Travaux dirigées
Polynômes

A.Belcaid

December 24, 2022

Contents

;

Chapter 1

1.1 Exercice 1

Question 1: Division Euclidienne

Pour les trois cas listés, calculer la division euclidienne de P par Q.

1. $P = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ et $Q = X^2 + 3X - 1$.
2. $P = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ et $Q = X^2 - X - 7$.
3. $P = X^5 - X^2 + 2$ et $Q = X^2 + 1$.

Proof: 1. Pour le premier cas on obtient:

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 & X^2 + 3X - 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 - 3X^3 + X^2 & X^2 + 2X + 7 \\ \cline{1-1}
2X^3 + 13X^2 + 19X & \\
-2X^3 - 6X^2 + 2X & \\ \cline{1-1}
7X^2 + 21X - 7 & \\
-7X^2 - 21X + 7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2. Pour le deuxième cas:

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 & X^2 - X - 7 \\ \cline{2-2}
-X^4 + X^3 + 7X^2 & X^2 - 3X - 5 \\ \cline{1-1}
-3X^3 - 2X^2 + 27X & \\
3X^3 - 3X^2 - 21X & \\ \cline{1-1}
-5X^2 + 6X + 38 & \\
5X^2 - 5X - 35 & \\ \cline{1-1}
X + 3 &
\end{array}
$$

3. Finalement pour le troisième cas:

$$
\begin{array}{r|l}
X^5 - X^2 + 2 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-X^5 - X^3 & X^3 - X - 1 \\ \cline{1-1}
-X^3 - X^2 & \\
X^3 + X & \\ \cline{1-1}
-X^2 + X + 2 & \\
X^2 + 1 & \\ \cline{1-1}
X + 3 &
\end{array}
$$

1.2 Exercice 2

Question 2: Expression du reste

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$ vaut 1 et que celui de P par $(X-b)$ vaut -1.

1. Évaluer l'image $P(a)$ et $P(b)$?
2. On note $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Quel sera le degré de R?
3. En déduire l'expression de R.

Proof: 1. On sait que

$$P(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)Q_1(x) + 1$$

Ceci implique que

$$P(a) = 1$$

De meme on obtient que

$$P(b) = -1$$

2. Puisque le cardinal de $(X-a)(x-b)$ est 2 le reste R doit être au plus de cardinal 1.

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(x) + \alpha X + \beta$$

On evalue cette expression en a et en b, on trouve le systeme:

$$\begin{cases} \alpha a + \beta & = 1 \\ \alpha b + \beta & = -1 \end{cases}$$

La résolution de système nous donne:

$$\alpha = \frac{2}{a-b} \text{ et } \beta = \frac{-a-b}{a-b}$$

Le reste recherché est donc

$$\frac{2}{a-b}\mathrm{X} + \frac{-a-b}{a-b}$$

☺

1.3 Exercice 3

Question 3

On se propose de déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\; P(X^2) = (X^3+1)P(X) \right\}$$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi
   que le polynôme $X^3 - 1$ sont dans E.

2. Soit $P \in E$, non nul.
   (a) Démontrer que $P(1) = 0$ puis que $P^{'}(0) = P^{''}(0) = 0$.
   (b) En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P(X) = \lambda(X^3 - 1)$$

3. En déduire l'ensemble E.

Proof: 1. On demontre que le polynôme nul et $X^3 - 1$ sont dans E..

- On a
  $$0(X^2) = 0 = (X^3+1)0(X)$$
  donc le polynome nul est dans E.
- Soit $P_1 = X^3 - 1$, on as:
  $$P_1(X^2) = X^6 - 1$$
  et
  $$(X^3+1)P_1(X) = (X^3+1)(X^3-1) = X^6 - 1$$
  Ainsi on as aussi que P_1 est dans E.

2. On considere alors $P \in E$. selon la definition on aura:
   $$P(1) = (1+1)P(1)$$
   ce qui implique que
   $$P(1) = 0$$
   On dérive la relation de l'équation on obtient:
   $$2P^{'}(X^2) = 3X^2P(X) + (X^3+1)P^{'}(X)$$
   ce qui prouve que $P^{'}(0) = 0$.
   On dérive on deuxième fois:
   $$4P^{''}(X^2) = 6XP(X) + 3X^2P^{''}(X) + 3X^2P^{'}(X) + (X^3+1)P^{''}(X)$$
   on injecte 0 dans cette équation on trouve que:
   $$P^{''}(0) = 0$$

3. Une analyse de drégée de P selon l'équation vérifiée implique que :
   $$2deg(P) = 3 + deg(P)$$

Ce qui implique que

$$deg(P) = 3$$

Ainsi l'expression de la division euclidienne d'un tel polynome par $X^3 - 1$ donnera :

$$P = \lambda(X^3 - 1) + \beta \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Sachant que $P(1) = 0$ on trouve forcement que $\beta = 0$. Ainsi

$$P = \lambda(X^3 - 1)$$

☺

1.4 Exercice 4

Question 4: Calcul PGCD

Pour chaque cas, déterminer le **PGCD** entre P et Q.

1. $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
2. $P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.
3. $P = X^n - 1$ et $Q = (X - 1)^n$.

Proof: pour chaque cas on as:

1.
$$\begin{aligned}
X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 &= \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 2\right) \cdot X + \left(-2X^2 + 2X + 4\right)\\
X^3 - 3X^2 + 3X - 2 &= \left(-2X^2 + 2X + 4\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2}X + 1\right) + \left(3X - 6\right)\\
-2X^2 + 2X + 4 &= \left(3X - 6\right) \cdot \left(-\tfrac{2}{3}X - \tfrac{2}{3}\right) + 0
\end{aligned}$$

   Ce qui donne que le PGCD est :

$$X - 2$$

2.
$$\begin{aligned}
X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 &= \left(X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1\right) \cdot 1 + \left(2X^3 - 4X^2 + 4X - 2\right)\\
X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 &= \left(2X^3 - 4X^2 + 4X - 2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{2}X\right) + \left(X^2 - X + 1\right)\\
2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 &= \left(X^2 - X + 1\right) \cdot \left(2X - 2\right) + 0
\end{aligned}$$

   Ainsi le PGCD est

$$X^2 - X + 1$$

3. On as

$$(X^n - 1) = (X - 1)\sum_{i=0}^{n-1} X^i$$

   Ainsi le seul facteur commun entre ces deux polynomes est:

$$(X - 1)$$

☺

Question 5: Formule de Bezout

Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$AU + BV = 1$$

où $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$.

Proof: On utilise l'algorithme d'Euclide. On a

$$\begin{aligned}
X^7 - X - 1 &= \left(X^5 - 1\right) \cdot X^2 + \left(X^2 - X - 1\right)\\
X^5 - 1 &= \left(X^2 - X - 1\right) \cdot \left(X^3 + X^2 + 2X + 3\right) + \left(5X + 2\right)\\
X^2 - X - 1 &= \left(5X + 2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{5}X - \tfrac{7}{25}\right) + -\tfrac{11}{25}\\
5X + 2 &= -\tfrac{11}{25} \cdot \left(-\tfrac{125}{11}X - \tfrac{50}{11}\right) + 0
\end{aligned}$$

On remonte ensuite les calculs. On va partir plutot de

$$11 = -25(X^2 - X - 1) + (5X - 7)(5X + 2)$$

Pour eviter de trainer des fractions. On trouve successivement:

$$\begin{aligned}
11 &= -25(X^2 - X - 1) + (5X - 7)\left((X^5 - 1) - (X^2 - X - 1)(X^3 + X^2 + 2X + 3)\right)\\
&= \left(-5X^4 + 2X^3 - 3X^2 - X - 4\right)\left(X^2 - X - 1\right) + (5X - 7)\left(X^5 - 1\right)\\
&= (-5X^4 + 2X^3 - 3X^2 - X - 4)(X^7 - X - 1) + (5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)(X^5 - 1)
\end{aligned}$$

Finalement il suffit de diviser par 11 pour trouver U et V. 😊

1.5 Exercice 6

Question 6

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants. Montrer que l'équivalence entre:

1. P et Q ont un facteur commun.
2. il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tel que

$$AP = BQ$$

et $\deg(A) < \deg(Q), \quad \deg(B) < \deg(P)$

Proof: On commence par la premiere implication

1. On suppose que P et Q ont un facteur commun D. On factorise alors

$$\begin{cases} P = DB \\ Q = DA \end{cases}$$

Ce qui implique que:

$$AP = ADB = BDA = BQ$$

2. Pour la reciproque, On suppose que P et Q sont premiers entre eux

$$P \wedge Q = 1 \quad \text{et } AP = BQ$$

alors

$$P|BQ$$

et par le theoreme de Gauss on aura

$$P|B$$

Ce qui est absurde.

☺

1.6 Exercice 7

Question 7: Racines

Quel est pour $n \geqslant 1$ l'ordre de multiplicité de 2 du polynôme:

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Proof: On verifie d'abord que $P_n(2) = 0$ et donc 2 est une racine de P_n.

On calcule maintenant la derivee

$$P_n^{'}(X) = n(n+2)X^{n+1} - (4n+1)(n+1)X^n + 4n(n+1)X^{n-1} - 4(n-1)X^{n-2}$$

si $n = 1$, le dernier terme est interprete comme le polynome nul. En particulier, on a:

$$\begin{aligned} P_n^{'}(2) &= n(n+2)2^{n+1} - (4n+1)(n+1)2^n + 4n(n+1)2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} && (1.1)\\ &= 2^{n-2}\left(8n(n+2) - 4(4n+1)(n+1) + 8n(n+1) - 4(n-1)\right) && (1.2)\\ &= 0 && (1.3) \end{aligned}$$

On derive une fois encore

$$P_n^{''}(X) = n(n+1)(n+2)X^n - (4n+1)n(n+1)X^{n-1} + 4n(n+1)(n-1)X^{n-2}4(n-1)(n-2)X^{n-3}$$

d'ou l'on tire

$$P_n^{''}(2) = 2^{n-3}\left(8n(n+1)(n+2) - 4(4n+1)n(n+1) + 8n(n+1)(n-1) - 4(n-1)(n-2)\right)$$

$$P_n^{''}(2) = 2^n(2n-1)$$

Puisque $2n - 1$ ne s'anulle pas quand n est un entier, on as

$$P_n(2) = P_n^{'}(2) = 0$$

et

$$P_n^{''}(2) \neq 0.$$

Aini 2 est une racine de multiplicite 2. ☺

1.7 Exercie 8

Question 8

Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$ un polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$. On suppose aussi que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ tel que $p \wedge q = 1$.

1. Développer que la forme $P(r) = 0$.
2. Démontrer que $p \mid a_0$.
3. Prouver que $q \mid a_n$
4. En déduire que $P = X^5 - X^2 + 1$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{Q}$.

Proof: 1.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{p}{q}\right) &= 0 \\ a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n &= 0 \end{aligned}$$

On commence par isoler $a_0 q^n$ et on trouve que:

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$$

Puisque $p \wedge q = 1$, on aura $p|a_0 q^n$.

On isole aussi $a_n p^n$, on trouve que:

$$q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0 q^{n-1}\right) = -a_n p^n$$

De meme analyse, on conclut que

$$q|a_n p^n \quad \text{puisque } p \wedge q = 1$$

Par consequent, si le polynome $X^5 - X^2 + 1$ admet une racine rationnelle p/q, alors $p|1$ et $q|1$. Ainsi

$$|p| = 1 \quad \text{et } |q| = 1$$

Ainsi les seuls racines possibles sont -1 et 1. Or, elles ne sont pas des racines de P Ainsi P n'admet pas de racines rationnelle.

☺

1.8 Exercice 9

Question 9

1. Le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + 1$ est il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?
2. La relation $P\mathcal{R}Q \iff P$ divise Q est-elle une relation d'ordre?

Proof: On sait que les seuls polynômes **irréductibles** dans $\mathbb{R}[X]$

- Les polynômes de degré 1.
- Les polynômes de degré 2 avec un déterminant négatif.

et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes de degré 1.

Ainsi le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ ni irréductible ni dans $\mathbb{R}[X]$ ni dans $\mathbb{C}[X]$.

☺

1.9 Exercice 10

Question 10

Pour chaque polynôme, donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

1. $P_1(X) = X^4 + 1$
2. $P_2(X) = X^8 - 1$
3. $P_3(X) = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$

Proof: Voici la décomposition de chaque polynôme:

1. Pour le premier exemple, on résout l'équation classique

$$X^4 = -1$$

Ça nous donne que

$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})$$

on regroupe les termes **conjugués** on trouve que

$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})$$
$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Les deux sont de degré deux et de déterminant négatifs. Ainsi ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Pour le deuxième exemple on trouve que

$$\begin{aligned} X^8 - 1 &= (X^4 - 1)(X^4 + 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) \end{aligned}$$

Pour $X^4 + 1$ on utilise le même processus que la question 1 et on trouve:

$$X^8 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

3. Pour le polynôme final

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 + i)$$

On factorise chaque polynôme de degré 2 dans $\mathbb{C}$, on trouve que:

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X + i)(X - 1 - i)(X - i)(X - 1 + i)$$

On regroupe les termes conjugués:

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

😄

1.10 Exercice 11

Question 11

Soit P le polynôme définit par:

$$P(X) = 2X^4 + X^2 - 3$$

1. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Proof: Il s'agit d'un polynôme spécial **bicarré** qui s'écrit sous la forme:

$$P(X) = Q(X^2) \quad \text{ou } Q(X) = X^2 + X - 3$$

On commence alors par la décomposition de Q

$$Q(X) = 2(X-1)(x + \frac{3}{2})$$

On en déduit alors que

$$P(X) = 2(X^2 - 1)(X^2 + \frac{3}{2}) = 2(X-1)(X+1)(X^2 + \frac{3}{2})$$

😃

1.11 Exercice 12

Question 12

Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Même question pour $\mathbb{C}[X]$.

Proof:

1. On écrit simplement

$$X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X-3)^2$$

2. L'astuce pour obtenir une identité remarquable est de considèrera que $9 = -(3i)^2$. Avec ceci on trouve que

$$\begin{aligned} X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9 &= (X(X-3))^2 - (3i)^2 \\ &= (X(X-3) - 3i)(X(X-3) + 3i) \\ &= (X^2 - 3X - 3i)(X^2 - 3X + 3i) \end{aligned}$$

Pour finalisme la décomposition il suffit de calculer le discriminant de chaque polynôme pour obtenir les racines.

3. Dans $\mathbb{C}[X]$ la décomposition s'écrit comme

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \beta_1)(X - \beta_2)$$

Ou $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 sont les racines calculées dans la question précédente.

😃

Question 13: Factorisation simultanée

On considère les deux polynômes suivants:

- $P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$
- $Q(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$.

1. Sachant que P et Q admettent une racine **commune** a, Quelle est la relation entre $(X - a)$ et $\text{pgcd}(P, Q)$?
2. En appliquant l'algorithme d'Euclide, montrer que le **pgcd** de P et Q est $X - 3$?
3. Calculer le polynôme P_1 tel que
$$P = (X - 3)P_1$$
4. Même question pour Q_1 tel que:
$$Q = (X - 3)Q_1$$
.
5. En déduire une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P et Q.

Proof: Si a possède une racine commune a, alors le polynome $(X - 1)$ divise le **PGCD**(P, Q). Ainsi on calcul le pgcd de ces deux polynômes

$$\begin{aligned} X^3 - 9X^2 + 26X - 24 &= \left(X^3 - 7X^2 + 7X + 15\right) \cdot 1 + \left(-2X^2 + 19X - 39\right) \\ X^3 - 7X^2 + 7X + 15 &= \left(-2X^2 + 19X - 39\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2}X - \tfrac{5}{4}\right) + \left(\tfrac{45}{4}X - \tfrac{135}{4}\right) \\ -2X^2 + 19X - 39 &= \left(\tfrac{45}{4}X - \tfrac{135}{4}\right) \cdot \left(-\tfrac{8}{45}X + \tfrac{52}{45}\right) + 0 \end{aligned}$$

On trouve que le pgcd est $(X - 3)$ Ainsi la valeur de $a = 3$.

Maintenant qu'on as une racine commune on peut diminuer le degré de P et de Q en réalisant la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 9X^2 + 26X - 24 & X - 3 \\ \cline{2-2} -X^3 + 3X^2 & X^2 - 6X + 8 \\ \cline{1-1} -6X^2 + 26X & \\ 6X^2 - 18X & \\ \cline{1-1} 8X - 24 & \\ -8X + 24 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi on as:

$$P = (X - 3)(X^2 - 6X + 8) = (X - 3)(X - 2)(X - 4)$$

On reprend le meme processus pour Q

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 7X^2 \quad + 7X + 15 & X - 3 \\ \cline{2-2} -X^3 + 3X^2 & X^2 - 4X - 5 \\ \cline{1-1} -4X^2 \quad + 7X & \\ 4X^2 - 12X & \\ \cline{1-1} -5X + 15 & \\ 5X - 15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi

$$Q(X) = (X-3)(X^2-6X+8) = (X-3)(X-3)(X-5)$$

😄