# Groupes

**Exercice 1** (★ ★):

Pour chaque cas, vérifier si l'ensemble avec la loi proposée est un **groupe**:

1. $G$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition.
2. $G$ est l'ensemble des fonctions croissantes muni de l'addition.
3. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition. où:
   - $f_1 = x$ • $f_2 = -x$ • $f_3 = \dfrac{1}{x}$ • $f_4 = -\dfrac{1}{x}$

**Exercice 2** (★ ★):

Pour les deux cas suivants, démontrer que $G$ est un groupe puis vérifier s'il est **abélien**.

1. $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ sur $G = ]-1, 1[$.
2. $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 e^{x_2} + y_2 e^{x_1})$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 3** (★ ★):

Soit $G$ un groupe **fini** d'élément neutre $e$.

1. Montrer que si cardinal de $G$ est pair, alors il existe $x \in G$ tel que:

$$x \neq e \text{ et } x^{-1} = x$$

**Exercice 4** (★ ★ ★):

Soit $G$ un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $*$ associative. On dit qu'un élément $a$ est **régulier** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $a * x = a * y \implies x = y$
- $x * a = y * a \implies x = y$

On suppose que tous les éléments de $G$ sont réguliers, et on fixe $a \in G$.

1. Démontrer qu'il existe $e \in G$ tel que $a * e = a$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $e * x = x$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $x * e = x$.
4. Démontrer que $(G, *)$ est un groupe.
5. Le résultat subsiste-t-il si $G$ n'est fini?

**Exercice 5** (★):

Pour chaque cas, déterminer si la partie $H$ est un sous groupe de $G$.

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. $G = (\mathbb{R}^*, +)$ et $H = ]-1, \infty[$.
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{Q}^*$.
5. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, (a, b) \neq (0, 0)\}$.

**Exercice 6** (★ ★):

Soit $(G, .)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de $G$

1. $C(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G\ ,\ x.y = y.x\}$, $C(G)$ s'appelle le **centre** de $G$.
2. $aHa^{-1} = \left\{aha^{-1}\ , h \in H\right\}$ où $a \in G$ et $H$ est un sous groupe.
3. On suppose que $G$ est abélien. On dit que $x$ est un élément de **torsion** de $G$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$.
   - Démontrer que l'ensemble de torsion forme un sous groupe.

**Exercice 7** (★ ★):

Soit $G$ un groupe et $H$ et $K$ deux sous groupes de $G$. Démontrer que $H \cup K$ est un sous groupe de $G$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

**Exercice 8** (★ ★):

Montrer que $H = \left\{x + \sqrt{3}y \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\ ,\ x^2 - 3y^2 = 1\right\}$ est un sous groupe de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times)\right)$.

**Exercice 9** (★ ★):

Soit $(G, .)$ un groupe fini et $A, B$ deux sous groupes de $G$. On note

$$AB = \{a.b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que $AB$ est un sous groupe de $G$ si et seulement si $AB = BA$.

**Exercice 10** (★):

Les applications $\phi\ :\ G \longrightarrow H$ définies ci-dessous sont elles des morphisme de groupes?

1. $G = (\mathbb{R}^*, \times),\ H = (\mathbb{R}^*, \times))\ ,\ \phi(x) = |x|$.
2. $G = (\mathbb{R}^*, \times),\ H = (\mathbb{R}^*, \times))\ ,\ \phi(x) = 2x$.

**Exercice 11** (★ ★ ★):

Soit $f$ un morphisme de $G = (\mathbb{Z}, +)$ dans lui même.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}*$, on $f(n) = nf(1)$.
2. Endéduire que $\forall n \leq 0$ on a aussi $f(n) = nf(1)$.
3. Caractériser les morphismes **surjectifs** de $G$ vers $G$.
4. Caractériser les morphismes **injectifs** de $G$ vers $G$.

**Exercice 12** (★):

Montrer qu'il est équivalent dans $\mathbb{Z}$ de dire $m$ divise $n$, ou $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

**Exercice 13** (★):

- Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
- Caractériser le sous-groupe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
- Caractériser les sous-groupes suivants :

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}\ ; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}\ ; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$