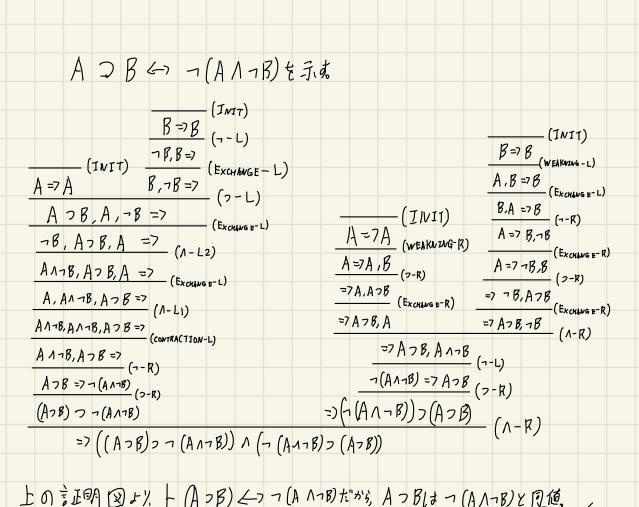
Q4.22 ($\star\star$) (Exercise 3.8 of [2].) The set $\{\land, \neg\}$ is functionally complete: using these two we can "encode" any logical connective. Give formulas that use only these connectives and are equivalent to the following formulas.

 $A\supset B, \quad A\vee B$



上の言正明図より、ト(A)B)とつつ(A)のBにから、A)Bはつ(A)のBと同値、 この表現はつとりの2つの知合子しか用いていない。

発売して、AVB←フつ(¬AハコB)を示え	
	$\frac{A=7A}{A=7A}$ (7-R) $\frac{B=7B}{B=7B}$ (7-R)
	$ \frac{A = 7 A}{A = 7 A} (7 - R) = 7 B, 7 B $ $ = 7 A, 7 A (WEAKNING-R) $ $ = 7 A, 7 A, B (EXCHANGE-R) $ $ (EXCHANGE-R) $ $ (INIT) $ $ = 7 B, 7 B $ $ (WEAKNING-R) $ $ \Rightarrow B, 7 B, A $ $ (EXCHANGE-R) $
(magnet) (magnet)	=7A, B, ¬A = =7A, B, ¬B (Exchange - R) =7A, B, ¬B (A-R) =7A, B, ¬A \ ¬B (Exchange - R)
$ \frac{A=7A}{A=7A} (7-L) \qquad \frac{B=7B}{B=7B} (7-L) $ $ \frac{7A,A=7}{7A,A=7} (A-L1) \qquad \frac{7B,B=7}{7A,A=7} (A-L2) $ $ \frac{7A,A=7}{A} = (Example - L) \qquad \frac{7A,A=8,B=7}{A} = (Example - L) $	=7 A, ¬A A¬B, B =7 A, ¬A A¬B, AVB =7 A, ¬A A¬B, AVB (Exchange - R)
	=> ¬AA¬B, AVB,A (V-RI)
AVB, ¬AA¬B =7 (Exchange - L)	=> ¬A 1 ¬B, AVB, AVB (CONTRACTION-R) => ¬A 1 ¬B, AVB (Exchange-R)
$\frac{\neg A \land \neg B, A \lor B = 7}{A \lor B = 7 \neg (\neg A \land \neg B)} (\neg \neg R)$	=7 AVB, 7A A 7B (1-L) 7 (7AA7B) =7 AVB (2-R) =7 7 (7AA7B) 2(AVB) (A-R)
=7(AVB) > - (-AN-1B) => ((AVB) = - (-AN-1B)) \ (- (-AN-1B) = (AVB)	=7 7 (-1A A-B) 2(A VB) (A-R)
上の証明図より、ト(AVB)←ファ(¬Aハ¬B) だっちょ	AVBはつ(つAハコB)と目値
この表現はコとハの2つの結合ろしか用いていかり。	

What about other subsets of $\{\land, \lor, \neg, \supset\}$?

1全意の言為理な話合をencodeできる {1, U, 7, つか却分集合は」以下のワフのみでなる。 イハ、つき、イン、つき、イワ、つき、イハ、い、つき、イハ、コンラ、イハ、ロ、つき、

これらしょり ハ、つき、イン、つき、イフ、つきのいずやかを却分集合は打つので、これらか (土壌の) 高理な合を encode できるの を示すにしょ、イハ、つき、イン、つき、イマ、つき かるれでれ (土壌の) 高理教合を encode できるのやませばない。 イハ、つきにつけてしました 示した通り。 (i) イレ、つきに 関ける証明

A N B (¬ (¬ A v ¬ B) & ī.t.

(INIT)	(INIT)	(INIT)	B=> B (7-R)
———— (INIT) ————————————————————————————————————	B=>B (2-1)	=71 /1/ (7-R)	=77R R (7-R)
7A,A=) (ExCHANGE-L)	7B, B => (Figure - 1)	=> A, 7A (Exchange - R)	=>7B, B (ExCHANGE-R) =>B, 7B (v-R2) =>B, 7Av7B (ExCHANGE-R)
A, 7A => (1-L1)	B,78=)	=> A, ¬Av¬B	
AAB, 7A => (r	AAB, 7B => (5		
AAB, ¬A => (ExCHANGE-L)	TB, AAB = (ExCHANGE L)	=> 7 A V 7 B, AAB (ExcHANGE	(A-R)
7AV7B, AAB=) (7-R)		=7 A1B,7AV7B (7-L)	-k)
AAB => 7 (7AV7B) (7-R)		7 (7AV7B) =7 A A B	
=> (A1B) > 7 (7AV-B)	20	$\frac{(\neg - R)}{(\neg (\neg A \lor \neg B)) \neg A \land B} (\neg - R)$	
	2R)) ((- (- 1) (- R) -	(1-R)	
=> (A 1B) > > (7AV 7B)) 1 (- (-AV-7B) > A1B)			
h = \$ 7 0 P () + 1 / / A 1	2)/ / 11 - 27)	· (1 A R) / (-1)	<i>a</i>)
上のき正明図とりト(Aハ	B) = 17 (7AV7b)	(, (A/B) 2-1 7 (7AV	718)
t24 (1-12),			
$f32$, $(A \supset B) \longleftrightarrow \neg ($	$A \wedge 7 B \rangle \mathcal{F} \gamma (A 7 B) \Leftrightarrow$	7 (7 (7AV 77B))	
17 + + 7 0 18 1 - 81 + 1	142021 + ALL + 12/6 + 1	ごで表せるので、イン、つかは任意。	₽₹ 18 4, 4
	V C TOTAL ENTINE TO	V = 12 (, 0) (, 1) (2 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1. M. T. C
en code z't3.			
111) h			
(1) 名一、つまに関する意正明			
AVB LO JA OBEJ			
	<u>, </u>		
(IN17)	<u>A</u> =7	A (WEAKA/ING-R)	
		(EVCHANGE-R)	— (INIT)
+	7/ 7/3 A =7 E	3, A (2-1)	B (MENKNING-L)
7A > B => A, B (v-R ₂)	7A,A=	OB (Exchange - R)	=) B (ExcHANGE-L)
¬A¬B=>A, AVB	A,7A	=7 B B,7A	=7 B (V-L)
(1, 2, 1	/1 U V	/ // // // //	
7A = B = 7 AVB, AVB	- A, A	VB =7 B (7-R)	
$\frac{\neg A \neg B \Rightarrow \neg A \lor B}{\neg A \neg B \Rightarrow \neg A \lor B} (\neg \neg R)$	AVB =	77A7B (7-R)	
=) (A>B) > (AVB)	=>(AvB)	VB = 7 B (2-R) = 7 A 7 B (2-R) = 2 (A 7 B) (A - R)	
=7 ((-A)B) > (AVB)).	$\Lambda ((A \cup B) \supset (\neg A \supset B))$		
生のきは同国より上(一	1A 2B) (A(B)	: (AVB) = -	$A\supset B$
7, - 7, 7	() ()	(/) (// /	,,,
\$32. ANB (-) - (-	AV-B)+1. AABE	-> -> (-17 A -> -1 R)	
	11 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	(, /, > , b)	

」とより、ANB、AV別はつとつのみを用いた月値が式で表せるので、イカ、つりは任意の論理式を encodez't3. 」とより、イハータ、イン、つき、イマ、つき、イハン、つきイハマ、フライン、コンタ、イルン、コンタレナイ主義の言論理なるをencodeできる。 上欠上、多人、V、つ、つ多の1也の部分集合が1全意の言論理なるをencodeできるおけではないのも示え ここで、それ、し、つうの1也の部分集合は分つ多かられ、し、つうかりずれかのをり分集合ではすから、それ、し、つうとくつうが 1全意の言為理なるをencodeできるおけではないのもませばよい。 まれ、任意の目循板高角理式は任意の付値で同じ値をとるのをまま FALBETICH(A)B) N(B)A) たて 仕覧の村値)で『(AァB) A (BァA)] = 七七 と ガラ. .. ① こって、 [A] [B] Y [(A>B) A (B>A)] との対応は以下の通り [B] tt | f f よってのより1主意の付値」でLAT=ICBTである。 つまり、任意の同値な論理式は任意の付値で同じ値をる。一同 タハリノアでくつ引に女すし、それのみ棚は同値な論理式が構成でもないような論理式が存在するのを示せばましい。 (i) タハ, V, つまについて 1生電のAGPVali対しEAT=ttxなる付値」を考える。 A,B GPFml 1: +IL, [A] = [B] = ttoxt, TAABI= TAVBJ= TAJB]= tt よて言角理式に今まれる論理結合子の数につれて場が的に、《ハハック》のみを用いた「生意の論理式 Ali対し [A]こttyがる BEPVALYUZ, IJ-B) = ff よってこの付値の下で、Pの付値しまりハリップのみを用いた行気の論理式Aの付値と違う値をとる。 よってロより、つBlまfハV,フタのみを用いたイエ覧の論理式Aと同値でない。 よってすれた。 (i) 3-13/12 112 相関好A,BEPVa,に対すし、をつうのみを用いた・倫理式Cについて、AABとつCとする。 言角理等音合子 つしまず、1つの言角理式にのみ作用するから Cに含まれる超変数はかで、これをDとする [A]=[B]=ttx33付値Jにコリス、『AAB]=ttx ②より [c]=tt このとき [D]= dx13。 A, Bl ナヤロ異なるからA, Bのパケガくとも一方はDと異なる大打称り生り、一般り生を保た まま B + Dとできる. [A] こtt, [B] こナナ、[D]=dとすく付値」をとることができ、この下で

[[AAB]=ff, [c] こもも 、[AAB] + [c] しかし、AAB Cと包まり[AAB]=[c] たっから、乳値 よってAABに対し、分かのみを用いた同値な言論理式は構成できない。

よて示された。

「ストよりなハリノファともつ引、生まし、それのみ明は可値な言倫理式が構成でもないような清理式が存在する。これへ、リ、ファ、タータの仕意の割分集合に対し、イ土竜の言倫理式をencodeすることはできない。