

Relation d'équivalence

A.Belcaid

Euromed Fès

October 28, 2020

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation \mathcal{R} est une application entre $E \times F \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation \mathcal{R} est une application entre $E \times F \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \mathcal{R} y$$

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation \mathcal{R} est une application entre $E \times F \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \mathcal{R} y$$

- Dans le cas où $E = F$, on parle d'une relation **binaire**.

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation \mathcal{R} est une application entre $E \times F \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \mathcal{R} y$$

- Dans le cas où $E = F$, on parle d'une relation **binaire**.

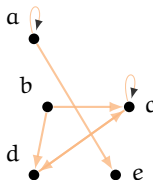
Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation \mathcal{R} est une application entre $E \times F \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \mathcal{R} y$$

- Dans le cas où $E = F$, on parle d'une relation **binaire**.



Pour une relation **binaire** dans E , on s'intéresse aux propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x \quad (1)$$



Pour une relation **binaire** dans E , on s'intéresse aux propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x \quad (1)$$



Pour une relation **binaire** dans E , on s'intéresse aux propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x \quad (1)$$



Symétrie

$$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x \quad (2)$$



Pour une relation **binaire** dans E , on s'intéresse aux propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x \quad (1)$$



Symétrie

$$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x \quad (2)$$



Pour une relation **binaire** dans E , on s'intéresse aux propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x \quad (1)$$



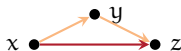
Symétrie

$$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x \quad (2)$$



Transitivité

$$\forall x, y, z \in E \quad x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z \quad (3)$$



Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.

Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.
- symétrique.

Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.

Définition

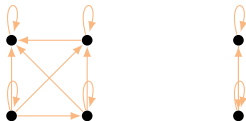
Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.

Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.

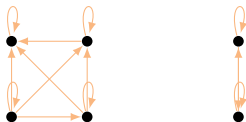


Exemples

Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.



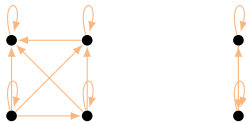
Exemples

- Si $E = \mathbb{Z}$ et $a\mathcal{R}b \iff ab \neq 0$

Définition

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.



Exemples

- Si $E = \mathbb{Z}$ et $a\mathcal{R}b \iff ab \neq 0$
- Si $E = \mathbb{Z}^*$ et $a\mathcal{R}b \iff ab \neq 0$

Exemples

Exemples

- 1 On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation \mathcal{R} *être parallèle*. Cette relation est-elle une relation d'équivalence?

Exemples

- ① On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation \mathcal{R} *être parallèle*. Cette relation est-elle une relation d'équivalence?
- **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle-même.

Exemples

- ① On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation \mathcal{R} *être parallèle*. Cette relation est-elle une relation d'équivalence?
- **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle-même.
 - **symétrie**: Si D est parallèle à D' , alors D' est parallèle à D .

Exemples

- ① On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation \mathcal{R} *être parallèle*. Cette relation est-elle une relation d'équivalence?
- **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle-même.
 - **symétrie**: Si D est parallèle à D' , alors D' est parallèle à D .
 - **transitivité**: Si D_1 est parallèle à D_2 et D_2 est parallèle à D_3 , alors D_1 est parallèle à D_3 .

Exemples

- ① On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation \mathcal{R} *être parallèle*. Cette relation est-elle une relation d'équivalence?
 - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle-même.
 - **symétrie**: Si D est parallèle à D' , alors D' est parallèle à D .
 - **transitivité**: Si D_1 est parallèle à D_2 et D_2 est parallèle à D_3 , alors D_1 est parallèle à D_3 .
- ② La relation *Être perpendiculaire* est-elle une relation d'équivalence?

Exemples

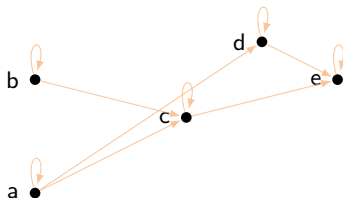
- ① On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation \mathcal{R} *être parallèle*. Cette relation est-elle une relation d'équivalence?
 - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle-même.
 - **symétrie**: Si D est parallèle à D' , alors D' est parallèle à D .
 - **transitivité**: Si D_1 est parallèle à D_2 et D_2 est parallèle à D_3 , alors D_1 est parallèle à D_3 .
- ② La relation *Être perpendiculaire* est-elle une relation d'équivalence?
- ③ Relation \mathcal{R} dans \mathbb{Z} tel que:

$$x\mathcal{R}y \implies x \text{ est un multiple de } y$$

Définition

Une \mathcal{R} dans E est dite relation **d'ordre** si elle vérifie les propriétés suivante:

- **Réflexive:** $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$.
- **Transitivité:** $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.
- **Antisymétrique:** $(x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}x) \implies x = y$



- Vérifier que la relation $A \mathcal{R} B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.

- Vérifier que la relation $A \mathcal{R} B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
 - ① **Réflexivité:** $\forall A \in E \quad A \subset A$.

- Vérifier que la relation $A \mathcal{R} B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
 - ① **Réflexivité:** $\forall A \in E \quad A \subset A$.
 - ② **Transitivité:** $\forall A, B, C \in E \quad A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$.

- Vérifier que la relation $A \mathcal{R} B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
 - ① **Réflexivité:** $\forall A \in E \quad A \subset A$.
 - ② **Transitivité:** $\forall A, B, C \in E \quad A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$.
 - ③ **Antisymétrique:** $\forall A, B \in E \quad A \subset B \text{ et } B \subset A \implies A = B$.

- Vérifier que la relation $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
 - ① **Réflexivité:** $\forall A \in E \quad A \subset A$.
 - ② **Transitivité:** $\forall A, B, C \in E \quad A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$.
 - ③ **Antisymétrique:** $\forall A, B \in E \quad A \subset B \text{ et } B \subset A \implies A = B$.
- Même question pour la relation $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$ dans \mathbb{Z} .

Définition

Une relation d'ordre \mathcal{R} sur un ensemble E est dite d' **ordre total**.
Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x) \quad (4)$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Définition

Une relation d'ordre \mathcal{R} sur un ensemble E est dite d' **ordre total**.
Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x) \quad (4)$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Exemples

Définition

Une relation d'ordre \mathcal{R} sur un ensemble E est dite d' **ordre total**.
Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x) \quad (4)$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Exemples

- La relation

$$x\mathcal{R}y \iff x \leq y$$

est une relation d'ordre total dans \mathbb{R} .

Définition

Une relation d'ordre \mathcal{R} sur un ensemble E est dite d' **ordre total**.
Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x) \quad (4)$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Exemples

- La relation

$$x\mathcal{R}y \iff x \leq y$$

est une relation d'ordre total dans \mathbb{R} .

- Par contre la relation

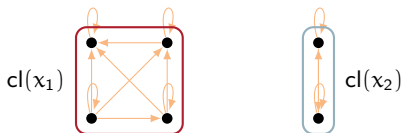
$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ divise } y$$

est une relation d'ordre partiel.

Définition

Pour une relation d'**équivalence** \mathcal{R} sur un ensemble E , il est très utile de définir **classe d'équivalence** d'un élément x qui contient tous les éléments qui sont en relation avec x .

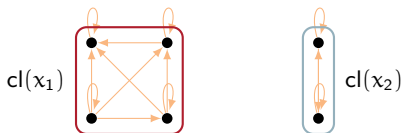
$$\text{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (5)$$



Définition

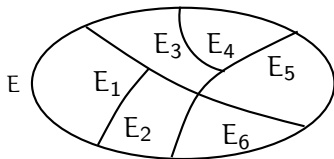
Pour une relation d'**équivalence** \mathcal{R} sur un ensemble E , il est très utile de définir **classe d'équivalence** d'un élément x qui contient tous les éléments qui sont en relation avec x .

$$\text{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (5)$$



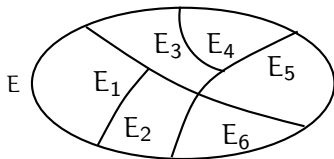
- On trouve aussi la notation $\bar{x} = \text{cl}(x) \subset E$.

Propriétés



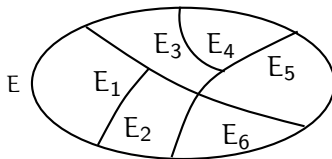
Propriétés

- $\text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y.$



Propriétés

- $\text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y.$
- $\forall x, y \in E \quad (\text{cl}(x) = \text{cl}(y)) \text{ ou } (\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset).$



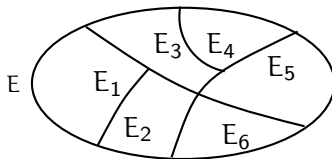
Propriétés

- $\text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y.$
- $\forall x, y \in E \quad (\text{cl}(x) = \text{cl}(y)) \text{ ou } (\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset).$

Partition

Soit un ensemble E et un ensemble $\{E_i\}$ des parties de E . On dit que $\{E_i\}$ forment une **partition** de E si:

$$\begin{cases} \cup_i E_i = E \\ E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j) \end{cases}$$



Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.

Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même* age.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.

Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même* age.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même* age.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même* age.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même* age.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.



Exemple 1

On considère la relation \mathcal{R} des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même* age.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.



Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \quad (6)$$

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \quad (6)$$

- **Exemple:** $1 \equiv 5(\text{mod } 2)$ et $3 \equiv 10(\text{mod } 3)$.

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \quad (6)$$

- **Exemple:** $1 \equiv 5 \pmod{2}$ et $3 \equiv 10 \pmod{3}$.
- Vérifier que \equiv est une relation d' **équivalence**.

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \quad (6)$$

- **Exemple:** $1 \equiv 5 \pmod{2}$ et $3 \equiv 10 \pmod{3}$.
- Vérifier que \equiv est une relation d' **équivalence**.
- La **classe d'équivalence** d'un nombre note \bar{a} est donné par:

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}$$

$$\bar{a} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + k\mathbb{Z}$$

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \quad (6)$$

- **Exemple:** $1 \equiv 5 \pmod{2}$ et $3 \equiv 10 \pmod{3}$.
- Vérifier que \equiv est une relation d' **équivalence**.
- La **classe d'équivalence** d'un nombre noté \bar{a} est donné par:

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}$$

$$\bar{a} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + k\mathbb{Z}$$

- Une **partition** par cette relation de \mathbb{Z} qu'on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donnée par:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Exercices

- Lister les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$