Travaux dirigés

Université Euromed Fès

Espace Vectoriels

Exercice 1 (★):

Pour chaque cas vérifier si E est un espace vectoriel?

1. $E = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 2\}$
3. $E = \{(x, y, z, t) \mid x = y = 2z = 4t\}$
4. $E = \{(x, y) \mid xy = 0\}$
5. $E = \{(x, y) \mid x = y^2\}$
6. $F = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y - 5z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
   Vérifier $E = F \cap G$
7. Même question mais pour $E = F \cup G$

Exercice 2 (★):

Détéreminer si les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels?

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(2)\}$
2. $E_2 = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P^{'}(0) = 2\right\}$
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A|P\}$
4. $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (★ ★ ★):

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espace vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4 (★):

Pour chaque cas vérifier si u est une combinaison linéaire des $(u_i)_i$?

1. $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (2, 3)$
2. $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (2, 3)$, $u_3 = (-4, 5)$
3. $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 4)$

Exercice 5 (★ ★):

- Emilie achète pour sa maman une baque contenant $2g$ d'or, $5g$ de cuivre et $4g$ d'agent. Il paie 6200.
- Paulin achète une bague contenant $3g$ d'or, $5g$ de cuivre et $1g$ d'argent. Il paie 5300.
- Frédéric achète une bague contenant $5g$ d'or, $12g$ de cuivre et $9g$ d'argent. Combien va-t-il payer?

Exercice 6 (★):

Les familles suivantes sont-elle libres?

1. $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$
2. $u = (1, 2, -1)$ $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$.
3. $u = (1, 2, -1)$,$v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$.
4. $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (5, 6, 7, 8)$, $w = (9, 10, 11, 12)$ et $z = (13, 14, 15, 16$.

Exercice 7 (★):

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre?

Exercice 8 (★):

Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls à degrés **échelonnés**. C'est à dire

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$$

1. Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 9 (★ ★):

On considère les vecteurs suivants:

$$v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (2, -2, 2), \quad v_3 = (2, -1, 2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 10 (★):

Donner un système d'équations résumant les espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants:

1. $u = (1, 2, 3)$
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$
3. $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

Exercice 11 (★):

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants

1. $F = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 0\}$
2. $G = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$

Exercice 12 (★):

Dans les exemples suivants, démontrer que les sous-espaces F et G sont égaux.

1. $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$,$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0)$.

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \text{ et } G = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

2. $u_1 = (2, 3, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2)$,$v_1 = (3, 7, 0)$, $v_2 = (5, 0, -7)$.

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \text{ et } G = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

3. $v_1 = (1, 1, -2)$, $v_2 = (1, -4, 3)$.

$$F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}(u_1, v_1)$$

Exercice 13 (★ ★):

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinc vecteurs suivants $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$.

Pour chaque cas, vérifier si les sous espaces vectoriels sont **supplémentaires**?

1. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$?
2. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$?
3. $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$?
4. $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$?

Exercice 14 (★ ★ ★):

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre et on pose:

$$F = \text{Vect}(u_1 + u_2, u3), \ G = \text{Vect}(u_1 + u_3, u_4), \ H = \text{Vect}(u1 + u4, u_2)$$

1. Démonter que $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$
2. La somme $F + G + H$ est-elle directe?

Exercice 15 (★):

Pour chaque cas, vérifier s'il s'agit d'une application linéaire?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \to (x + y, \ x - 2y, \ 0)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \to (x + y, \ x - 2y, \ 1)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2 - y^2$
4. $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2, P \to (P(0), P^{'}(1))$

Exercice 16 (★):

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par:

$$f(x, y) = (x + y, \ x - y, \ x + y)$$

1. Détéreminer le noyau de f.
2. Calculer son image.
3. f est-elle injective? surjective?

Exercice 17 (★ ★):

Soit E un espce vectoriel et p, q deux projecteurs de E tel que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$.

1. Démonter que (p, q) est une famille libre dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des fonctions linéaires entre E et E.

Indice: Si q est une projection, quelle sera q^2.