# Travaux dirigées
# Groupes

A.Belcaid

November 19, 2022

# Contents

;

# Chapter 1

## 1.1 Exercice 1

**Question 1**

Pour chaque cas, vérifier si l'ensemble avec la loi proposée est un **groupe**:

1. $G$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition.
2. $G$ est l'ensemble des fonctions croissantes muni de l'addition.
3. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition. où:
   - $f_1 = x$
   - $f_2 = -x$
   - $f_3 = \dfrac{1}{x}$
   - $f_4 = -\dfrac{1}{x}$

***Proof:*** Pour la première loi:

1. fonctions linéaires muni de la composition.
   (a) **Loi interne**: Pour deux fonctions $f_1 : x \longrightarrow a_1x + b_1$ et $f_2 : x \longrightarrow a_2x + b_2$ On as
   $$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(a_2x + b_2) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$$
   qui est une fonction linéaire.
   (b) **Associativité** Provient directement de l'associativité de la composition.
   (c) **Élément neutre**: Pour la fonction $id_{\mathbb{R}}$, on sait déjà que pour toute fonction on as :
   $$f \circ id_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}} \circ f = f$$
   Comme $id_{\mathbb{R}} = 1x + 0$, c'est une application linéaire.
   (d) **Symétrique** Soit $a_1 \in \mathbb{R}^*$ et $b_1 \in \mathbb{R}$, on calcule l'inverse gauche de $f = a_1x + b_1$
   $$\begin{aligned} f \circ (g(x)) &= x \\ a_1(a_2x + b_2) + b_1 &= x \\ a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1) &= x \end{aligned}$$
   Ainsi on obtient
   $$\begin{cases} a_1a_2 &= 1 \\ a1b_2 + b_1 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 & = \dfrac{1}{a_1} \\ a_1 b_2 + b_1 & = \dfrac{-b_1}{a_1} \end{cases}$$

Ainsi pour $g = \dfrac{1}{a_1}x - \dfrac{b_1}{a_1}$ on as $f \circ g = \text{id}$. On calcule la composition:

$$g \circ f = \frac{1}{a_1}(a_1 x + b_1) - \frac{-b_1}{a_1} = \text{id}$$

Ainsi chaque élément admet un symétrique.

**Note:-**

On pouvait simplement démontrer que l'ensemble des linéaires est un sous groupe des fonctions bijectives muni de la composition.

2. Pour la composition l'élément neutre est id, cependant pour une fonction $f\ x \longrightarrow$ Cst. La fonction est croissante mais elle admet pas un élément symétrique (fonction inverse). Car on ne peux trouver $g$ une fonction tel que f(g(x)) = id.

3. (a) **Loi interne** Voici un tableau des compositions: Ce qui prouve que la loi est interne.

| $\circ$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $f_2$ | $f_2$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_3$ |
| $f_3$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_1$ | $f_2$ |
| $f_4$ | $f_4$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ |

Table 1.1: Tableau des composition ou la première ligne correspond au choix de la fonction $g$, la première colonne montre le choix de la fonction $f$, et le reste contient le résultat de $f \circ g$.

   (b) **Association** Provient directement de l'association de la composition.

   (c) **Élément neutre** $f_1 = \text{id}$ est dans le groupe.

   (d) **Élément symétrique**: Selon la table on as

$$\forall i \in [1,4] \quad f_i \circ f_i = \text{id}$$

   Ce qui prouve que chaque élément et son propre symétrique.

😃

## 1.2 Exercice 2

**Question 2**

Pour les deux cas suivants, démontrer que $G$ est un groupe puis vérifier s'il est **abélien**.

1. $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ sur $G = ]-1,1[$.

2. $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 e^{x_2} + y_2 e^{x_1})$ sur $\mathbb{R}^2$.

***Proof:*** Pour le premier cas:

1. $(G, *)$ est un groupe car:

   (a) **loi interne**: en effet, si $x, y \in G$, alors $x \star y \in G$.
   Pour cela, etudions la fonction definie sur $[-1, 1]$ par:
   $$f(t) = \frac{t+y}{1+ty}$$
   Elle est derivable sur $[-1, 1]$, et sa derivee verifie:
   $$f^{'}(t) = \frac{1-y^2}{(1+ty)^2} > 0 \text{ sur } ]-1, 1[.$$
   f est donc strictement croissante sur $]-1, 1[$ et on a
   $$f(-1) = x \star y = f(x) < f(1)$$
   Comme $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, on obtient que
   $$x \star y \in G.$$

   (b) **Associative**: Pour tout $(x, y, z) \in G^3$.
   $$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= \frac{x + (x \star z)}{1 + x(y \star z)} && (1.1) \\ &= \frac{x + \dfrac{x+z}{1+yz}}{1 + x\dfrac{y+z}{1+yz}} && (1.2) \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} && (1.3) \end{aligned}$$
   On calcule l'expression $(x \star y) \star z$ et on trouve le meme resulat.

   (c) **Element neutre**: On montre que 0 est un element neutre:
   $$z \star 0 = 0 \star x = \frac{x+0}{1+0} = x$$

   (d) **inverse**
   $$\forall x \in [-1, 1] \quad -x \in [-1, 1] \quad \text{et } x \star (-x) = (-x) \star x = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$$
   De plus, le groupe est **abelien**.

2. Il est clair que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

   (a) Cette loi est associative:
   $$\begin{aligned} (x_1, y_1) \star \big((x_2, y_2) \star (x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1) \star (x_2 + x_3, y_2 e^{x_3} + y_3 e^{-x_2}) && (1.4) \\ &= (x_1, +x_2 + x_3, y_1 e^{x_2+x_3} + y_2 e^{x_3-x_1} + y_3 e^{-x_1-x_2}) && (1.5) \end{aligned}$$
   De meme on trouve que
   $$\big((x_1, y_1) \star (x_2, y_2)\big) \star (x_3, y_3) = (x_1, +x_2 + x_3, y_1 e^{x_2+x_3} + y_2 e^{x_3-x_1} + y_3 e^{-x_1-x_2})$$

   (b) **Element neutre**, On a:
   $$(x, y) \star (0, 0) = (x + 0, ye^0 + 0e^{-x}) = (x, y)$$
   et
   $$(0, 0) \star (x, y) = (0 + x, 0e^x + ye^{-0}) = (x, y)$$

   (c) **Element inverse**
   $$(x, y) \star (-x, -y) = (x - x, ye^{-x} - ye^{-x}) = (0, 0)$$
   $$(-x, -y) \star (x, y) = (-x + x, -ye^x + ye^x) = (0, 0)$$

**Note:-**

Le groupe n'est pas abelien car
$$(1,0)\star(0,1)=(1,e^{-1})$$
tandis que
$$(0,1)\star(1,0)=(1,e^{1})$$

☺

## 1.3 Exercice 3

**Question 3**

Soit $G$ un groupe **fini** d'élément neutre $e$.

1. Montrer que si cardinal de $G$ est pair, alors il existe $x \in G$ tel que:
$$x \neq e \ \text{ et } \ x^{-1} = x$$

***Proof:*** on definie la relation $\mathcal{R}$ definie sur $G$ par
$$x\mathcal{R}y \iff x = y \quad \text{ou } x = y^{-1}$$
On demontre facilement qu'il s'agit dune relation **d'equivalence**. On suppose que
$$\nexists x \neq e \qquad \text{tel que } x = x^{-1}.$$
Ainsi les classes d'equivalences pour la relation $\mathcal{R}$ sont
$$\begin{cases} Cl(e) & = \{e\} \\ Cl(x) & = \{x, x^{-1}\} \quad \text{ si } x \neq e \end{cases}$$
Selon le theoreme de partition on
$$G = \bigcup_{x \in G} Cl(x_i)$$
On decompose les classes:
$$G = \bigcup_{x \neq e} Cl(x_i) \cup \{e\}$$
Puisque les classes sont **disjoins** on obtient alors que
$$\text{Card}(G) = \sum_{x \neq e} \text{Card}Cl(x) + 1$$
$$\text{Card}(G) = 2k + 1$$
ou $k$ est le nombre de classe.[1] Ce qui est **absurde** car le cardinal de $G$ est pair. ☺

[1] Le 2 vient du fact, que chaque classe contient seulement **deux** elements.

## 1.4 Exercice 4

**Question 4**

Soit $G$ un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $*$ associative. On dit qu'un élément $a$ est **régulier** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $a * x = a * y \implies x = y$
- $x * a = y * a \implies x = y$

On suppose que tous les éléments de $G$ sont réguliers, et on fixe $a \in G$.

1. Démontrer qu'il existe $e \in G$ tel que $a * e = a$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $e * x = x$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $x * e = x$.
4. Démontrer que $(G, *)$ est un groupe.
5. Le résultat subsiste-t-il si $G$ n'est fini?

***Proof:***

1. On considere l'application
$$\begin{array}{cccc} \phi & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longrightarrow & a \star x \end{array}$$
Puisque $a$ est regulier ca prouve que cette aplicatin est **injective**. Puisque $G$ est fini et Card$G$ = Card$G$. alors l'applicatin $phi$ est une **bijection**. Ainsi $a$ admet un antecedant par $\phi$.
$$\exists e \in G \quad a \star e = \phi(e) = a$$
2. En utilisant l' associative de la loi interne:
$$a \star e \star x = a \star x$$
et Puisque $a$ est regulier on obtient:
$$e \star x = x$$
3. On a:
$$a \star e \star a = x \star a$$
On utilise la question precedante et la regularite de $a$ on aura
$$x \star e = x$$
4. Il suffit desormais de montrer que tout element est inversible. Soit $b \in G$, Puisque l'application $x \longrightarrow b \star x$ est bijective [2] . alors $e$ admet un antecedant unique:
$$\exists c \in G \quad b \star c = e$$
De plus on as:
$$c \star b \star c = c \star e = c$$
On deduit alors que $c$ est l'inverse de $b$.
5. Non, toute l'analyse utilise le fait que l'applicatin $\phi$ est bijective. Chose qui est correcte car le cardinal de $G$ est fini. Sinon elle est seulement **injective**. Comme contre exemple on prend, $(\mathbb{N}, +)$ qui verifie que tout elements est regulier. Mais c'est pas un groupe.

😄

[2] en utilisant la meme procedure que la premiere question pour $a$

## 1.5 Exercice 5

**Question 5**

Pour chaque cas, déterminer si la partie $H$ est un sous groupe de $G$.

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. $G = (\mathbb{R}^*, +)$ et $H = ]-1, \infty[$.
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{Q}^*$.
5. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, (a, b) \neq (0, 0)\}$.

***Proof:***

1. $H$ est un sous-groupe de $G$. En effet:
   - $0 \in H$.
   - si $x, y \in H$ alors $-x$ et $x + y$ sont aussi dans $H$.

   Ainsi $H$ est un **sous groupe** de $G$.
2. $0 \notin H$ et donc $H$ n'est pas un sous groupe.
3. $2 \in H$ et $-2 \notin H$: $H$ n'est pas un sous-groupe de $G$.
4. $H$ est un sous groupe car:
   (a) $1 \in H$.
   (b) si $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$ alors $x \times y = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} \in H$.
   (c) Aussi on a $\frac{1}{x} = \frac{q_1}{p_1} \in H$.

   Ainsi $H$ est un sous groupe.
5. Il s'agit bien d'un sous groupe car:
   (a) $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in H$
   (b) On prend $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ deux elements de $H$. alors
   $$xy = (ac + 2bd) + (ad + bd)\sqrt{2}$$
   (c) Aussi on a:
   $$\frac{1}{x} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

   **Note:-**
   On remarque que l'on peut pas voir $ac + 2bd = 0$ et $ad + bd = 0$ sinon on aurait $xy = 0$

   Ainsi $H$ est un sous groupe de $G$.

😃

## 1.6 Execice 6

**Question 6: Centre et element de torsion**

Soit $(G, .)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de $G$

1. $C(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G\ ,\ x.y = y.x\}$, $C(G)$ s'appelle le **centre** de $G$.
2. $aHa^{-1} = \left\{aha^{-1}\ , h \in H\right\}$ où $a \in G$ et $H$ est un sous groupe.
3. On suppose que $G$ est abélien. On dit que $x$ est un élément de **torsion** de $G$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$.
   - Démontrer que l'ensemble de torsion forme un sous groupe.

***Proof:*** Il suffit, pour chaque cas, d'appliquer le theoreme de caracterisation des sous-groupes.

1. Pour les centres on a:
   (a) $e \in C(G)$ car
   $$\forall y \in G \quad ey = ye = y$$
   (b) Soient $x_1$ et $x_2 \in C(G)$, alors pour tout $y \in G$ on a:
   $$x_1x_2y = x_1(x_2y) = (x_1y)x_2 = yx_1x_2$$
   (c) Soit $x \in C(G)$ alors on a:
   $$xy = yx \implies xyx^{-1} = yxx^{-1} = y \implies x^{-1}xyx^{-1} = x^{-1}y \implies yx^{-1} = x^{-1} = y$$
   Ainsi on deduit que $C(G)$ est sous groupe de $G$.

   (a) Puisque $H$ est un sous groupe, on a $e \in H$ ainsi
   $$aea^{-1} = e \in aHa^{-1}$$
   (b) Soient $x = ah_1a^{-1}$ et $y = ah_2a^{-1}$ deux elements de $aHa^{-1}$ avec $h_1, h_2 \in H$.
   $$xy = ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} = a\underbrace{h_1h_2}_{\in H}a^{-1} \in aHa^{-1}$$
   (c) Soit $x = aha^{-1}$ pour $y = ah^{-1}a^{-1}$ on a
   $$xy = aha^{-1}ah^{-1}a^{-1} = ahh^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = e$$

   **Note:-**
   Puisque $H$ est un sous groupe, $h^{-1}$ existe et forcement dans $H$

😆

## 1.7 Exercice 7

**Question 7: Union de sous groupes**

Soit $G$ un groupe et $H$ et $K$ deux sous groupes de $G$. Démontrer que $H \cup K$ est un sous groupe de $G$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

***Proof:*** On demontre les deux implications:

1. Si $H \subset K$ alors $H \cup K = K$ qui est un sous-groupe de $G$.
   De meme, si $K \subset H$, $H \cup K = H$ qui est un sous groupe de $G$.

2. Supposons maintenant que $H \cup K$ est un sous groupe de $G$ et ni $H \subset K$ ni $K \subset H$.
   alors on peut trouver
   $$\begin{cases} x \in & H \backslash K \\ y \in & K \backslash H \end{cases}$$
   Maintenant on utilise la fait que $H \cup K$ est un sous groupe, comme $x \in H \cup K$ et $y \in H \cup K$. on aura forcement que
   $$xy \in H \cup K$$
   Sans perte de generalite [3] on suppose que $xy \in H$. alors on aura que
   $$\underbrace{x^{-1}(xy)}_{=y} \in H$$
   Ce qui constitue une contradtion car $y \notin H$.

😊

## 1.8 Exercice 8

**Question 8**

Montrer que $H = \left\{x + \sqrt{3}y \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\ ,\ x^2 - 3y^2 = 1\right\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times))$.

***Proof:*** La premiere chose a remarquer est que $H \subset \mathbb{R}_+^*$. Car si $x + y\sqrt{3} \in H$ on as alors
$$x^2 - 3y^2 > 0$$
puisque $x \in \mathbb{N}$ on a $x > \sqrt{3}|y|$ et donc $x + y\sqrt{3} > 0$.

on a aussi que $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in H$. On montre maintenant la multiplication est une loi interne dans $H$. Soient alors $a = x + y\sqrt{3}$ et $b = u + v\sqrt{3}$ deux elements dans $H$. Alors:
$$(x + y\sqrt{3})(u + v\sqrt{3}) = (xu + 3yv) + \sqrt{3}(xv + yu)$$
On remarque ensuite que:
$$\begin{array}{rcl} (xu + 3yv)^2 - 3(xv + yu)^2 & = & x^2u^2 + 9y^2v^2 - 3xx^2v^2 - 3y^2u^2 \\ & = & x\left(u^2 - 3v^2\right) + 3y^2(3v^2 - u^2) \\ & = & x^2 - 3y^2 \\ & = & 1. \end{array}$$
Il nous reste a verifier que $xu + 3yv$ est un element de $\mathbb{N}$. Ceci provient du fait que $x \geqslant \sqrt{3}|y|$ et $u \geqslant \sqrt{3}|v|$. Ainsi
$$ab \in H$$
On demontre maitenant que l'inverse de chaque element est dans $H$.
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} = \frac{x - y\sqrt{3}}{x^2 - 3y^2} = x - y\sqrt{3} \in H$$
Ainsi H est bien un sous groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. 😊

[3] Dans le cas inverse $xy \in K$, on change $H$ par $K$ en gardant la meme demonstration

## 1.9 Exercice 9

**Question 9: Produit de deux sous groupes**

Soit $(G, .)$ un groupe fini et $A, B$ deux sous groupes de $G$. On note

$$AB = \{a.b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que $AB$ est un sous groupe de $G$ si et seulement si $AB = BA$.

***Proof:*** Supposons d'abord que $AB = BA$. Alors $AB$ est un sous groupe de $G$ car:

1. $e \in AB$ car $e = ee$ avec $e \in A$ et $e \in B$.
2. $AB$ est stable par la loi interne. En effet soit $x = ab \in AB$ et $y = uv \in AB$ alors

   $$xy = abuv$$

   On sait que $bu \in AB = BA$. ainsi on conclut qu'il existe $a_1 \in A$ et $b_1 \in B$ tel que

   $$bu = a_1 b_1$$

   on remplace $bu$ et on trouve que:

   $$xy = \underbrace{aa_1}_{\in A} \underbrace{b_1 b}_{\in B}$$

   Ainsi $xy \in AB$.
3. $AB$ est stable par passage a l'inverse:

   $$x = ab \in AB \implies x^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{'}b^{'} \in AB.$$

Reciproquement, supposong que $AB$ est un sous groupe de $G$, et prouvons que $AB = BA$.

Soit d'abord $x = ab \in AB$. Alors $x^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in AB$.
Puisque $AB = BA$. on alors l'existence de $a_1 \in A$ et $b_1 \in B$ tel que

$$x^{-1} = a_1 b_1 \implies x = b^{-1}a_1{-}1 \in BA$$

On procede la meme facon pour l'autre inclusion.

😃