1 Первый шаг

Исходная система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = ay + \gamma \\ \dot{y} = -cy - s - xs \\ \dot{x} = cx + ys \end{cases} \tag{1.1}$$

Сделаем подстановку в виде $s = \dfrac{s_0}{\tau^k}$, $y = \dfrac{y_0}{\tau^l}$, $x = \dfrac{x_0}{\tau^m}$.
Найдём $\dot{s}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{ks_0}{\tau^{k+1}} \\ \dot{y} = -\dfrac{ly_0}{\tau^{l+1}} \\ \dot{x} = -\dfrac{mx_0}{\tau^{m+1}} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1.1):

$$\begin{cases} -\dfrac{ks_0}{\tau^{k+1}} = a\dfrac{y_0}{\tau^l} + \gamma \\ -\dfrac{ly_0}{\tau^{l+1}} = -c\dfrac{y_0}{\tau^l} - \dfrac{s_0}{\tau^k} - \dfrac{x_0}{\tau^m}\dfrac{s_0}{\tau^k} \\ -\dfrac{mx_0}{\tau^{m+1}} = -c\dfrac{x_0}{\tau^m} + \dfrac{y_0}{\tau^l}\dfrac{s_0}{\tau^k} \end{cases}$$

Учитывая, что k, l, $m \in \mathbf{Z}$, получим:

$$\begin{cases} k + 1 = l \\ l + 1 = k \text{ или } l + 1 = m + k \\ m + 1 = l + k \end{cases}$$

Отбросив $l + 1 = k$, и решив данную систему, однозначно получим что $m = 2$, $k = 1$, $l = 2$.
В итоге получим систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} = a\dfrac{y_0}{\tau^2} + \gamma \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} = -c\dfrac{y_0}{\tau^2} - \dfrac{s_0}{\tau} - \dfrac{x_0 s_0}{\tau^3} \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} = -c\dfrac{x_0}{\tau^2} + \dfrac{y_0 s_0}{\tau^3} \end{cases} \tag{1.2}$$

2 Второй шаг

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ в формуле (1.2) для нахождения x_0, y_0, s_0

$$\begin{cases} 2y_0 = x_0 s_0 \\ 2x_0 = -y_0 s_0 \\ s_0 = -ay_0 \end{cases}$$

Откуда получим, что:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a} \\ y_0 = -\dfrac{2i}{a} \\ s_0 = 2i \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a} \\ y_0 = \dfrac{2i}{a} \\ s_0 = -2i \end{cases}$$

3 Третий шаг

Сделаем подстановку в виде

$$\begin{cases} s = \dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1} \\ y = \dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2} \\ x = \dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2} \end{cases}$$

Найдём $\dot{s}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} \\ \dot{y} = -\dfrac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} \\ \dot{x} = -\dfrac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1.1):

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right)\left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right)\left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \end{cases}$$

Немного преобразуем данную систему

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\dfrac{x_0 s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(x_0\alpha + s_0\theta) + \alpha\theta\tau^{2r-3}\right) \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\dfrac{y_0 s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(y_0\alpha + s_0\beta) + \alpha\beta\tau^{2r-3}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим коэффициенты при τ^{r-2}, τ^{r-3}, τ^{r-3} в первом, во втором и в третьем уравнении соответственно

$$\begin{cases} \alpha(r-1) = a\beta \\ \beta(r-2) = -\alpha x_0 - \theta s_0 \\ \theta(r-2) = \alpha y_0 + \beta s_0 \end{cases}$$

Перепишем данную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha(r-1) - a\beta + 0 = 0 \\ \alpha x_0 + \beta(r-2) + \theta s_0 = 0 \\ -\alpha y_0 - \beta s_0 + \theta(r-2) = 0 \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при α, β, θ

$$\begin{pmatrix} r-1 & -a & 0 \\ x_0 & r-2 & s_0 \\ -y_0 & -s_0 & r-2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Найдем определитель данной матрицы и приравняем его к нулю:
$(r-1)(r-2)(r-2) + as_0y_0 + s_0^2(r-1) + ax_0(r-2) = 0$
$(r-1)(r^2-4r+4) + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 = 0$
$r^3 - 4r^2 + 4r - r^2 + 4r - 4 + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 = 0$
$r^3 - 5r^2 + (8 + s_0^2 + ax_0)r - s_0^2 + as_0y_0 - 2ax_0 - 4 = 0$
При подстановке в данное уравнение выражений для x_0, y_0, s_0, уравнение разбивается на 2.
Первый случай: $x_0 = -\frac{2}{a}$, $y_0 = \frac{2}{a}i$, $s_0 = -2i$:

$r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(-2i)(\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) = 0$
$r^3 - 5r^2 + 2r + 8 = 0$
Второй случай: $x_0 = -\frac{2}{a}$, $y_0 = -\frac{2}{a}i$, $s_0 = 2i$:

$r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(2i)(-\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) = 0$
$r^3 - 5r^2 + 2r + 8 = 0$
Видно, что уравнения получились одинаковые. Корни уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} r = -1 \\ r = 2 \\ r = 4 \end{array}\right.$$

4 Четвертый шаг

Сделаем подстановку в виде бесконечных рядов для s, y, x

$$\begin{cases} s = \dfrac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots \\ y = \dfrac{y_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots \\ x = \dfrac{x_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots \end{cases}$$

Найдём $\dot{s}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{s_{-1}}{\tau^2} + s_1 + 2s_2\tau + 3s_3\tau^2 + \dots \\ \dot{y} = -\dfrac{2y_{-2}}{\tau^3} - \dfrac{y_{-1}}{\tau^2} + y_1 + 2y_2\tau + 3y_3\tau^2 + \dots \\ \dot{x} = -\dfrac{2x_{-2}}{\tau^3} - \dfrac{x_{-1}}{\tau^2} + x_1 + 2x_2\tau + 3x_3\tau^2 + \dots \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1.1):

$$\begin{cases} -\dfrac{s_{-1}}{\tau^2} + s_1 + 2s_2\tau + 3s_3\tau^2 + \ldots = a\left(\dfrac{y_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots\right) + \gamma \\ -\dfrac{2y_{-2}}{\tau^3} - \dfrac{y_{-1}}{\tau^2} + y_1 + 2y_2\tau + 3y_3\tau^2 + \ldots = -c\left(\dfrac{y_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots\right) - \\ \quad -\left(\dfrac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \ldots\right) - \left(\dfrac{x_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \ldots\right) \cdot \\ \quad \cdot \left(\dfrac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \ldots\right) \\ -\dfrac{2x_{-2}}{\tau^3} - \dfrac{x_{-1}}{\tau^2} + x_1 + 2x_2\tau + 3x_3\tau^2 + \ldots = -c\left(\dfrac{x_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \ldots\right) + \\ \quad + \left(\dfrac{y_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots\right) \cdot \left(\dfrac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \ldots\right) \end{cases}$$

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ, начиная с наинизшего. Составим соответствующие системы уравнений.

$$(r=0): \begin{cases} -s_{-1} = ay_{-2} \\ -2y_{-2} = x_{-2}s_{-1} \\ -2x_{-2} = y_{-2}s_{-1} \end{cases}$$

$$(r=1): \begin{cases} 0 = ay_{-1} \\ -y_{-1} = -cy_{-2} - x_{-2}s_0 - x_{-1}s_{-1} \\ -x_{-1} = -cx_{-2} + y_{-2}s_0 + y_{-1}s_{-1} \end{cases}$$

$$(r=2): \begin{cases} s_1 = ay_0 + \gamma \\ 0 = -cy_{-1} - s_{-1} - x_{-2}s_1 - x_{-1}s_0 - x_0s_{-1} \\ 0 = -cx_{-1} + y_{-2}s_1 + y_{-1}s_0 + y_0s_{-1} \end{cases}$$

$$(r=3): \begin{cases} 2s_2 = ay_1 \\ y_1 = -cy_0 - s_0 - x_{-2}s_2 - x_{-1}s_1 - x_0s_0 - x_1s_{-1} \\ x_1 = -cx_0 + y_{-2}s_2 + y_{-1}s_1 + y_0s_0 + y_1s_{-1} \end{cases}$$

$$(r=4): \begin{cases} 3s_3 = ay_2 \\ 2y_2 = -cy_1 - s_1 - x_{-2}s_3 - x_{-1}s_2 - x_0s_1 - x_1s_0 - x_2s_{-1} \\ 2x_2 = -cx_1 + y_{-2}s_3 + y_{-1}s_2 + y_0s_1 + y_1s_0 + y_2s_{-1} \end{cases}$$

$$(r=5): \begin{cases} 4s_4 = ay_3 \\ 3y_3 = -cy_2 - s_2 - x_{-2}s_4 - x_{-1}s_3 - x_0s_2 - x_1s_1 - x_2s_0 - x_3s_{-1} \\ 3x_3 = -cx_2 + y_{-2}s_4 + y_{-1}s_3 + y_0s_2 + y_1s_1 + y_2s_0 + y_3s_{-1} \end{cases}$$

$$(r=6): \begin{cases} 5s_5 = ay_4 \\ 4y_4 = -cy_3 - s_3 - x_{-2}s_5 - x_{-1}s_4 - x_0s_3 - x_1s_2 - x_2s_1 - x_3s_0 - x_4s_{-1} \\ 4x_4 = -cx_3 + y_{-2}s_5 + y_{-1}s_4 + y_0s_3 + y_1s_2 + y_2s_1 + y_3s_0 + y_4s_{-1} \end{cases}$$

$$\ldots$$

Поочередно рассмотрим каждую из систем, постепенно подставляя найденные значения.

Из первой $(r = 0)$ системы получаем:

$$\begin{cases} x_{-2} = \dfrac{2}{a} \\ y_{-2} = \dfrac{2}{a} \\ s_{-1} = -2 \end{cases} \tag{4.1}$$

либо

$$\begin{cases} x_{-2} = \dfrac{2}{a} \\ y_{-2} = -\dfrac{2}{a} \\ s_{-1} = 2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Для нахождения остальных коэффициентов $(x_{-1}, y_{-1}, s_0, x_0, y_0, s_1$ и т.д.) необходимо подставить полученные на данном этапе значения (x_{-2}, y_{-2}, s_{-1}) в соответствующие системы уравнений.

Рассмотрим два решения в отдельности.

Начнём с **первой ветки решения:** (4.1). Дальнейшая подстановка даёт нам следующее решение.

Вторая система $(r = 1)$:

$$\begin{cases} s_0 = \dfrac{c}{3} \\ y_{-1} = 0 \\ x_{-1} = \dfrac{4c}{3a} \end{cases}$$

Найденные значения подставим в третью систему $(r = 2)$. После преобразований одного из уравнений получаем:

$$y_0 = y_0$$

Таким образом y_0 - произвольный постоянный коэффициент, а x_0, s_1 выражаются через y_0:

$$\begin{cases} y_0 - \text{произвольный} \\ s_1 = ay_0 + \dfrac{2c^2}{3} \\ x_0 = \dfrac{8c^2}{9a} - 1 + y_0 \end{cases}$$

Четвертая система $(r = 3)$:

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{20c^3}{27} - cy_0 + \dfrac{c}{2} \\ x_1 = -\dfrac{4c^3}{27a} + \dfrac{cy_0}{3} + \dfrac{c}{2} \\ s_2 = -\dfrac{10c^3}{27} - \dfrac{cay_0}{2} + \dfrac{ca}{4} \end{cases}$$

Подставив в пятую систему $(r = 4)$ найденные выражения получим, что y_2, s_3 не зависит от y_0:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{50c^4}{243} + \dfrac{14c^4}{243a} + \dfrac{c^2}{18} + \dfrac{ay_0^2}{2} \\ y_2 = \dfrac{10c^4}{81} + \dfrac{2c^4}{81a} - \dfrac{c^2}{3} \\ s_3 = \dfrac{10ac^4}{243} + \dfrac{2c^4}{243} - \dfrac{ac^2}{9} \end{cases}$$

Шестая система $(r = 5)$:

$$\begin{cases} x_3 = f_1(a, c, y_0) \\ y_3 = f_2(a, c, y_0) \\ s_4 = f_3(a, c, y_0) \end{cases}$$

$$\dots$$

Рассмотрим **вторую ветку решения**. Из первой системы ($r = 0$) получили систему (4.2). Дальнейшая подстановка даёт нам следующее решение.

Вторая система ($r = 1$):

$$\begin{cases} s_0 = -\dfrac{c}{3} \\ y_{-1} = 0 \\ x_{-1} = \dfrac{4c}{3a} \end{cases}$$

Найденные значения подставим в третью систему ($r = 2$). После преобразований одного из уравнений получаем:

$$y_0 = y_0$$

Таким образом y_0 - произвольный постоянный коэффициент, а x_0, s_1 выражаются через y_0:

$$\begin{cases} y_0 - \text{произвольный} \\ s_1 = ay_0 - \dfrac{2c^2}{3} \\ x_0 = \dfrac{8c^2}{9a} - 1 - y_0 \end{cases}$$

Четвертая система ($r = 3$):

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{20c^3}{27} - cy_0 - \dfrac{c}{2} \\ x_1 = -\dfrac{4c^3}{27a} - \dfrac{cy_0}{3} + \dfrac{c}{2} \\ s_2 = \dfrac{10c^3}{27} - \dfrac{cay_0}{2} - \dfrac{ca}{4} \end{cases}$$

Подставив в пятую систему ($r = 4$) найденные выражения получим, что y_2, s_3 не зависит от y_0:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{50c^4}{243} + \dfrac{14c^4}{243a} + \dfrac{c^2}{18} + \dfrac{ay_0^2}{2} \\ y_2 = -\dfrac{10c^4}{81} - \dfrac{2c^4}{81a} + \dfrac{c^2}{3} \\ s_3 = -\dfrac{10ac^4}{243} - \dfrac{2c^4}{243} + \dfrac{ac^2}{9} \end{cases}$$

Шестая система ($r = 5$):

$$\begin{cases} x_3 = f_1(a, c, y_0) \\ y_3 = f_2(a, c, y_0) \\ s_4 = f_3(a, c, y_0) \end{cases}$$

$$\ldots$$