École Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologies

Analyse Numérique

Série d'exercices N°1 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Niveau : 3A & 3 B

Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires (S), dont l'écriture matricielle est donnée par $AX = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad et\, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Partie I :

1. (a) *Montrer que (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.*
   (b) *Résoudre (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.*
2. (a) *Justifier la convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S).*
   (b) *Écrire les schémas itératifs des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S).*
   (c) *Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations en utilisant*
      i. *la méthode de Jacobi.*
      ii. *la méthode de Gauss-Seidel.*

Partie II :

3. *En considérant l'erreur $E = ||X - X^{(k)}||_2$, avec X la solution exacte, $X^{(k)}$ $(k \in \{1, 2\})$ une solution approchée par l'une des deux méthodes et $||\,.\,||_2$ la norme euclidienne définie par*

$$||X||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

   calculer les erreurs commises par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux premières itérations.

4. *Comparer alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en terme de précision pour les deux premières itérations pour la résolution du système* (S).

Exercice 2

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) *:* $AX = b$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad et\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs de* α *pour lesquelles* A *est inversible.*
2. *Déterminer une condition suffisante sur* α *assurant la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution du système* (S_α).
3. *Pour* $\alpha = 3$,
   (a) *Résoudre* (S_3) *par la méthode du pivot de Gauss.*
   (b) *Donner le schéma itératif de la méthode de Jacobi.*
   (c) *Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution du* (S_3) .

Exercice 3

On considère le système d'équations linéaires (S_α^θ) : $AX = b$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 3\theta & 4 & -2 \\ 1 & 2\theta & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad et\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad et\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Partie I : $\theta = 1$

1. *Déterminer les valeurs de* α *pour lesquelles le système* (S_α^1) *admet une unique solution.*
2. *Sachant que pour* $\theta = 1$ *et* $\alpha = 6$ *la matrice* A *peut être décomposée en un produit* LU, *résoudre le système* (S_6^1) *en utilisant cette décomposition.*
3. *Sans calculer* A^2 *ni* L^2 *proposer un raisonnement pour résoudre le système d'équations linéaires* $A^2X = b$.

Partie II : $\theta \in \mathbb{R}$

1. *Déterminer une condition suffisante sur* θ *et* α *pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes.*
2. *Pour un vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *donner le résultat des deux premières itérations de la méthode de Jacobi appliquée au système* (S_α^θ) *pour* $\theta = 3$ *et* $\alpha = 6$.
3. *Pour un vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *donner le résultat des deux premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système* (S_α^θ) *pour* $\theta = 3$ *et* $\alpha = 6$.