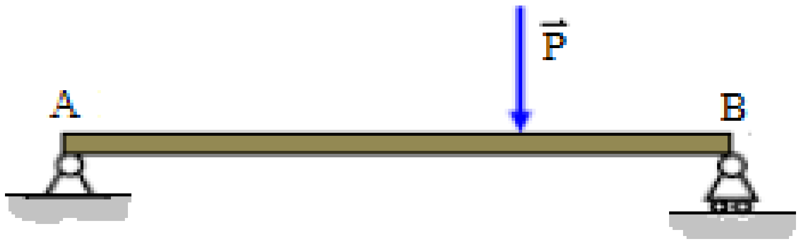
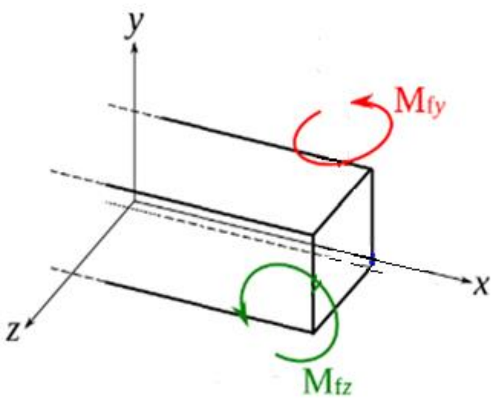
FLEXION PURE

FLEXION PURE

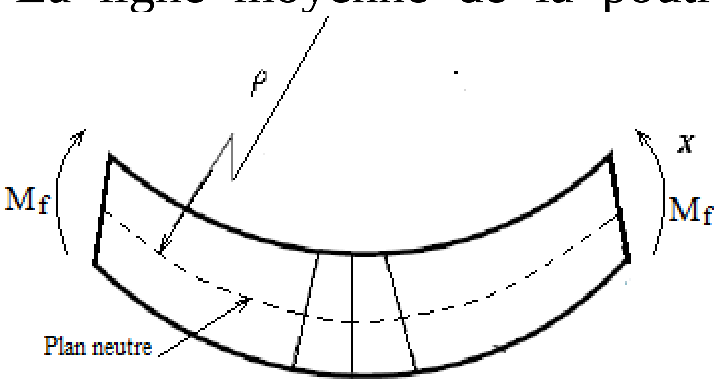
Une poutre est sollicitée en flexion pure si le moment fléchissant dans les sections droites est l'unique action. Les efforts normaux et tranchants sont nuls.

Ainsi, l'apparition des déformations est le résultat de la rotation des sections planes les unes par rapport aux autres.





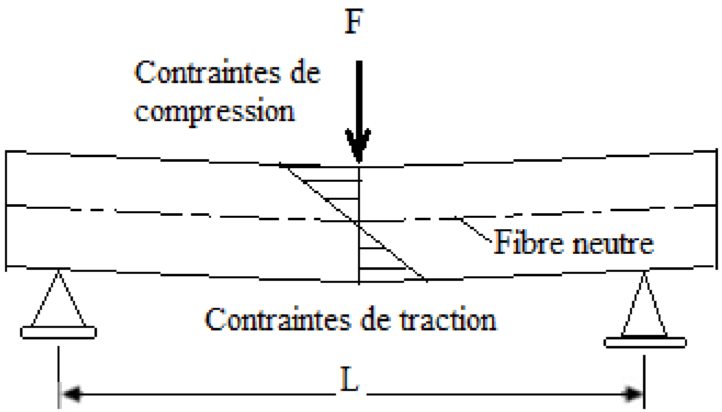
Au cours de la déformation, les sections droites (constantes) restent planes et normales à la ligne moyenne. La ligne moyenne de la poutre est rectiligne et confondue avec l'axe (o,x) .

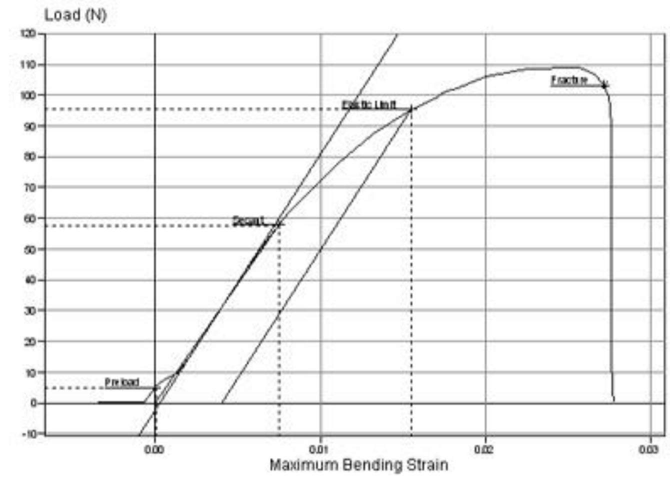


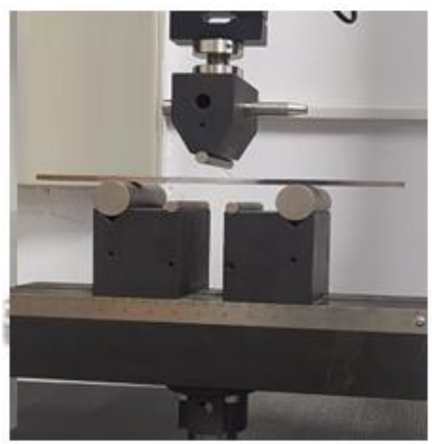
FLEXION PURE

ESSAI DE FLEXION

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale. Après déformation, cette poutre fléchit







FLEXION PURE

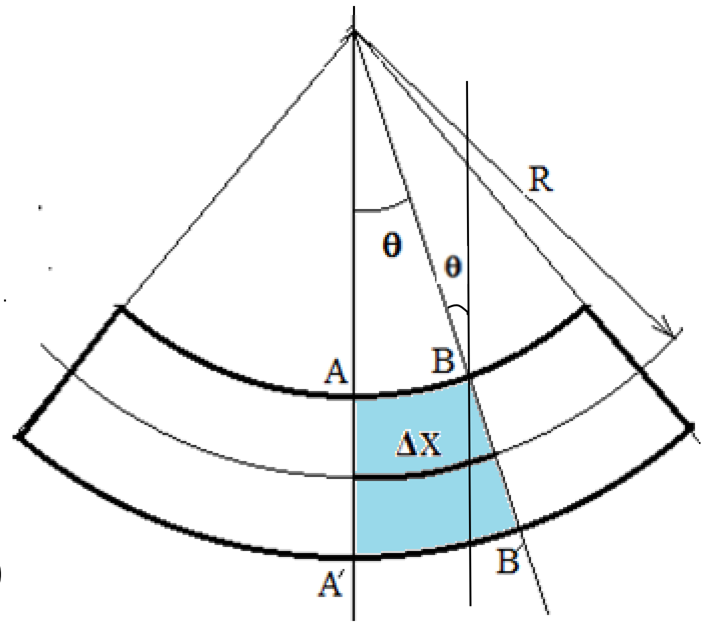
ESSAI DE FLEXION

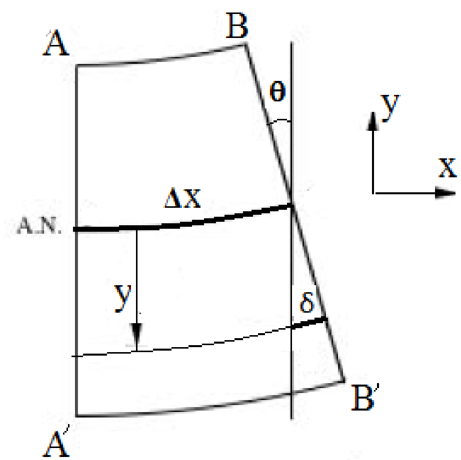
Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale. Après déformation, cette poutre fléchit

FLEXION PURE

CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION

La flexion est une déformation qui se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre.





$\Delta x = R\theta$

θ en radian

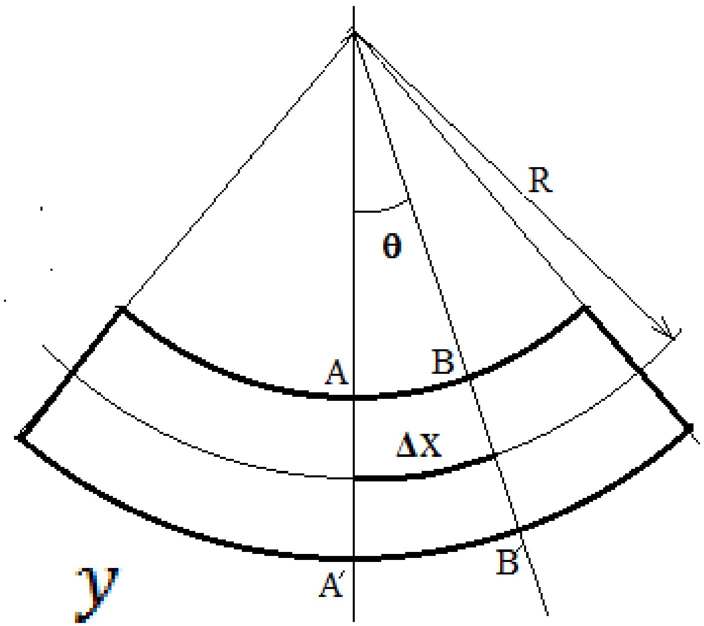
nous pouvons définir la déformation unitaire par:

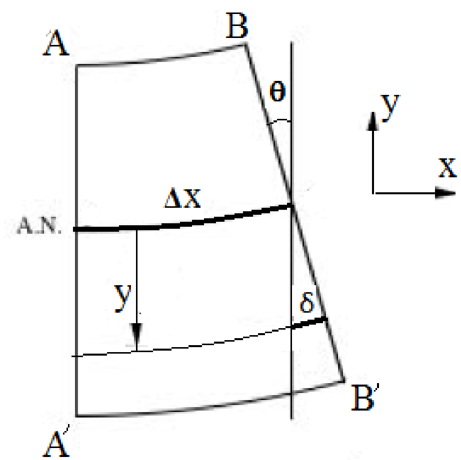
$$\varepsilon = \frac{\delta}{\Delta x} = -\frac{y.\theta}{R\theta} = -\frac{y}{R}$$

FLEXION PURE

CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION

La flexion est une déformation qui se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités de la poutre.



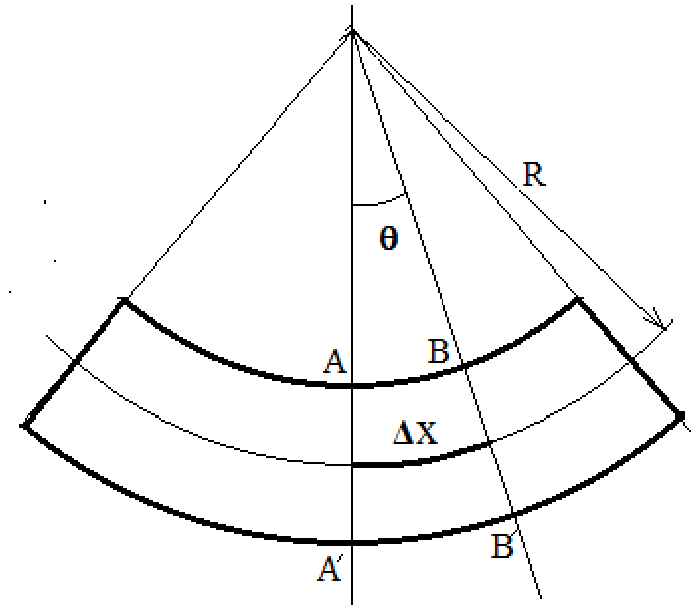


$$\varepsilon = -\frac{y}{R}$$

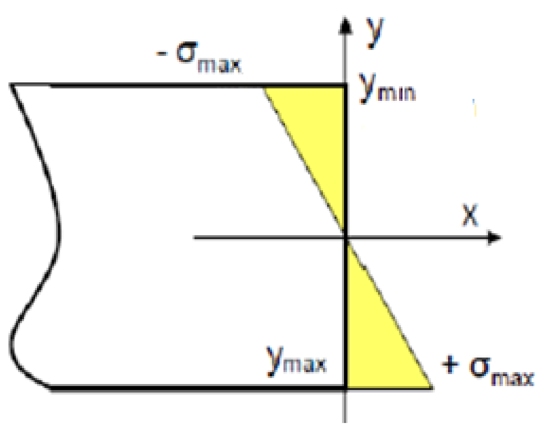
loi de Hooke $\Rightarrow$ $\sigma = E\,\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\sigma = -E\,\frac{y}{R}$

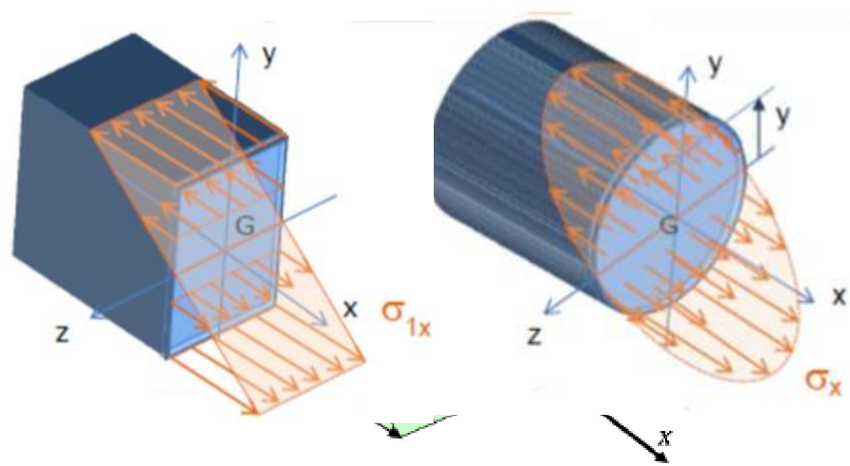
FLEXION PURE

CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION



loi de Hooke $\Rightarrow$ $\sigma = E\,\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\sigma = -E\,\dfrac{y}{R}$



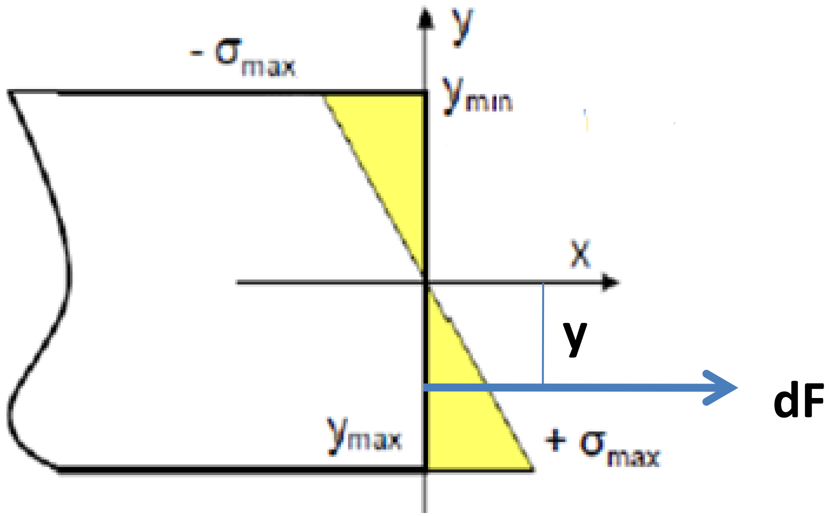


FLEXION PURE

CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION

-

$$\sigma = -E\,\frac{y}{R}$$



La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est:

$$dM_f = dF.y = (\sigma\, dS).y$$

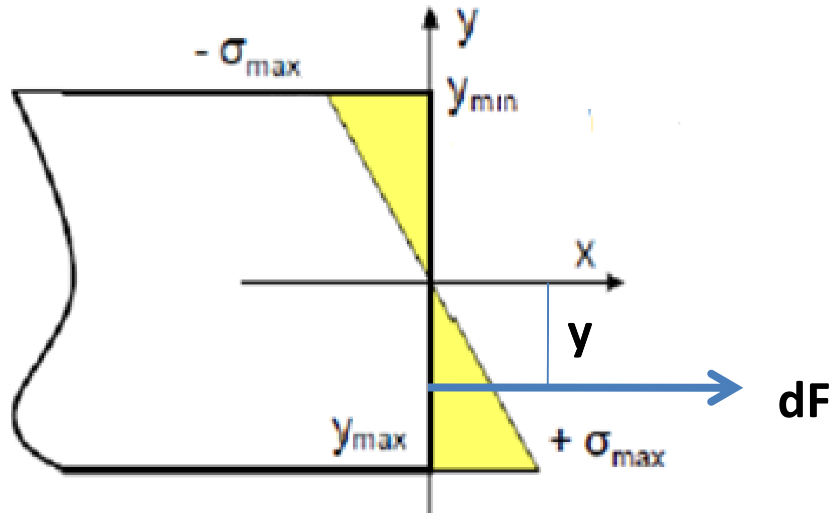
$$M_f = \iint \sigma . y . dS = \iint -\frac{E}{R} . y^2 . dS$$

FLEXION PURE

CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION

-

$$\sigma = -E\,\frac{y}{R}$$



$$dM_f = dF.y = (\sigma\, dS).y$$

$$M_f = \iint \sigma.y.dS = \iint -\frac{E}{R}.y^2.dS$$

$$= -\frac{E}{R}\iint y^2.dS = -\frac{E}{R} I_z$$

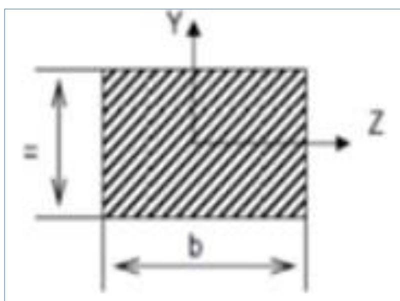
FLEXION PURE

CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION

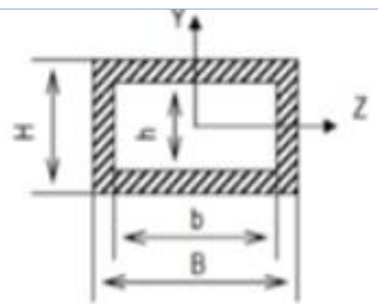
$$\sigma = -E\,\frac{y}{R}$$

$$M_f = -\frac{E}{R} I_z$$

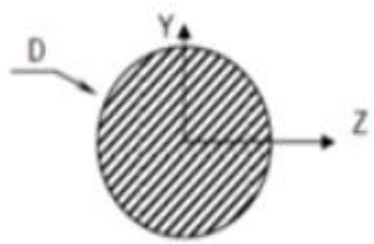
$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_z}\,y$$



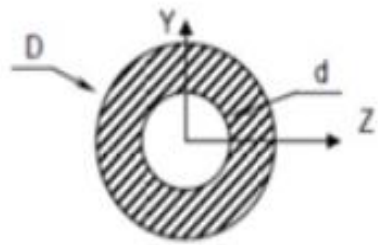
$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$



$$I_{Gz} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

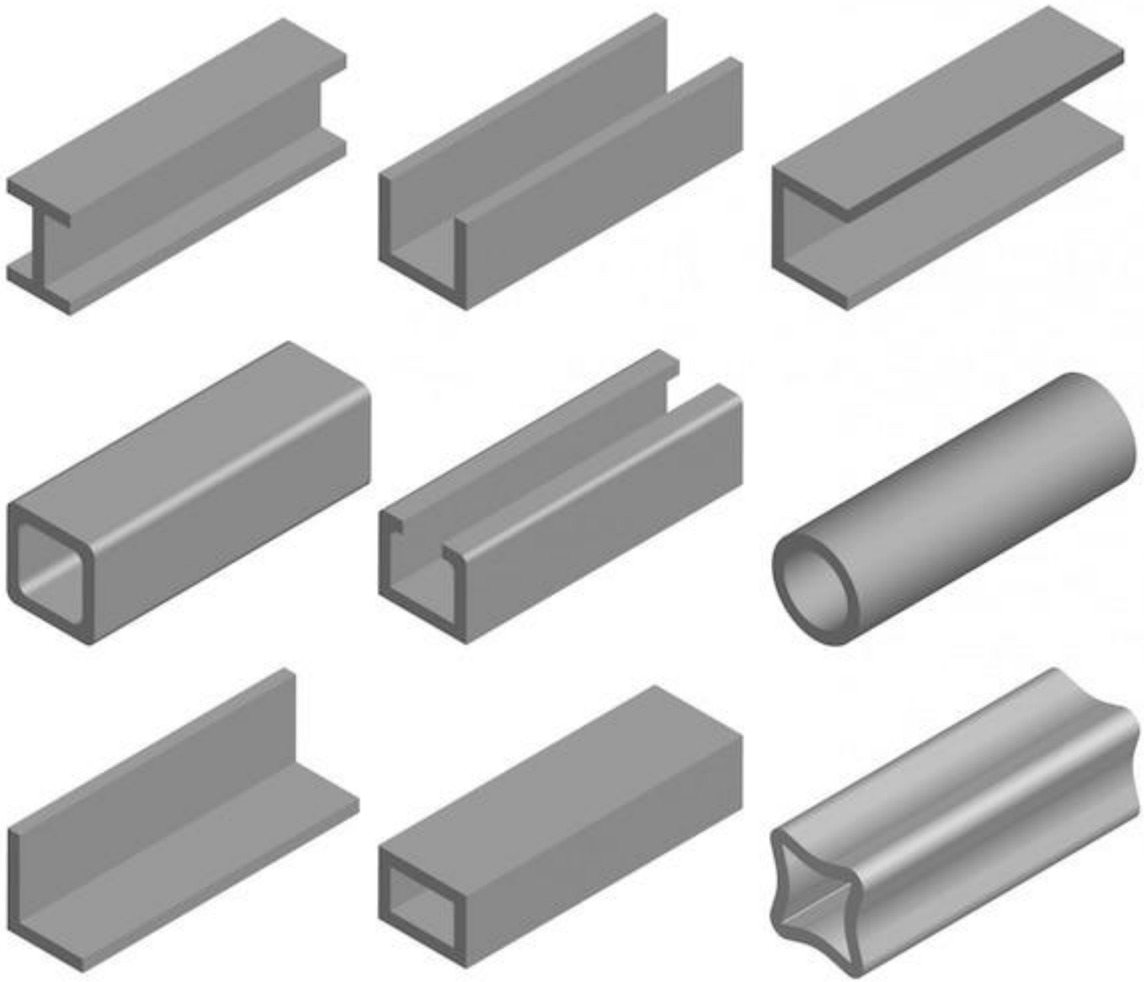


$$I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64}$$



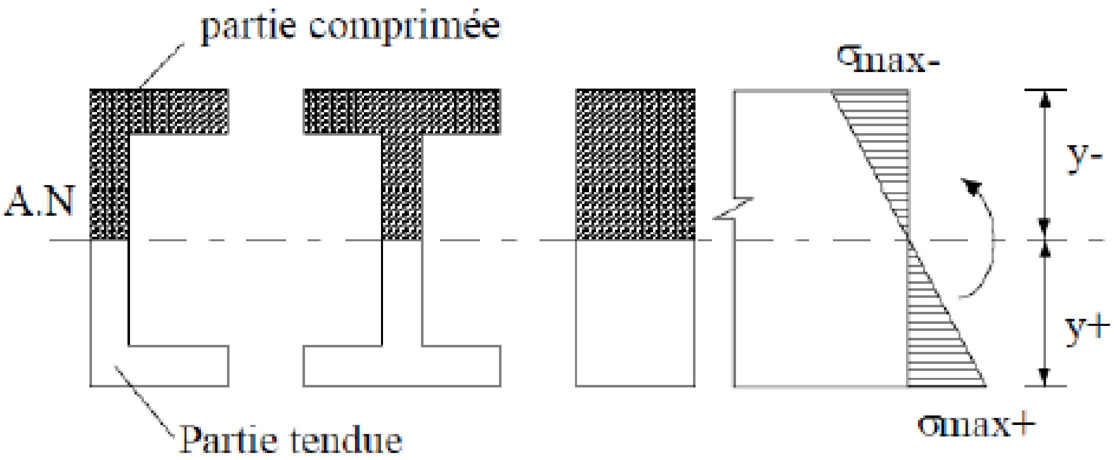
$$I_{Gz} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

FLEXION PURE



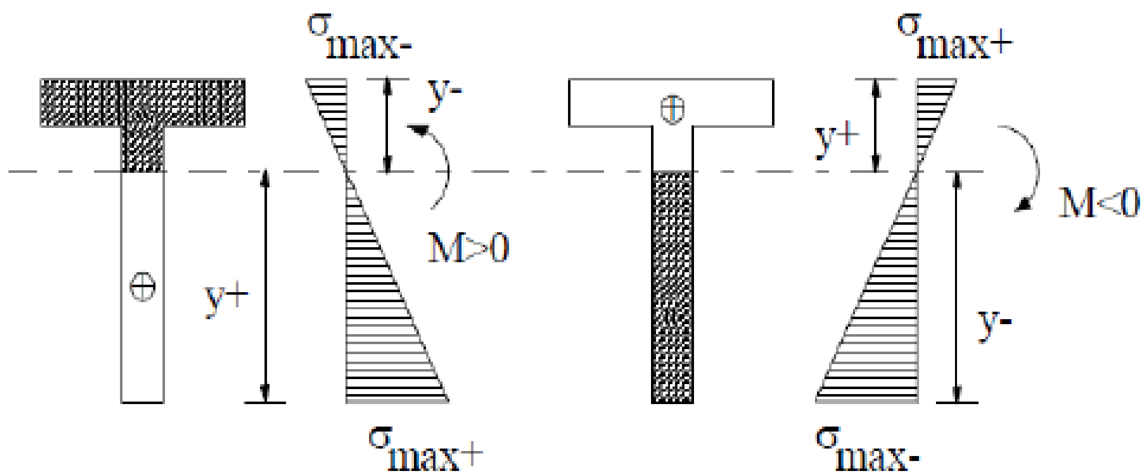
FLEXION PURE

Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal



$$\sigma_{max\ tract} = \sigma_{max\ comp}$$

Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal



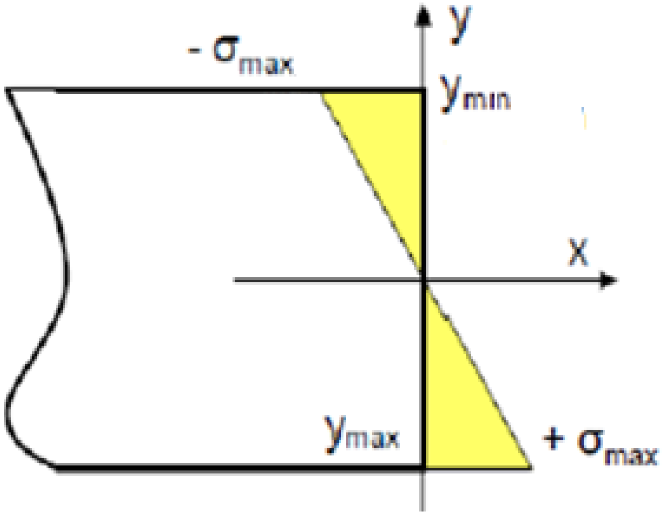
$$\sigma_{max\ tract} \neq \sigma_{max\ comp}$$

FLEXION PURE

CONDITION DE RESISTANCE

$$\sigma_{f\ max} < R_{pe}$$

$$\sigma_{f\max} = \frac{M_{f\max}}{I_z} y$$



FLEXION PURE

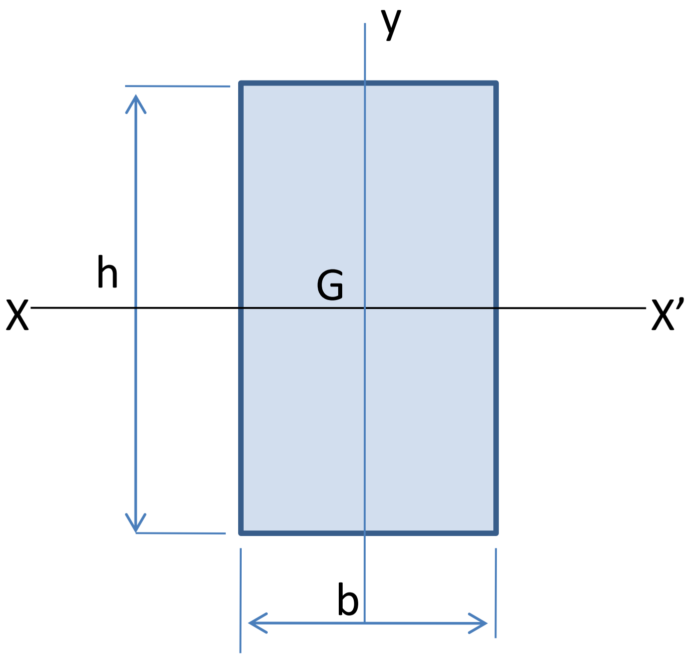
FLEXION PURE

FLEXION PURE

FLEXION PURE

Application

Calculer la contrainte normale maximale dans une poutre rectangulaire ayant une base de 2 cm et une hauteur de 4 cm et étant soumise à un moment de flexion maximal de 2000 Nm.



b = 2 cm

h = 4 cm

Mf = 2000 Nm.

$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_G} y$$

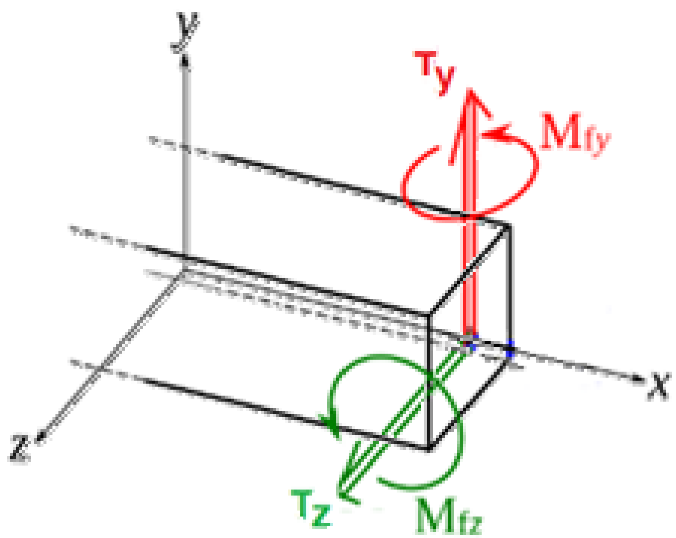
$I_{Gx} = bh^3/12 = 20.40^3/12 = 106666{,}67\ mm^4$

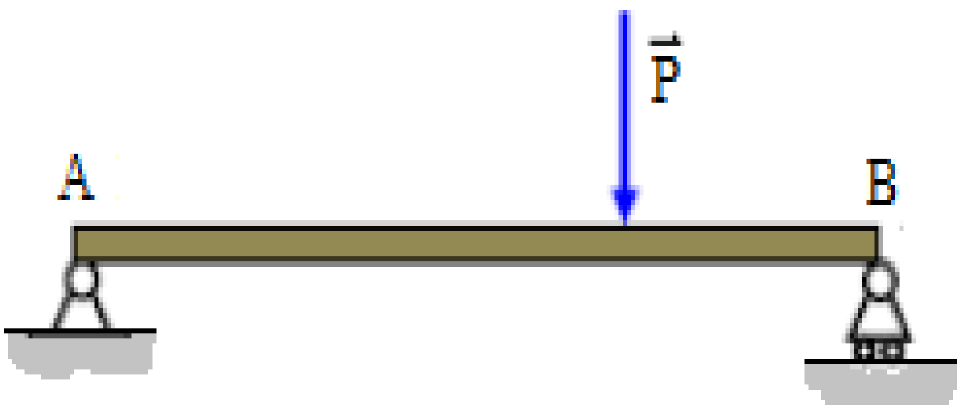
y = h/2 = 40/2 = 20mm

σ_f = 375 MPa

FLEXION SIMPLE

La flexion simple entraîne sur toute la section perpendiculaire à la fibre moyenne de la pièce des contraintes normales et tangentielles. Ces dernières provoquent un gauchissement des sections droites. Les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant Mf (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T).



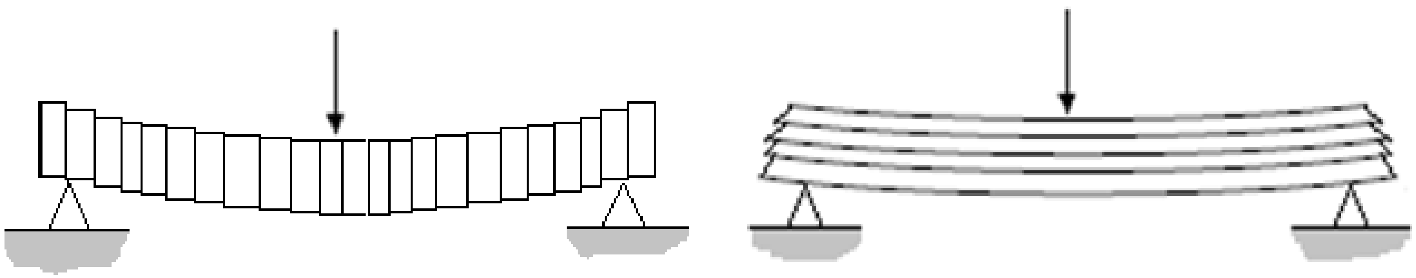


Le cas Mf $\neq 0$ avec T $= 0$ correspond à de la flexion pure
Le cas Mf $\neq 0$ avec T $\neq 0$ correspond à de la flexion simple.

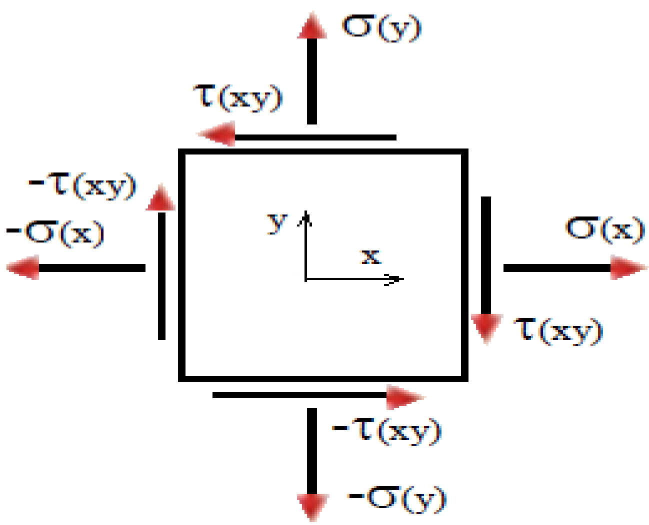
FLEXION SIMPLE

Glissement et cisaillement dans les pièces fléchies

Dans la grande majorité des cas ces efforts tranchants au niveau des sections verticales sont négligeables par rapport aux autres



Si on découpe la matière en petits cubes élémentaires. Un équilibre statique de cet élément .



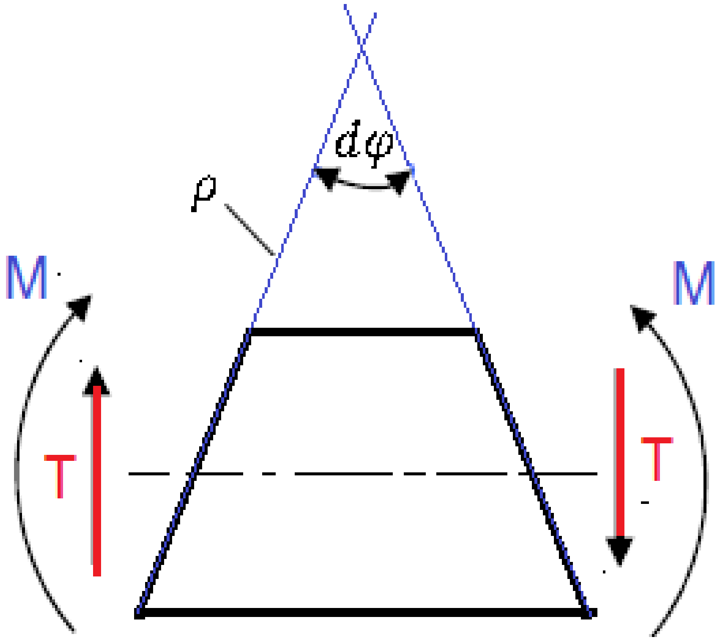
FLEXION SIMPLE

Convention de signes:

Mf >0 : les fibres supérieures sont comprimées et les fibres inferieures sont tendues.

T >0 : s'il tend à faire tourner le petit élément dans le sens horaire.

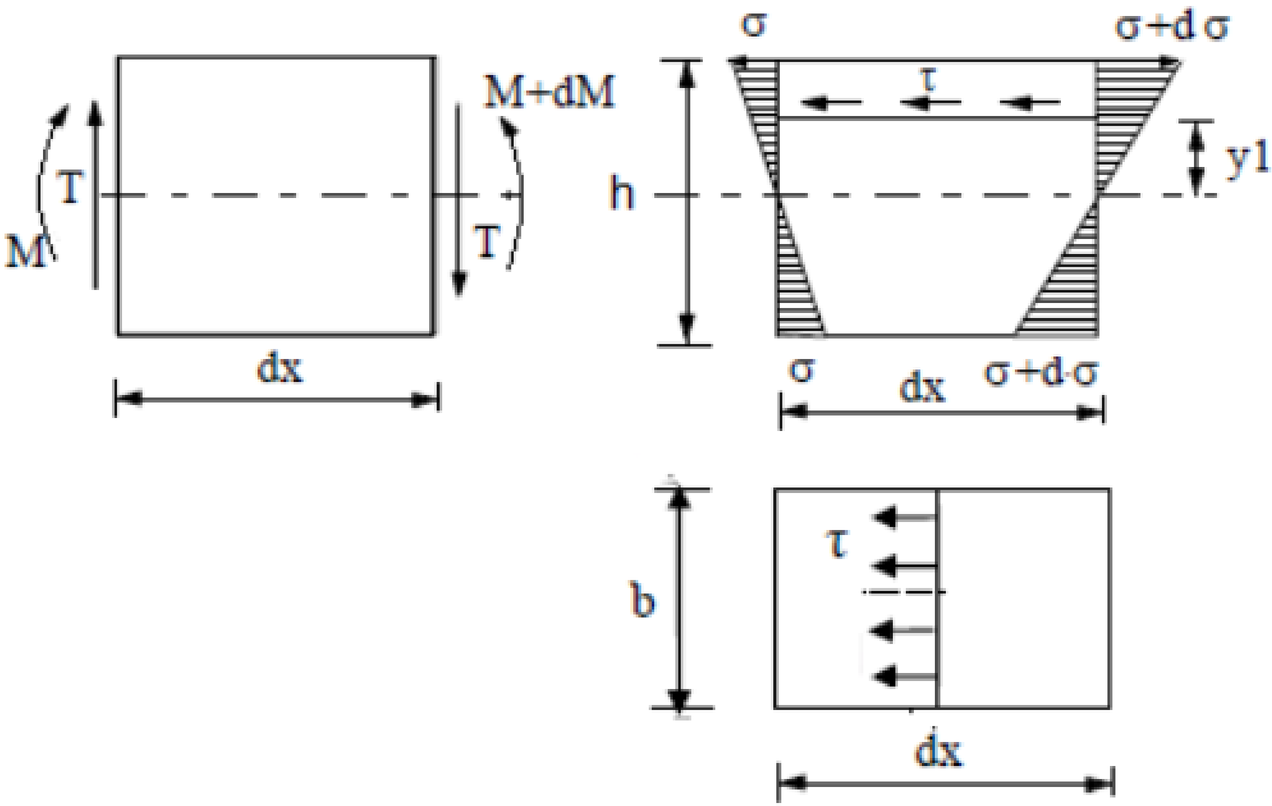
P(x) >0 : si elle agit vers le bas.



FLEXION SIMPLE

Contraintes tangentielles en flexion

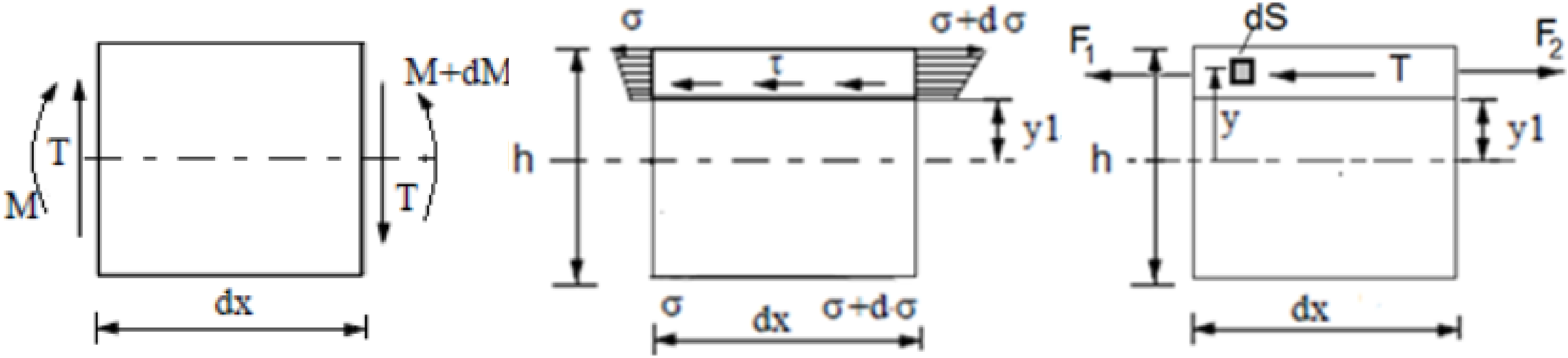
Examinant les déformations longitudinales des diverses fibres d'un tronçon de poutre de longueur dx. Sur la face gauche agissent le moment fléchissant M et l'effort tranchant T. Puisque M varie en fonction de x, sa valeur à droite est notée M+dM.



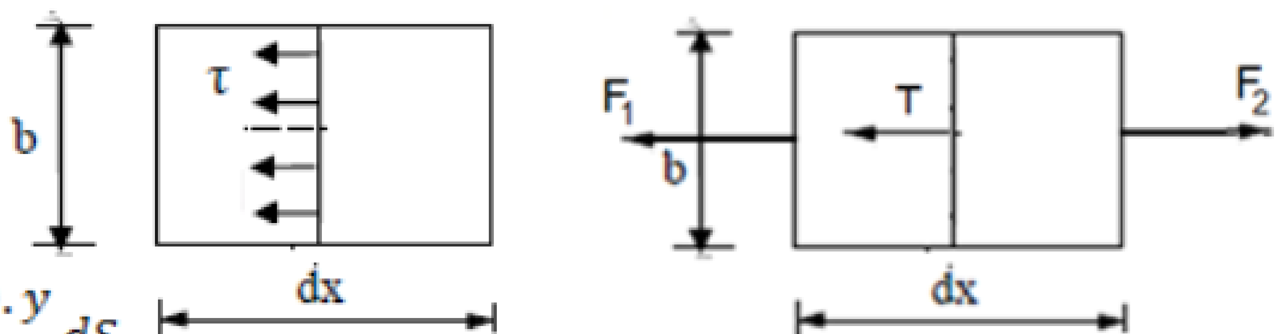
FLEXION SIMPLE

Contraintes tangentielles en flexion

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx, (σ+dσ) à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ.



$$F_1 = \int \sigma_1 \, dS = \int \frac{M.y}{I} dS$$



$$F_2 = \int \sigma_2 \, dS = \int \frac{(M + dM).y}{I} dS$$

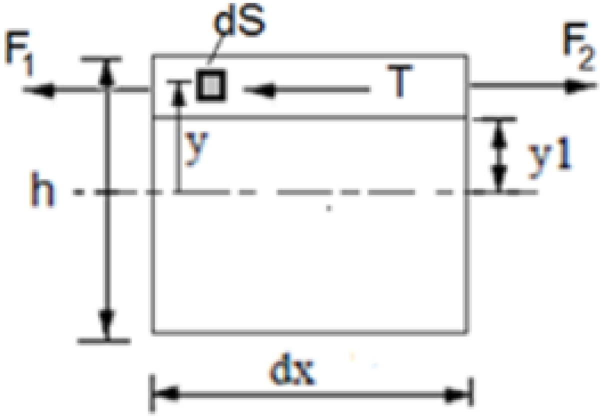
FLEXION SIMPLE

Contraintes tangentielles en flexion

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx, (σ+dσ) à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ.

$$F_1 = \int \sigma_1 \, dS = \int \frac{M.y}{I} dS$$

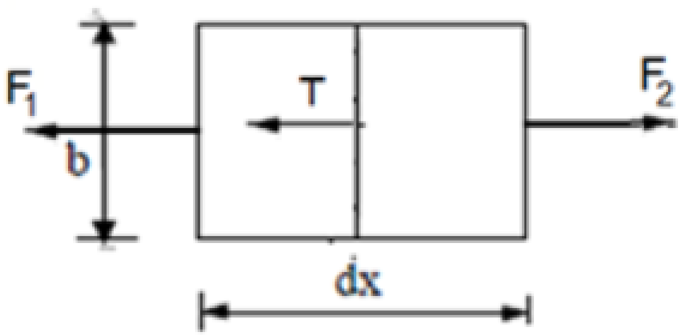
$$F_2 = \int \sigma_2 \, dS = \int \frac{(M + dM).y}{I} dS$$



$$T = \tau.b.dx$$

Écrivons l'équation d'équilibre:

$$F_1 - F_2 + T = 0$$



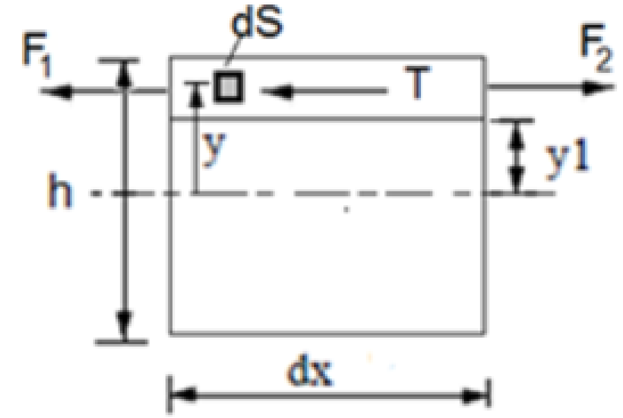
$$- \qquad + \qquad = 0$$

FLEXION SIMPLE

Contraintes tangentielles en flexion

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx, (σ+dσ) à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ.

$$\int \frac{M.y}{I} dS - \int \frac{(M+dM).y}{I} dS + \tau.b.dx = 0$$

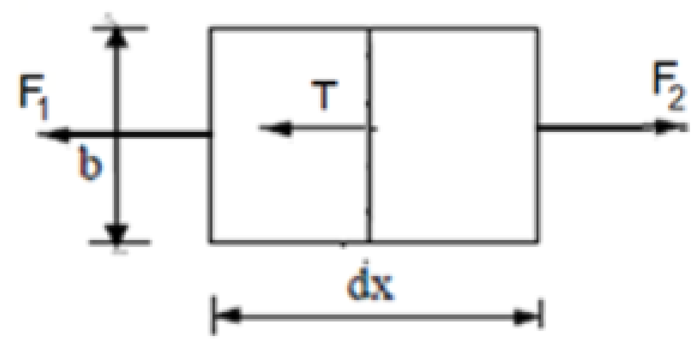


$$-\int \frac{dM.y}{I} dS + \tau.b.dx = 0$$

$$\tau.b.dx = \int \frac{dM.y}{I} dS = \frac{dM}{I} \int y.dS$$

$$\tau = \frac{dM}{I.b.dx} \boxed{\int y.dS} \qquad \tau = \frac{T.Q}{I.b}$$

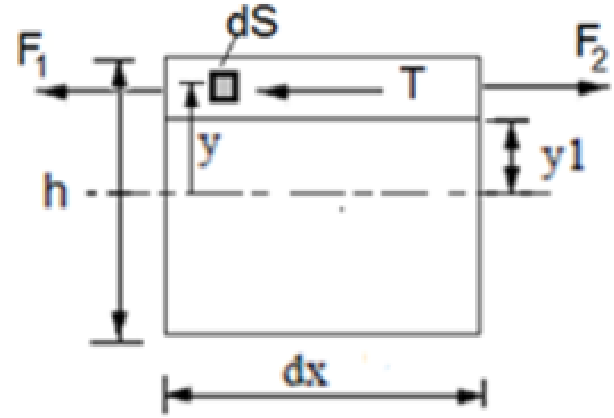
T Q moment statique



FLEXION SIMPLE

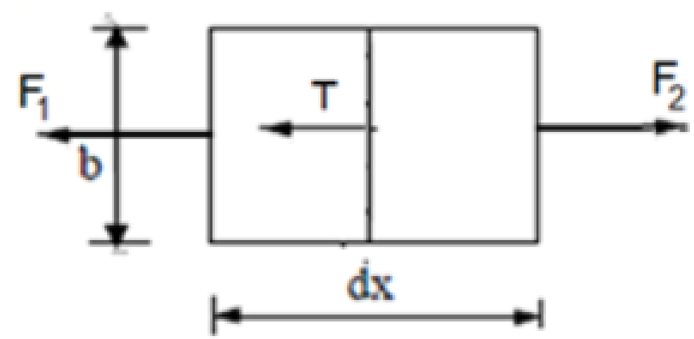
Contraintes tangentielles en flexion

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx, (σ+dσ) à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ.



$$\tau = \frac{T.Q}{I.b}$$

b : Largeur de la section
Iz : Moment d'inertie quadratique
Q : Moment statique
T : L'effort tranchant
τ : Contrainte tangentielle de



FLEXION SIMPLE

Conditions de résistance

contrainte de flexion

$$\sigma_{fmax} = \frac{M_f}{I_z} y \leq \sigma_{adm}$$

contrainte de cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{T.Q}{I.b} \leq \tau_{adm}$$

FLEXION SIMPLE

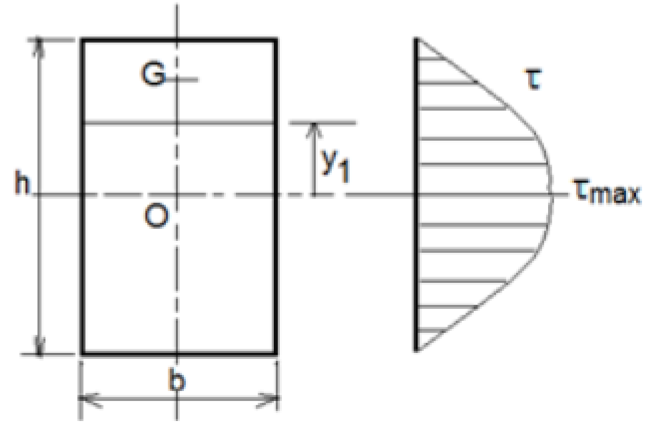
Exemple : Déterminer les contraintes tangentielles de cisaillement dans le cas d'une poutre de section rectangulaire (bxh).

$$\tau_{max} = \frac{T.Q}{I.b}$$

$$Q = b.\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{b.h^2}{8}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2.b.h} = \frac{T}{0{,}67.A}$$

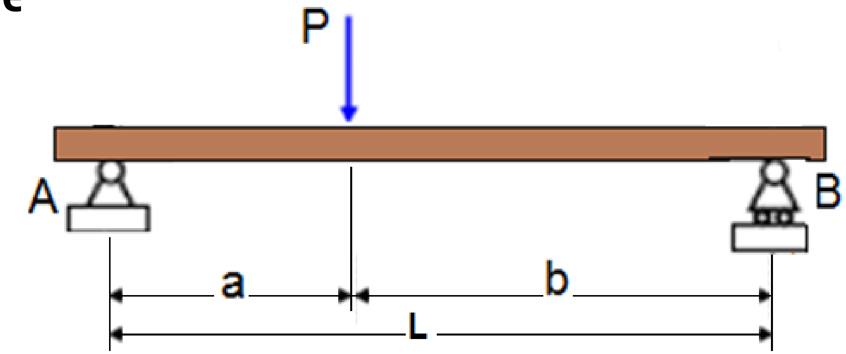


FLEXION SIMPLE

a-Cas d’une charge concentrée

Diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants

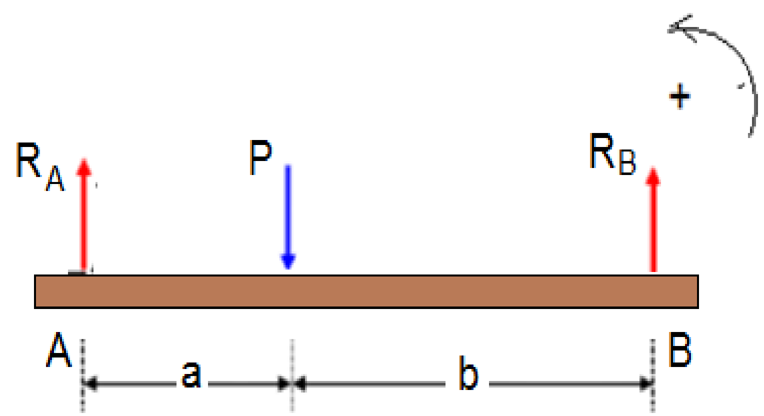
Cas d’une charge concentrée



Déterminons les réactions aux appuis:

D’apes le principe fondamental de la statique

$$\begin{cases} \Sigma F = 0 \; ; \; P - R_A - R_B = 0 & (1) \\ \Sigma M_{/A} = 0 \; ; \; -P.a + R_B.L = 0 & (2) \end{cases}$$



(2) => $R_B = P.a/L$

(1) => $R_A = P.b/L$

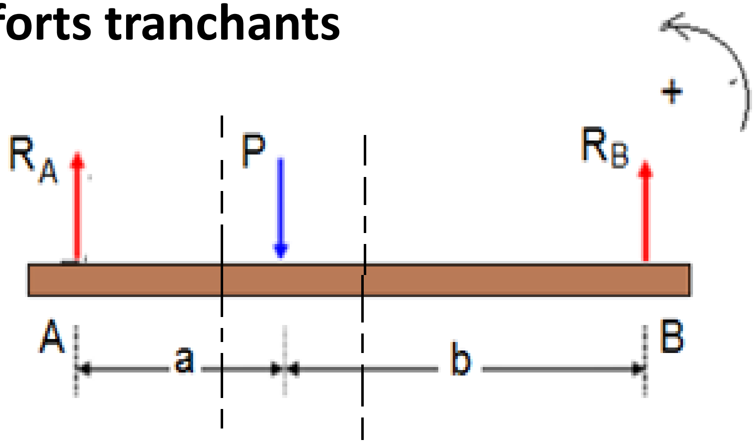
FLEXION SIMPLE

a-Cas d'une charge concentrée

Diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants

$R_B = P.a/L$

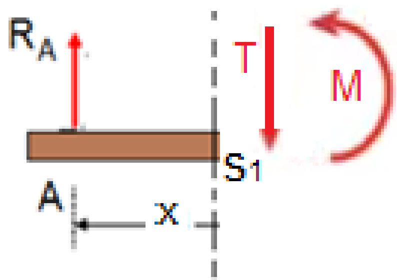
$R_A = P.b/L$



On effectue un certain nombre de coupures

Pour chaque coupure on détermine l'expression de M et de T.

Le premier tronçon jusqu'à P (0< x <a):



$\Sigma F = 0$; $-R_A + T = 0$ $\quad\quad$ $T = P.b/L$

$\Sigma M_{/s1} = 0$; $-R_A.x + M = 0$ $\quad\quad$ $M = P.b.x/L$

Pour $x = 0$; $\quad$ $M = 0$

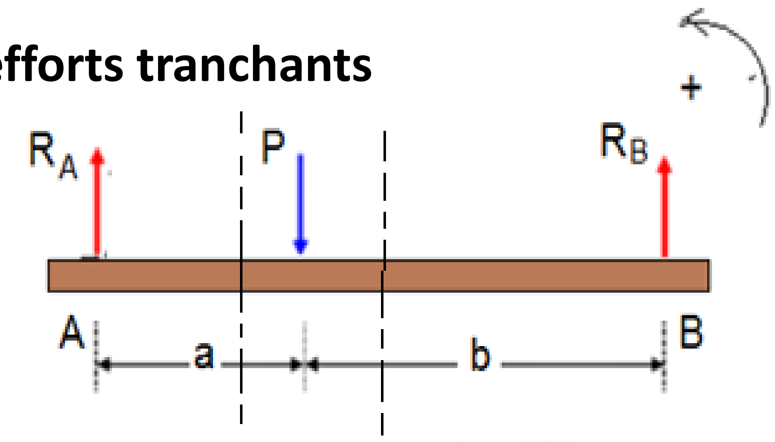
$T = R_A = P.b/L$

Pour $x = a$; $\quad$ $M = P.b.a/L$

FLEXION SIMPLE

a-Cas d'une charge concentrée

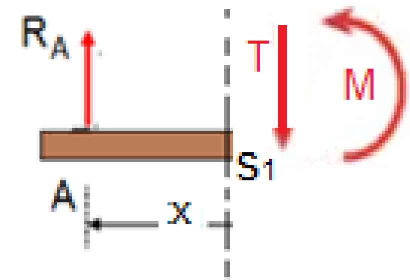
Diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants



R_B= P.a/L

R_A= P.b/L

Le premier tronçon jusqu'à P ($0< x <a$):



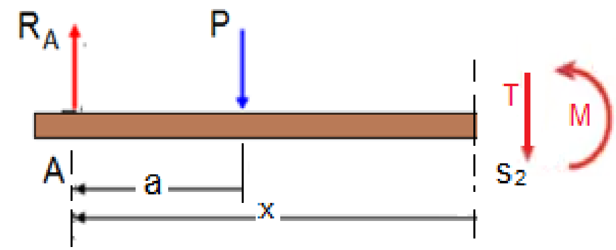
$\Sigma F = 0$; $- R_A + T = 0$ $\qquad$ $T = P.b/L$

$\Sigma M_{/s1} = 0$; $- R_A.x + M = 0$ $\qquad$ $M = P.b.x/L$

Pour x =0; $\quad$ M = 0 $\quad$ T= P.b/L

Pour x =a; $\quad$ M = P.b.a /L

Le deuxième tronçon entre P et B ($a< x <L$):



$\Sigma F = 0$; $\quad - R_A + P + T = 0$ $\qquad$ $T = -P.a/L$

$\Sigma M_{/s2} = 0$; $\quad - R_A.x + P(x-a) + M = 0$ $\qquad$ $M = P.a.(L-x)/L$

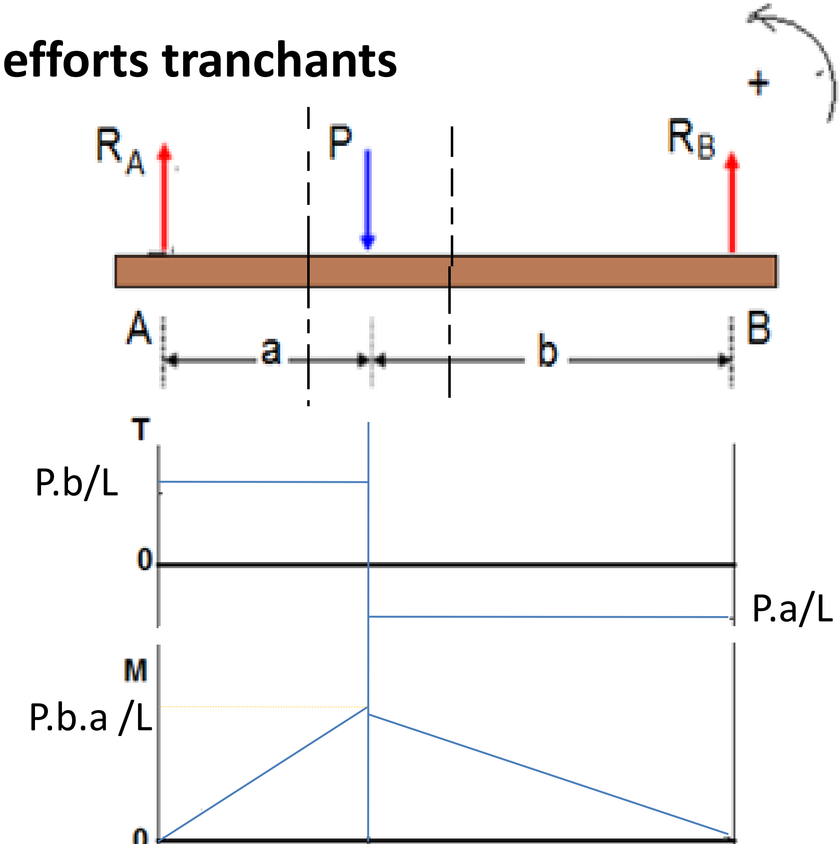
Pour x =a; $\quad$ M = P.b.a /L

Pour x =L; $\quad$ M = 0 $\qquad$ T= -P.a/L

FLEXION SIMPLE

a-Cas d’une charge concentrée

Diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants



R_B= P.a/L

R_A= P.b/L

Le premier tronçon jusqu’à P (0< x <a):

T = P.b/L M = P.b.x /L

Pour x =0; M = 0 T= P.b/L

Pour x =a; M = P.b.a /L T= P

Le deuxième tronçon entre P et B (a< x <L):

T = -P.a/L M = P.a.(L-x) /L

Pour x =a; M = P.b.a /L T= P

Pour x =L; M = 0 T= -P.a/L

-Le moment fléchissant M croît dans une zone où l’effort tranchant T

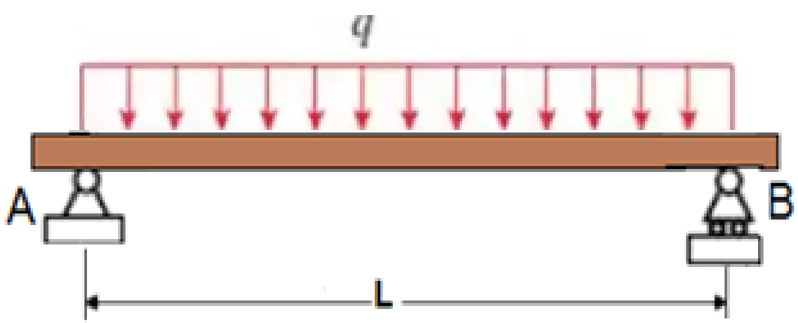
-Le moment fléchissant M décroît dans une zone où l’effort trancha

- Le moment fléchissant est nul (M= 0) au droit des appuis d’extrém

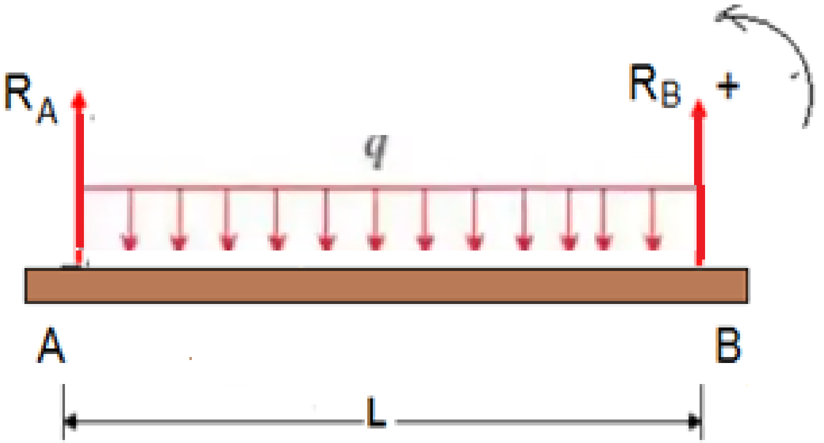
-On peut aussi montrer que les efforts tranchants sont la dérivée des

FLEXION SIMPLE

b-Cas d'une charge uniformément répartie



Déterminons les réactions aux appuis:



$\Sigma F = 0$; $q.L - R_A - R_B = 0$ (1)

$\Sigma M_{/A} = 0$; $-q.L.(L/2) + R_B.L = 0$ (2)

(2) => $R_B = q.L/2$

(1) => $R_A = R_B = q.L/2$

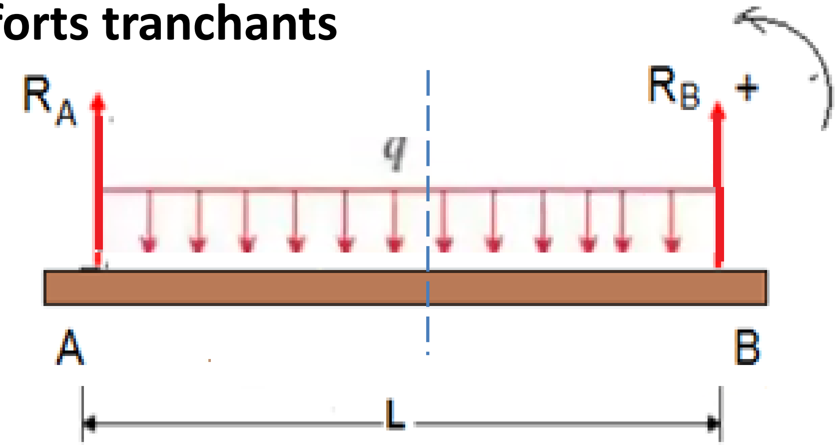
FLEXION SIMPLE

b-Cas d'une charge uniformément répartie

$R_A = R_B = q.L/2$

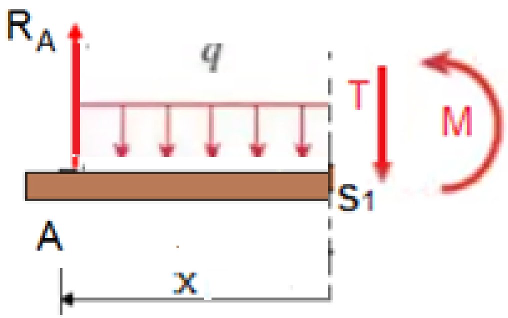
Diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants

On effectue un certain nombre de coupures



Pour chaque coupure on détermine l'expression de M et de T.

Soit le tronçon de la poutre (0< x <L):



$\Sigma F = 0\ ; \quad - R_A + q.x + T = 0$

$\Sigma M_{s1} = 0\ ; \ - R_A.x + q.x.(x/2) + M = 0$

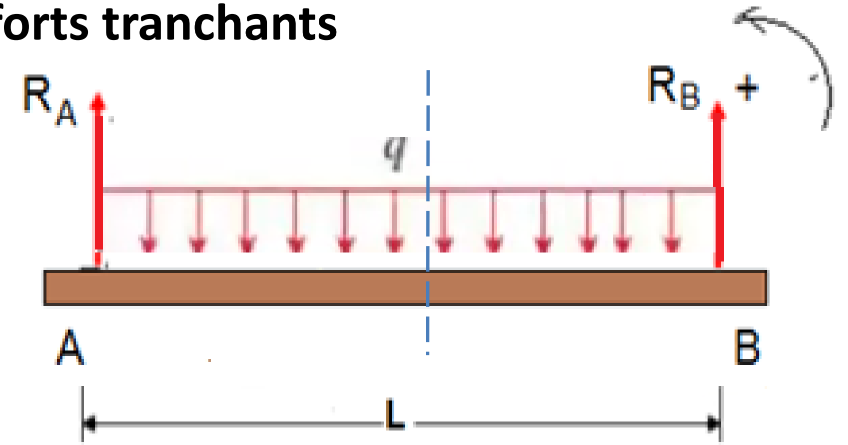
$T = q.L/2 - q.x \qquad M = (q.L/2).x - (q/2)\,x^2$

FLEXION SIMPLE

b-Cas d'une charge uniformément répartie

$R_A = R_B = q.L/2$

Diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants



Soit le tronçon de la poutre (0< x <L):

$T = q.L/2 - q.x$

$M = (q.L/2).x - (q/2)\, x^2$

Pour $x = 0$; $T = q.L/2$ et $M = 0$

Pour $x = L$; $T = -q.L/2$ et $M = 0$

Pour $x = L/2$; $T = 0$ et $M = q.L^2/8$