

1 Шаг первый

Исходная система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = ay + \gamma \\ \dot{y} = -cy - s - xs \\ \dot{x} = cx + ys \end{cases} \quad (1)$$

Сделаем подстановку в виде $s = \frac{s_0}{\tau^k}$, $y = \frac{y_0}{\tau^l}$, $x = \frac{x_0}{\tau^m}$

Найдём \dot{s} , \dot{y} , \dot{x} :

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{ks_0}{\tau^{k+1}} \\ \dot{y} = -\frac{ly_0}{\tau^{l+1}} \\ \dot{x} = -\frac{mx_0}{\tau^{m+1}} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1):

$$\begin{cases} -\frac{ks_0}{\tau^{k+1}} = a\frac{y_0}{\tau^l} + \gamma \\ -\frac{ly_0}{\tau^{l+1}} = -c\frac{y_0}{\tau^l} - \frac{s_0}{\tau^k} - \frac{x_0}{\tau^m} \frac{s_0}{\tau^k} \\ -\frac{mx_0}{\tau^{m+1}} = -c\frac{x_0}{\tau^m} + \frac{y_0}{\tau^l} \frac{s_0}{\tau^k} \end{cases} \quad (2)$$

Учитывая, что $k, l, m \in \mathbf{Z}$, получим:

$$\begin{cases} k + 1 = l \\ l + 1 = k \text{ или } l + 1 = m + k \\ m + 1 = l + k \end{cases}$$

Отбросив $l + 1 = k$, и решив данную систему, однозначно получим что $m = 2$, $k = 1$, $l = 2$.
В итоге получим систему:

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} = a\frac{y_0}{\tau^2} + \gamma \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} = -c\frac{y_0}{\tau^2} - \frac{s_0}{\tau} - \frac{x_0 s_0}{\tau^3} \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} = -c\frac{x_0}{\tau^2} + \frac{y_0 s_0}{\tau^3} \end{cases} \quad (3)$$

2 Шаг второй

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ в формуле (3) для нахождения x_0 , y_0 , s_0

3 Шаг третий

Сделаем подстановку в виде

$$\begin{cases} s = \frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1} \\ y = \frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2} \\ x = \frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2} \end{cases}$$

Найдём \dot{s} , \dot{y} , \dot{x} :

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} \\ \dot{y} = -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} \\ \dot{x} = -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1):

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \end{cases} \quad (4)$$

Немного преобразуем данную систему

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\frac{x_0s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(x_0\alpha + s_0\theta) + \alpha\theta\tau^{2r-3}\right) \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\frac{y_0s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(y_0\alpha + s_0\beta) + \alpha\beta\tau^{2r-3}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим коэффициенты при τ^{r-2} , τ^{r-3} , τ^{r-3} в первом, во втором и в третьем уравнении соответственно

$$\begin{cases} \alpha(r-1) = \alpha\beta \\ \beta(r-2) = -\alpha x_0 - \theta s_0 \\ \theta(r-2) = \alpha y_0 + \beta s_0 \end{cases} \quad (5)$$

Перепишем данную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha(r-1) - \alpha\beta & +0 = 0 \\ \alpha x_0 + \beta(r-2) & +\theta s_0 = 0 \\ -\alpha y_0 - \beta s_0 & +\theta(r-2) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Составим матрицу из коэффициентов при α , β , θ

$$\begin{pmatrix} r-1 & -a & 0 \\ x_0 & r-2 & s_0 \\ -y_0 & -s_0 & r-2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Найдём определитель данной матрицы и приравняем его к нулю:

$$(r-1)(r-2)(r-2) + as_0y_0 + s_0^2(r-1) + ax_0(r-2) = 0$$

$$\begin{aligned}
(r-1)(r^2-4r+4) + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 &= 0 \\
r^3 - 4r^2 + 4r - r^2 + 4r - 4 + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 &= 0 \\
r^3 - 5r^2 + (8 + s_0^2 + ax_0)r - s_0^2 + as_0y_0 - 2ax_0 - 4 &= 0
\end{aligned}$$

При подстановке в данное уравнение выражений для x_0, y_0, s_0 , уравнение разбивается на 2.

Первый случай: $x_0 = -\frac{2}{a}, y_0 = \frac{2}{a}i, s_0 = -2i$:

$$\begin{aligned}
r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(-2i)(\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) &= 0 \\
r^3 - 5r^2 + 2r + 8 &= 0
\end{aligned}$$

Второй случай: $x_0 = -\frac{2}{a}, y_0 = -\frac{2}{a}i, s_0 = 2i$:

$$\begin{aligned}
r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(2i)(-\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) &= 0 \\
r^3 - 5r^2 + 2r + 8 &= 0
\end{aligned}$$

Видно, что уравнения получились одинаковые. Корни уравнения:

$$\begin{cases} r = -1 \\ r = 2 \\ r = 4 \end{cases}$$