1 Первый шаг

Исходная система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = ay + \gamma \\ \dot{y} = -cy - s - xs \\ \dot{x} = cx + ys \end{cases} \tag{1.1}$$

Сделаем подстановку в виде $s = \dfrac{s_0}{\tau^k}$, $y = \dfrac{y_0}{\tau^l}$, $x = \dfrac{x_0}{\tau^m}$.
Найдём $\dot{s}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{ks_0}{\tau^{k+1}} \\ \dot{y} = -\dfrac{ly_0}{\tau^{l+1}} \\ \dot{x} = -\dfrac{mx_0}{\tau^{m+1}} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1.1):

$$\begin{cases} -\dfrac{ks_0}{\tau^{k+1}} = a\dfrac{y_0}{\tau^l} + \gamma \\ -\dfrac{ly_0}{\tau^{l+1}} = -c\dfrac{y_0}{\tau^l} - \dfrac{s_0}{\tau^k} - \dfrac{x_0}{\tau^m}\dfrac{s_0}{\tau^k} \\ -\dfrac{mx_0}{\tau^{m+1}} = -c\dfrac{x_0}{\tau^m} + \dfrac{y_0}{\tau^l}\dfrac{s_0}{\tau^k} \end{cases}$$

Учитывая, что k, l, $m \in \mathbf{Z}$, получим:

$$\begin{cases} k + 1 = l \\ l + 1 = k \text{ или } l + 1 = m + k \\ m + 1 = l + k \end{cases}$$

Отбросив $l + 1 = k$, и решив данную систему, однозначно получим что $m = 2$, $k = 1$, $l = 2$.
В итоге получим систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} = a\dfrac{y_0}{\tau^2} + \gamma \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} = -c\dfrac{y_0}{\tau^2} - \dfrac{s_0}{\tau} - \dfrac{x_0 s_0}{\tau^3} \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} = -c\dfrac{x_0}{\tau^2} + \dfrac{y_0 s_0}{\tau^3} \end{cases} \tag{1.2}$$

2 Второй шаг

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ в формуле (1.2) для нахождения x_0, y_0, s_0

$$\begin{cases} 2y_0 = x_0 s_0 \\ 2x_0 = -y_0 s_0 \\ s_0 = -ay_0 \end{cases}$$

Откуда получим, что:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a} \\ y_0 = -\dfrac{2i}{a} \\ s_0 = 2i \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a} \\ y_0 = \dfrac{2i}{a} \\ s_0 = -2i \end{cases}$$

3 Третий шаг

Сделаем подстановку в виде

$$\begin{cases} s = \dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1} \\ y = \dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2} \\ x = \dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2} \end{cases}$$

Найдём $\dot{s}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} \\ \dot{y} = -\dfrac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} \\ \dot{x} = -\dfrac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1.1):

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right)\left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right)\left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) \end{cases}$$

Немного преобразуем данную систему

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\dfrac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\dfrac{x_0 s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(x_0\alpha + s_0\theta) + \alpha\theta\tau^{2r-3}\right) \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\dfrac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\dfrac{y_0 s_0}{\tau^3} + \tau^{r-3}(y_0\alpha + s_0\beta) + \alpha\beta\tau^{2r-3}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим коэффициенты при τ^{r-2}, τ^{r-3}, τ^{r-3} в первом, во втором и в третьем уравнении соответственно

$$\begin{cases} \alpha(r-1) = \alpha\beta \\ \beta(r-2) = -\alpha x_0 - \theta s_0 \\ \theta(r-2) = \alpha y_0 + \beta s_0 \end{cases}$$

Перепишем данную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha(r-1) - a\beta + 0 = 0 \\ \alpha x_0 + \beta(r-2) + \theta s_0 = 0 \\ -\alpha y_0 - \beta s_0 + \theta(r-2) = 0 \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при α, β, θ

$$\begin{pmatrix} r-1 & -a & 0 \\ x_0 & r-2 & s_0 \\ -y_0 & -s_0 & r-2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Найдем определитель данной матрицы и приравняем его к нулю:
$(r-1)(r-2)(r-2) + as_0y_0 + s_0^2(r-1) + ax_0(r-2) = 0$
$(r-1)(r^2-4r+4) + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 = 0$
$r^3 - 4r^2 + 4r - r^2 + 4r - 4 + as_0y_0 + rs_0^2 - s_0^2 + rax_0 - 2ax_0 = 0$
$r^3 - 5r^2 + (8 + s_0^2 + ax_0)r - s_0^2 + as_0y_0 - 2ax_0 - 4 = 0$
При подстановке в данное уравнение выражений для x_0, y_0, s_0, уравнение разбивается на 2.
Первый случай: $x_0 = -\frac{2}{a}$, $y_0 = \frac{2}{a}i$, $s_0 = -2i$:

$r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(-2i)(\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) = 0$
$r^3 - 5r^2 + 2r + 8 = 0$
Второй случай: $x_0 = -\frac{2}{a}$, $y_0 = -\frac{2}{a}i$, $s_0 = 2i$:

$r^3 - 5r^2 + (8 - 4 + a(-\frac{2}{a}))r - 4 + a(2i)(-\frac{2}{a}i) + 4 + 2a(\frac{2}{a}) = 0$
$r^3 - 5r^2 + 2r + 8 = 0$

Видно, что уравнения получились одинаковые. Корни уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} r = -1 \\ r = 2 \\ r = 4 \end{array}\right.$$

4 Четвертый шаг

Сделаем подстановку в виде бесконечных рядов для s, y, x

$$\begin{cases} s = \dfrac{s_{\text{н}}}{\tau} + a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \ldots \\ y = \dfrac{y_{\text{н}}}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots \\ x = \dfrac{x_{\text{н}}}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \ldots \end{cases}$$

Найдём $\dot{s}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{s_{\text{н}}}{\tau^2} + a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + \ldots \\ \dot{y} = -\dfrac{2y_{\text{н}}}{\tau^3} - \dfrac{y_{-1}}{\tau^2} + y_1 + 2y_2\tau + 3y_3\tau^2 + \ldots \\ \dot{x} = -\dfrac{2x_{\text{н}}}{\tau^3} - \dfrac{x_{-1}}{\tau^2} + x_1 + 2x_2\tau + 3x_3\tau^2 + \ldots \end{cases}$$

Полученные выражения подставим в исходную систему (1.1):

$$
\begin{cases}
-\dfrac{s_н}{\tau^2} + a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + \ldots = a\left(\dfrac{y_н}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots\right) + \gamma \\
-\dfrac{2y_н}{\tau^3} - \dfrac{y_{-1}}{\tau^2} + y_1 + 2y_2\tau + 3y_3\tau^2 + \ldots = -c\left(\dfrac{y_н}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots\right) - \\
\quad - \left(\dfrac{s_н}{\tau} + a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \ldots\right) - \left(\dfrac{x_н}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \ldots\right) \cdot \\
\quad \cdot \left(\dfrac{s_н}{\tau} + a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \ldots\right) \\
-\dfrac{2x_н}{\tau^3} - \dfrac{x_{-1}}{\tau^2} + x_1 + 2x_2\tau + 3x_3\tau^2 + \ldots = -c\left(\dfrac{x_н}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \ldots\right) + \\
\quad + \left(\dfrac{y_н}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \ldots\right) \cdot \left(\dfrac{s_н}{\tau} + a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \ldots\right)
\end{cases}
$$

Рассмотрим коэффициенты при одинаковых степенях τ.

$$
\frac{1}{\tau^3} : \begin{cases} 0 = a \cdot 0 \\ -2y_н = x_н s_н \\ -2x_н = y_н s_н \end{cases}
$$

$$
\frac{1}{\tau^2} : \begin{cases} -s_н = a y_н \\ -y_{-1} = -c y_н - x_н a_0 - x_{-1} s_н \\ -x_{-1} = -c x_н + y_н a_0 + y_{-1} s_н \end{cases}
$$

$$
\frac{1}{\tau} : \begin{cases} 0 = a y_{-1} \\ 0 = -c y_{-1} - s_н - x_н a_1 - x_{-1} a_0 - x_0 s_н \\ 0 = -c x_{-1} + y_н a_1 + y_{-1} a_0 + y_0 s_н \end{cases}
$$

$$
\tau^0 : \begin{cases} a_1 = a y_0 + \gamma \\ y_1 = -c y_0 - a_0 - x_н a_2 - x_{-1} a_1 - x_0 a_0 - x_1 s_н \\ x_1 = -c x_0 + y_н a_2 + y_{-1} a_1 + y_0 a_0 + y_1 s_н \end{cases}
$$

$$
\tau : \begin{cases} 2a_2 = a y_1 \\ 2y_2 = -c y_1 - a_1 - x_н a_3 - x_{-1} a_2 - x_0 a_1 - x_1 a_0 - x_2 s_н \\ 2x_2 = -c x_1 + y_н a_3 + y_{-1} a_2 + y_0 a_1 + y_1 a_0 + y_2 s_н \end{cases}
$$

$$
\tau^2 : \begin{cases} 3a_3 = a y_2 \\ 3y_3 = -c y_2 - a_2 - x_н a_4 - x_{-1} a_3 - x_0 a_2 - x_1 a_1 - x_2 a_0 - x_3 s_н \\ 3x_3 = -c x_2 + y_н a_4 + y_{-1} a_3 + y_0 a_2 + y_1 a_1 + y_2 a_0 + y_3 s_н \end{cases}
$$

$$
\tau^3 : \begin{cases} 4a_4 = a y_3 \\ 4y_4 = -c y_3 - a_3 - x_н a_5 - x_{-1} a_4 - x_0 a_3 - x_1 a_2 - x_2 a_1 - x_3 a_0 - x_4 s_н \\ 4x_4 = -c x_3 + y_н a_5 + y_{-1} a_4 + y_0 a_3 + y_1 a_2 + y_2 a_1 + y_3 a_0 + y_4 s_н \end{cases}
$$

$$\ldots$$