

Применение метода Пенлеве для исследования режимов работы асинхронных двигателей

Выступающие: П. С. Анашкевич, Р. И. Будный

Научный руководитель: проф., к.ф.-м.н. В. В.Цегельник

Минск, 2013

Постановка задачи

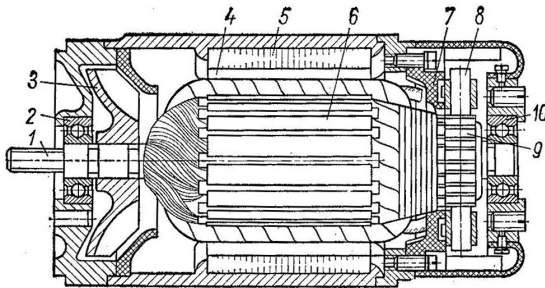
- ▶ Произвести математическое описание работы АД¹
- ▶ Исследовать АД на предмет наличия неустойчивых режимов работы

¹Асинхронный двигатель

Асинхронный двигатель

Асинхронный двигатель — электрическая машина переменного тока, частота вращения ротора которой не равна частоте вращения магнитного поля, создаваемого током обмотки статора.

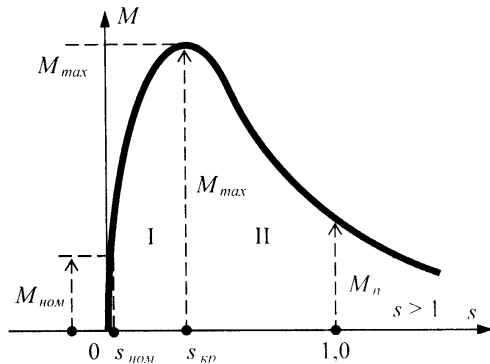
Асинхронный двигатель



Универсальный коллекторный однофазный двигатель

1 — вал; 2, 10 — шарикоподшипники; 3 — вентилятор; 4 — катушки электромагнитов; 5 — статор; 6 — ротор; 7 — щеткодержатель; 8 — щетки; 9 — коллектор

Асинхронный двигатель



s – скольжение: $s = 1 - \frac{n}{n_c}$

M – крутящий момент

Поль Пенлеве (1863 – 1933)



Французский математик и политик. Один из создателей аналитической теории дифференциальных уравнений. Был дважды премьер-министром Третьей Республики.

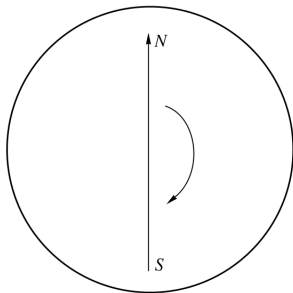
α -метод Пенлеве

Универсальный метод.

Основан на методе малого параметра Пуанкаре.

Используется для анализа дифференциальных уравнений.

Модель



Вращающееся
магнитное поле

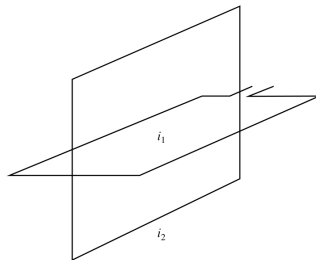


Схема обмоток

Физическое описание

$$\begin{cases} L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = e + SB(\sin \theta(t))\dot{\theta}(t), \\ L \frac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) = e + SB(\cos \theta(t))\dot{\theta}(t), \\ I\ddot{\theta} = -\beta SB(i_1(t) \sin \theta + i_2(t) \cos \theta) - M. \end{cases}$$

Сделаем замены: $s = \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}$, $a = \frac{\beta(SB)^2}{IL}$, $c = \frac{R}{L}$,

$$x = \frac{L}{SB}(i_1 \cos \theta_1 + i_2 \sin \theta_1),$$
$$y = \frac{L}{SB}(-i_1 \sin \theta_1 + i_2 \cos \theta_1).$$

Исходная система

$$\begin{cases} \dot{s} = ay + \gamma, \\ \dot{y} = -cy - s - xs, \\ \dot{x} = cx + ys. \end{cases}$$

Применим метод Пенлеве для отыскания решения системы относительно x, y, s .

Метод Пенлеве: шаг 1

Пусть $s = \frac{s_0}{\tau^k}$, $y = \frac{y_0}{\tau^l}$, $x = \frac{x_0}{\tau^m}$, где $\tau = (t - t_0)$ – произвольная постоянная:

$$\begin{cases} -\frac{ks_0}{\tau^{k+1}} = a\frac{y_0}{\tau^l} + \gamma, \\ -\frac{ly_0}{\tau^{l+1}} = -c\frac{y_0}{\tau^l} - \frac{s_0}{\tau^k} - \frac{x_0}{\tau^m} \frac{s_0}{\tau^k}, \\ -\frac{mx_0}{\tau^{m+1}} = -c\frac{x_0}{\tau^m} + \frac{y_0}{\tau^l} \frac{s_0}{\tau^k}. \end{cases}$$

Учитывая, что $k, l, m \in \mathbf{Z}$, получим: $m = 2, k = 1, l = 2$.

Метод Пенлеве: шаг 1

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} = a\frac{y_0}{\tau^2} + \gamma, \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} = -c\frac{y_0}{\tau^2} - \frac{s_0}{\tau} - \frac{x_0 s_0}{\tau^3}, \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} = -c\frac{x_0}{\tau^2} + \frac{y_0 s_0}{\tau^3}. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при равных степенях τ , получим:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{2}{a}, \\ y_0 = -\frac{2i}{a}, \\ s_0 = 2i, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} x_0 = -\frac{2}{a}, \\ y_0 = \frac{2i}{a}, \\ s_0 = -2i. \end{cases}$$

Метод Пенлеве: шаг 2

Сделаем подстановку в виде

$$s = \frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}, y = \frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}, x = \frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}:$$

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma, \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right), \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right). \end{cases}$$

Метод Пенлеве: шаг 2

Составим матрицу из коэффициентов при α, β, θ :

$$\begin{pmatrix} r-1 & -a & 0 \\ x_0 & r-2 & s_0 \\ -y_0 & -s_0 & r-2 \end{pmatrix}$$

Приравняв определитель матрицы к нулю, получим:

$$r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = 4.$$

Метод Пенлеви: шаг 3

Будем искать решение системы в виде:

$$\begin{cases} s = \frac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots, \\ y = \frac{y_{-2}}{\tau^2} + \frac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots, \\ x = \frac{x_{-2}}{\tau^2} + \frac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots. \end{cases}$$

Подставим его в систему, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях τ , сгруппируем по степеням τ .

Анализ решения

$$r = 0 : \begin{cases} s_{-1} = -2 \\ y_{-2} = \frac{2}{a} \\ x_{-2} = \frac{2}{a} \end{cases}$$

$$r = 1 : \begin{cases} s_0 = \frac{c}{3} \\ y_{-1} = 0 \\ x_{-1} = \frac{4c}{3a} \end{cases}$$

$$r = 2 : \begin{cases} y_0 - \text{произвольный} \\ s_1 = ay_0 + \frac{2c^2}{3} \\ x_0 = \frac{8c^2}{9a} - 1 + y_0 \end{cases}$$

Анализ решения

$$r = 3 : \begin{cases} y_1 = -\frac{20c^3}{27} - cy_0 + \frac{c}{2} \\ x_1 = -\frac{4c^3}{27a} + \frac{cy_0}{3} + \frac{c}{2} \\ s_2 = -\frac{10c^3}{27} - \frac{cay_0}{2} + \frac{ca}{4} \end{cases}$$
$$r = 4 : \begin{cases} x_2 = -\frac{50c^4}{243} + \frac{14c^4}{243a} + \frac{c^2}{18} + \frac{ay_0^2}{2} \\ y_2 = \frac{10c^4}{81} + \frac{2c^4}{81a} - \frac{c^2}{3} \\ s_3 = \frac{10ac^4}{243} + \frac{2c^4}{243} - \frac{ac^2}{9} \end{cases}$$

Анализ решения

Показать, что есть произвольная постоянная.

Выводы

Выводы

Спасибо за внимание!

Литература

1. Леонов Г. А.: Фазовая синхронизация. Теория и приложения.
2. Кудряшов Н. А.: Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.
3. <http://model.exponenta.ru/electro/0080.htm>
4. <http://ru.wikipedia.org>