et } u - 2 \leq v \leq 1\}$ et la formule de changement de variable donne

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x) \, dx dy &= \iint_{\varphi(D)} \left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} \right) \left| \frac{1}{2} \right| \, dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{u-2}^1 v \, dv du \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 [v^2]_{u-2}^1 \, du \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 (-u^2 + 4u - 3) \, du \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{u^3}{3} + 2u^2 - 3u \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 2 : (Passage aux coordonnées polaires)

On veut calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx dy.$$

Pour cela, on va utiliser le changement de variable

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = (r, \theta)\end{aligned}$$

avec

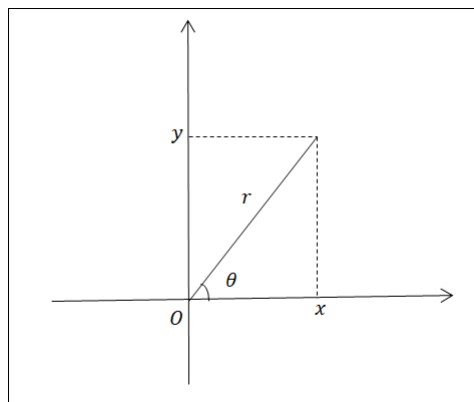
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

$$\text{et } J_{\varphi^{-1}}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r.$$

Donc

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{\varphi(D)} r e^{-r^2} dr d\theta \quad (\text{ici } D = \mathbb{R}^2) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} d\theta \\ &= \pi.\end{aligned}$$



1.1.7 Quelques applications de l'intégrale double

Calcul d'aires planes

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné, l'aire du domaine D est donnée par

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy.$$

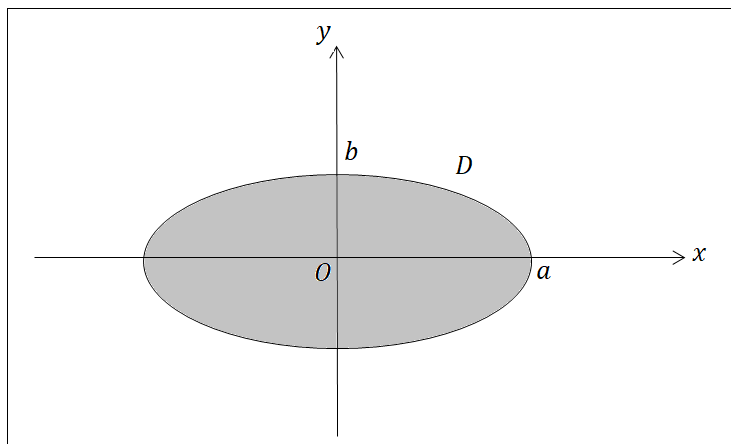
Exemple :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > b > 0$. Calculer l'aire du domaine D suivant

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left/ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right. \right\}.$$

D est le domaine limité par l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Nous avons

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy.$$

Pour calculer cette intégrale, nous passons aux coordonnées elliptiques à travers le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : D &\longrightarrow [0, 1] \times [0, 2\pi[\\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = (r, \theta) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} x = ar \cos(\theta) \\ y = br \sin(\theta). \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(r, \theta) = (ar \cos(\theta), br \sin(\theta)) \text{ et}$$

$$J_{\varphi^{-1}}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} a \cos(\theta) & -ar \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & br \cos(\theta) \end{pmatrix} = abr.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D) &= \iint_D dx dy \\ &= \iint_{\varphi(D)} abr \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \, dr d\theta \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} [r^2]_0^1 d\theta \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

Centre de gravité

Cas d'un nombre fini de points :

Soient $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ n points matériels de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n .

Le centre de gravité G du système constitué par ces points est donné par les coordonnées suivantes

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n y_i m_i,$$

où $m = \sum_{i=1}^n m_i$ est la masse du système.

Cas d'une figure plane :

Soit une plaque mince dont l'épaisseur est négligeable, on peut donc la représenter par un domaine D du plan. Pour définir le centre de gravité de la plaque, nous avons besoin de la notion suivante de masse surfacique.

Définition 6. (*Masse surfacique*)

La masse surfacique (ou la densité superficielle de la matière) est une grandeur physique qui mesure la masse par unité de surface (en Kg/m^2).

Si pour $(x, y) \in D$, la masse surfacique est donnée par la fonction $\mu(x, y)$, alors la masse de la plaque vaut

$$m = \iint_D \mu(x, y) \, dx dy \quad (\text{en Kg}).$$

Le centre de gravité de la plaque D (qu'on note G) est donné par

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) \, dx dy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y) \, dx dy.$$

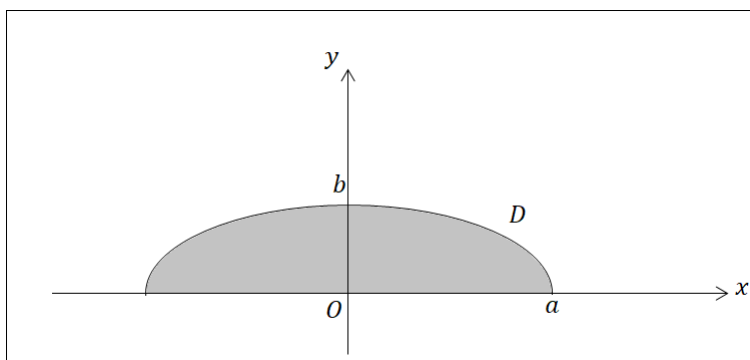
Exemple :

Déterminer le centre de gravité du domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

avec $a > b > 0$.

Nous supposons que la masse surfacique est $\mu(x, y) = 1$.



Nous commençons d'abord par calculer la masse de D .

$$m = \iint_D \mu(x, y) \, dx dy = \iint_D dx dy = \frac{\pi ab}{2} \quad (\text{d'après l'exemple précédent}).$$

Donc

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) \, dx dy \\ &= \frac{2}{\pi ab} \iint_D x \, dx dy. \end{aligned}$$

On passe aux coordonnées elliptiques

$$\begin{cases} x = ar \cos(\theta) \\ y = br \sin(\theta), \end{cases} \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi^{-1}(r, \theta) = (ar \cos(\theta), br \sin(\theta)) \text{ et } J_{\varphi^{-1}}(r, \theta) = abr.$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{\pi ab} \int_0^1 \int_0^\pi ar \cos(\theta) \times abr \, d\theta dr \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \cos(\theta) \, dr d\theta \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^1 r^2 [\sin(\theta)]_0^\pi d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi ab} \iint_D y \, dx dy \\ &= \frac{2}{\pi ab} \int_0^1 \int_0^\pi br \sin(\theta) \times abr \, d\theta dr \\ &= \frac{2b}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) \, d\theta dr \\ &= \frac{2b}{\pi} \int_0^1 r^2 [-\cos(\theta)]_0^\pi dr \\ &= \frac{4b}{\pi} \int_0^1 r^2 \, dr \\ &= \frac{4b}{3\pi} [r^3]_0^1 \\ &= \frac{4b}{3\pi}. \end{aligned}$$

Le centre de gravité de D est $G\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

Moment d'inertie

Définition 7. Le moment d'inertie I d'un point matériel P de masse m par rapport à un axe Δ est donné par

$$I = m \times d^2 \quad (\text{en } Kg \times m^2)$$

où d est la distance entre P et Δ .

Il représente la mesure de l'opposition qu'offre le point matériel P à voir changer son état de mouvement de rotation autour de l'axe Δ .

Le moment d'inertie d'un système de points matériels de masses m_1, m_2, \dots, m_n par rapport à Δ est la somme des moments d'inerties des divers points du système

$$I = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Cas d'une figure plane :

Le moment d'inertie d'une figure matérielle plane D de masse surfacique $\mu(x, y)$ par rapport à un axe Δ est donné par

$$I = \iint_D \mu(x, y) \times d^2(x, y) dx dy,$$

où $d(x, y)$ est la distance entre le point $P(x, y) \in D$ et l'axe Δ .

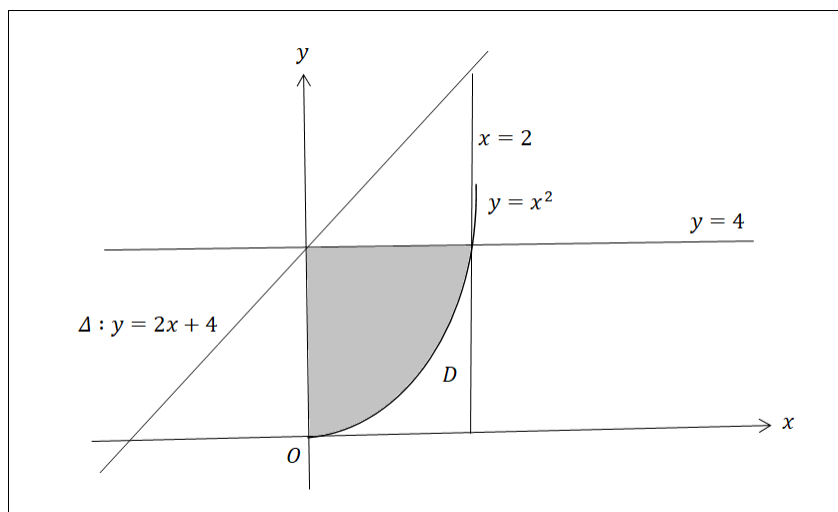
Remarque :

On définit le moment d'inertie de D par rapport à un point M de la même façon, et dans ce cas $d(x, y)$ devient la distance entre le point $P(x, y) \in D$ et M .

Exemple :

Nous supposons que l'unité de distance est 1 cm dans le plan Oxy muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Calculer le moment d'inertie du domaine D limité par les droites $x = 0$, $x = 2$, $y = 4$ et la courbe $y = x^2$ par rapport à l'axe $\Delta : y = 2x + 4$. La masse surfacique étant donnée par $\mu(x, y) = xy$ (en g/cm^2).



La distance entre un point $P(x, y)$ et l'axe $\Delta : ax + by + c = 0$ est donnée par

$$d(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dans notre cas

$$d(x, y) = \frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}}$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \mu(x, y) \times d^2(x, y) \, dx dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^2 \int_{x^2}^4 xy(2x - y + 4)^2 \, dy dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^2 \int_{x^2}^4 xy(4x^2 - 4xy + y^2 + 16x - 8y + 16) \, dy dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^2 x \int_{x^2}^4 (y^3 + 4x^2y - 4xy^2 + 16xy - 8y^2 + 16y) \, dy dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^2 x \left[\frac{y^4}{4} + 2x^2y^2 - \frac{4}{3}xy^3 + 8xy^2 - \frac{8}{3}y^3 + 8y^2 \right]_{x^2}^4 \, dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^2 \left(-\frac{x^9}{4} + \frac{4}{3}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - 8x^6 - 8x^5 + 32x^3 + \frac{128}{3}x^2 + \frac{64}{3}x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{5} \left[-\frac{x^{10}}{40} + \frac{4}{3} \frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{12} - \frac{8}{7}x^7 - \frac{4}{3}x^6 + 8x^4 + \frac{128}{9}x^3 + \frac{32}{3}x^2 \right]_0^2 \\ &\approx 24.882 \, g \times cm^2 \\ &\approx 2.488 \times 10^{-6} \, Kg \times m^2. \end{aligned}$$

1.2 Intégrales triples

Dans cette section, nous allons généraliser l'étude de l'intégrale de Riemann au cas des fonctions à trois variables. La notion de la norme euclidienne se définit de la même façon que dans \mathbb{R}^2 , autrement dit si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Les disques ouverts seront des boules ouvertes dans \mathbb{R}^3 définies par $B(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^3 / \|u - u_0\| < r\}$ et dont les fermetures sont les boules fermées $\overline{B}(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^3 / \|u - u_0\| \leq r\}$. Les notions de voisinage, ouvert, fermé, intérieur,... se définissent de la même façon que dans \mathbb{R}^2 . Les domaines de \mathbb{R}^3 seront appelés domaines spatiaux.

1.2.1 Intégrale triple sur un domaine spatial fermé

Soient D un domaine spatial fermé, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = \{D_1, \dots, D_n\}$ une subdivision de D constituée de domaines spatiaux fermés d'intérieurs deux à deux

disjoints. Le pas de cette subdivision est défini par $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(D_k)$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathcal{V}(D_k)$ le volume de D_k , les sommes de Darboux sont données, comme dans \mathbb{R}^2 , par

$$S_+(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n M_k \times \mathcal{V}(D_k), \text{ où } M_k = \sup_{x \in D_k} f(x)$$

et

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n m_k \times \mathcal{V}(D_k), \text{ où } m_k = \inf_{x \in D_k} f(x).$$

Définition 8. On dit que la fonction bornée $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si $\lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} S_-(f, \sigma) = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} S_+(f, \sigma)$ et cette limite commune s'appelle l'intégrale triple de f sur D qu'on note $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$.

Remarques :

1. Si f est Riemann intégrable, on peut prendre une suite quelconque (u_1, \dots, u_n) , avec $u_k \in D_k$ et on peut écrire

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k) \times \mathcal{V}(D_k).$$

Cette somme s'appelle somme de Riemann.

2. L'intégrale triple vérifie les mêmes propriétés de l'intégrale double (linéarité, additivité, théorème de Fubini,...).

Théorème 4. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine fermé, toute fonction continue $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

Démonstration.

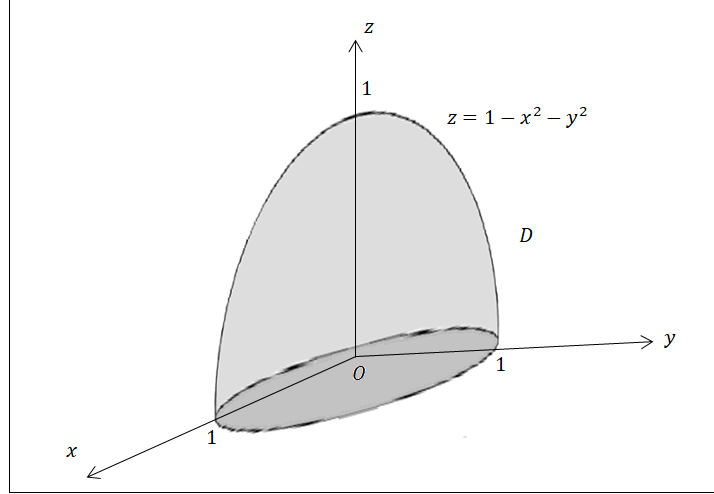
Voir [7], Théorème IV.7.5. page 195. □

Exemple 1 :

Calculer

$$I = \iiint_D xz dx dy dz,$$

où D est le domaine limité par la surface d'équation $z = 1 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$.



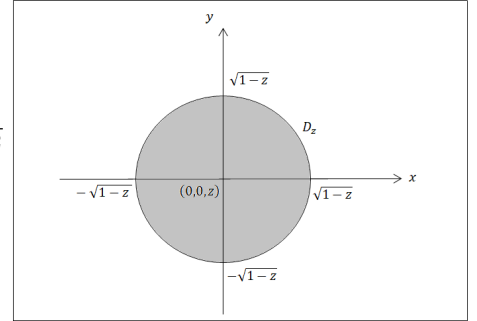
Notons pour $z \in [0, 1]$, D_z l'intersection de D avec le plan P_z parallèle au plan Oxy et qui passe par le point $(0, 0, z)$, donc D_z est le disque fermé de centre $(0, 0, z)$ et de rayon $\sqrt{1 - z}$. Nous avons

$$I = \int_0^1 \iint_{D_z} xz \, dx dy dz.$$

Remarquons que nous avons écrit I comme une intégrale simple d'intégrale double, cette méthode d'intégration s'appelle l'intégration en tranches.

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in D_z &\iff -\sqrt{1-z} \leq x \leq \sqrt{1-z} \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1-z \\ &\iff -\sqrt{1-z} \leq x \leq \sqrt{1-z} \text{ et } |y| \leq \sqrt{1-z-x^2} \\ &\iff -\sqrt{1-z} \leq x \leq \sqrt{1-z} \text{ et } \\ &\quad -\sqrt{1-z-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-z-x^2}. \end{aligned}$$



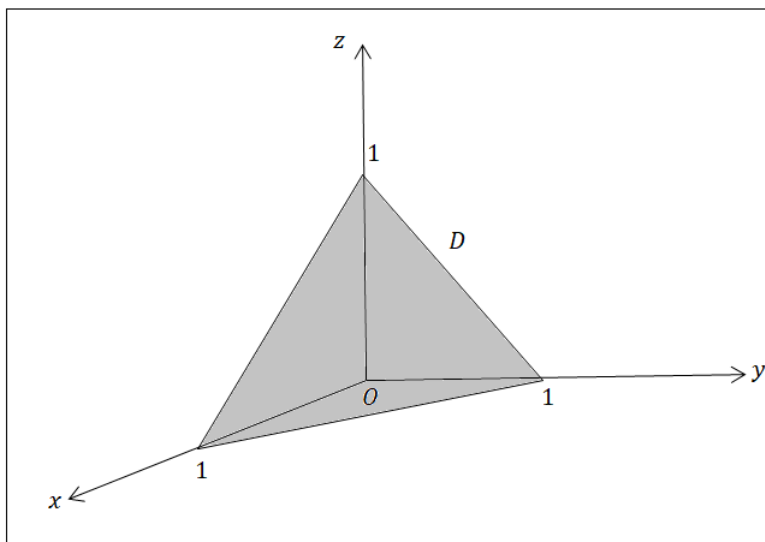
Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{-\sqrt{1-z-x^2}}^{\sqrt{1-z-x^2}} xz \, dy dx dz \\ &= - \int_0^1 z \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} (-2x) \left[\sqrt{1-z-x^2} \right] dx dz \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 z \left[(1-z-x^2)^{3/2} \right]_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 2 :
Calculer

$$I = \iiint_D xyz \, dx dy dz,$$

où D est le tétraèdre limité par les plans d'équations : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.

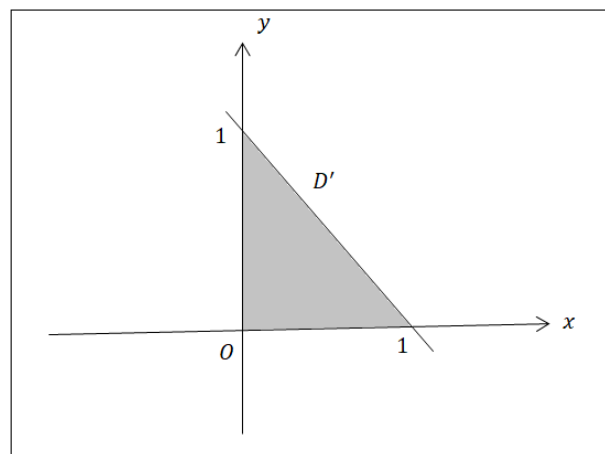


Pour tout $(x, y, z) \in D$, nous avons $0 \leq z \leq 1 - x - y$, donc on peut écrire

$$I = \iint_{D'} \int_0^{1-x-y} xyz \, dz dx dy,$$

où D' est la projection orthogonale de D sur le plan Oxy , donc

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$



Remarquons que nous avons écrit I comme une intégrale double d'intégrale simple, cette

méthode d'intégration s'appelle l'intégration en piles ou en bâtons.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz \, dz dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \int_0^{1-x} y [z^2]_0^{1-x-y} dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \int_0^{1-x} (x^2y + y^3 + 2xy^2 - 2xy - 2y^2 + y) dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{2xy^3}{3} - xy^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{720}.
 \end{aligned}$$

1.2.2 Formule de Changement de variable

Soient D un ouvert de \mathbb{R}^3 et $\varphi : D \longrightarrow U$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme défini sur D ($U = \varphi(D)$ est un ouvert de \mathbb{R}^3), la formule de changement de variable reste vraie pour les intégrales triples :

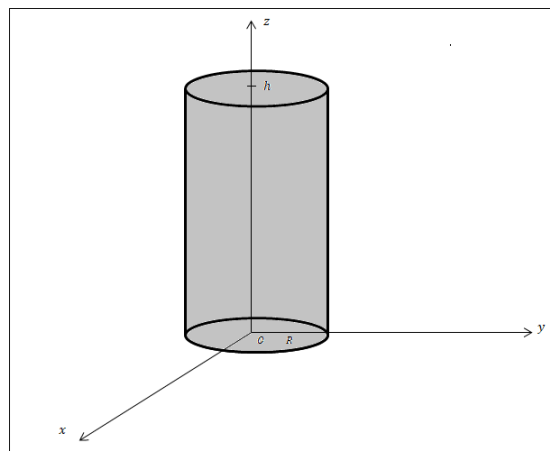
$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\varphi(D)} f(\varphi^{-1}(u, v, w)) |J_{\varphi^{-1}}(u, v, w)| \, du dv dw.$$

Exemple :

Calculer l'intégrale suivante

$$I = \iiint_D y^2 z \, dx dy dz,$$

où D est le cylindre plein d'axe Oz et de rayon R , limité par les plans d'équations $z = 0$ et $z = h$ ($R > 0$ et $h > 0$).



Pour calculer I , nous passons aux coordonnées cylindriques en utilisant le changement de variable suivant : $\varphi : (x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$, avec

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta), \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } z \in \mathbb{R}$$

$$\varphi^{-1}(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \text{ et}$$

$$J_{\varphi^{-1}}(r, \theta, z) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

De plus, nous avons $\varphi(D) = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq h\}$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2(\theta) z \times r dr d\theta dz \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2(\theta) z dr d\theta dz \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \sin^2(\theta) z \right]_0^R d\theta dz \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \sin^2(\theta) z d\theta dz \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \int_0^h z dz \\ &= \frac{R^4}{4} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{h^2 R^4}{16} \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{h^2 R^4}{16} \times 2\pi \\ &= \frac{\pi h^2 R^4}{8}. \end{aligned}$$

1.2.3 Quelques applications de l'intégrale triple

Calcul du volume d'un corps

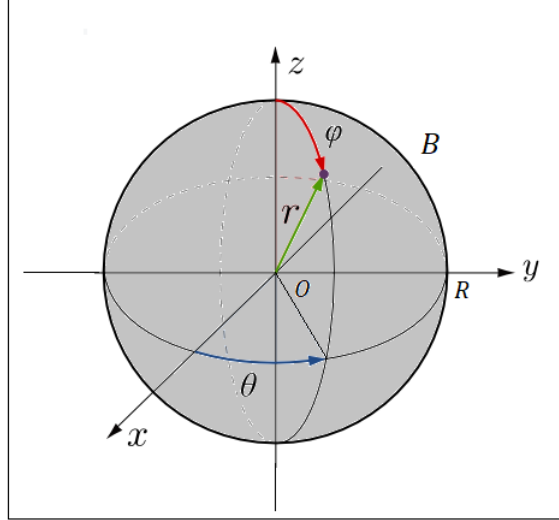
Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, le volume de D est donné par

$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D dx dy dz.$$

Exemple :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer le volume de la boule B de centre O et de rayon R , définie par l'inéquation

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$



Nous avons

$$\mathcal{V}(B) = \iiint_B dx dy dz,$$

pour calculer cette intégrale nous utilisons le changement de variable suivant qui permet de passer aux coordonnées sphériques : $\Phi : (x, y, z) \mapsto (r, \varphi, \theta)$, où

$$\begin{cases} x = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\varphi), \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

θ est un angle orienté tandis que φ est un angle non orienté.

$\Phi^{-1}(r, \varphi, \theta) = (r \sin(\varphi) \cos(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\varphi))$ et

$$J_{\Phi^{-1}}(r, \varphi, \theta) = \det \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin(\varphi).$$

Par ailleurs, $\Phi(B) = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(B) &= \iiint_{\Phi(B)} |J_{\Phi^{-1}}(r, \varphi, \theta)| \, dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^R r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\varphi) \, d\varphi d\theta dr \\ &= \int_0^R r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos(\varphi)]_0^\pi \, d\theta dr \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 \, dr \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Centre de gravité d'un corps

Définition 9. (*masse volumique*)

La masse volumique (ou la densité volumique de la matière) est une grandeur physique qui caractérise la masse d'un matériau par unité de volume (en Kg/m^3).

Si pour un point (x, y, z) d'un corps D , la masse volumique est donnée par la fonction $\mu(x, y, z)$, alors la masse du corps D sera donnée par

$$m = \iiint_D \mu(x, y, z) \, dx dy dz \quad (\text{en Kg}).$$

Le centre de gravité G d'un corps D est donné par

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iiint_D x \mu(x, y, z) \, dx dy dz, \\ y_G &= \frac{1}{m} \iiint_D y \mu(x, y, z) \, dx dy dz \\ \text{et } z_G &= \frac{1}{m} \iiint_D z \mu(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

Moment d'inertie d'un corps

Le moment d'inertie d'un corps D , de masse volumique $\mu(x, y, z)$ par rapport à un axe Δ est défini par

$$I = \iiint_D \mu(x, y, z) \times d^2(x, y, z) \, dx dy dz,$$

où $d(x, y, z)$ est la distance entre le point $P(x, y, z) \in D$ et l'axe Δ .

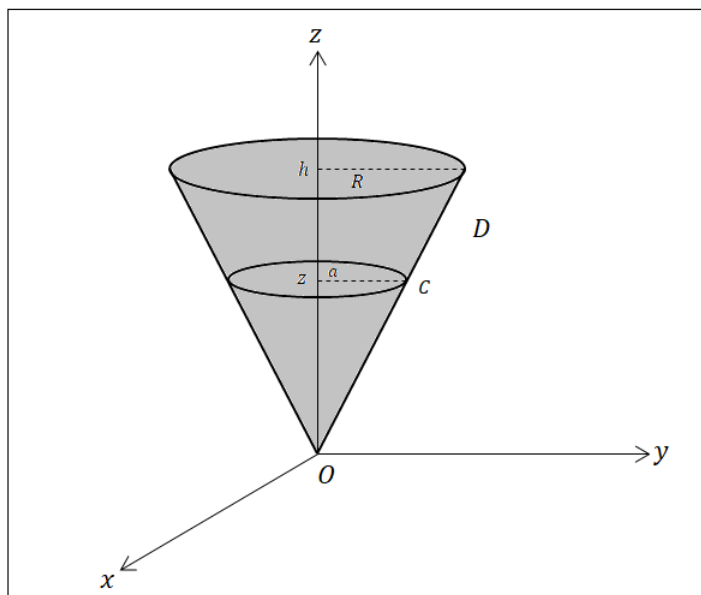
Exemple :

Dans l'espace $Oxyz$, on considère le tronc du cône de révolution D , de sommet O et d'axe

Oz , limité par les plans d'équations $z = 0$ et $z = h$ ($h > 0$). Notons $R > 0$ le rayon de la base de D .

1. Expliciter le domaine D .
2. Calculer le moment d'inertie de D par rapport à son axe (nous supposons que la masse volumique de D est constante).

Solution :



1. Nous avons $(x, y, z) \in D \iff 0 \leq z \leq h$ et $x^2 + y^2 \leq a^2$, où a est le rayon du cercle C (voir la figure). Par ailleurs, nous avons d'après le théorème de Thalès $\frac{a}{R} = \frac{z}{h}$, donc $a = \frac{R}{h}z$ et par conséquent

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \text{ et } x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2} z^2 \right\}.$$

2. Nous avons $\mu(x, y, z) = \mu$ constante et la distance entre un point $P(x, y, z)$ de D et l'axe Oz est donnée par $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Donc le moment d'inertie de D par rapport à Oz est donné par

$$I = \iiint_D \mu \times d^2(x, y, z) \, dx dy dz = \mu \iiint_D (x^2 + y^2) \, dx dy dz.$$

Nous passons aux coordonnées cylindriques par le changement de variable $\varphi : (x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$, avec

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta), \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } z \in \mathbb{R}$$

$\varphi^{-1}(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ et $J_{\varphi^{-1}}(r, \theta, z) = r$.

De plus nous avons

$$\begin{aligned} (r, \theta, z) \in \varphi(D) &\iff \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \leq \frac{R^2}{h^2} z^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ r^2 \leq \frac{R^2}{h^2} z^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ 0 \leq r \leq \frac{R}{h} z. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(D) = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq \frac{R}{h} z \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} I &= \mu \iiint_{\varphi(D)} r^3 dr d\theta dz \\ &= \mu \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr d\theta dz \\ &= \frac{\mu}{4} \int_0^h \int_0^{2\pi} [r^4]_0^{\frac{R}{h}z} d\theta dz \\ &= \frac{\pi \mu R^4}{2h^4} \int_0^h z^4 dz \\ &= \frac{\pi \mu h R^4}{10}. \end{aligned}$$

Remarques :

1. On peut exprimer I en fonction de la masse m de D . En effet, puisque μ est constante, on a $\mu = \frac{m}{V}$, où V est le volume de D . Or on peut montrer que $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$, donc $\mu = \frac{3m}{\pi R^2 h}$ et $I = \frac{3m R^2}{10}$.
2. Soient $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $P : ax + by + cz + d = 0$ un plan. La distance entre M et P est donnée par

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Si la droite Δ est l'intersection de deux plans perpendiculaires P_1 et P_2 alors

$$d(M, \Delta) = \sqrt{d(M, P_1)^2 + d(M, P_2)^2}.$$

1.3 Exercices

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^a \int_{x-a}^{3x} xy \, dy \, dx$ ($a > 0$).
2. $\int_0^1 \int_{2y}^{+\infty} \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2 - 2xy + x - y}$.
3. $\int \int_{[-1,1]^2} |x + y| \, dx \, dy$.

Exercice 2 :

Dans chaque cas, représenter le domaine D et calculer $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.

1. D est le triangle de sommets $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$ et $(0, \pi)$ et $f(x, y) = \cos(x + y)$.
2. D est le domaine limité par le carré de sommets $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ et $(2, -2)$ et le carré de sommets $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$ et $f(x, y) = \operatorname{ch}(x + y)$.
3. D est le domaine limité par les droites $x = a$ et $x = 2a$ et l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $f(x, y) = y$ (a et b étant deux réels strictement positifs).
4. D est l'intersection du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et du disque de centre $(1, 1)$ et de rayon 1 et $f(x, y) = x$.

Exercice 3 :

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ une application définie par $\varphi(x, y) = (\frac{y}{x^2}, xy)$.
 - a. Montrer que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.
 - b. En utilisant le changement de variable $(u, v) = \varphi(x, y)$, calculer l'intégrale $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, où D est le domaine limité par les courbes d'équations : $y = ax^2$, $y = bx^2$, $y = \frac{c}{x}$ et $y = \frac{d}{x}$ ($0 < a < b$ et $0 < c < d$) et $f(x, y) = x^3$.
2. Mêmes questions pour l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (y - x, y + \frac{1}{3}x)$, le domaine D limité par les droites : $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}x + 5$ et la fonction $f(x, y) = y - x$.

Exercice 4 :

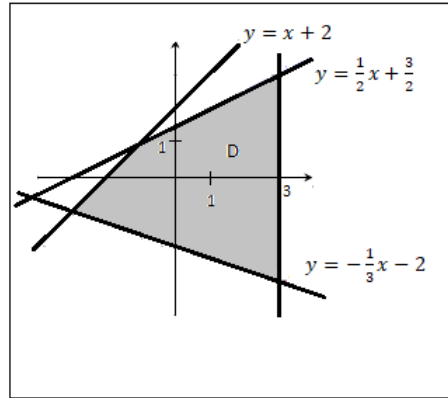
Dans chaque cas, calculer $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ en utilisant un changement de variable adéquat.

1. D est la couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons a et b ($0 < a < b$) et $f(x, y) = x^2 + x^3y$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ et $f(x, y) = x + y$.
3. D est le disque fermé de centre $(2, 3)$ et de rayon R et $f(x, y) = (x + y)^2$.

Exercice 5 :

1. Calculer le volume du corps limité par les surfaces d'équations : $x + y + z = 3$ et $z = x^2 + y^2 - 2$ et les droites verticales passant par la frontière du carré $D = [0, 1] \times [0, 1]$ du plan Oxy .

2. Calculer l'aire du domaine D représenté dans la figure suivante.



Exercice 6 :

- Soit D un domaine limité par la parabole d'équation $y^2 = ax$ et la droite $x = a$ ($a > 0$).
 - Représenter le domaine D .
 - Déterminer le centre de gravité de D (nous supposons que la masse surfacique est constante).
 - Calculer le moment d'inertie de D par rapport à l'axe $\Delta : y = -a$ et exprimer le en fonction de la masse de D .
- Mêmes questions pour le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0 \text{ et } y \geq 5x\}$ et l'axe $\Delta : y = -x$.

Exercice 7 :

Calculer $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ dans les cas suivants :

- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ et $f(x, y, z) = xyz$.
- D est le domaine limité par les plans d'équations : $x = 0, y = 0, z = 0, z = 2$ et $x + y - 2 = 0$ et $f(x, y, z) = z$.
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ et $f(x, y, z) = x + y + z$.
- D est le domaine limité par les plans d'équations : $x = 0, y = 0, z = 0, x + z = 1$ et $y + z = 1$ et $f(x, y, z) = (x - y + z)^2$.
- D est le domaine situé dans le premier octant et limité par le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon $R > 0$ et les plans d'équations $y = 0, y - 3x = 0$ et $z = 1$ et $f(x, y, z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

Exercice 8 :

Dans chaque cas, calculer le volume du corps D et son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz (nous supposons que $\mu(x, y, z) = 1$).

- D est l'ellipsoïde plein défini par l'inéquation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a, b, c > 0$).
- D est le corps limité par le cylindre de révolution d'équation $x^2 + y^2 = 16$ et les plans d'équations $z = 0$ et $z = 8 - x$.

Chapitre 2

Analyse vectorielle

2.1 Opérateurs différentiels

2.1.1 Champs de scalaires et champs de vecteurs

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^3 .

Définition 10. *Un champ de scalaires sur U est une application f de U dans \mathbb{R} .*

Exemples :

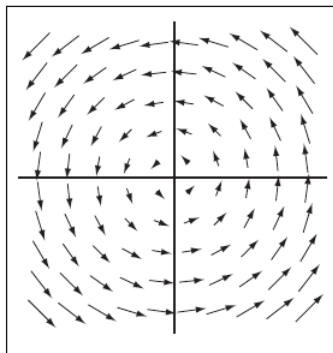
- La température en chaque point d'une pièce.
- La pression en chaque point d'une pièce.

Définition 11. *Un champ de vecteurs sur U est une application \vec{f} de U dans \mathbb{R}^3 .*

Exemples :

- *Champ de vitesse :* Dans un fluide en mouvement, chaque particule possède à un instant donné, un vecteur de vitesse \vec{v} qui dépend de sa position. Si la particule est au point (x, y, z) , sa vitesse est

$$\vec{v} = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t} \vec{k}.$$



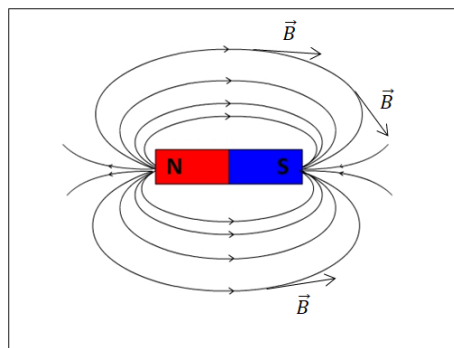
- *Champ magnétique :* Au voisinage d'un aimant permanent (par exemple un aimant droit ou un aimant U), les effets magnétiques sont modélisés par un champ vectoriel appelé le champ magnétique et noté par \vec{B} .

Lignes du champ

Soit \vec{f} un champ de vecteurs, une ligne de champ est une courbe tangente en tout point (x, y, z) au vecteur $\vec{f}(x, y, z)$ et parcourue dans le sens du champ.

Exemple :

Pour matérialiser le champ magnétique, on peut saupoudrer des grains de limaille de fer sur une feuille de papier placée au dessous d'un aimant. La limaille se dispose suivant des courbes fermées qui représentent les lignes du champ magnétique.



2.1.2 Gradient

Définition 12. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un champ de scalaires de classe \mathcal{C}^1 , le gradient de f au point (x, y, z) est défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \vec{k}.$$

Exemple :

Soit le champ de scalaires $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f$ au point $(1, -2, -1)$.

Nous avons $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = (6xy, 3x^2 - 3y^2z, -y^3)$, donc $\overrightarrow{\text{grad}} f(1, -2, -1) = (-12, 15, 8)$.

Propriétés

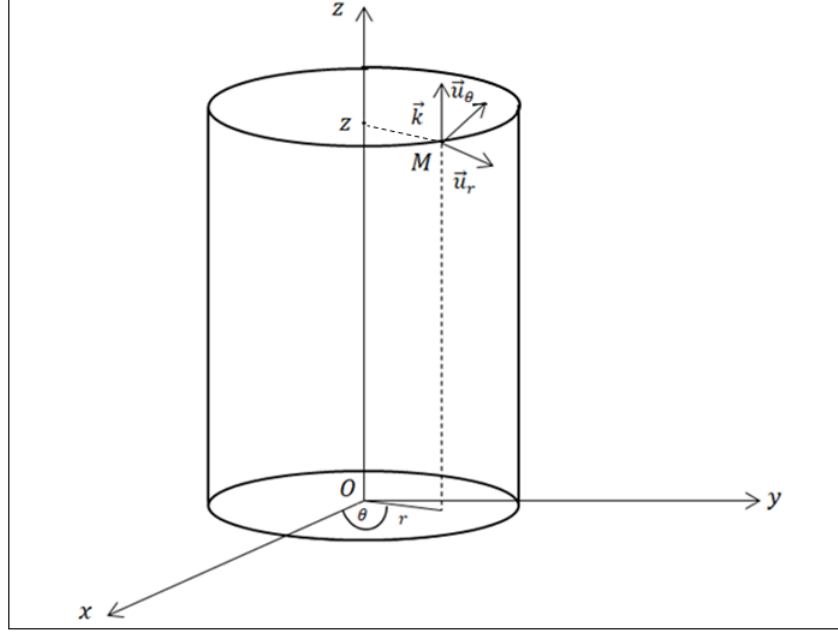
Soient f et g deux champs de scalaires de classe \mathcal{C}^1 et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il est facile de montrer que le gradient vérifie les propriétés suivantes.

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f + \beta \overrightarrow{\text{grad}} g$.
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \overrightarrow{\text{grad}}(f)$.

Gradient en coordonnées cylindriques

Soit $f(r, \theta, z)$ un champ de scalaire de classe \mathcal{C}^1 , on cherche à écrire $\overrightarrow{\text{grad}} f$ dans la base des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, où

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j} \end{cases}$$



Nous avons $f(r, \theta, z) = f(\varphi(x, y, z))$, avec

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta), \end{cases} \quad r \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

i.e. $f(r, \theta, z) = g(x, y, z) = g(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, où $g = f \circ \varphi$. Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) = \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + 0 \times \frac{\partial g}{\partial z}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\ \quad = \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z) = -r \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) + r \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z) = \frac{\partial g}{\partial z}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \end{cases}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) - \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z) &= r \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\ \implies \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) - \frac{1}{r} \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z). \end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) = \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z)$$

et comme $f(r, \theta, z) = g(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, on a

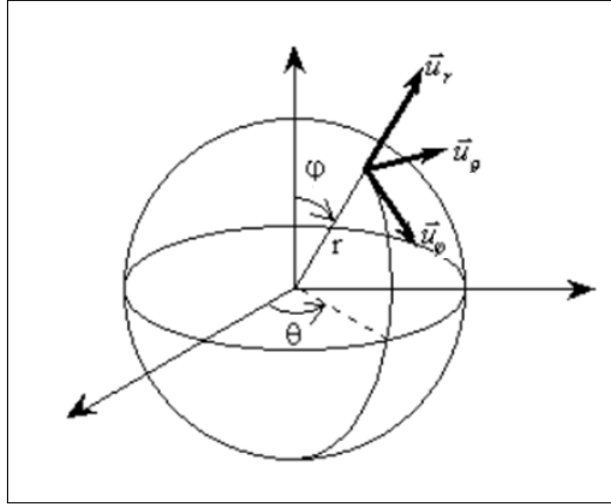
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) &= \overrightarrow{\text{grad}} g(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \vec{k} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z)(\cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z)(-\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}) + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k}. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Gradient en coordonnées sphériques

Soit $f(r, \varphi, \theta)$ un champ de scalaires de classe \mathcal{C}^1 . La base des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$ est donnée par

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + \cos(\varphi) \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = \cos(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \cos(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} - \sin(\varphi) \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j} \end{cases}$$

($r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi[$).



En procédant comme dans le cas des coordonnées cylindriques, nous obtenons

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \varphi, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi, \theta) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \varphi, \theta) \vec{u}_\theta. \tag{2.2}$$

Champ de gradient

Un champ de vecteurs \vec{f} , défini sur U , est dit champ de gradient s'il existe un champ de scalaires $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}} F$.

2.1.3 Divergence

Définition 13. Soit $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 , la divergence de \vec{f} au point (x, y, z) est définie par

$$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z).$$

Exemple :

Soit le champ de vecteurs $\vec{f}(x, y, z) = x^2 z \vec{i} - 2y^3 z^2 \vec{j} + xy^2 z \vec{k}$. Calculer $\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z)$.
 $\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2$.

Propriétés

Soient \vec{f} et \vec{g} deux champs vectoriels de classe \mathcal{C}^1 et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons

1. $\operatorname{div}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha \operatorname{div}(\vec{f}) + \beta \operatorname{div}(\vec{g})$.
2. Si h est un champ scalaire : $\operatorname{div}(h \vec{f}) = h \operatorname{div}(\vec{f}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(h) \cdot \vec{f}$ ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3).

Remarque :

On peut écrire par abus de notation $\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(x, y, z)$, où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur défini par $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

Divergence en coordonnées cylindriques et sphériques

Soit $\vec{f}(r, \theta, z) = f_1(r, \theta, z)\vec{u}_r + f_2(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z)\vec{k}$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 . D'après (2.1), $\vec{\nabla}$ s'écrit dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ comme suit

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f}(r, \theta, z) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(r, \theta, z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{f}(r, \theta, z) \\ &= \frac{\partial \vec{f}(r, \theta, z)}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{f}(r, \theta, z)}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{\partial \vec{f}(r, \theta, z)}{\partial z} \cdot \vec{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(f_1(r, \theta, z) \vec{u}_r + f_2(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z) \vec{k} \right) \cdot \vec{u}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f_1(r, \theta, z) \vec{u}_r + f_2(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z) \vec{k} \right) \cdot \vec{u}_\theta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(f_1(r, \theta, z) \vec{u}_r + f_2(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z) \vec{k} \right) \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j} \end{cases}$$

donc $\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial z} = \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta$ et $\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r$ et toutes les dérivées partielles de \vec{k} sont nulles.

En tenant compte de ceci et du fait que la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ est orthonormale, on déduit que

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{f}(r, \theta, z) &= \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} f_1(r, \theta, z) \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta + \frac{\partial f_3}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} f_1(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(r, \theta, z) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r f_1(r, \theta, z))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(r, \theta, z). \end{aligned} \quad (2.3)$$

De la même façon, on obtient l'expression suivante de la divergence dans la base des coordonnées sphériques d'un champ vectoriel $\vec{f}(r, \varphi, \theta) = f_1(r, \varphi, \theta) \vec{u}_r + f_2(r, \varphi, \theta) \vec{u}_\varphi + f_3(r, \varphi, \theta) \vec{u}_\theta$.

$$\text{div } \vec{f}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_1(r, \varphi, \theta))}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial(\sin(\varphi) f_2(r, \varphi, \theta))}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial f_3(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.4)$$

2.1.4 Rotationnel

Produit vectoriel

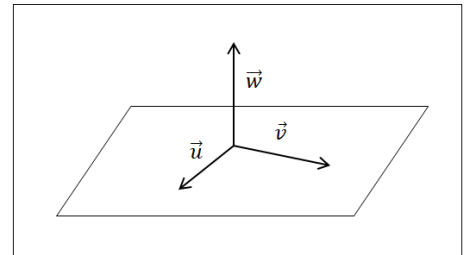
Définition 14. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^3 , le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} est l'unique vecteur \vec{w} qui vérifie :

- i) \vec{w} est orthogonal aux deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
- ii) La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct.
- iii) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$.

Et on note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, on pose par définition $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Le sens direct est déterminé par la règle de la main droite : Si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct alors \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} peuvent être représentés respectivement par la pousse, l'index et le majeur d'une main droite.



Calcul du produit vectoriel :

Si $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ et $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est calculé comme suit

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - v_2 u_3) \vec{i} + (v_1 u_3 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2) \vec{k}. \end{aligned}$$

Ce n'est pas un vrai déterminant, c'est un abus de notation qui permet de faciliter le calcul de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Propriété :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il est facile de montrer que

- i) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
- ii) $\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v})$.
- iii) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Remarque :

On peut vérifier que $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, ce qui est équivalent au fait que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale et de sens direct.

Rotationnel

Définition 15. Soit $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z) \vec{i} + f_2(x, y, z) \vec{j} + f_3(x, y, z) \vec{k}$ un champ vectoriel de classe C^1 , le rotationnel de \vec{f} au point (x, y, z) est défini par

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{f}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

On peut écrire par abus de notation $\vec{\text{rot}} \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$.

Exemple :

On considère un fil rectiligne infini de rayon R centré sur l'axe Oz , le champ magnétique créé par ce fil lorsqu'il est parcouru par un courant électrique d'intensité I est donné en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) par

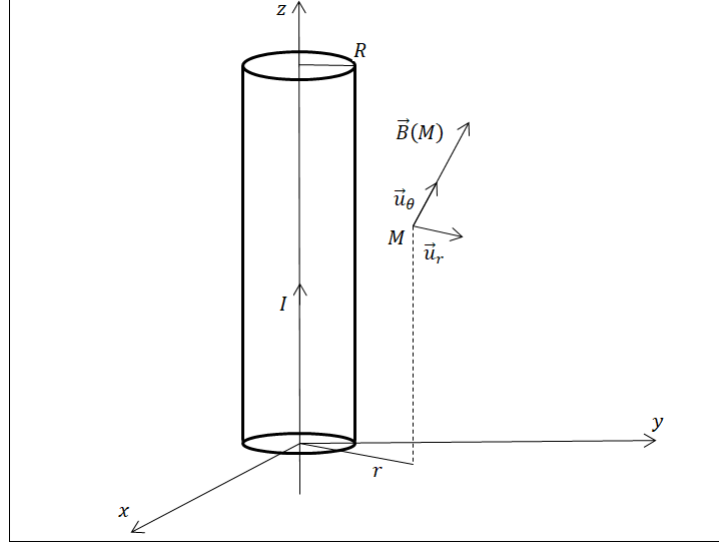
$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{r}{R^2} \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{1}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > R, \end{cases}$$

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (T \times m/A)$ est la perméabilité du vide.

1. Écrire \vec{B} en coordonnées cartésiennes.

2. Déterminer un ouvert U de \mathbb{R}^3 sur lequel \vec{B} est de classe \mathcal{C}^1 .
3. Déterminer $\vec{rot} \vec{B}$ sur U .

Solution :



1. Posons pour simplifier $c = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(M) &= \begin{cases} c \times \frac{r}{R^2} (-\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}) & \text{si } r \leq R \\ c \times \frac{1}{r} (-\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}) & \text{si } r > R \end{cases} \\
 &= \begin{cases} c \times \left(-\frac{y}{R^2} \vec{i} + \frac{x}{R^2} \vec{j} \right) & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ c \times \left(\frac{-y}{r^2} \vec{i} + \frac{x}{r^2} \vec{j} \right) & \text{si } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} c \times \left(-\frac{y}{R^2} \vec{i} + \frac{x}{R^2} \vec{j} \right) & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ c \times \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j} \right) & \text{si } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Posons $\vec{B}(x, y, z) = B_1(x, y, z) \vec{i} + B_2(x, y, z) \vec{j} + B_3(x, y, z) \vec{k}$.
 - Si $r < R$ (à l'intérieur du fil) ou $r > R$ (à l'extérieur du fil), \vec{B} est par définition de classe \mathcal{C}^1 .
 - Etudions \vec{B} sur la frontière du fil (i.e. pour $r = R$).
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 = R^2$, calculons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_1(x+h, y, z) - B_1(x, y, z)}{h}.$$

Nous avons

$$B_1(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{cy}{R^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ -\frac{cy}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Prenons (x, y, z) tel que $x > 0$ et $y > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_1(x+h, y, z) - B_1(x, y, z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-cyR^2 + cy((x+h)^2 + y^2)}{R^2h((x+h)^2 + y^2)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2cy(x+h)}{R^2((x+h)^2 + y^2) + 2R^2h(x+h)} \\ & \quad (\text{R\`egle de l'H\^opital}) \\ &= \frac{2cxy}{R^4} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_1(x+h, y, z) - B_1(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-cy + cy}{R^2h} = 0.$$

Donc \vec{B} n'est pas d\'erivable par rapport \`a x sur la fronti\`ere du fil.

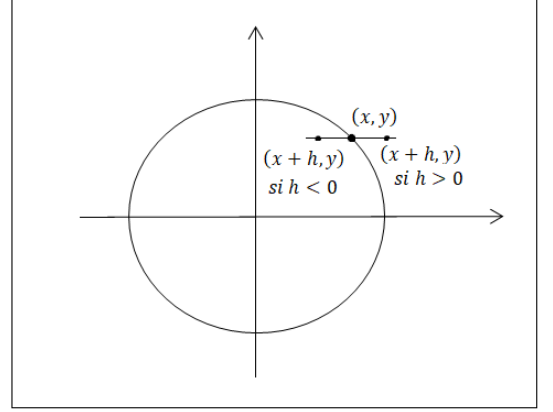
En conclusion, \vec{B} est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \neq R^2\}.$$

3. Calcul de $\vec{\text{rot}} \vec{B}$:

- A l'int\'erieur du fil : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 < R^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{B}(x, y, z) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{cy}{R^2} & \frac{cx}{R^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2c}{R^2} \vec{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \vec{k}. \end{aligned}$$



- A l'extérieur du fil : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 > R^2$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B}(x, y, z) &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}(x, y, z) \\
 &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{cy}{x^2+y^2} & \frac{cx}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \left[\frac{c(x^2 + y^2) - 2cx^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{c(x^2 + y^2) - 2cy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \overrightarrow{k} \\
 &= \overrightarrow{0}.
 \end{aligned}$$

Propriétés

Soient \overrightarrow{f} et \overrightarrow{g} deux champs vectoriels et h un champ scalaire de classe \mathcal{C}^2 , et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$i) \overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \overrightarrow{f} + \beta \overrightarrow{g}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{f} + \beta \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{g}.$$

$$ii) \overrightarrow{\text{rot}}(h \overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\text{grad}}(h) \wedge \overrightarrow{f} + h \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{f}).$$

$$iii) \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} h) = \overrightarrow{0}.$$

$$iv) \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{f}) = 0.$$

$$v) \text{div}(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}) = (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{g} - \overrightarrow{f} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{g}).$$

Rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques

Soit $\vec{f}(r, \theta, z) = f_1(r, \theta, z)\vec{u}_r + f_2(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z)\vec{k}$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 . Nous avons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}(r, \theta, z) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{f}(r, \theta, z) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge \vec{f}(r, \theta, z) \\
&= -\frac{\partial \vec{f}(r, \theta, z)}{\partial r} \wedge \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{f}(r, \theta, z)}{\partial \theta} \wedge \vec{u}_\theta - \frac{\partial \vec{f}(r, \theta, z)}{\partial z} \wedge \vec{k} \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(f_1(r, \theta, z)\vec{u}_r + f_2(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z)\vec{k} \right) \wedge \vec{u}_r \\
&\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f_1(r, \theta, z)\vec{u}_r + f_2(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z)\vec{k} \right) \wedge \vec{u}_\theta \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left(f_1(r, \theta, z)\vec{u}_r + f_2(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + f_3(r, \theta, z)\vec{k} \right) \wedge \vec{k} \\
&= -\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{u}_r + \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + \frac{\partial f_3}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{k} \right) \wedge \vec{u}_r \\
&\quad - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{u}_r + f_1(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{u}_\theta - f_2(r, \theta, z)\vec{u}_r + \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{k} \right) \wedge \vec{u}_\theta \\
&\quad - \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{u}_r + \frac{\partial f_2}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + \frac{\partial f_3}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{k} \right) \wedge \vec{k}.
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ est orthonormale et de sens direct, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}(r, \theta, z) &= \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{k} - \frac{\partial f_3}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{k} + \frac{1}{r} f_2(r, \theta, z)\vec{k} \\
&\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{u}_r + \frac{\partial f_1}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{u}_\theta - \frac{\partial f_2}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{u}_r \\
&= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r, \theta, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(r, \theta, z) \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(r, \theta, z) - \frac{\partial f_3}{\partial r}(r, \theta, z) \right) \vec{u}_\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \theta, z) - \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} f_2(r, \theta, z) \right) \vec{k} \\
&= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r, \theta, z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(r, \theta, z) \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(r, \theta, z) - \frac{\partial f_3}{\partial r}(r, \theta, z) \right) \vec{u}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r f_2(r, \theta, z))}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta, z) \right) \vec{k}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient l'expression suivante du rotationnel dans la base des coordonnées sphériques d'un champ vectoriel $\vec{f}(r, \varphi, \theta) = f_1(r, \varphi, \theta)\vec{u}_r + f_2(r, \varphi, \theta)\vec{u}_\varphi +$

$$f_3(r, \varphi, \theta) \vec{u}_\theta.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot } f}(r, \varphi, \theta) &= \frac{1}{r \sin(\varphi)} \left(\frac{\partial(\sin(\varphi) f_3(r, \varphi, \theta))}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_2(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \left(\frac{\partial f_1(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} - \right. \\ &\quad \left. \sin(\varphi) \frac{\partial(r f_3(r, \varphi, \theta))}{\partial r} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r f_2(r, \varphi, \theta))}{\partial r} - \frac{\partial f_1(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

Champ de rotationnel

Un champ de vecteurs \vec{R} est dit champ de rotationnel s'il existe un champ de vecteurs \vec{f} tel que $\vec{R} = \overrightarrow{\text{rot } f}$.

2.1.5 Laplacien

Définition 16. Soit f un champ de scalaires de classe \mathcal{C}^2 , défini sur U , le laplacien de f est défini par

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z).$$

Propriétés

Soient f et g deux champs de scalaires de classe \mathcal{C}^2 et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons

- i) $\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g.$
- ii) $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\overrightarrow{\text{grad } f}) \cdot (\overrightarrow{\text{grad } g}) + f(\Delta g).$
- iii) $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad } f}).$

Laplacien en coordonnées cylindriques et sphériques

Soit $f(r, \theta, z)$ un champ scalaire de classe \mathcal{C}^2 , et posons $\vec{h}(r, \theta, z) = \overrightarrow{\text{grad } f}(r, \theta, z)$. D'après (2.1), nous avons

$$\vec{h}(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k}$$

donc la relation (2.3) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Delta f(r, \theta, z) &= \text{div}(\overrightarrow{\text{grad } f}(r, \theta, z)) \\ &= \text{div}(\vec{h}(r, \theta, z)) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r h_1(r, \theta, z))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial h_3}{\partial z}(r, \theta, z) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(r, \theta, z). \end{aligned}$$

En ce qui concerne les coordonnées sphériques, si $f(r, \varphi, \theta)$ est un champ scalaire de classe \mathcal{C}^2 , on peut montrer grâce aux relations (2.2) et (2.4) que

$$\Delta f(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi, \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r, \varphi, \theta).$$

2.1.6 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Potentiel scalaire

Définition 17. Soit $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de gradient, il existe un champ scalaire F tel que $\vec{f} = \text{grad } F$. Le champ $\rho = -F$ s'appelle potentiel scalaire du champ \vec{f} , et on dit que \vec{f} dérive du potentiel scalaire ρ .

Remarque :

Si ρ est un potentiel scalaire de \vec{f} alors $\rho + c$ est aussi un potentiel scalaire de \vec{f} pour tout $c \in \mathbb{R}$.

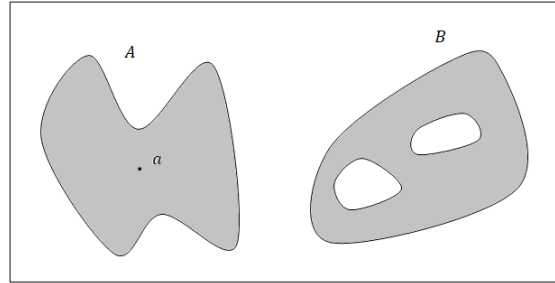
Nous avons vu que si \vec{f} est un champ de gradient alors $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$, on dit que \vec{f} est irrotationnel. La réciproque n'est pas toujours vraie, i.e. un champ irrotationnel \vec{f} ne dérive pas toujours d'un potentiel scalaire. Ceci est vrai si \vec{f} est défini sur un ouvert étoilé de \mathbb{R}^3 , notion définie ci-dessous.

Définition 18. (Ensemble étoilé)

Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^3$ est dit étoilé s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in A$, le segment $[a, b]$ est contenu dans A , et on dit alors que A est étoilé par rapport à a .

Exemple :

Dans la figure suivante, l'ensemble A est étoilé, mais B ne l'est pas.



Tout ensemble étoilé est connexe.

Théorème 5. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 , étoilé par rapport à u_0 , et soit $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 . Le champ \vec{f} dérive d'un potentiel scalaire sur U si et seulement si $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$. De plus, les potentiels scalaires de \vec{f} sont donnés au point $u = (x, y, z)$ par

$$\rho(u) = - \int_0^1 (u - u_0) \cdot \vec{f}(tu + (1-t)u_0) dt + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

Démonstration.

Voir [4], Théorème 4 page 473. □

La condition U étoilé est importante comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Reprenons l'exemple du champ magnétique \vec{B} créé par un fil électrique.

Sur $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 > R^2\}$, nous avons

$$\vec{B}(x, y, z) = -\frac{cy}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{cx}{x^2 + y^2} \vec{j},$$

où $c = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$.

On a vu que sur E , $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$, mais E n'est pas étoilé. Regardons si \vec{B} dérive d'un potentiel scalaire sur E .

Supposons qu'il existe un champ de scalaires $F(x, y, z)$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} F$ sur E . Ceci donne

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \vec{k}.$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{cy}{x^2 + y^2} & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{cx}{x^2 + y^2} & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \implies F(x, y, z) = -c \text{Arctan} \left(\frac{x}{y} \right) + g(y, z), \text{ si } y \neq 0 \quad (g \text{ étant une fonction de classe } \mathcal{C}^1)$$

$$\implies \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{cx}{x^2 + y^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = \frac{cx}{x^2 + y^2} \quad (\text{D'après (2)})$$

$$\implies \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 0$$

$$\implies g(y, z) = h(z), \quad \text{où } h \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1$$

$$\implies F(x, y, z) = -c \text{Arctan} \left(\frac{x}{y} \right) + h(z)$$

$$\implies \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = h'(z) = 0 \quad (\text{D'après (3)})$$

$$\implies h(z) = K, \quad K \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

$$\implies F(x, y, z) = -c \text{Arctan} \left(\frac{x}{y} \right) + K, \quad \text{si } y \neq 0.$$

Etudions la limite de $F(x, y, z)$ lorsque y tend vers 0 :

Soit $(x, y, z) \in E$ tel que $x > 0$, on a $\lim_{y \searrow 0} F(x, y, z) = -\frac{\pi}{2}c + K$ et $\lim_{y \searrow 0} F(x, y, z) = \frac{\pi}{2}c + K$, $\lim_{y \searrow 0} F(x, y, z) \neq \lim_{y \searrow 0} F(x, y, z)$ donc $F(x, y, z)$ n'est pas prolongeable par

continuité en $y = 0$. Ceci montre que \vec{B} ne dérive pas d'un potentiel scalaire sur E .

Remarque : \vec{B} dérive d'un potentiel scalaire sur $E \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \neq 0\}$.

Potentiel vecteur

Définition 19. Soient U un ouvert non vide de \mathbb{R}^3 et $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de rotationnel, il existe un champ vectoriel \vec{F} tel que $\vec{f} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$. Le champ \vec{F} s'appelle potentiel vecteur de \vec{f} et on dit que \vec{f} dérive du potentiel vecteur \vec{F} .

Remarque :

Si \vec{F} est un potentiel vecteur de \vec{f} , alors $\vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}} g$ (où g est un champ scalaire de classe \mathcal{C}^2) est aussi un potentiel vecteur de \vec{f} .

Nous avons vu que si \vec{f} est un champ de rotationnel, alors $\text{div}(\vec{f}) = 0$, on dit que \vec{f} est solénoïdal ou incompressible. Mais en général, un champ solénoïdal \vec{f} ne dérive pas toujours d'un potentiel vecteur. Le théorème suivant montre que ceci est vrai si \vec{f} est défini sur un ouvert étoilé.

Théorème 6. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 , étoilé par rapport à u_0 , et soit \vec{f} un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 défini sur U . Le champ \vec{f} dérive d'un potentiel vecteur sur U si et seulement si $\text{div}(\vec{f}) = 0$. De plus, les potentiels vectoriels de \vec{f} sont donnés au point $u = (x, y, z)$ par

$$\vec{F}(u) = \int_0^1 t \vec{f}(tu + (1-t)u_0) \wedge (u - u_0) dt + \overrightarrow{\text{grad}} g,$$

g étant un champ scalaire de classe \mathcal{C}^2 .

Le théorème suivant montre que tout champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 , peut s'écrire comme la différence d'un champ de rotationnel et d'un champ de gradient.

Théorème 7. (Théorème fondamental du calcul vectoriel ou Théorème de Helmholtz-Hodge) Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 , il existe un champ vectoriel \vec{F} et un champ scalaire φ tels que $\vec{f} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$.

Démonstration.

Voir [2], Théorème 6.20 page 401. □

2.2 Intégrales curvilignes

2.2.1 Courbes paramétrées

Définition 20. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , on appelle courbe paramétrée gauche (ou arc paramétré gauche) la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

qui associe à un paramètre $t \in I$, un point M de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$.
L'image $\Gamma = \gamma(I)$ est la courbe représentée par γ .

Remarque :

Si γ est à valeurs dans \mathbb{R}^2 , on parle de courbe plane.

Définition 21. (Courbe fermée)

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, γ est dite fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemples de courbes planes :

- La droite :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, une droite peut être définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = ct + d, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'équation cartésienne de cette droite est donnée par

$$y = \frac{c}{a}x + \frac{ad - bc}{a}.$$

- Le cercle :

Le cercle de centre $A(x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$ peut être représentée comme suit :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t) + x_0 \\ y(t) = R \sin(t) + y_0, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

et l'équation cartésienne de ce cercle est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

- Les coniques :

Les coniques sont des courbes qui se produisent de l'intersection d'un plan avec un cône de révolution, ils sont de trois types : l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

- L'ellipse :

La représentation paramétrique d'une ellipse centrée à l'origine est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

Et l'équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- L'hyperbole :

La représentation paramétrique d'une hyperbole est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \varepsilon a \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = b \operatorname{sh}(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs et ε vaut 1 ou -1 ($\varepsilon = 1$ donne la représentation paramétrique d'une branche et $\varepsilon = -1$ donne la représentation de l'autre branche).

Et l'équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- La parabole :

Une parabole d'axe Oy a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \alpha t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

où α est un nombre réel non nul.

Et elle a pour équation cartésienne

$$y = \alpha x^2.$$

Une parabole d'axe Ox se définit de la même façon.

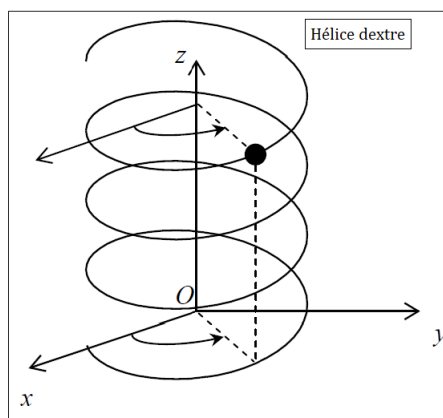
Exemples de courbes gauches :

- *L'hélice circulaire à pas constant :*

Soient $R, h \in \mathbb{R}_+^*$, une hélice circulaire est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t) \\ y(t) = \varepsilon R \sin(t) \\ z(t) = h \times t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

où ε vaut 1 (hélice dextre) ou -1 (hélice senestre).



2.2.2 Intégrale curviligne d'un champ de scalaires

Nous allons définir la notion de l'intégrale curviligne qui généralise, en quelque sorte, la notion de l'intégrale de Riemann sur un segment de \mathbb{R} , en une intégrale sur une courbe quelconque dans le plan ou l'espace, par rapport à l'abscisse curviligne ds .

Définition 22. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un champ de scalaires continu et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 , contenue dans U (i.e. $\Gamma \subset U$, où $\Gamma = \gamma(I)$). L'intégrale curviligne de f sur Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_I f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\left(\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \right).$$

Remarques :

1. Remarquons que le paramétrage de la courbe Γ permet de ramener l'intégrale curviligne sur Γ en une intégrale de Riemann usuelle sur le domaine de définition I de l'application γ .
2. Si $f(x, y, z) = 1$, on obtient la longueur de Γ

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_I \|\gamma'(t)\| dt.$$

2.2.3 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs

Dans le paragraphe précédent, nous avons traité le cas de l'intégrale curviligne d'un champ de scalaires. Dans ce paragraphe, nous regardons le cas d'un champ de vecteurs.

Définition 23. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 , $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continu et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 , avec $\Gamma = \gamma(I) \subset U$. L'intégrale curviligne de \vec{f} sur Γ est définie par

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Gamma} f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz \\ &= \int_I (f_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt. \end{aligned}$$

Remarque :

L'expression $\omega = f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$ s'appelle forme différentielle de degré 1 sur U .

Exemple 1 :

Calculer

$$\int_{\Gamma} y dx - x dy,$$

où Γ est l'ellipse définie par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

($a, b > 0$).

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y dx - x dy &= \int_0^{2\pi} (y(t) \times x'(t) - x(t) \times y'(t)) dt \\ &= -ab \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= -2\pi ab. \end{aligned}$$

Exemple 2 :
Calculer

$$\int_{\widehat{OA}} (3x^2 + y) dx - 14yz dy + 20xz^2 dz,$$

où $A(1, 1, 1)$ et \widehat{OA} est le chemin défini par

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3. \end{cases}$$

Il faut d'abord déterminer l'intervalle de définition de la courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Il est facile de voir que pour $t = 0$, le point $(x(0), y(0), z(0)) = O$ et pour $t = 1$, le point $(x(1), y(1), z(1)) = A$, donc $t \in [0, 1]$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{OA}} (3x^2 + y) dx - 14yz dy + 20xz^2 dz &= \int_0^1 [(3x^2(t) + y(t))x'(t) - 14y(t)z(t)y'(t) + 20x(t)z^2(t)z'(t)] dt \\ &= \int_0^1 (4t^2 - 28t^6 + 60t^9) dt \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Propriétés de l'intégrale curviligne

Proposition 2. Soient \vec{f} et \vec{g} deux champs vectoriels continus, $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 (avec $\gamma([a, b]) = \Gamma$) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons

1. $\int_{\Gamma} (\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) \cdot d\vec{s} = \alpha \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \beta \int_{\Gamma} \vec{g} \cdot d\vec{s}.$
2. Notons Γ^- la courbe inverse de Γ définie par

$$\begin{aligned} \gamma^- : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \end{aligned}$$

nous avons

$$\int_{\Gamma^-} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

3. Soient $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\gamma_2 : [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbes paramétrées avec $\Gamma_1 = \gamma_1([a, b])$, $\Gamma_2 = \gamma_2([b, c])$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. On appelle juxtaposition de Γ_1 et Γ_2 la courbe $\Gamma_1 \vee \Gamma_2$ définie par

$$\begin{aligned} \gamma : [a, c] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\int_{\Gamma_1 \vee \Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Démonstration.

Voir [1], Propositions 3.6.1. et 3.6.2. pages 44-45. □

2.2.4 Circulation et travail

La circulation d'un champ de vecteurs \vec{f} le long d'une courbe Γ est définie par

$$C = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Travail

Soit \vec{F} une force constante et \overrightarrow{AB} un déplacement rectiligne, le travail fourni par la force \vec{F} pour aller de A à B est donné par $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Plus généralement si \vec{F} n'est pas constante i.e. si elle est un champ de vecteurs $\vec{F}(x, y, z)$ et si le déplacement est quelconque, le travail du champ de force \vec{F} est donné par

$$W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

2.2.5 Formule de Green

La formule de Green est une formule qui permet de faire le lien entre une intégrale curviligne sur une courbe fermée et une intégrale double sur le domaine intérieur de cette courbe. Avant d'aborder cette formule, nous avons besoin des définitions suivantes.

Définition 24. (*Courbe simple*)

Une courbe fermée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite simple si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pour tous $t_1 \neq t_2$ sauf si $t_1, t_2 \in \{a, b\}$. Autrement dit la courbe γ ne se recoupe pas.

Définition 25. (*Rotationnel dans le plan*)

Si $\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ est un champ de vecteurs à valeurs dans \mathbb{R}^2 , le rotationnel de \vec{f} est défini par

$$\text{rot } \vec{f}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y).$$

Théorème 8. (*Formule de Green*)

Soit Γ une courbe paramétrée plane, fermée, simple, de classe \mathcal{C}^1 et orientée dans le sens trigonométrique, et soient D le domaine intérieur de Γ et $\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 sur D , nous avons

$$\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \text{rot } \vec{f}(x, y) dx dy.$$

Démonstration.

Voir [10], Proposition 35 page 796. □

Remarque :

Le cercle mis avec le signe de l'intégrale signifie que nous intégrons sur une courbe fermée.

Application : Aire d'un domaine.

Soit D un domaine fermé limité par une courbe Γ qui vérifie les conditions du théorème précédent et considérons le champ vectoriel $\vec{f}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Nous avons

$$\text{rot } \vec{f}(x, y) = \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 2.$$

Donc la formule de Green donne

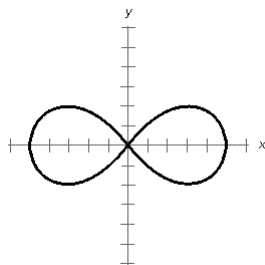
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (-y) dx + x dy &= \iint_D 2 dx dy \\ \implies \mathcal{A}(D) &= \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (-y) dx + x dy. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale curviligne permet de calculer l'aire d'un domaine dans le plan.

- Supposons que Γ est une courbe polaire définie par

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \theta &\mapsto \gamma(\theta) = r(\theta). \end{aligned}$$

Un exemple de telle courbe est le lemniscate de Bernoulli défini par $r(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$ ($a > 0$).



L'aire de D sera donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (-y) dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_I (-y(\theta)x'(\theta) + x(\theta)y'(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Or

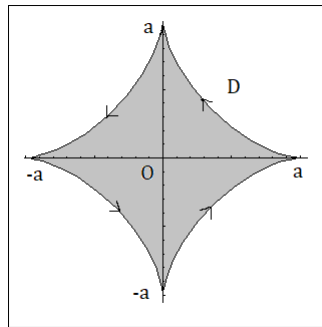
$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{A}(D) &= \frac{1}{2} \int_I (-r(\theta) \sin(\theta)(r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta)) + r(\theta) \cos(\theta)(r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta))) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_I (r^2(\theta) \sin^2(\theta) + r^2(\theta) \cos^2(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_I r^2(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Exemple :

Calculer l'aire du domaine D limité par l'astroïde défini par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t), \end{cases} \quad a > 0.$$



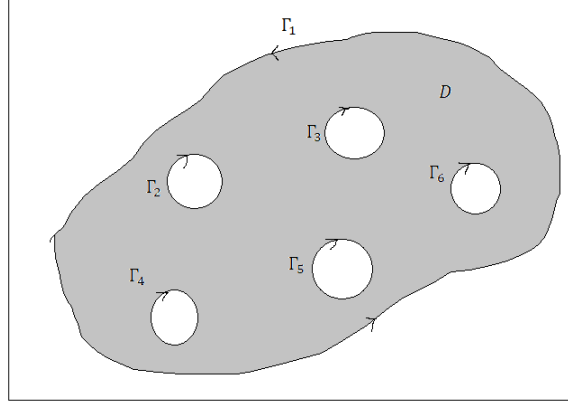
On oriente cet astroïde (qu'on note par Γ) dans le sens trigonométrique.

Grâce à la périodicité des fonctions $\sin(t)$ et $\cos(t)$, on peut prendre $t \in [0, 2\pi]$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (-y) dx + x dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)) dt \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^4(t) \cos^2(t) + \cos^4(t) \sin^2(t)) dt \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt \\
&= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\
&= \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t)) dt \\
&= \frac{3a^2}{16} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3\pi a^2}{8}.
\end{aligned}$$

Extension de la formule de Green

La formule de Green s'étend aux domaines D dont la frontière est constituée d'un nombre fini de courbes fermées, simples et deux à deux disjointes Γ_i ($i \leq 1 \leq n$). Les courbes Γ_i sont orientées de sorte que le domaine D se trouve toujours sur la gauche lorsqu'on les parcourt.



La formule de Green pour un champ vectoriel \vec{f} de classe \mathcal{C}^1 s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \iint_D \text{rot } \vec{f}(x, y) dx dy.$$

2.2.6 Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration

Soient A et B deux points du plan et $\vec{f} = (f_1, f_2)$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 . L'intégrale curviligne de \vec{f} de A à B dépend en général du chemin reliant A à B sur lequel on intègre. Nous allons chercher des conditions sur \vec{f} sous lesquelles cette intégrale ne dépend pas du chemin suivi en allant de A à B mais uniquement de la position de A et B . Supposons que ceci est vrai, i.e. que pour toutes courbes Γ_1 et Γ_2 orientées dans le sens trigonométrique et qui relient A à B , nous avons

$$\int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot \vec{ds}$$

ceci équivaut à

$$\int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{ds} - \int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 0 \iff \int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{ds} + \int_{\Gamma_2^-} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 0 \iff \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 0,$$

où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ est une courbe fermée.

Cela nous mène à chercher des conditions sous lesquelles l'intégrale curviligne de \vec{f} sur toute courbe fermée est nulle. Ces conditions sont données par le théorème suivant.

Théorème 9. Soit $\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine D . Pour que l'intégrale curviligne sur toute courbe fermée de ce domaine soit nulle, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y), \forall (x, y) \in D.$$

Démonstration.

Voir [9], page 251. □

2.3 Intégrales de surface

2.3.1 Surfaces paramétrées

Définition 26. Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , on appelle surface paramétrée (ou nappe paramétrée) la donnée d'une application

$$\begin{aligned}\alpha : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

qui associe à un paramètre $(u, v) \in \Omega$, un point M de coordonnées $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. L'image $\Sigma = \alpha(\Omega)$ est la surface représentée par α .

Définition 27. (Surface fermée)

Une surface Σ est dite fermée si elle délimite un volume V de \mathbb{R}^3 .

Exemples :

- Le cylindre :

Le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon $R > 0$ est défini par la représentation paramétrique suivante.

$$\begin{cases} x(\theta, h) = R \cos(\theta) \\ y(\theta, h) = R \sin(\theta) \\ z(\theta, h) = h, \end{cases}$$

$(\theta, h) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ sont les paramètres.

L'équation cartésienne de ce cylindre est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

- La sphère :

Une représentation paramétrique de la sphère de centre O et de rayon $R > 0$ est donnée par

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z(\varphi, \theta) = R \cos(\varphi), \end{cases}$$

où $(\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Ceci donne l'équation cartésienne suivante

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

- Le cône :

Soit Σ la partie supérieure du cône de révolution de sommet O , défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Σ peut être représentée par les équations paramétriques suivantes.

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = r \sin(\theta) \\ z(r, \theta) = r, \end{cases}$$

avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$.

- *Le tore :*

Un tore peut être représenté par les équations paramétriques suivantes.

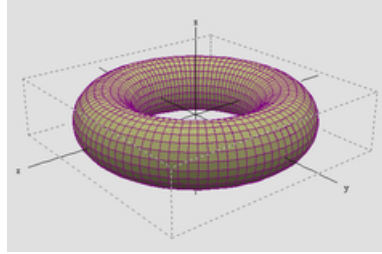
$$\begin{cases} x(u, v) = (R + r \cos(v)) \cos(u) \\ y(u, v) = (R + r \cos(v)) \sin(u) \\ z(u, v) = r \sin(v), \end{cases}$$

$(0 < r < R)$

$u, v \in [0, 2\pi]$ sont les paramètres.

Ceci donne l'équation cartésienne suivante

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2.$$



- *L'ellipsoïde :*

L'ellipsoïde est une surface donnée par la représentation paramétrique suivante.

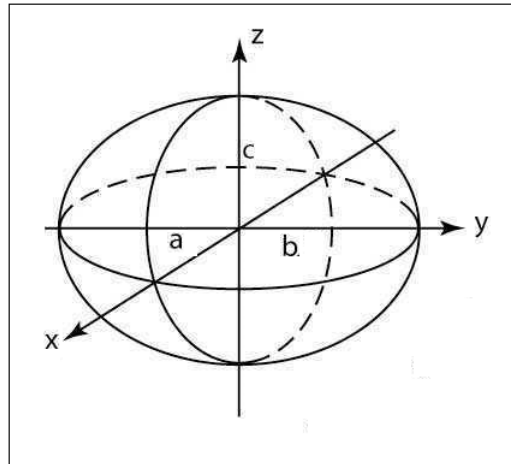
$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = a \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y(\varphi, \theta) = b \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z(\varphi, \theta) = c \cos(\varphi), \end{cases}$$

$(a, b, c > 0)$

$\varphi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ sont les paramètres.

Ceci donne l'équation cartésienne suivante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



-L'hyperboloïde à une nappe :

L'hyperboloïde à une nappe d'axe Oz est défini par l'équation cartésienne suivante.

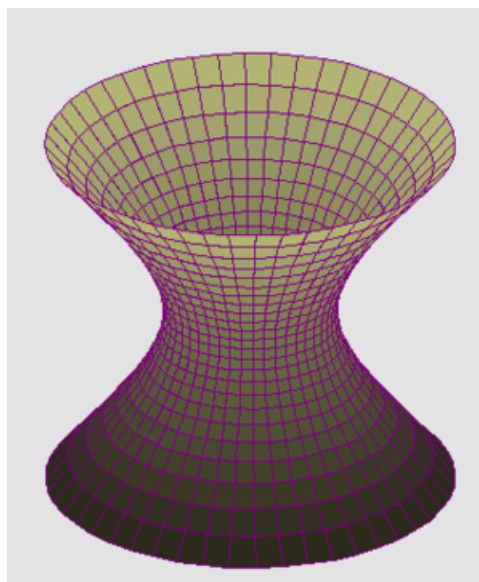
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

Une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x(r, \theta) = ar \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = br \sin(\theta) \\ z(r, \theta) = \varepsilon c \sqrt{r^2 - 1}, \end{cases}$$

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi].$$



ε vaut 1 ou -1 ($\varepsilon = 1$ donne la représentation paramétrique de la partie supérieure et $\varepsilon = -1$ donne la représentation de la partie inférieure).

-L'hyperboloïde à deux nappes :

L'hyperboloïde à deux nappes d'axe Oz est défini par l'équation cartésienne suivante.

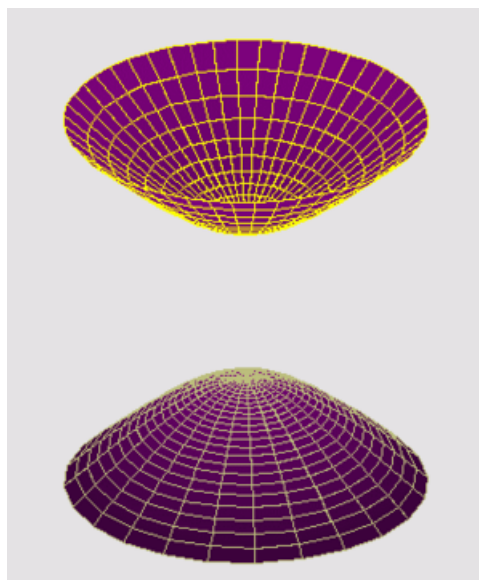
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

où a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

Une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x(r, \theta) = ar \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = br \sin(\theta) \\ z(r, \theta) = \varepsilon c \sqrt{r^2 + 1}, \end{cases}$$

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi].$$



Comme pour l'hyperboloïde à une nappe, $\varepsilon = 1$ donne la représentation paramétrique de la partie supérieure et $\varepsilon = -1$ donne la représentation de la partie inférieure.

L'hyperboloïde d'axe Ox ou Oy peut être défini de la même façon.

-Le *paraboloïde elliptique* :

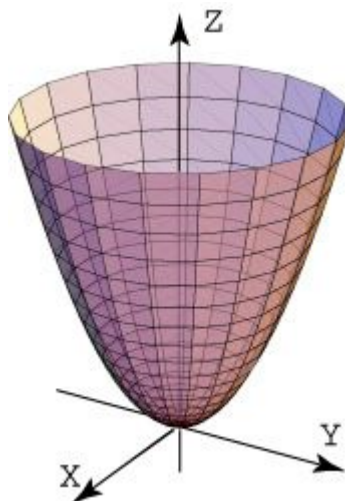
Le paraboloïde elliptique d'axe Oz est défini par l'équation cartésienne suivante.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0.$$

Une représentation paramétrique de ce paraboloïde peut être donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}, \end{cases}$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$.



-Le *paraboloïde hyperbolique* :

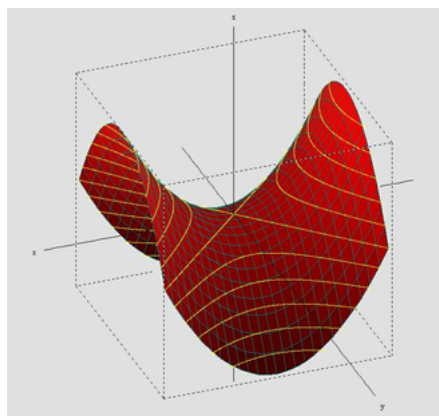
Le paraboloïde hyperbolique d'axe Oz est défini par l'équation cartésienne suivante.

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0.$$

Une représentation paramétrique de ce paraboloïde peut être donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}, \end{cases}$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$.



Remarque : Parmi les surfaces données ci-dessus, les surfaces fermées sont la sphère, le tore et l'ellipsoïde.

Orientation d'une surface paramétrée

Comme pour les courbes paramétrées, on peut définir un sens d'orientation positif pour les surfaces. Ceci se fait par le biais d'un vecteur normal, notion définie ci-dessous.

Définition 28.

1. Une surface paramétrée de classe \mathcal{C}^1

$$\Sigma : \begin{cases} x(u, v) = \alpha_1(u, v) \\ y(u, v) = \alpha_2(u, v) \\ z(u, v) = \alpha_3(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

est dite régulière si pour tous $(u, v) \in \Omega$, les vecteurs $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \vec{k}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \vec{k}$ sont linéairement indépendants.

2. Soit Σ une surface paramétrée régulière, le vecteur

$$\vec{N}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

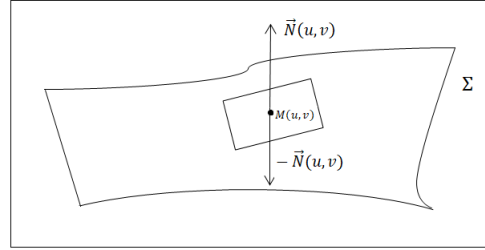
est un vecteur normal (i.e. perpendiculaire) à Σ au point $M(u, v) \in \Sigma$.

Le vecteur $-\vec{N}(u, v)$ est aussi un vecteur normal à Σ au point $M(u, v)$.

$\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$ et $-\vec{n}(u, v)$ sont les deux vecteurs normaux unitaires.

Remarque :

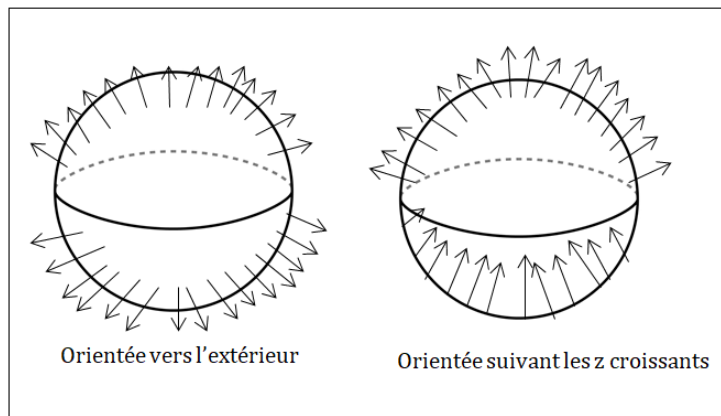
Le plan dirigé par les vecteurs $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \vec{k}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \vec{k}$ et qui passe par le point $M(u, v)$, est le plan tangent à Σ au point $M(u, v)$. Le vecteur normal $\vec{N}(u, v)$ est donc perpendiculaire au plan tangent à Σ au point $M(u, v)$.



Orienter une surface, c'est choisir en chaque point l'un des deux vecteurs normaux unitaires $\vec{n}(u, v)$ ou $-\vec{n}(u, v)$, comme vecteur indiquant le sens positif et ceci de façon continue. Par exemple, on peut orienter les surfaces suivant la normale extérieure (pour une surface fermée), ou bien la normale dirigée vers les z croissants, ou décroissants, ou les x croissants ou décroissants, ... Un paramétrage de la surface Σ est dit compatible avec l'orientation fixée

si pour tout $(u, v) \in \Omega$, le vecteur $\vec{N}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$ est dirigé vers

le même sens de cette orientation.



Exemple :

Soit Σ la sphère de centre O et de rayon $R > 0$, paramétrée comme suit

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z(\varphi, \theta) = R \cos(\varphi), \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.5)$$

Est ce que ce paramétrage est compatible avec les orientations suivantes ?

1. L'orientation suivant la normale extérieure.
2. L'orientation suivant la normale dirigée vers les z croissants.

Solution :

Nous avons

$$\begin{aligned} \vec{N}(\varphi, \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -R \sin(\varphi) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos(\varphi) \cos(\theta) & R \cos(\varphi) \sin(\theta) & -R \sin(\varphi) \\ -R \sin(\varphi) \sin(\theta) & R \sin(\varphi) \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} \\ &\quad + (R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cos^2(\theta) + R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin^2(\theta)) \vec{k} \\ &= R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \vec{k}. \end{aligned}$$

Déterminons le sens d'orientation de $\vec{N}(\varphi, \theta)$. Notons $N_z(\varphi, \theta) = R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)$ la troisième composante de $\vec{N}(\varphi, \theta)$ et étudions son signe.

Puisque $\varphi \in [0, \pi]$, on a $\sin(\varphi) \geq 0$, regardons le signe de $\cos(\varphi)$:

- Si $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(\varphi) \geq 0$ donc $N_z(\varphi, \theta) \geq 0$
- et si $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors $\cos(\varphi) < 0$ donc $N_z(\varphi, \theta) < 0$.

Donc $\vec{N}(\varphi, \theta)$ est dirigée suivant la normale extérieure. Donc le paramétrage (2.5) est compatible avec l'orientation suivant la normale extérieure, mais il n'est pas compatible avec l'orientation suivant les z croissants.

- On peut également paramétrer la sphère comme suit

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y(\varphi, \theta) = R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ z(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi), \end{cases} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [-\pi, \pi].$$

Ce paramétrage est compatible avec l'orientation suivant la normale intérieure.

Remarque :

Une surface Σ donnée par une équation cartésienne $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) peut être représentée par les équations paramétriques suivantes.

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = f(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D.$$

Un vecteur normal de Σ est donc donné par

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Les cosinus directeurs

Soit Σ une surface paramétrée régulière et $\vec{N}(u, v)$ un vecteur normal de Σ . $\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$ est un vecteur normal unitaire. Les cosinus directeurs sont les composantes de $\vec{n}(u, v)$, i.e. si $\vec{n} = (a, b, c)$ alors

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = a \\ \cos(\beta) = b \\ \cos(\gamma) = c \end{cases}$$

sont les cosinus directeurs. Ils vérifient

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

Les angles α , β et γ sont les angles que fait \vec{n} avec les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} respectivement. On peut utiliser les cosinus directeurs pour orienter les surfaces, par exemple on peut orienter une surface de sorte que $\cos(\gamma) > 0$ (i.e. suivant les z croissants) ou $\cos(\alpha) > 0$ (i.e. suivant les x croissants), ...

2.3.2 Intégrale de surface d'un champ de scalaires

Définition 29. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un champ de scalaires continu et $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière, contenue dans U (i.e. $\Sigma = \alpha(\Omega) \subset U$). L'intégrale de surface de f sur Σ est définie par

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \iint_{\Omega} f(\alpha(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| du dv,$$

où

$$\vec{N}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

est le vecteur normal à Σ .

Remarque :

Si $f(x, y, z) = 1$, on obtient l'aire de Σ

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Omega} \|\vec{N}(u, v)\| du dv.$$

2.3.3 Intégrale de surface d'un champ de vecteurs

Définition 30. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 , $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continu et $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière, orientée et telle que $\Sigma = \alpha(\Omega) \subset U$ et le paramétrage de Σ soit compatible avec son orientation. L'intégrale de surface de \vec{f} sur Σ est définie par

$$\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Omega} \vec{f}(\alpha(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv.$$

Remarque :

Si le paramétrage de Σ n'est pas compatible avec son orientation, l'intégrale sera multipliée par -1 .

Exemple :

Notons Σ la sphère paramétrée comme suit

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y(\varphi, \theta) = R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z(\varphi, \theta) = R \cos(\varphi), \end{cases} \quad (\varphi, \theta) \in \Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

et $\vec{f}(x, y, z) = (1, 1, z)$.

Calculer $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma}$ dans les cas suivants :

1. Σ est orientée suivant la normale extérieure.
2. Σ est orientée suivant la normale dirigée vers les z croissants.

Solution :

1. Cas 1 : Σ est orientée suivant la normale extérieure :

Nous avons déjà vu que le paramétrage de Σ est compatible avec cette orientation, donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_{\Omega} \vec{f}(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) \cdot \vec{N}(\varphi, \theta) d\varphi d\theta \\ &= \iint_{\Omega} \left(\vec{i} + \vec{j} + R \cos(\varphi) \vec{k} \right) \cdot \left(R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \vec{k} \right) d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) + R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) + R^3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) \right) d\varphi d\theta \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left[(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \int_0^{\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi + R \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi \right] d\theta \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left[(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi - \frac{R}{3} [\cos^3(\varphi)]_0^{\pi} \right] d\theta \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \frac{2}{3} R \right] d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

2. Cas 2 : Σ orientée suivant les z croissants :

Nous avons vu que si $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $N_z(\varphi, \theta) \geq 0$ et si $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors $N_z(\varphi, \theta) < 0$, donc on divise l'intégrale comme suit :

$$\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{\Sigma_2} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma},$$

où Σ_1 est la demi-sphère supérieure et Σ_2 est la demi-sphère inférieure.

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) + R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) + R^3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi)) d\varphi d\theta \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) + R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) + R^3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi)) d\varphi d\theta \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{4} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \frac{R}{3} \right] d\theta - R^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{4} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \frac{R}{3} \right] d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Flux

Le flux d'un champ de vecteurs \vec{f} à travers une surface orientée Σ est défini par

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Etant donné un fluide en mouvement, sa vitesse est un champ de vecteurs \vec{v} , le flux de ce champ à travers une surface Σ représente la quantité de fluide traversant en l'unité de temps la surface Σ . Suivant l'orientation de Σ , on parle de flux sortant et flux rentrant.

2.3.4 Formule de Stokes

Théorème 10. Soient Σ une surface orientée et Γ le bord fermé de Σ orienté de manière cohérente avec Σ (règle de la main droite)¹ et soit \vec{f} un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 . Le flux du rotationnel de \vec{f} à travers la surface Σ est égal à la circulation de \vec{f} le long de la courbe Γ

$$\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Démonstration.

Voir [11].

□

Remarques :

1. Si Σ est une surface plane incluse dans le plan Oxy et paramétrée par

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 0, \end{cases} \quad (u, v) \in \Sigma$$

1. L'orientation de Σ est cohérente avec celle de Γ lorsque Σ est orientée suivant la pousse d'une main droite et Γ est orientée suivant les autres quatre doigts.

on obtient $\vec{N}(u, v) = \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$
et si $\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ est un champ vectoriel, alors

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{f} \cdot \vec{d\sigma} &= \iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{f}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) \, dudv \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(u, v) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, v) \right) \, dudv \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) \, dxdy. \end{aligned}$$

Donc la formule de Stokes s'écrit

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) \, dxdy = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{ds},$$

qui est la formule de Green.

2. Si $\vec{rot} \vec{f} = \vec{0}$ on obtient

$$\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{f} \cdot \vec{d\sigma} = 0$$

pour toute courbe fermée Γ , donc $\int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot \vec{ds}$ ne dépend pas du chemin qui relie les points A et B . Comme dans le cas d'une courbe plane, la condition $\vec{rot} \vec{f}$ est nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne $\int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot \vec{ds}$ ne dépende pas du chemin d'intégration.

En particulier, si le champ \vec{f} dérive d'un potentiel scalaire i.e. si $\vec{f} = \overrightarrow{grad} F$, alors $\vec{rot} \vec{f} = \vec{0}$, donc $\int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot \vec{ds}$ ne dépend pas du chemin qui mène de A à B . En effet

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot \vec{ds} &= \int_a^b (f_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)) \, dt \\ &\quad (\text{avec } A = \gamma(a) \text{ et } B = \gamma(b) \text{ pour un certain paramétrage } \gamma(t) \text{ de } \widehat{AB}) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \times \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \times \frac{dy}{dt}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \times \frac{dz}{dt}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{dF}{dt}(x(t), y(t), z(t)) \, dt \\ &= F(x(b), y(b), z(b)) - F(x(a), y(a), z(a)) \\ &= F(B) - F(A) \end{aligned}$$

qui est bien indépendant du chemin \widehat{AB} .

De plus, $\oint_{\Gamma} \overrightarrow{grad}(F) \cdot \vec{ds} = 0$ pour toute courbe fermée Γ .

2.3.5 Formule d'Ostrogradsky

Théorème 11. Soit D un domaine de \mathbb{R}^3 limité par une surface fermée Σ , orientée vers l'extérieur de D , et soit \vec{f} un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^1 , nous avons

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) dx dy dz = \oiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{d\sigma}.$$

Démonstration.

Voir [9], § 8 page 265. □

Remarque :

On déduit que pour un champ vectoriel de classe \mathcal{C}^2 \vec{f} , $\oiint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{d\sigma} = 0$ pour toute surface fermée Σ .

Application : Volume d'un corps.

Soit D un domaine fermé de \mathbb{R}^3 , limité par une surface fermée Σ , orientée vers l'extérieur de D , et considérons le champ vectoriel $\vec{f}(x, y, z) = z \vec{k}$. Puisque $\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 1$, la formule d'Ostrogradsky permet d'écrire

$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) dx dy dz = \oiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{d\sigma}.$$

2.4 Exercices

Exercice 1 :

Soient \vec{f} et \vec{g} deux champs de vecteurs définis par

$$\vec{f}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 3y^2z^2, 2y^3z + 4z^3)$$

$$\text{et } \vec{g}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} + y \cos(xy), \frac{1}{y} + x \cos(xy), \frac{1}{z} \right).$$

1. Montrer que \vec{f} est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel scalaire ρ de \vec{f} qui vérifie $\rho(1, 1, 1) = 0$ (utiliser deux méthodes).
3. Montrer que \vec{g} est un champ de gradient sur son domaine de définition, qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2 :

Soit $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$ un champ de vecteurs défini sur le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$.

1. Déterminer une fonction $\varphi(z)$ telle que $\varphi(1) = 1$ et $\vec{g}(x, y, z) = \varphi(z) \vec{f}(x, y, z)$ soit un champ de rotationnel sur D .
2. Déterminer un potentiel vectoriel pour \vec{g} sous la forme $\vec{G}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0)$.
3. En déduire la forme générale des potentiels vectoriels de \vec{g} .

Exercice 3 :

Soit Γ une courbe paramétrée donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-3}{2} \\ y(t) = \frac{4}{3}t\sqrt{t} \\ z(t) = 2t + 1 \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$.

1. Calculer la longueur de Γ .
2. Calculer $\int_{\Gamma} f ds$, où $f(x, y, z) = x + yz - 2$.

Exercice 4 :

Calculer $\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ et Γ est l'hélice circulaire paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

$t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. $\vec{f}(x, y, z) = (4xy, 3y^2, 5z)$ et Γ est l'arc qui relie le point $A(0, 1, 1)$ au point $B(1, 1.5, \log(2) + 1)$ de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (e^t, e^{-t}, 1)$, $t \in [0, b]$ (b est à déterminer).
3. $\vec{f}(x, y, z) = (-2x^2 + 2y + 2z, 2z - 5x^2, x \sin(z))$ et Γ est la courbe constituée par les segments qui joignent les points $(-1, 0, 0)$ à $(0, -2, 0)$ et $(0, -2, 0)$ à $(2, -2, -6)$.
4. $\vec{f}(x, y, z) = (0, 0, y)$ et $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, où Σ_1 est le cylindre d'axe Oz et de rayon $R > 0$ et Σ_2 est le plan d'équation $3x - y + z + 1 = 0$. On oriente Γ dans le sens direct.
5. $\vec{f}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ et Γ est la courbe fermée constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ parcourue dans le sens direct (utiliser deux méthodes).

Exercice 5 :

1. Soit \vec{f} le champ vectoriel défini dans l'exercice 1, calculer la circulation de \vec{f} le long des courbes suivantes :

a.

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{t+1} \\ y(t) = t^2 - 2 \\ z(t) = 3t, \end{cases}$$

$t \in [0, 2]$.

- b. Γ_2 : le triangle de sommets $(1, 3, 2)$, $(1, 6, -1)$ et $(-5, 4, -2)$.

2. Calculer $\iint_D (2x - 4) dx dy$, où $D = D_1 \setminus D_2$ avec
 D_1 : est le domaine limité par l'ellipse de centre $(0, 0)$ et de rayons $a = 6$ et $b = 4$
et D_2 : est la réunion des disques fermés de centres $(2, 2)$ et $(2, -2)$ et de rayon 1.

Exercice 6 :

1. Calculer $\iint_\Sigma f d\sigma$, où $f(x, y, z) = x + y + z$ et Σ est le triangle : $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } 2x + y + z = 2\}$.
2. Calculer l'aire de la surface Σ d'équation $z = xy$ et qui se projette verticalement sur le disque D défini dans le plan Oxy par $x^2 + y^2 \leq 4$.

Exercice 7 :

Calculer $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot d\vec{\sigma}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{f}(x, y, z) = (-e^y, -ye^x, -x^2y)$ et Σ est la partie du parabolöide elliptique d'équation $z = x^2 + y^2$, située au-dessus du carré $[0, 1]^2$ du plan Oxy et orientée vers les z croissants.
2. $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 0)$ et $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2 + 4z, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 2\}$. Σ est orientée vers les z croissants.
3. $\vec{f}(x, y, z) = (y, x, z + 1)$ et Σ est le cylindre fermé d'axe Oz et de rayon R , limité par les plans $z = 0$ et $z = H$ ($R, H > 0$) et orienté suivant la normale extérieure (utiliser deux méthodes).
4. $\vec{f} = \text{rot } \vec{g}$, où $\vec{g}(x, y, z) = (-y, x, 1 + x + y)$ et Σ est le cône d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z > 0$ orienté vers le haut (utiliser deux méthodes).

Exercice 8 :

En utilisant la formule de Stokes, calculer, dans chaque cas, la circulation du champ vectoriel \vec{f} le long de la courbe Γ , orientée dans le sens trigonométrique.

1. $\vec{f}(x, y, z) = xz \vec{i} + 2xy \vec{j} + 3xy \vec{k}$ et Γ est la frontière de la partie du plan $3x + y + z = 6$ dans le premier octant.
2. $\vec{f}(x, y, z) = 2z \vec{i} + 4x \vec{j} + 5y \vec{k}$ et Γ est la courbe d'intersection du plan $z = x + 5$ et du cylindre $y^2 + z^2 = 9$.

Exercice 9 :

En utilisant la formule d'Ostrogradsky, calculer, dans chaque cas, le flux sortant du champ vectoriel \vec{f} à travers la surface Σ .

1. $\vec{f}(x, y, z) = x^2y \vec{i} - x^2z \vec{j} + z^2y \vec{k}$ et Σ est le bord du parallélépipède rectangle formé par les plans d'équations $x = 0, x = 3, y = 0, y = 1, z = 0$ et $z = 1$.
2. $\vec{f}(x, y, z) = x \vec{i}$ et Σ est le bord du tétraèdre limité par les plans d'équations $x = 0, y = 0, z = 0$ et $x + y + z = 2$.
3. $\vec{f}(x, y, z) = (x^3 + y \sin(z)) \vec{i} + (y^3 + z \sin(x)) \vec{j} + 3z \vec{k}$ et Σ est le bord du domaine limité par les demi-sphères supérieures de centre O et de rayons 1 et 2, et par le plan Oxy .

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Généralités

Définition 31. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, on appelle série numérique la somme suivante

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$.
 u_n s'appelle le terme général de la série.

Exemples :

$$\sum_{n \geq 0} e^{-n}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Définition 32. (Suite des sommes partielles)

La somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

s'appelle la suite des sommes partielles.

Série convergente

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ existe et elle est finie, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et on note $\sum_{n \geq 0} u_n = S$.
 S s'appelle la somme de la série convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Série divergente

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ n'existe pas (ou si elle est infinie), on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

Exemple :

Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

En décomposant la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

on obtient $A = 1$ et $B = -1$, donc

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente de somme S . Le reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est défini par

$$R_n = S - S_n = \sum_{k \geq n+1} u_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Théorème 12. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

Nous avons $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

□

Nous déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \implies \sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
 Attention : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ n'implique pas que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exemple :

Etudier la convergence de la série géométrique de terme général

$$u_n = a^n, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Si $a \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.

En effet, si $a = 0$, $a^n = 0$ et si $a \neq 0$, on a $\ln |a| < 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln |a|} = 0.$$

Calculons S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0(1 - a^{n+1})}{1 - a}$$

$u_0 = 1$ (si $a \neq 0$) donc

$$S_n = \frac{(1 - a^{n+1})}{1 - a} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - a}$$

donc $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge et sa somme est $\frac{1}{1-a}$.

Si $a = 0$, alors $\sum_{n \geq 1} 0^n = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$.

- Si $a = 1$, on a $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \neq 0$, donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

- Si $a = -1$, on a $u_n = (-1)^n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas, donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

- Si $a > 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(a)} = +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

- Si $a < -1$, on a $u_n = a^n = (-1)^n |a|^n$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-|a|^{2n+1}) = -\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas, et par conséquent $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

En conclusion : $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge si et seulement si $a \in]-1, 1[$.

Propriétés

Proposition 3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

1. Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \alpha u_n$ ont la même nature, et en cas de convergence, nous avons

$$\sum_{n \geq 0} \alpha u_n = \alpha \sum_{n \geq 0} u_n.$$

2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n.$$

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.

3. Si nous changeons ou supprimons un nombre fini de termes de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, sa nature ne change pas.

Démonstration.

Voir [9], Théorèmes 1, 2 et 3 pages 278-280. □

Remarques :

1. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$.
En effet pour $u_n = v_n = n$, $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} 2n$ diverge
et pour $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} 0 = 0$ converge.
2. On ne peut pas écrire

$$\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n$$

sauf si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont les deux convergentes, ou les deux ont des termes tous positifs (ou tous négatifs).

3.2 Séries numériques à termes positifs

On appelle série à termes positifs toute série $\sum_{n \geq 0} u_n$ telle que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite, nous allons donner des critères de convergence pour les séries à termes positifs.

3.2.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 13. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs, et notons S_n la suite des sommes partielles. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si S_n est majorée.

Démonstration.

Puisque $u_n \geq 0$, S_n est croissante, donc

Si S_n est majorée $\implies S_n$ converge.

Si S_n n'est pas majorée $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ (car elle est croissante), donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge. □

3.2.2 Règle de Cauchy

Théorème 14. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, alors

- Si $l < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $l > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Démonstration.

Voir [9], Théorème page 289. □

Remarque :

Si $l = 1$, on ne peut rien dire. En effet, pour $u_n = n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge et pour $v_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{v_n} = 1$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge (on verra dans la suite pourquoi elle converge).

Exemple :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$u_n \geq 0$, on peut donc appliquer la règle de Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

3.2.3 Règle de D'Alembert

Théorème 15. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors

- Si $l < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $l > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Démonstration.

Voir [9], Théorème page 285. □

Remarque :

Si $l = 1$, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exemple :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{a^n}, \quad a > 0.$$

$u_n \geq 0$, on peut donc appliquer la règle de D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{a} = +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Remarque : (Règle de Duhamel)

Soit (u_n) une suite à termes positifs, si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(Rappelons que $a_n = o(b_n)$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$) alors

- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
- Si $\alpha < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire.

Comparaison entre la règle de Cauchy et la règle de D'Alembert

Théorème 16. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Nous déduisons de ce théorème que la règle de Cauchy est plus générale que la règle de D'Alembert. Si la règle de Cauchy ne permet pas de déterminer la nature de la série, il est inutile d'essayer avec la règle de D'Alembert.

Remarque :

La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie, par exemple pour la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} a^k b^k & \text{si } n = 2k \\ a^{k+1} b^k & \text{si } n = 2k + 1, \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq b$, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'existe pas car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} a & \text{si } n = 2k \\ b & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

3.2.4 Critère intégral de Cauchy

Théorème 17. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ ont la même nature.

Démonstration.

Voir [9], Théorème page 290. □

Exemple 1 : Série de Riemann $\sum_{n \geq 1} u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nous avons :

- Si $\alpha > 1$, la série converge.
- Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.

En effet, posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, pour $x \geq 1$, f est positive et $f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$, donc $f'(x) < 0$ si $\alpha > 0$.

Donc si $\alpha > 0$, f est décroissante et on peut appliquer le théorème précédent.

- Si $\alpha > 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{fini,}$$

donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^{+\infty} = +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge (dans ce cas la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ s'appelle la série harmonique).

- Si $\alpha \in]0, 1[$, alors

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{+\infty} = +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

- Si $\alpha = 0$, alors $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\alpha} = +\infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Exemple 2 : Série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pour cette série, nous avons

- Si $\alpha > 1$ et β est quelconque, alors $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

- Si $\alpha < 1$ et β est quelconque, alors $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, alors $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

- Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

La preuve de ces résultats est laissée au lecteur à titre d'exercice.

3.2.5 Critère de comparaison

Théorème 18. Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, nous avons

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration.

Voir [9], Théorème 1 page 283. □

Exemple :

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2 + e^n}.$$

Puisque $n^2 + e^n \geq n^2$, on a $u_n \leq \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2$), on déduit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Remarques :

1. Généralement, on compare avec les séries géométriques, les séries de Riemann et les séries de Bertrand.
2. En combinant le critère de comparaison avec la règle des séries de Riemann, on obtient la règle suivante dite la règle de $n^\alpha u_n$.
Soit (u_n) une suite à termes positifs.
 - Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, avec $\alpha > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
 - Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, avec $\alpha \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

3.2.6 Règle d'équivalence

Définition 33. On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et on note $u_n \sim v_n$.

A partir du critère de comparaison, on peut déduire le théorème suivant.

Théorème 19. Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives et équivalentes, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ ont la même nature.

Exemple :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2n^5 + 6n^4 + n^3 + n + 1}.$$

Comme $u_n \sim \frac{3}{2n^3}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{2n^3}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 3$), on déduit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Notons que tous les critères que nous avons vus sont valables pour les séries à termes négatifs car les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-u_n)$ ont la même nature.

3.3 Séries à termes quelconques

Dans cette section, nous nous intéressons aux séries numériques $\sum_{n \geq 0} u_n$ où le signe de u_n est quelconque.

3.3.1 Séries absolument convergentes

Définition 34. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 20. Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et

$$\left| \sum_{n \geq 0} u_n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |u_n|.$$

Démonstration.

Voir [9], Théorème 1 page 296. □

Exemple :

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(na)}{n^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Nous avons

$$|u_n| = \frac{|\sin(na)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ converge (car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge)
et par conséquent $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Remarque :

La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie. Par exemple la série harmonique alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (on verra cela dans la suite), mais $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ est divergente.

Les séries qui convergent mais qui ne sont pas absolument convergentes s'appellent les séries semi-convergentes.

Produit de Cauchy de deux séries

Définition 35. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques, la série produit (de Cauchy) de ces deux séries est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Théorème 21. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques convergentes, de sommes respectives S et T . Si l'une au moins de ces deux séries est absolument convergente, alors la série produit est convergente et a pour somme ST . De plus, si les deux séries sont absolument convergentes, alors la série produit est absolument convergente.

Démonstration.

Voir [3], Théorème 5.3. page 101. □

3.3.2 Séries alternées

Définition 36. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée si u_n s'écrit sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$ (ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$), où (a_n) est une suite de nombres réels positifs. (on a $a_n = |u_n|$).

Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pour $n \geq 1$.

$$\sum_{n \geq 1} u_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes de convergence des séries alternées.

Théorème 22. (Théorème de Leibniz)

Soit $u_n = (-1)^n a_n$, $n \geq 0$ le terme général d'une série alternée (avec $a_n \geq 0$), si la suite (a_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et sa somme S vérifie $0 \leq S \leq a_0$.

Démonstration.

Voir [3], Théorème 4.4. page 97. □

Remarque :

Si $u_n = (-1)^{n+1}a_n$ on aura $-a_0 \leq S \leq 0$, donc dans tous les cas $|S| \leq a_0$. De plus $|R_n| \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (R_n étant le reste d'ordre n).

Exemple : Etudions la série de Riemann alternée, de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Si $\alpha > 1$, on a $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\implies \sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- Si $\alpha \in]0, 1]$, on a $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n = \frac{1}{n^\alpha} > 0$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, pour $x \geq 1$, $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0 \implies f$ est décroissante $\implies a_n$ est décroissante. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge d'après le théorème de Leibniz.

Remarquons que dans ce cas $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ est semi-convergente.

- Si $\alpha = 0$, alors $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

- Si $\alpha < 0$, alors $-\alpha > 0$ et $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n \times n^{-\alpha}$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas, et par conséquent $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

En conclusion :

- Si $\alpha > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est absolument convergente.

- Si $\alpha \in]0, 1]$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est semi-convergente.

- Si $\alpha \leq 0$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

3.3.3 Critère d'Abel

Théorème 23. Soit $u_n = a_n b_n$ une suite numérique, avec

(a_n) est une suite décroissante de nombres réels positifs et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(b_n) est une suite de nombres réels ou complexes telle que $\exists M > 0, \forall n \geq 0$ et $m \geq n$

$$|b_n + b_{n+1} + \dots + b_m| \leq M.$$

Alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Démonstration.

Voir [3], Théorème 4.8. page 99. □

Exemple :

Etudions la série de terme général

$$u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}, n \geq 1, \alpha, \theta \in \mathbb{R}.$$

- Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$:

alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = k\pi$.

- Si $k = 2p$, avec $p \in \mathbb{Z}$, alors

$$u_n = \frac{e^{ink\pi}}{n^\alpha} = \frac{e^{i(2np)\pi}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$$

série de Riemann, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge $\iff \alpha > 1$.

- Si $k = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$, alors

$$u_n = \frac{e^{in(2p+1)\pi}}{n^\alpha} = \frac{e^{i(2np)\pi} e^{in\pi}}{n^\alpha} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

série de Riemann alternée, donc dans ce cas, nous avons

- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est absolument convergente.

- Si $\alpha \in]0, 1]$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est semi-convergente.

- Si $\alpha \leq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

- Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$: alors

- Si $\alpha > 0$:

Nous avons $u_n = a_n b_n$, avec $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = e^{in\theta}$. La suite (a_n) est positive et décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. De plus, pour $n \geq 1$ et $m \geq n$, nous avons

$$\begin{aligned} |b_n + b_{n+1} + \dots + b_m| &= |e^{in\theta} + e^{i(n+1)\theta} + \dots + e^{im\theta}| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m (e^{i\theta})^k \right| \\ &= \left| e^{in\theta} \times \frac{1 - (e^{i\theta})^{m-n+1}}{1 - e^{i\theta}} \right| \\ &\leq \frac{|1 - e^{i\theta(m-n+1)}|}{|1 - e^{i\theta}|} \\ &\leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = M \end{aligned}$$

donc $|\sum_{k=n}^m b_k|$ est bornée, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge d'après le critère d'Abel.

- Si $\alpha \leq 0$:

nous avons

$$|u_n| = \left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \quad (-\alpha \geq 0)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ et par conséquent $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

Remarque :

Le théorème de Leibniz est un cas particulier du théorème d'Abel pour $u_n = (-1)^n a_n$ ($b_n = (-1)^n$), avec (a_n) positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, donc elle vérifie les conditions du théorème d'Abel. De plus,

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| = \begin{cases} 0 & \text{si } m - n + 1 \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } m - n + 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

donc $|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| \leq 1$, donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge d'après le théorème d'Abel.

3.4 Exercices

Exercice 1 :

Dans chaque cas, calculer la somme de la série de terme général u_n .

1. $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$, $n \geq 1$.
4. $u_n = (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$, $n \geq 2$.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{1}{n^n \sqrt{n}}$
2. $u_n = \frac{n! n^n}{(2n)!}$
3. $u_n = \frac{n}{e^n - 1}$
4. $u_n = \frac{a^n}{n^a}$, $a > 0$
5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$
6. $u_n = \frac{1}{n(n+\log(n))}$
7. $u_n = \frac{1}{\log(n^2+n+1)}$
8. $u_n = \frac{a^n}{2-\cos(n)}$, $a > 0$
9. $u_n = \int_0^{1/n} \frac{dx}{1+x^n}$
10. $u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-3^n}$
11. $u_n = (3+(-1)^n)^{-n}$
12. $u_n = \frac{1}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$
13. $u_n = \frac{1}{\log(n!)}$
14. $u_n = \left(1 - e^{1/n^2}\right) \sqrt{\log(n)}$
15. $u_n = a^{\sqrt{n}}$, $a \in]0, 1[$
16. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
17. $u_n = \frac{1}{n} \text{Arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, étudier suivant les valeurs de α et β la nature des deux séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}$.
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \log(n)^\beta}$.

Exercice 4 :

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \sin(n)$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$, $n \geq 2$.
3. $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^2+1}{n}\right)$, $n \geq 2$.
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n)}$, $n \geq 1$.

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

4.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Soit E une partie quelconque de \mathbb{R} , on note $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dans \mathbb{R} .

Définition 37. (*Suite de fonctions*)

On appelle suite de fonctions, toute application de \mathbb{N} dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ qui associe à $n \in \mathbb{N}$ une fonction $f_n \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f_n : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x). \end{aligned}$$

Exemples :

1. $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$.
2. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, x \in [0, \pi]$.

Convergence simple

Définition 38. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f si $\forall x \in E : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ce qui est équivalent à

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0(x, \varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

et on note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$.

Exemple :

$$f_n(x) = nx^2 \exp(-nx), x \in \mathbb{R}_+.$$

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$

et si $x > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-x(-nx) \exp(-nx)) = 0$.

Donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} 0$.

Convergence uniforme

Définition 39. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

et on note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} f$.

Remarque :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0(\varepsilon) : \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Notation : on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ qui s'appelle la norme de la convergence uniforme et on a alors : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Exemple :

$$f_n(x) = nx^2 \exp(-nx), x \in \mathbb{R}_+.$$

On a vu que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} 0$. Montrons que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0$, posons $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - 0| =$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |nx^2 \exp(-nx)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} nx^2 \exp(-nx). \text{ On a } f'_n(x) = nx(2 - nx) \exp(-nx)$$

x	0	$\frac{2}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$f_n\left(\frac{2}{n}\right)$	0

Donc $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{e^2 n}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0$.

Théorème 24. Si la suite (f_n) converge uniformément alors elle converge simplement.

Démonstration.

Supposons que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} f$.

Soit $x_0 \in E$, nous avons

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ et ceci $\forall x_0 \in E$, donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$. □

La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $x \geq 0$.

Etudions la convergence simple de f_n .

Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$, et si $x > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1.$$

Donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$ avec $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Etudions la convergence uniforme de f_n . On pose $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)|$, on a

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donc $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} g_n(x)$. On va tracer le tableau de variation de g_n .

Pour $x > 0$, on a $g'_n(x) = -\frac{n}{(1+nx)^2} < 0$ donc g_n est décroissante sur $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$		—
$g_n(x)$	1	0

On déduit alors que $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} g_n(x) = 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 1 \neq 0$, donc f_n ne converge pas uniformément vers f .

Théorème 25. (*Critère de Cauchy uniforme*)

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur E , (f_n) converge uniformément sur E si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p \geq n_0(\varepsilon), q \geq n_0(\varepsilon), \sup_{x \in E} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Démonstration.

Voir [3], Théorème 1.13. page 142. □

4.1.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité

Théorème 26. Soient (f_n) une suite de fonctions définie sur E et $x_0 \in E$. Supposons que (f_n) converge uniformément vers f . Si pour tout n , f_n est continue en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Démonstration.

Voir [3], Théorème 2.1. page 145. □

Corollaire 1. Si pour tout n , f_n est continue sur E et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} f$ alors f est continue sur E .

Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$ et les f_n sont continues et f n'est pas continue on déduit que la convergence n'est pas uniforme.

Exemple :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, x \geq 0.$$

On a f_n est continue, $\forall n \in \mathbb{N}$ et on a vu aussi que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

qui n'est pas continue au point 0, on déduit que la convergence de f_n n'est pas uniforme.

Remarque :

Si f_n et f sont continues et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$ ceci n'implique pas que la convergence est uniforme.

Exemple :

$$f_n(x) = \exp(-nx), x > 0.$$

f_n est continue sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x > 0$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-nx) = 0$, donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} f$ où $f \equiv 0$. De plus f est continue sur $]0, +\infty[$ mais la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme. En effet, posons

$$M_n = \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} |\exp(-nx) - 0| = \sup_{x>0} \exp(-nx) = \sup_{x>0} f_n(x).$$

On a $f'_n(x) = -n \exp(-nx) < 0$, donc

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		—
$f_n(x)$	1	0

D'où $M_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 1 \neq 0 \implies f_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

Remarque :

On peut vérifier facilement que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0$ sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

Dérivabilité

Théorème 27. Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un compact $[a, b]$, on suppose que

- i) Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))$ converge.
- ii) La suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g .

Alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable sur $[a, b]$ et $f' = g$.

Sous les hypothèses de ce théorème, nous avons $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$.

Démonstration.

Voir [3], Théorème 3.3. page 150. □

Remarque :

Dans le cas d'un intervalle non compact, on peut appliquer ce théorème pour permuter la limite avec le signe de dérivation mais on ne peut pas déduire la convergence uniforme de (f_n) .

Inversion limite-intégrale

Théorème 28. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, si (f_n) converge uniformément vers f alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration.

Voir [3], Théorème 4.1. page 151. □

Remarque :

Sous les hypothèses de ce théorème nous avons la suite $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ converge uniformément vers

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

sur $[a, b]$.

Le théorème suivant traite le cas des intégrales généralisées.

Théorème 29. Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur $]a, b[$. Si

i) (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f_n(x) dx$ converge.

iii) Il existe une fonction $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $\int_a^b \varphi(x) dx$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b[: |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors $\int_a^b f(x) dx$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration.

Voir [3], Théorème 5.1. page 153. □

Exemple :

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x^3)^n} dx$.

On pose $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^3)^n}, x \geq 1$.

Pour pouvoir invertir la limite et l'intégrale, nous allons vérifier les conditions du théorème précédent.

a) Convergence uniforme de f_n :

i) Convergence simple : pour tout $x \geq 1$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^3)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(n(\ln(1+x^3)))} = 0,$$

$$\text{donc } f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} 0.$$

ii) Convergence uniforme :

$$M_n = \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \geq 1} \left| \frac{x}{(1+x^3)^n} \right| = \sup_{x \geq 1} \frac{x}{(1+x^3)^n} = \sup_{x \geq 1} f_n(x).$$

$$\text{Nous avons } f'_n(x) = \frac{(1-3n)x^3+1}{(1+x^3)^{n+1}}$$

pour $n \geq 1$ on a $3n \geq 3$ donc $-3n \leq -3$ ainsi $1-3n \leq -2 < 0$. De plus, pour $x \geq 1$ on a $x^3 \geq 1$ donc $(1-3n)x^3+1 \leq 2-3n < 0$, car $n \geq 1 \Rightarrow -3n \leq$

$-3 \Rightarrow 2 - 3n \leq -1 < 0$, donc $f'_n(x) < 0$ ce qui signifie que f_n est décroissante sur $[1, +\infty[$ et par conséquent

$$M_n = \sup_{x \geq 1} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{2^n}.$$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0$ sur $[1, +\infty[$ ainsi $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0$ sur $[\alpha, \beta], \forall [\alpha, \beta] \subset [1, +\infty[$.

b) $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$ converge ?

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^3)^n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^{3n}} = \frac{1}{x^{3n-1}}.$$

En effet on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^{3n-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^3)^n} x^{3n-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n}}{(1+x^3)^n} = 1.$$

Donc $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n-1}}$ et comme $n \geq 1 \Rightarrow 3n - 1 \geq 2 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n-1}} dx$ converge

(règle de Riemann) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f_n(x) dx$ converge.

c) $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ avec $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge ?

Soit $x \geq 1, |f_n(x)| = \left| \frac{x}{(1+x^3)^n} \right| = \frac{x}{(1+x^3)^n}$ et on a $n \geq 1 \Rightarrow (1+x^3)^n \geq x^3 + 1 \geq x^3 \Rightarrow$

$\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{x}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$, et on a $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ converge.

De a), b) et c) on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x^3)^n} dx = \int_1^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^3)^n} dx = \int_1^{+\infty} 0 dx = 0.$$

4.2 Séries de fonctions

Soit E une partie quelconque de \mathbb{R} .

Définition 40. (Séries de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur E , on appelle série de fonctions la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

$f_n(x)$ s'appelle le terme général de cette série de fonctions.

Exemples :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1}, x \in \mathbb{R}.$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x+n}, x \in \mathbb{R}_+.$

Comme pour les séries numériques, on définit la suite des sommes partielles par

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

4.2.1 Modes de convergence d'une série de fonctions

Convergence simple

Définition 41. On dit que la série de terme général (f_n) converge simplement sur E si pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge vers $S(x)$. $S(x)$ s'appelle la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Remarque :

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement, alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} 0$.

Domaine de convergence

Définition 42. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur E , le domaine de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est l'ensemble des éléments x de E pour lesquels la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

Exemple :

Le domaine de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est $] -1, 1[$ et sur ce domaine nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Convergence absolue

Définition 43. On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument sur E si pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge.

Le théorème suivant découle directement du théorème 20.

Théorème 30. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument sur E , alors elle converge simplement sur E .

Convergence uniforme

Définition 44. On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur E si la suite des sommes partielles $S_n(x)$ converge uniformément sur E .

Remarque :

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0$.

D'après le théorème 24, nous déduisons le résultat suivant.

Théorème 31. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur E , alors elle converge simplement sur E .

Convergence normale

Définition 45. On dit que la série converge normalement sur E si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ est convergente.

Proposition 4. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement sur E si et seulement s'il existe une suite réelle positive $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E : |f_n(x)| \leq u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Démonstration.

Voir [3], Proposition 1.26. page 193. □

Exemple :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nx), x \in [a, +\infty[(a > 0).$

On a $x \geq a \implies nx \geq na \implies -nx \leq -na \implies \exp(-nx) \leq \exp(-na) = u_n$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge (série géométrique de raison $\exp(-a) < 1$, car $a > 0$) $\implies \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement.

Théorème 32. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement sur E , alors elle converge uniformément et absolument sur E .

Démonstration.

Voir [3], Théorème 1.28. page 193. □

La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Soit la série de fonctions de terme générale $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}, x \in \mathbb{R}_+, n \geq 1$.

Etudions la convergence normale de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, on pose $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \Rightarrow g'_n(x) = \frac{-1}{(x+n)^2} < 0 \Rightarrow g_n$ est décroissante $\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}_+} g_n(x) = g_n(0) = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} g_n(x)$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ne converge pas normalement.

Etudions la convergence simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, soit $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f_n(x) = (-1)^n g_n(x)$, $g_n(x) = \frac{1}{x+n} > 0$ (série alternée).

De plus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$ et $g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n} = \frac{-1}{(x+n+1)(x+n)} < 0$, donc $g_n(x)$ est décroissante (en n) et par conséquent $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente d'après le théorème de Leibniz et ceci $\forall x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement.

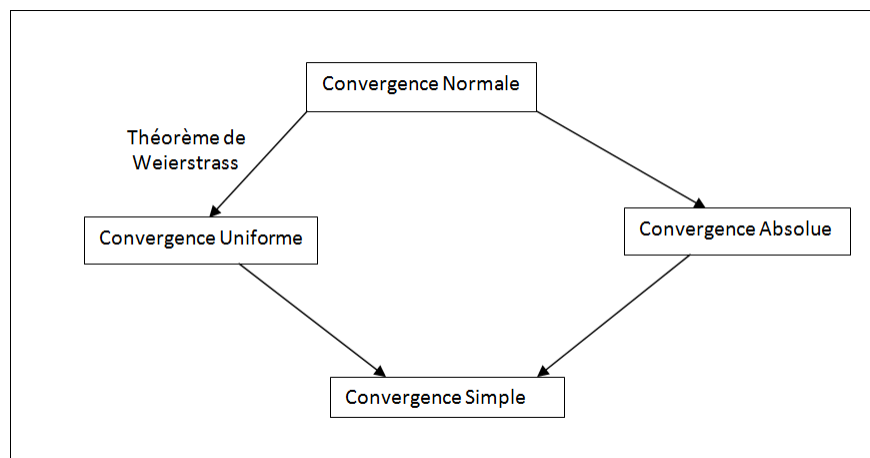
Etudions la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. On note $S(x)$ la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, on a $|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| \leq g_{n+1}(x) = \frac{1}{x+n+1}$ et comme $x \geq 0 \Rightarrow x+n+1 \geq n+1 \Rightarrow \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |S_n(x) - S(x)| = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément vers $S(x)$, mais on a

vue qu'elle ne converge pas normalement (notons que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ne converge pas absolument).

Récapitulation

Le schéma suivant résume les relations qui existent entre les différents modes de convergence que nous avons vus. Les autres implications ne sont pas vraies en général.



4.2.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

En appliquant les théorèmes que nous avons vus dans le paragraphe 4.1.2 sur $S_n(x)$, nous déduisons les résultats suivants pour les séries de fonctions.

Continuité

Théorème 33. Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur E . Si

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur E .
- b) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente sur E , de somme $S(x)$.

Alors la fonction $S(x)$ est continue sur E .

Exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, x \in \mathbb{R}.$$

On a f_n est continue sur \mathbb{R} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De plus $|f_n(x)| = \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement $\implies \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément. Nous déduisons

que la fonction $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur \mathbb{R} .

Dérivation terme à terme

Théorème 34. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[a, b]$, on suppose que

- i) Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge.

- ii) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ et de somme $\sigma(x)$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$ et sa somme $S(x)$ est dérivable sur $[a, b]$, et $S'(x) = \sigma(x)$ i.e.

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

Intégration terme à terme

Théorème 35. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente et de somme $S(x)$, alors $S(x)$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Remarques :

1. Sous les hypothèses de ce théorème, la série de terme général $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ converge uniformément sur $[a, b]$ et nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$.
2. Pour les intégrales généralisées on peut appliquer le théorème 29 sur $S_n(x)$.

4.3 Exercices

Exercice 1 :

Etudier la convergence uniforme de la suite $f_n(x)$ sur l'intervalle précisé dans chacun des cas suivants.

1. $f_n(x) = \text{Arctg}(nx)$, sur $[0, +\infty[$, $]0, +\infty[$ et $[a, +\infty[$, $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx}$, sur $[0, +\infty[$ et $[a, +\infty[$, $a > 0$.
3. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ -n^2x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$
sur $[0, +\infty[$.
4. $f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2}$, sur $[0, +\infty[$ et $[a, +\infty[$, $a > 0$.

Exercice 2 :

Calculer la limite lorsque n tend vers l'infini de

1. $\int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} dx$
2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x) dx$
3. $\int_3^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} dx$.

Exercice 3 :

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série de terme général $f_n(x)$ dans les cas suivants.

1. $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x}$, $x \in \mathbb{R}_+$.
2. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$, $x \in [0, 1]$.
3. $f_n(x) = (e^x - 1)e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 4 :

1. Déterminer le domaine de convergence de la série de terme général $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, et montrer que sa somme est continue sur ce domaine.
2. Calculer $\sum_{n \geq 0} ne^{-nx}$, $x \in [a, +\infty[$, $a > 0$.

Exercice 5 :

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2x^2 + n^2}.$$

1. Etudier la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

2. Posons $S(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$, montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur tout compact $[a, b] \subset]0, +\infty[$ puis sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 6 :

1. Considérons la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \log(x)}{n} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
 - a. Déterminer le domaine de convergence de cette série.
 - b. Montrer que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$
2. Soit $g_n(x) = x(1-x)^n$ une suite de fonctions définie sur $[0, 1]$.
 - a. Etudier la convergence simple et uniforme de $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$.
 - b. Montrer qu'on peut intégrer terme à terme cette série, qu'en déduisez-vous ?

Chapitre 5

Séries entières

5.1 Notions de base

Définition 46. (Série entière)

On appelle série entière toute série de fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes.
 (a_n) s'appelle la suite des coefficients de la série entière.

Exemples :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \sum_{n \geq 0} n^2 z^n, \sum_{n \geq 0} z^n.$$

Lemme 1. (Lemme d'Abel)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$

1. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.
2. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |z_0|$.

Démonstration.

Voir [9], Théorème 1 page 109. □

Théorème 36. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que

1. Si $|z| < R$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge.

Démonstration.

Voir [3], Théorème 1.4 page 230. □

Définition 47. L'élément R du théorème précédent s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence de la série.

Remarques :

1. Si $|z| = R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ peut converger et elle peut diverger. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$ s'appelle le cercle d'incertitude.
2. Si $R = 0$, il y a convergence uniquement en 0 et si $R = +\infty$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et la fonction

$$S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

est dite fonction entière.

3. Si on est dans \mathbb{R} ($z \in \mathbb{R}$) l'intervalle de convergence est $] -R, R[$.

Exemples :

1. $\sum_{n \geq 0} z^n$
Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$, si $|z| < 1$, $\sum_{n \geq 0} |z|^n$ converge (série géométrique) et si $|z| > 1$: $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge. Si $|z| = 1$, $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^n = 1 \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} z^n \neq 0$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$
Le rayon de convergence est $R = 1$. Si $|z| = 1$: $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge $\implies \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge.

Détermination du rayon de convergence

Nous allons donner des méthodes qui permettent de déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

1. Règle de d'Alembert :

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ lorsque cette limite existe.}$$

En effet, posons $u_n = |a_n z^n|$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ existe alors

$$\text{Si } |z| < \frac{1}{l} \text{ nous avons } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| = l |z| < 1 \implies \sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \text{ converge.}$$

Si $|z| > \frac{1}{l} \implies |z|l > 1 \implies |z|l - 1 > 0 \implies \exists \varepsilon \in \mathbb{R} / 0 < \varepsilon < |z|l - 1$ et comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l|z|$ on a $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l|z| \right| < \varepsilon \implies -\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l|z| < \varepsilon \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} > l|z| - \varepsilon > 1 \implies u_{n+1} > u_n \implies (u_n)$ est strictement croissante à partir du rang $n_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n z^n) \neq 0 \implies \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est divergente.

Donc $R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

2. Règle d'Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ où } \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k \text{ (et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k \text{)}.$$

3. Règle de Cauchy :

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ lorsque cette limite existe.}$$

$$4. R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}_+ / \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ converge} \right\} = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}_+ / \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0 \right\} \\ = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ / \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée} \}.$$

5. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge alors $R \geq |z_0|$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ diverge alors $R \leq |z_0|$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est semi-converge alors $R = |z_0|$.

Exemple :

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \sum_{n \geq 0} n! z^n, \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n, \alpha \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n+1} z^{2n}.$$

Solution :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, a_n = \frac{1}{n}.$$

On applique la règle de D'Alembert $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Autre méthode : pour $z = -1$, on sait que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente donc

$$R = |-1| = 1.$$

$$2. \sum_{n \geq 0} n! z^n, a_n = n!.$$

On applique la règle de D'Alembert $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$. Cette série converge pour $z = 0$ uniquement.

$$3. \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n, \alpha \in \mathbb{C}, a_n = \alpha^n.$$

On applique la règle de Cauchy $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\alpha^n|}} = \frac{1}{|\alpha|}$, si

$\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, alors $\alpha^n z^n = 0$ donc la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ ce qui implique que $R = +\infty$.

$$4. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n+1} z^{2n}, a_n = \frac{2^n}{n+1}.$$

On pose $Z = z^2$. Cherchons le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n+1} Z^n$ qu'on note

R_1 . On applique la règle de D'Alembert $R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n+1} \times \frac{n+2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.
 Déterminons R_2 , le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n+1} z^{2n}$. Cette série converge si $Z = z^2 \in D(0, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow |Z| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z^2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow z \in D(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Donc $R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n+1} z^{2n}$.

Remarque :

Si le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est R , alors le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$ est \sqrt{R} .

Propriétés des séries entières

Définition 48. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes. On dit que u_n est dominée par v_n et on note $u_n = O(v_n)$ s'il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M |v_n|$ à partir d'un certain rang.

Proposition 5. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b , nous avons :

1. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.
3. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$. Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$ et si $R_a = R_b$ alors $R \geq R_a$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) z^n$ ont le même rayon de convergence (qui est R_a). De plus si $|z| < R_a$, on a : $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) z^n = \lambda \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.
5. Soit la série $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ s'appelle la série produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Si R est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$, nous avons $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a $\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$.

Démonstration.

Voir [3], Propositions 1.20., 1.21. et 2.3. pages 234-235. □

Remarque :

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ peut être strictement supérieur à R_a et R_b (et la même chose pour la série $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$). Par exemple, le rayon de convergence des séries $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} (-z^n)$ est 1, et le rayon de convergence de la série somme $\sum_{n \geq 0} (z^n - z^n) = \sum_{n \geq 0} 0$ est $+\infty$.

5.2 Régularité de la somme d'une série entière

5.2.1 Convergence normale d'une série entière

Définition 49. Un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est dit compact s'il est fermé et borné.

Exemples :

- Le disque fermé $\overline{D}(z_0, R)$ est compact.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est compact dans \mathbb{R} .
- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, le segment $[z_1, z_2] = \{\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2, \alpha \in [0, 1]\}$ est compact dans \mathbb{C} .

Théorème 37. Une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Démonstration.

Voir [3], Théorème 3.1. page 235. □

Dans \mathbb{R} la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) converge normalement sur tout compact $[a, b] \subset]-R, R[$ (R étant le rayon de convergence).

Théorème de convergence radiale d'Abel

Théorème 38. Si une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, alors la convergence est uniforme sur le segment $[0, z_0]$.

Démonstration.

Voir [10], Théorème 34 page 594. □

5.2.2 Continuité

Théorème 39. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R , et de somme $S(z)$. La fonction $S(z)$ est continue sur le disque de convergence $D(0, R)$.

Démonstration.

Soit $z_0 \in D(0, R)$, nous avons $|z_0| < R$, donc $\exists \rho \in \mathbb{R}$ tel que $|z_0| < \rho < R$ donc $z_0 \in \overline{D}(0, \rho)$. De plus, d'après le théorème précédent, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur $\overline{D}(0, \rho)$ et comme la fonction $a_n z^n$ est continue, on déduit que la fonction $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est continue sur $\overline{D}(0, \rho) \implies S(z)$ est continue au point z_0 . □

Remarque :

D'après le théorème de convergence radiale d'Abel, si la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ alors elle est continue sur le segment $[0, z_0]$.

Principe des zéros isolés

Théorème 40. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R , et de somme $S(z)$. Si les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas tous nuls, alors il existe $r \in]0, R[$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $0 < |z| < r$ on a $S(z) \neq 0$.

Démonstration.

Voir [10], Théorème 14 page 818. □

Corollaire 2.

1. Si $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = 0, \forall z \in D(0, R)$ alors $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de même rayon de convergence R . Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} b_n z^n, \forall z \in D(0, R)$ alors $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2.3 Intégration terme à terme

Dans la suite, nous considérons les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de variable réelle, i.e. $x \in \mathbb{R}$, les coefficients (a_n) sont des nombres réels ou complexes.

Théorème 41. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, si $[a, b]$ est un segment inclus dans l'intervalle de convergence $] -R, R[$ alors $\int_a^b \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) dx = \sum_{n \geq 0} a_n \int_a^b x^n dx$.

Démonstration.

Découle directement des théorèmes 35 et 37. □

Remarque :

Les primitives de la fonction $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sont de la forme $F(x) = \alpha + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\forall x \in] -R, R[$).

5.2.4 Dérivation terme à terme

Théorème 42. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R ($x \in \mathbb{R}$). La fonction somme $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ définie de $] -R, R[$ dans \mathbb{C} est de classe C^1 et sa dérivée est donnée par $S'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \forall x \in] -R, R[$. De plus le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ est R .

Démonstration.

Voir [3], Théorème 4.9. page 24 et Proposition 2.7. page 237. □

En appliquant ce théorème sur les dérivées successives de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R , alors $S(x)$ est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R, R[, S^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ et les séries dérivées ont toutes le même rayon de convergence R .

Remarque :

Nous déduisons que pour tout $k \in \mathbb{N} : a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$, donc $S(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k, \forall x \in] -R, R[$.

5.3 Développement en série entière

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R} , dans cette section, nous nous intéressons aux fonctions f définies sur E et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 50. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un nombre réel $\alpha \in]0, R[$ tel que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[: f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

On sait qu'une fonction f possédant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 admet le développement de Taylor-Maclaurin suivant

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, |\xi| < |x|$ (reste de Lagrange).

Si f est de classe C^∞ au voisinage de 0, on peut écrire ce développement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, alors on peut écrire f comme somme de la série entière

$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ qu'on appelle série de Taylor-Maclaurin.

Théorème 43. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} qui contient 0, f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si

i) f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

ii) Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, où $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

De plus, le développement en série entière de f est donné par la série de Taylor-Maclaurin : $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in]-\alpha, \alpha[$.

Démonstration.

Voir [3], Propositions 5.6 et 5.9 pages 242-243. □

Remarque :

D'après le principe des zéros isolés, le développement en série entière d'une fonction f au voisinage de 0 est unique.

Propriétés :

La proposition suivante donne quelques propriétés des fonctions développables en série entière.

Proposition 6.

i) Soient f et g deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0 et de développements respectifs $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Les fonctions $\alpha f + \beta g, fg, f', F$ (où F est une primitive de f) sont développables en série entière au voisinage de 0 et leurs développements respectifs sont donnés par $\sum_{n \geq 0} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$, $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$

où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ (série produit de Cauchy), $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $F(0) + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

ii) Si f est paire on a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{2k+1} = 0$ et si f est impaire on a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{2k} = 0$.

Démonstration.

i) Découle de la proposition 5 et des théorèmes 41 et 42.

ii) Soit $\alpha \in]0, R]$ tel que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[: f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et soit la fonction g définie sur $]-\alpha, \alpha[$ par $g(x) = f(-x)$. On a $\forall x \in]-\alpha, \alpha[: g(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (-x)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n$.

Si f est paire on a $g = f$ et par unicité du développement en série entière on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = (-1)^n a_n \implies a_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

On raisonne de manière similaire si f est impaire.

□

Développement en série entière de quelques fonctions usuelles

La fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$:

f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $f^{(n)}(x) = \exp(x) \implies f^{(n)}(0) = 1$. Donc la formule de Taylor-Maclaurin donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, |\xi| < |x|.$$

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $|R_n(x)| = \exp(\xi) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|R_{n+1}(x)|}{|R_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1 \implies \sum_{n \geq 0} |R_n(x)|$ converge

(règle de D'Alembert) $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Donc $\exp(x)$ est développable en série entière sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots (R = +\infty).$$

En remplaçant x par $(-x)$ on obtient $\exp(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots (R = +\infty)$.

Donc $\operatorname{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + (-1)^n x^n}{n!}$. Or $x^n + (-1)^n x^n = \begin{cases} 2x^{2k}, & \text{si } n = 2k, \\ 0, & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$ donc

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots (R = +\infty).$$

Et de la même façon on obtient $\operatorname{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots (R = +\infty)$.

Les fonctions sinus et cosinus :

Les fonctions \sin et \cos sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} et on a $\begin{cases} \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Donc } \sin^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Donc la formule de Taylor-Maclaurin donne pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin\left(\xi + \left(\frac{2n+2}{2}\right)\pi\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Donc $|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{2n+1}(x) = 0$ (théorème d'encadrement). Donc

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \forall x \in \mathbb{R} (R = +\infty).$$

En tenant compte du fait que $\begin{cases} \cos(k\pi) = (-1)^k, k \in \mathbb{N} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$ on obtient de la même façon

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \forall x \in \mathbb{R} (R = +\infty).$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$:

On sait que $\forall x \in]-1, 1[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (avec la convention $0^0 = 1$) et si $x \notin]-1, 1[$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ diverge donc f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ seulement ($R = 1$).

En remplaçant x par $(-x)$ on obtient $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \forall x \in]-1, 1[, R = 1$.

La fonction $f(x) = \ln(1+x)$:

En prenant la primitive du développement en série entière de la fonction $\frac{1}{1+x}$ on obtient

$$\ln(1+x) = \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \forall x \in]-1, 1[. \text{ Or } f(0) = \alpha \text{ et } f(0) = \ln(1) = 0 \implies \alpha = 0.$$

$$\text{Donc } \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \stackrel{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \dots (R=1).$$

Le tableau suivant donne les développements en série entière de quelques fonctions usuelles. Voici quelques remarques concernant les fonctions qui figurent sur le tableau.

1) Les fonctions $\text{Arcsin}(x)$, $\text{Arccos}(x)$ et $\text{Arctan}(x)$ sont dérivables sur $] -1, 1[$ et leurs dérivées respectives sont données par $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$. De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2) La fonction $\text{sh}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et sa fonction réciproque est définie sur \mathbb{R} par $\text{Argsh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$, de plus $(\text{Argsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) La fonction $\text{ch}(x)$ n'est pas bijective sur \mathbb{R} , mais $\text{ch}(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[$ est bijective, et sa fonction réciproque est définie sur $[1, +\infty[$ par $\text{Argch}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$, elle n'est pas définie au voisinage de 0 (et donc n'est pas développable en série entière au voisinage de 0).

4) La fonction $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ est une bijection de \mathbb{R} vers $] -1, 1[$. Sa réciproque est définie sur $] -1, 1[$ par $\text{Argth}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $(\text{Argth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$.

La fonction $f(x)$	Le développement de $f(x)$ au voisinage de 0	R
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$+\infty$
$\text{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$+\infty$
$\text{ch}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$+\infty$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots$	$+\infty$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots$	$+\infty$
$(1+x)^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N}$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$	1
$\frac{1}{1+x} \ (\alpha = -1)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$	1
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$	1
$\frac{1}{a-x}, a \neq 0$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \dots$	$ a $
$\sqrt{1+x} \ (\alpha = \frac{1}{2})$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \times 4} x^2 + \dots + (-1)^{n+1} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} x^n + \dots$	1
$\sqrt{1-x}$	$1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \times 4} x^2 - \dots - \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} x^n - \dots$	1
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \ (\alpha = -\frac{1}{2})$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} x^2 + \dots + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} x^n + \dots$	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} x^2 + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} x^n + \dots$	1
$\log(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \dots$	1
$\text{Arcsin}(x)$	$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	1
$\text{Arccos}(x)$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} - \dots - \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \dots$	1
$\text{Arctan}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$	1
$\text{Argsh}(x)$	$x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	1
$\text{Argth}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	1

R : le rayon de convergence.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $(1+x)^\alpha$ est un polynôme, donc c'est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang, et dans ce cas $R = +\infty$.

5.4 Résolution d'équations différentielles

Parfois la recherche d'une solution explicite d'une équation différentielle n'est pas facile, on peut alors avoir recours aux séries entières. Cette méthode consiste à représenter la solution de l'équation différentielle sous forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, en suite on calcule les dérivées de $y(x)$ qui figurent dans l'équation par dérivation terme à terme de cette série. Finalement, on détermine les coefficients (a_n) grâce au principe des zéros isolés (par identification des séries) et on obtient une solution $y(x)$ sous forme d'une série entière.

Exemple 1 :

Considérons l'équation différentielle

$$xy' + y = \ln(1+x). \quad (5.1)$$

C'est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre un.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \implies y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

$$\text{Donc } xy' + y = x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^n.$$

De plus nous avons $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. En remplaçant dans (5.1) on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

$$\text{Par identification } \begin{cases} a_0 = 0 \\ (n+1) a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{Donc } y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^n.$$

Calculons le rayon de convergence $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \right| = 1$, donc $y(x)$ est

définie sur $] -1, 1[$ et nous avons $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n \right) =$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right)$. Calculons le rayon de convergence des deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ et

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$. Pour la première série on a $R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et pour la deuxième série on a

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

$$\text{Donc } \forall x \in] -1, 1[, y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n = \ln(1+x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1}.$$

Si $x \neq 0$ on a $y(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x) + \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - x \right) = \ln(1+x) + \frac{1}{x} (\ln(1+x) - x) = \ln(1+x) + \frac{\ln(1+x) - 1}{x} = \frac{x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x}$
 et pour $x = 0$ on a $y(0) = 0$.

Donc $y(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est la seule solution de l'équation (5.1) développable en série entière au voisinage de 0.

Remarque :

Nous avons trouvé une solution particulière de l'équation (5.1) qu'on note

$$y_p(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour trouver la solution générale on doit résoudre l'équation homogène $xy' + y = 0 \implies xy' = -y \implies x \frac{dy}{dx} = -y \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \implies \ln|y| = -\ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \implies \ln|y| = \ln \frac{1}{|x|} + c \implies |y| = \frac{\exp(c)}{|x|} \implies y = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}$, doù $y_h(x) = \frac{k}{x}$, donc la solution générale de l'équation (5.1) est $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k}{x} + \frac{x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x}, \forall x \in]-1, 1[, x \neq 0$.

Exemple 2 :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x. \quad (5.2)$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre deux, non homogène et à coefficients variables.

Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donc $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

En remplaçant dans (5.2) on obtient

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 4n + 2) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 3n + 2) a_n x^n. \end{aligned}$$

De plus, on a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Par identification, on obtient $(n^2 + 3n + 2) a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n^2 + 3n + 2)n!}$.

Par ailleurs la factorisation du polynôme $x^2 + 3x + 2$ donne $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, donc

$$a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{(n+2)!},$$

donc $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$. Le rayon de convergence de cette série est

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = +\infty$$

donc $y(x)$ est définie sur \mathbb{R} .

Posons $k = n + 2$ donc $n = k - 2$ et $y(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k-2}}{k!}$
si $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 - x \right) \\ &= \frac{e^x - x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

et $y(0) = a_0 = \frac{1}{2}$.

Donc

$$y(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est l'unique solution de l'équation (5.2) développable en série entière.

5.5 Exercices

Exercice 1 :

Calculer le rayon de convergence des séries de termes généraux :

1. $\frac{(n-1)^n}{(n+1)!} z^n$
2. $\log(n)^n z^n$
3. $\frac{(-1)^n}{(n+1)^n} z^n$
4. $\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n} \right)^n z^n$
5. $\left(\frac{\sin(n\theta)}{n} \right) z^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$
6. $\frac{2^n}{n+1} z^{2n+1}$

$$7. \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1} \quad 8. a_n z^n, \text{ avec } a_n = \begin{cases} \frac{1}{k+\sqrt{k}} & \text{si } n = 3k \\ k^{-k} & \text{si } n = 3k+1 \\ 8^k & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

9. $\frac{(z-3)^n}{2^n}$ (déterminer le disque de convergence de cette série).

Exercice 2 :

Dans chaque cas, déterminer le rayon de convergence R et l'ensemble C (resp. A) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficients a_n , converge simplement (resp. absolument).

1. $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ 2. $a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}$ 3. $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$ 4. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 :

1. Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières de variable réelle suivantes.

a. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n+1} x^n$.

b. $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, avec $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

2. Calculer la somme des séries numériques suivantes.

a. $\sum_{n \geq 0} \frac{5^n}{n!}$ b. $\sum_{n \geq 0} (n+1)2^{-n}$ c. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ d. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4 :

Dans chaque cas, développer la fonction f en série entière au voisinage de 0, et préciser le rayon de convergence R .

1. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

3. $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$.

4. $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$.

Exercice 5 :

1. Chercher les fonctions $y(x)$ développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle $xy'' + (x-1)y' - y = 0$.
2. Chercher la fonction $y(x)$ développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle $y'' - 2xy' - 2y = 0$, et qui vérifie les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Bibliographie

- [1] Dinh T.-C. (2007). *Analyse vectorielle, intégrales multiples*. Polycopié de cours, Université Paris 6.
- [2] Eck C., Garcke H. et Knabner P. (2017). *Mathematical modeling*. Springer.
- [3] El Amrani M. (2011). *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions*. Ellipses, Paris.
- [4] Feuillet C. et Selon I. (2005). *Maths 2^e année MP-MP**. HACHETTE Supérieur. Paris.
- [5] Hannachi M. (2000). *Exercices d'analyse mathématique*. OPU. Alger.
- [6] Lang S. (1997). *Undergraduate analysis*. Second edition, Springer. USA.
- [7] Lelong-Ferrand J. et Arnaudiès J.M. (1977). *Cours de mathématiques Tome 4. Équations différentielles, intégrales multiples*. 2^{ème} édition, DUNOD. Paris.
- [8] Liret F. (2006). *Maths en pratique*. DUNOD. Paris.
- [9] Piskounov N. (1970). *Calcul différentiel et intégral Tome 2*. Editions MIR. Moscou.
- [10] Ramis J.-P. et Warusfel A. (2007). *Mathématiques tout-en-un pour la Licence. Niveau L2*. DUNOD. Paris.
- [11] Ramis J.-P. et Warusfel A. (2015). *Mathématiques tout-en-un pour la Licence. Niveau L3*. DUNOD. Paris.