

1 Первый шаг

Исходная система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = ay + \gamma \\ \dot{y} = -cy - s - xs \\ \dot{x} = cx + ys \end{cases} \quad (1)$$

Произведем подстановку в виде $s = \frac{s_0}{\tau^k}$, $y = \frac{y_0}{\tau^l}$, $x = \frac{x_0}{\tau^m}$. Найдём \dot{s} , \dot{y} , \dot{x} :

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{ks_0}{\tau^{k+1}} \\ \dot{y} = -\frac{ly_0}{\tau^{l+1}} \\ \dot{x} = -\frac{mx_0}{\tau^{m+1}} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему 1:

$$\begin{cases} -\frac{ks_0}{\tau^{k+1}} = a\frac{y_0}{\tau^l} + \gamma \\ -\frac{ly_0}{\tau^{l+1}} = -c\frac{y_0}{\tau^l} - \frac{s_0}{\tau^k} - \frac{x_0}{\tau^m} \frac{s_0}{\tau^k} \\ -\frac{mx_0}{\tau^{m+1}} = -c\frac{x_0}{\tau^m} + \frac{y_0}{\tau^l} \frac{s_0}{\tau^k} \end{cases} \quad (2)$$

Учитывая, что $k, l, m \in \mathbf{Z}$, получим:

$$\begin{cases} k + 1 = l \\ l + 1 = k \text{ или } l + 1 = m + k \\ m + 1 = l + k \end{cases}$$

Отбросив случай $l + 1 = k$, и решив данную систему, получим, что $m = 2$, $k = 1$, $l = 2$. Подставим полученные значения в систему 2:

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} = a\frac{y_0}{\tau^2} + \gamma \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} = -c\frac{y_0}{\tau^2} - \frac{s_0}{\tau} - \frac{x_0 s_0}{\tau^3} \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} = -c\frac{x_0}{\tau^2} + \frac{y_0 s_0}{\tau^3} \end{cases} \quad (3)$$

2 Второй шаг

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ в формуле 3 для нахождения x_0, y_0, s_0 :

$$\begin{cases} 2y_0 = x_0 s_0 \\ 2x_0 = -y_0 s_0 \\ s_0 = -ay_0 \end{cases} \quad (4)$$

Система 4 имеет два решения:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{2}{a} \\ y_0 = -\frac{2i}{a} \\ s_0 = 2i \end{cases} \quad (5)$$

либо

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{2}{a} \\ y_0 = \frac{2i}{a} \\ s_0 = -2i \end{cases} \quad (6)$$

3 Третий шаг

Подставим в систему 1 следующие выражения:

$$\begin{cases} s = \frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1} \\ y = \frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2} \\ x = \frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2} \end{cases}$$

Найдём $\dot{s}, \dot{y}, \dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} \\ \dot{y} = -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} \\ \dot{x} = -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему 1:

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \end{cases} \quad (7)$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\frac{x_0s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(x_0\alpha + s_0\theta) + \alpha\theta\tau^{2r-3}\right) \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\frac{y_0s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(y_0\alpha + s_0\beta) + \alpha\beta\tau^{2r-3}\right) \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при $\tau^{r-2}, \tau^{r-3}, \tau^{r-3}$ в каждом уравнении системы 7:

$$\begin{cases} \alpha(r-1) = a\beta \\ \beta(r-2) = -\alpha x_0 - \theta s_0 \\ \theta(r-2) = \alpha y_0 + \beta s_0 \end{cases}$$

Перепишем данную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha(r-1) - a\beta + 0 = 0 \\ \alpha x_0 + \beta(r-2) + \theta s_0 = 0 \\ -\alpha y_0 - \beta s_0 + \theta(r-2) = 0 \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при α, β, θ :

$$\begin{pmatrix} r-1 & -a & 0 \\ x_0 & r-2 & s_0 \\ -y_0 & -s_0 & r-2 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель данной матрицы и приравняем его к нулю:

$$\begin{aligned} (r-1)(r-2)(r-2) + as_0y_0 + s_0^2(r-1) + ax_0(r-2) &= 0 \\ (r-1)(r^2-4r+4) + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 &= 0 \\ r^3 - 4r^2 + 4r - r^2 + 4r - 4 + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 &= 0 \\ r^3 - 5r^2 + (8 + s_0^2 + ax_0)r - s_0^2 + as_0y_0 - 2ax_0 - 4 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

При подстановке в уравнение 8 выражений 5, 6 для x_0, y_0, s_0 получаем два случая:

– при $x_0 = -\frac{2}{a}, y_0 = \frac{2}{a}i, s_0 = -2i$:

$$\begin{aligned} r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(-2i)(\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) &= 0 \\ r^3 - 5r^2 + 2r + 8 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

– при $x_0 = -\frac{2}{a}, y_0 = -\frac{2}{a}i, s_0 = 2i$:

$$\begin{aligned} r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(2i)(-\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) &= 0 \\ r^3 - 5r^2 + 2r + 8 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Видно, что уравнения 9 и 10 имеют одинаковый вид. Определим корни этих уравнений:

$$\begin{cases} r = -1 \\ r = 2 \\ r = 4 \end{cases} \quad (11)$$

4 Четвертый шаг

Сделаем подстановку в виде бесконечных рядов для s, y, x :

$$\begin{cases} s = \frac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots \\ y = \frac{y_{-2}}{\tau^2} + \frac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots \\ x = \frac{x_{-2}}{\tau^2} + \frac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots \end{cases}$$

Найдём $\dot{s}, \dot{y}, \dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{s_{-1}}{\tau^2} + s_1 + 2s_2\tau + 3s_3\tau^2 + \dots \\ \dot{y} = -\frac{2y_{-2}}{\tau^3} - \frac{y_{-1}}{\tau^2} + y_1 + 2y_2\tau + 3y_3\tau^2 + \dots \\ \dot{x} = -\frac{2x_{-2}}{\tau^3} - \frac{x_{-1}}{\tau^2} + x_1 + 2x_2\tau + 3x_3\tau^2 + \dots \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1):

$$\begin{cases} -\frac{s_{-1}}{\tau^2} + s_1 + 2s_2\tau + 3s_3\tau^2 + \dots = a \left(\frac{y_{-2}}{\tau^2} + \frac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots \right) + \gamma \\ -\frac{2y_{-2}}{\tau^3} - \frac{y_{-1}}{\tau^2} + y_1 + 2y_2\tau + 3y_3\tau^2 + \dots = -c \left(\frac{y_{-2}}{\tau^2} + \frac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots \right) - \\ - \left(\frac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots \right) - \left(\frac{x_{-2}}{\tau^2} + \frac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots \right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots \right) \\ -\frac{2x_{-2}}{\tau^3} - \frac{x_{-1}}{\tau^2} + x_1 + 2x_2\tau + 3x_3\tau^2 + \dots = -c \left(\frac{x_{-2}}{\tau^2} + \frac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots \right) + \\ + \left(\frac{y_{-2}}{\tau^2} + \frac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots \right) \cdot \left(\frac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots \right) \end{cases}$$

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ , начиная с наименьшей. Составим соответствующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
(r=0) : & \begin{cases} -s_{-1} = ay_{-2} \\ -2y_{-2} = x_{-2}s_{-1} \\ -2x_{-2} = y_{-2}s_{-1} \end{cases} \\
(r=1) : & \begin{cases} 0 = ay_{-1} \\ -y_{-1} = -cy_{-2} - x_{-2}s_0 - x_{-1}s_{-1} \\ -x_{-1} = -cx_{-2} + y_{-2}s_0 + y_{-1}s_{-1} \end{cases} \\
(r=2) : & \begin{cases} s_1 = ay_0 + \gamma \\ 0 = -cy_{-1} - s_{-1} - x_{-2}s_1 - x_{-1}s_0 - x_0s_{-1} \\ 0 = -cx_{-1} + y_{-2}s_1 + y_{-1}s_0 + y_0s_{-1} \end{cases} \\
(r=3) : & \begin{cases} 2s_2 = ay_1 \\ y_1 = -cy_0 - s_0 - x_{-2}s_2 - x_{-1}s_1 - x_0s_0 - x_1s_{-1} \\ x_1 = -cx_0 + y_{-2}s_2 + y_{-1}s_1 + y_0s_0 + y_1s_{-1} \end{cases} \\
(r=4) : & \begin{cases} 3s_3 = ay_2 \\ 2y_2 = -cy_1 - s_1 - x_{-2}s_3 - x_{-1}s_2 - x_0s_1 - x_1s_0 - x_2s_{-1} \\ 2x_2 = -cx_1 + y_{-2}s_3 + y_{-1}s_2 + y_0s_1 + y_1s_0 + y_2s_{-1} \end{cases} \\
(r=5) : & \begin{cases} 4s_4 = ay_3 \\ 3y_3 = -cy_2 - s_2 - x_{-2}s_4 - x_{-1}s_3 - x_0s_2 - x_1s_1 - x_2s_0 - x_3s_{-1} \\ 3x_3 = -cx_2 + y_{-2}s_4 + y_{-1}s_3 + y_0s_2 + y_1s_1 + y_2s_0 + y_3s_{-1} \end{cases} \\
(r=6) : & \begin{cases} 5s_5 = ay_4 \\ 4y_4 = -cy_3 - s_3 - x_{-2}s_5 - x_{-1}s_4 - x_0s_3 - x_1s_2 - x_2s_1 - x_3s_0 - x_4s_{-1} \\ 4x_4 = -cx_3 + y_{-2}s_5 + y_{-1}s_4 + y_0s_3 + y_1s_2 + y_2s_1 + y_3s_0 + y_4s_{-1} \end{cases} \\
& \dots
\end{aligned}$$

Поочередно рассмотрим каждую из систем, постепенно подставляя найденные значения.

Из первой ($r=0$) системы получаем:

$$\begin{cases} x_{-2} = \frac{2}{a} \\ y_{-2} = \frac{2}{a} \\ s_{-1} = -2 \end{cases} \quad (12) \quad \text{либо} \quad \begin{cases} x_{-2} = \frac{2}{a} \\ y_{-2} = -\frac{2}{a} \\ s_{-1} = 2 \end{cases} \quad (13)$$

Для нахождения остальных коэффициентов ($x_{-1}, y_{-1}, s_0, x_0, y_0, s_1$ и т.д.) необходимо подставить полученные на данном шаге значения (x_{-2}, y_{-2}, s_{-1}) в соответствующие системы уравнений.

Рассмотрим два решения в отдельности.

Начнём с *первой ветки решения* 12. Дальнейшие подстановки дают нам следующие значения:

– Вторая система ($r = 1$):

$$\begin{cases} s_0 = \frac{c}{3} \\ y_{-1} = 0 \\ x_{-1} = \frac{4c}{3a} \end{cases}$$

– Найденные значения подставим в третью систему ($r = 2$). После преобразований одного из уравнений получаем:

$$y_0 = y_0$$

Таким образом, y_0 - произвольный постоянный коэффициент, а x_0, s_1 выражаются через y_0 :

$$\begin{cases} y_0 - \text{произвольный} \\ s_1 = ay_0 + \frac{2c^2}{3} \\ x_0 = \frac{8c^2}{9a} - 1 + y_0 \end{cases}$$

– Четвертая система ($r = 3$):

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{20c^3}{27} - cy_0 + \frac{c}{2} \\ x_1 = -\frac{4c^3}{27a} + \frac{cy_0}{3} + \frac{c}{2} \\ s_2 = -\frac{10c^3}{27} - \frac{cay_0}{2} + \frac{ca}{4} \end{cases}$$

– Подставив в пятую систему ($r = 4$) найденные выражения получим, что y_2, s_3 не зависят от y_0 :

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{50c^4}{243} + \frac{14c^4}{243a} + \frac{c^2}{18} + \frac{ay_0^2}{2} \\ y_2 = \frac{10c^4}{81} + \frac{2c^4}{81a} - \frac{c^2}{3} \\ s_3 = \frac{10ac^4}{243} + \frac{2c^4}{243} - \frac{ac^2}{9} \end{cases}$$

– Шестая система ($r = 5$):

$$\begin{cases} x_3 = f_1(a, c, y_0) \\ y_3 = f_2(a, c, y_0) \\ s_4 = f_3(a, c, y_0) \end{cases}$$

...

Рассмотрим **вторую ветку решения**. Из первой системы ($r = 0$) получили систему (13). Дальнейшие подстановки дают нам следующие значения:

– Вторая система ($r = 1$):

$$\begin{cases} s_0 = -\frac{c}{3} \\ y_{-1} = 0 \\ x_{-1} = \frac{4c}{3a} \end{cases}$$

– Найденные значения подставим в третью систему ($r = 2$). После преобразований одного из уравнений получаем:

$$y_0 = y_0$$

Таким образом y_0 — произвольный постоянный коэффициент, а x_0, s_1 выражаются через y_0 :

$$\begin{cases} y_0 - \text{произвольный} \\ s_1 = ay_0 - \frac{2c^2}{3} \\ x_0 = \frac{8c^2}{9a} - 1 - y_0 \end{cases}$$

– Четвертая система ($r = 3$):

$$\begin{cases} y_1 = \frac{20c^3}{27} - cy_0 - \frac{c}{2} \\ x_1 = -\frac{4c^3}{27a} - \frac{cy_0}{3} + \frac{c}{2} \\ s_2 = \frac{10c^3}{27} - \frac{cay_0}{2} - \frac{ca}{4} \end{cases}$$

– Подставив в пятую систему ($r = 4$) найденные выражения, получим, что y_2, s_3 не зависят от y_0 :

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{50c^4}{243} + \frac{14c^4}{243a} + \frac{c^2}{18} + \frac{ay_0^2}{2} \\ y_2 = -\frac{10c^4}{81} - \frac{2c^4}{81a} + \frac{c^2}{3} \\ s_3 = -\frac{10ac^4}{243} - \frac{2c^4}{243} + \frac{ac^2}{9} \end{cases}$$

– Шестая система ($r = 5$):

$$\begin{cases} x_3 = f_1(a, c, y_0) \\ y_3 = f_2(a, c, y_0) \\ s_4 = f_3(a, c, y_0) \end{cases}$$

...