Travaux dirigées
Groupes

A.Belcaid

November 27, 2022

Contents

;

Chapter 1

1.1 Exercice 1

Question 1

Pour chaque cas, vérifier si l'ensemble avec la loi proposée est un **groupe**:

1. G est l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition.
2. G est l'ensemble des fonctions croissantes muni de l'addition.
3. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition. où:
   - $f_1 = x$
   - $f_2 = -x$
   - $f_3 = \dfrac{1}{x}$
   - $f_4 = -\dfrac{1}{x}$

Proof: Pour la première loi:

1. fonctions linéaires muni de la composition.
   (a) **Loi interne**: Pour deux fonctions $f_1 : x \longrightarrow a_1x + b_1$ et $f_2 : x \longrightarrow a_2x + b_2$ On as

   $$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(a_2x + b_2) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$$

   qui est une fonction linéaire.
   (b) **Associativité** Provient directement de l'associativité de la composition.
   (c) **Élément neutre**: Pour la fonction $id_{\mathbb{R}}$, on sait déjà que pour toute fonction on as :

   $$f \circ id_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}} \circ f = f$$

   Comme $id_{\mathbb{R}} = 1x + 0$, c'est une application linéaire.
   (d) **Symétrique** Soit $a_1 \in \mathbb{R}^*$ et $b_1 \in \mathbb{R}$, on calcule l'inverse gauche de $f = a_1x + b_1$

   $$\begin{aligned} f \circ (g(x)) &= x \\ a_1(a_2x + b_2) + b_1 &= x \\ a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1) &= x \end{aligned}$$

   Ainsi on obtient

   $$\begin{cases} a_1a_2 &= 1 \\ a1b_2 + b_1 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 & = \dfrac{1}{a_1} \\ a_1 b_2 + b_1 & = \dfrac{-b_1}{a_1} \end{cases}$$

Ainsi pour $g = \dfrac{1}{a_1}x - \dfrac{b_1}{a_1}$ on as $f \circ g = \mathrm{id}$. On calcule la composition:

$$g \circ f = \frac{1}{a_1}(a_1 x + b_1) - \frac{-b_1}{a_1} = \mathrm{id}$$

Ainsi chaque élément admet un symétrique.

Note:-

On pouvait simplement démontrer que l'ensemble des linéaires est un sous groupe des fonctions bijectives muni de la composition.

2. Pour la composition l'élément neutre est id, cependant pour une fonction f $x \longrightarrow$ Cst. La fonction est croissante mais elle admet pas un élément symétrique (fonction inverse). Car on ne peux trouver g une fonction tel que f(g(x)) = id.

3. (a) **Loi interne** Voici un tableau des compositions: Ce qui prouve que la loi est interne.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Table 1.1: Tableau des composition ou la première ligne correspond au choix de la fonction g, la première colonne montre le choix de la fonction f, et le reste contient le résultat de $f \circ g$.

   (b) **Association** Provient directement de l'association de la composition.

   (c) **Élément neutre** $f_1 = \mathrm{id}$ est dans le groupe.

   (d) **Élément symétrique**: Selon la table on as

$$\forall i \in [1, 4] \quad f_i \circ f_i = \mathrm{id}$$

Ce qui prouve que chaque élément et son propre symétrique.

😃

1.2 Exercice 2

Question 2

Pour les deux cas suivants, démontrer que G est un groupe puis vérifier s'il est **abélien**.

1. $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ sur $G =]-1, 1[$.

2. $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 e^{x_2} + y_2 e^{x_1})$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proof: Pour le premier cas:

1. $(G,*)$ est un groupe car:

   (a) **loi interne**: en effet, si $x, y \in G$, alors $x \star y \in G$.
   Pour cela, etudions la fonction definie sur $[-1,1]$ par:
   $$f(t) = \frac{t+y}{1+ty}$$
   Elle est derivable sur $[-1,1]$, et sa derivee verifie:
   $$f^{'}(t) = \frac{1-y^2}{(1+ty)^2} > 0 \text{ sur }]-1,1[.$$
   f est donc strictement croissante sur $]-1,1[$ et on a
   $$f(-1) = x \star y = f(x) < f(1)$$
   Comme $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, on obtient que
   $$x \star y \in G.$$

   (b) **Associative**: Pour tout $(x,y,z) \in G^3$.
   $$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= \frac{x + (x \star z)}{1 + x(y \star z)} && (1.1)\\ &= \frac{x + \dfrac{x+z}{1+yz}}{1 + x\dfrac{y+z}{1+yz}} && (1.2)\\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} && (1.3)\end{aligned}$$
   On calcule l'expression $(x \star y) \star z$ et on trouve le meme resulat.

   (c) **Element neutre**: On montre que 0 est un element neutre:
   $$z \star 0 = 0 \star x = \frac{x+0}{1+0} = x$$

   (d) **inverse**
   $$\forall x \in [-1,1] \quad -x \in [-1,1] \quad \text{et } x \star (-x) = (-x) \star x = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$$
   De plus, le groupe est **abelien**.

2. Il est clair que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

   (a) Cette loi est associative:
   $$\begin{aligned} (x_1,y_1) \star \big((x_2,y_2) \star (x_3,y_3)\big) &= (x_1,y_1) \star (x_2+x_3, y_2e^{x_3} + y_3e^{-x_2}) && (1.4)\\ &= (x_1, +x_2+x_3, y_1e^{x_2+x_3} + y_2e^{x_3-x_1} + y_3e^{-x_1-x_2}) && (1.5)\end{aligned}$$
   De meme on trouve que
   $$\big((x_1,y_1) \star (x_2,y_2)\big) \star (x_3,y_3) = (x_1, +x_2+x_3, y_1e^{x_2+x_3} + y_2e^{x_3-x_1} + y_3e^{-x_1-x_2})$$

   (b) **Element neutre**, On a:
   $$(x,y) \star (0,0) = (x+0, ye^0 + 0e^{-x}) = (x,y)$$
   et
   $$(0,0) \star (x,y) = (0+x, 0e^x + ye^{-0}) = (x,y)$$

   (c) **Element inverse**
   $$(x,y) \star (-x,-y) = (x-x, ye^{-x} - ye^{-x}) = (0,0)$$
   $$(-x,-y) \star (x,y) = (-x+x, -ye^x + ye^x) = (0,0)$$

Note:-

Le groupe n'est pas abelien car
$$(1,0) \star (0,1) = (1, e^{-1})$$
tandis que
$$(0,1) \star (1,0) = (1, e^{1})$$

😄

1.3 Exercice 3

Question 3

Soit G un groupe **fini** d'élément neutre e.

1. Montrer que si cardinal de G est pair, alors il existe $x \in G$ tel que:
$$x \neq e \;\text{ et }\; x^{-1} = x$$

Proof: on definie la relation $\mathcal{R}$ definie sur G par
$$x\mathcal{R}y \iff x = y \quad \text{ou } x = y^{-1}$$
On demontre facilement qu'il s'agit dune relation **d'equivalence**. On suppose que
$$\nexists x \neq e \qquad \text{tel que } x = x^{-1}.$$
Ainsi les classes d'equivalences pour la relation $\mathcal{R}$ sont
$$\begin{cases} Cl(e) & = \{e\} \\ Cl(x) & = \{x, x^{-1}\} \quad \text{si } x \neq e \end{cases}$$
Selon le theoreme de partition on
$$G = \bigcup_{x \in G} Cl(x_i)$$
On decompose les classes:
$$G = \bigcup_{x \neq e} Cl(x_i) \cup \{e\}$$
Puisque les classes sont **disjoins** on obtient alors que
$$\text{Card}(G) = \sum_{x \neq e} \text{Card}Cl(x) + 1$$
$$\text{Card}(G) = 2k + 1$$
ou k est le nombre de classe.[1] Ce qui est **absurde** car le cardinal de G est pair. 😄

[1] Le 2 vient du fact, que chaque classe contient seulement **deux** elements.

Question 4

Soit G un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $*$ associative. On dit qu'un élément a est **régulier** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $a * x = a * y \implies x = y$
- $x * a = y * a \implies x = y$

On suppose que tous les éléments de G sont réguliers, et on fixe $a \in G$.

1. Démontrer qu'il existe $e \in G$ tel que $a * e = a$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $e * x = x$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $x * e = x$.
4. Démontrer que $(G, *)$ est un groupe.
5. Le résultat subsiste-t-il si G n'est fini?

Proof:

1. On considere l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longrightarrow & a \star x \end{array}$$

Puisque a est regulier ca prouve que cette aplicatin est **injective**. Puisque G est fini et Card$G$ = Card$G$. alors l'applicatin phi est une **bijection**. Ainsi a admet un antecedant par ϕ.

$$\exists e \in G \quad a \star e = \phi(e) = a$$

2. En utilisant l' associative de la loi interne:

$$a \star e \star x = a \star x$$

et Puisque a est regulier on obtient:

$$e \star x = x$$

3. On a:

$$a \star e \star a = x \star a$$

On utilise la question precedante et la regularite de a on aura

$$x \star e = x$$

4. Il suffit desormais de montrer que tout element est inversible. Soit $b \in G$, Puisque l'application $x \longrightarrow b \star x$ est bijective [2] . alors e admet un antecedant unique:

$$\exists c \in G \quad b \star c = e$$

De plus on as:

$$c \star b \star c = c \star e = c$$

On deduit alors que c est l'inverse de b.

5. Non, toute l'analyse utilise le fait que l'applicatin ϕ est bijective. Chose qui est correcte car le cardinal de G est fini. Sinon elle est seulement **injective**. Comme contre exemple on prend, $(\mathbb{N}, +)$ qui verifie que tout elements est regulier. Mais c'est pas un groupe.

😄

[2] en utilisant la meme procedure que la premiere question pour a