Применение метода Пенлеве для исследования режимов работы асинхронных двигателей

Выступающие: П. С. Анашкевич, Р. И. Будный

Научный руководитель: проф., д.ф.-м.н. В. В.Цегельник

Минск, 2013

Постановка задачи

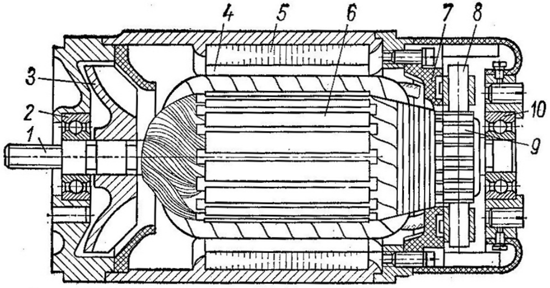
- Произвести математическое описание работы АД[1]
- Исследовать АД на предмет наличия неустойчивых режимов работы

[1] Асинхронный двигатель

Асинхронный двигатель

Асинхронный двигатель — электрическая машина переменного тока, частота вращения ротора которой не равна частоте вращения магнитного поля, создаваемого током обмотки статора.

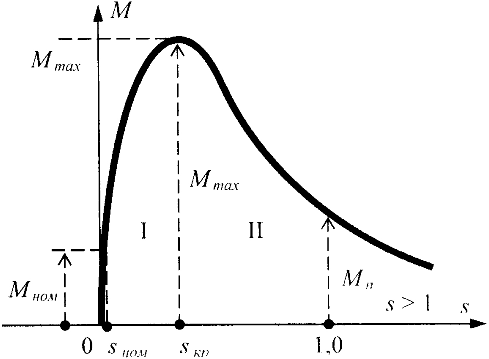
Асинхронный двигатель



Универсальный коллекторный однофазный двигатель

1 — вал; *2, 10* — шарикоподшипники; *3* — вентилятор; *4* — катушки электромагнитов; *5* — статор; *6* — ротор; *7* — щеткодержатель; *8* — щетки; *9* — коллектор

Асинхронный двигатель



s – скольжение: $s = 1 - \dfrac{n}{n_c}$

M – крутящий момент

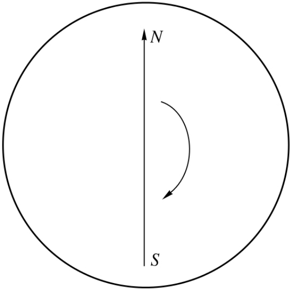
Поль Пенлеве (1863 – 1933)

Французский математик и политик. Один из создателей аналитической теории дифференциальных уравнений. Был дважды премьер-министром Третьей Республики.

α-метод Пенлеве

Универсальный метод.
Основан на методе малого параметра Пуанкаре.
Используется для анализа дифференциальных уравнений.

Модель



Вращающееся
магнитное поле

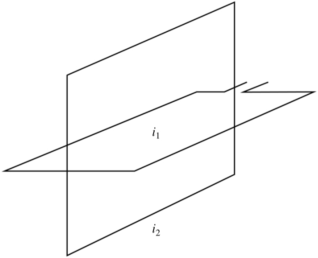


Схема обмоток

Физическое описание

$$
\begin{cases}
L\dfrac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = e + SB(\sin\theta(t))\dot{\theta}(t), \\
L\dfrac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) = e + SB(\cos\theta(t))\dot{\theta}(t), \\
I\ddot{\theta} = -\beta SB(i_1(t)\sin\theta + i_2(t)\cos\theta) - M.
\end{cases}
$$

Сделаем замены: $s = \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}, a = \dfrac{\beta(SB)^2}{IL}, c = \dfrac{R}{L},$

$$
x = \frac{L}{SB}(i_1\cos\theta_1 + i_2\sin\theta_1),
$$

$$
y = \frac{L}{SB}(-i_1\sin\theta_1 + i_2\cos\theta_1).
$$

Исходная система

$$\begin{cases} \dot{s} = ay + \gamma, \\ \dot{y} = -cy - s - xs, \\ \dot{x} = cx + ys. \end{cases}$$

Применим метод Пенлеве для отыскания решения системы относительно x, y, s.

Метод Пенлеве: шаг 1

Пусть $s = \dfrac{s_0}{\tau^k}, y = \dfrac{y_0}{\tau^l}, x = \dfrac{x_0}{\tau^m}$, где $\tau = (t - t_0)$ – произвольная постоянная:

$$\begin{cases} -\dfrac{ks_0}{\tau^{k+1}} = a\dfrac{y_0}{\tau^l} + \gamma, \\ -\dfrac{ly_0}{\tau^{l+1}} = -c\dfrac{y_0}{\tau^l} - \dfrac{s_0}{\tau^k} - \dfrac{x_0}{\tau^m}\dfrac{s_0}{\tau^k}, \\ -\dfrac{mx_0}{\tau^{m+1}} = -c\dfrac{x_0}{\tau^m} + \dfrac{y_0}{\tau^l}\dfrac{s_0}{\tau^k}. \end{cases}$$

Учитывая, что k, l, $m \in \mathbf{Z}$, получим: $m = 2, k = 1, l = 2$.

Метод Пенлеве: шаг 1

$$\begin{cases} -\dfrac{s_0}{\tau^2} = a\dfrac{y_0}{\tau^2} + \gamma, \\ -\dfrac{2y_0}{\tau^3} = -c\dfrac{y_0}{\tau^2} - \dfrac{s_0}{\tau} - \dfrac{x_0 s_0}{\tau^3}, \\ -\dfrac{2x_0}{\tau^3} = -c\dfrac{x_0}{\tau^2} + \dfrac{y_0 s_0}{\tau^3}. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a}, \\ y_0 = -\dfrac{2i}{a}, \\ s_0 = 2i, \end{cases} \qquad \text{либо} \qquad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{a}, \\ y_0 = \dfrac{2i}{a}, \\ s_0 = -2i. \end{cases}$$

Метод Пенлеве: шаг 2

Сделаем подстановку в виде

$$s = \frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}, y = \frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}, x = \frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}:$$

$$\begin{cases} -\frac{s_0}{\tau^2} + \alpha(r-1)\tau^{r-2} = a\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) + \gamma, \\ -\frac{2y_0}{\tau^3} + \beta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right) - \left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right) - \left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right), \\ -\frac{2x_0}{\tau^3} + \theta(r-2)\tau^{r-3} = -c\left(\frac{x_0}{\tau^2} + \theta\tau^{r-2}\right) + \left(\frac{y_0}{\tau^2} + \beta\tau^{r-2}\right)\left(\frac{s_0}{\tau} + \alpha\tau^{r-1}\right). \end{cases}$$

Метод Пенлеве: шаг 2

Составим матрицу из коэффициентов при α, β, θ:

$$\begin{pmatrix} r-1 & -a & 0 \\ x_0 & r-2 & s_0 \\ -y_0 & -s_0 & r-2 \end{pmatrix}$$

Приравняв определитель матрицы к нулю, получим:

$$r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = 4.$$

Метод Пенлеве: шаг 3

Будем искать решение системы в виде:

$$\begin{cases} s = \dfrac{s_{-1}}{\tau} + s_0 + s_1\tau + s_2\tau^2 + s_3\tau^3 + \dots \ , \\ y = \dfrac{y_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + y_2\tau^2 + y_3\tau^3 + \dots \ , \\ x = \dfrac{x_{-2}}{\tau^2} + \dfrac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + x_2\tau^2 + x_3\tau^3 + \dots \ . \end{cases}$$

Подставим его в систему, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях τ, сгруппируем по степеням r.

Анализ решения

$$r = 0 : \begin{cases} s_{-1} = -2 \\ y_{-2} = \dfrac{2}{a} \\ x_{-2} = \dfrac{2}{a} \end{cases} \qquad r = 1 : \begin{cases} s_0 = \dfrac{c}{3} \\ y_{-1} = 0 \\ x_{-1} = \dfrac{4c}{3a} \end{cases}$$

$$r = 2 : \begin{cases} y_0 - \text{произвольный} \\ s_1 = ay_0 + \dfrac{2c^2}{3} \\ x_0 = \dfrac{8c^2}{9a} - 1 + y_0 \end{cases}$$

Анализ решения

$$r = 3 : \begin{cases} y_1 = -\dfrac{20c^3}{27} - cy_0 + \dfrac{c}{2} \\ x_1 = -\dfrac{4c^3}{27a} + \dfrac{cy_0}{3} + \dfrac{c}{2} \\ s_2 = -\dfrac{10c^3}{27} - \dfrac{cay_0}{2} + \dfrac{ca}{4} \end{cases}$$

$$r = 4 : \begin{cases} x_2 = -\dfrac{50c^4}{243} + \dfrac{14c^4}{243a} + \dfrac{c^2}{18} + \dfrac{ay_0^2}{2} \\ y_2 = \dfrac{10c^4}{81} + \dfrac{2c^4}{81a} - \dfrac{c^2}{3} \\ s_3 = \dfrac{10ac^4}{243} + \dfrac{2c^4}{243} - \dfrac{ac^2}{9} \end{cases}$$

Анализ решения

- Степени τ, при которых следует искать произвольные постоянные, равны значениям r, полученным в шаге 2:
$$r = -1, 2, 4.$$
- Действительно, среди полученных коэффициентов имеется одна произвольная постоянная — y_0 при $r = 2$.
- Таким образом, мы имеем две произвольные постоянные: t_0 и y_0.

Выводы

- Для того, чтобы утверждать, что модель АД устойчива при любых x, y, s, τ, необходимо найти 3 произвольные постоянные при τ^{r_i}.
- Мы нашли две: t_0 (из условия) и y_0.
- Это говорит о существовании неустойчивых режимов работы (в математическом смысле).

Спасибо за внимание!

Литература

1. Леонов Г. А.: Фазовая синхронизация. Теория и приложения.
2. Кудряшов Н. А.: Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.
3. http://model.exponenta.ru/electro/0080.htm
4. http://ru.wikipedia.org