Relation d'équivalence

A.Belcaid

Euromed Fès

October 23, 2022

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation $\mathcal{R}$ est une application entre $E \times F \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation $\mathcal{R}$ est une application entre $E \times F \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \, \mathcal{R} \, y$$

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation $\mathcal{R}$ est une application entre $E \times F \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \,\mathcal{R}\, y$$

- Dans le cas où $E = F$, on parle d'une relation **binaire**.

Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation $\mathcal{R}$ est une application entre $E \times F \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \,\mathcal{R}\, y$$

- Dans le cas où $E = F$, on parle d'une relation **binaire**.

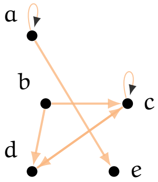
Définition

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

- Une relation $\mathcal{R}$ est une application entre $E \times F \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ qui associe Vrai si x et y sont en relation.
- Si le couple (x, y) vérifie (Vrai) la relation on écrit

$$x \, \mathcal{R} \, y$$

- Dans le cas où $E = F$, on parle d'une relation **binaire**.



Pour une relation **binaire** dans E, on s'intéresse au propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \,\mathcal{R}\, x \tag{1}$$

Propriétés

Pour une relation **binaire** dans E, on s'intéresse au propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \, \mathcal{R} \, x \tag{1}$$

Propriétés

Pour une relation **binaire** dans E, on s'intéresse au propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \,\mathcal{R}\, x \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet\, x \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Symétrie

$$\forall x, y \in E \quad x \,\mathcal{R}\, y \implies y \mathcal{R} x \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} x\,\bullet \arrow[r, leftrightarrow] & \bullet\, y \end{tikzcd}$$

Pour une relation **binaire** dans E, on s'intéresse au propriétés suivantes:

Réflexivité

$$\forall x \in E \quad x \,\mathcal{R}\, x \tag{1}$$

Symétrie

$$\forall x, y \in E \quad x \,\mathcal{R}\, y \implies y \mathcal{R} x \tag{2}$$

Pour une relation **binaire** dans E, on s'intéresse au propriétés suivantes:

Réflexivité

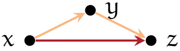
$$\forall x \in E \quad x \,\mathcal{R}\, x \tag{1}$$

Symétrie

$$\forall x, y \in E \quad x \,\mathcal{R}\, y \implies y\mathcal{R}x \tag{2}$$

Transitivité

$$\forall x, y, z \in E \quad x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \tag{3}$$



Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.
- symétrique.

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.

Définition

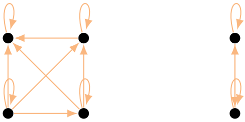
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.

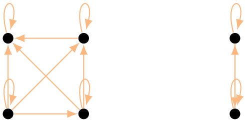


Exemples

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.



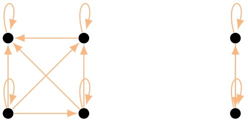
Exemples

- Si $E = \mathbb{Z}$ et $a\mathcal{R}b \iff ab \neq 0$

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

- réflexive.
- symétrique.
- transitive.



Exemples

- Si $E = \mathbb{Z}$ et $a\mathcal{R}b \iff ab \neq 0$
- Si $E = \mathbb{Z}^*$ et $a\mathcal{R}b \iff ab \neq 0$

Exemples

Exemples

1. On considère $\mathbb{E}$ l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation $\mathcal{R}$ *être parallèle*. Cette relation est elle un relation d'équivalence?

Exemples

1. On considère $\mathbb{E}$ l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation $\mathcal{R}$ *être parallèle*. Cette relation est elle un relation d'équivalence?
   - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle même.

Exemples

1. On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation $\mathcal{R}$ *être parallèle*. Cette relation est elle un relation d'équivalence?
   - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle même.
   - **symétrie**: Si D est parallèle à $\mathrm{D}^{'}$, alors $\mathrm{D}^{'}$ est parallèle à D.

Exemples

1. On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation $\mathcal{R}$ *être parallèle*. Cette relation est elle un relation d'équivalence?
   - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle même.
   - **symétrie**: Si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D.
   - **transitivité**: Si D_1 est parallèle à D_2 et D_2 est parallèle à D_3, alors D_1 est parallèle à D_3.

Exemples

1. On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation $\mathcal{R}$ *être parallèle*. Cette relation est elle un relation d'équivalence?
   - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle même.
   - **symétrie**: Si D est parallèle à $\mathrm{D}^{'}$, alors $\mathrm{D}^{'}$ est parallèle à D.
   - **transitivité**: Si D_1 est parallèle à D_2 et D_2 est parallèle à D_3, alors D_1 est parallèle à D_3.
2. La relation *Être perpendiculaire* est elle une relation d'équivalence?

Exemples

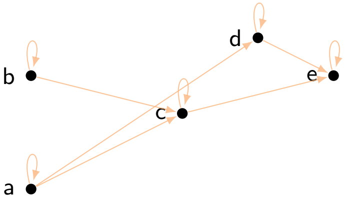
1. On considère E l'ensemble des droites affines dans le plan et la relation $\mathcal{R}$ *être parallèle*. Cette relation est elle un relation d'équivalence?
   - **réflexivité**: Une droite est parallèle à elle même.
   - **symétrie**: Si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D.
   - **transitivité**: Si D_1 est parallèle à D_2 et D_2 est parallèle à D_3, alors D_1 est parallèle à D_3.
2. La relation *Être perpendiculaire* est elle une relation d'équivalence?
3. Relation $\mathcal{R}$ dans Z tel que:

$$x\mathcal{R}y \implies x \text{ est un multiple de } y$$

Définition

Une $\mathcal{R}$ dans E est dite relation **d’ordre** si elle vérifie les propriétés suivante:

- **Réflexive**: $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$.
- **Transitivité**: $x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.
- **Antisymétrique**: $(x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}x) \implies x = y$



- Vérifier que la relation $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.

- Vérifier que la relation $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
  1. **Réflexivité**: $\forall A \in E \quad A \subset A$.

- Vérifier que la relation $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
    1. **Réflexivité**: $\forall A \in E \quad A \subset A$.
    2. **Transitivité**: $\forall A, B, C \in E \quad A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$.

- Vérifier que la relation $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
  1. **Réflexivité**: $\forall A \in E \quad A \subset A$.
  2. **Transitivité**: $\forall A, B, C \in E \quad A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$.
  3. **Antisymétrique**: $\forall A, B \in E \quad A \subset B$ et $B \subset A \implies A = B$.

- Vérifier que la relation $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$ est une relation d'ordre.
  1. **Réflexivité**: $\forall A \in E \quad A \subset A$.
  2. **Transitivité**: $\forall A, B, C \in E \quad A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$.
  3. **Antisymétrique**: $\forall A, B \in E \quad A \subset B$ et $B \subset A \implies A = B$.
- Même question pour la relation $x\mathcal{R}y \iff x \leqslant y$ dans $\mathbb{Z}$.

Définition

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite d' **ordre total**. Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) ou (y\mathcal{R}x) \tag{4}$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Définition

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite d' **ordre total**.
Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ou} \, (y\mathcal{R}x) \tag{4}$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Exemples

Définition

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite d' **ordre total**. Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ou} (y\mathcal{R}x) \tag{4}$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

Exemples

- La relation

  $$x\mathcal{R}y \iff x \leqslant y$$

  est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

Définition

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite d' **ordre total**. Si deux éléments quelconque de E sont **comparables**.

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y) \text{ou} (y\mathcal{R}x) \tag{4}$$

En cas contraire, la relation est dite d'**ordre partiel**

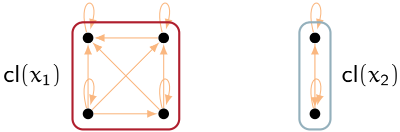
Exemples

- La relation
$$x\mathcal{R}y \iff x \leqslant y$$
est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.
- Par contre la relation
$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ divise } y$$
est une relation d'ordre partiel.

Définition

Pour une relation d'**équivalence** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, il est très utile de définir **classe d'équivalence** d'un élément x qui contient tous les éléments qui sont en relation avec x.

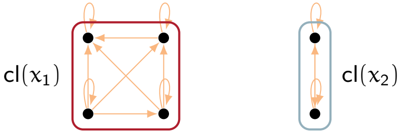
$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \tag{5}$$



Définition

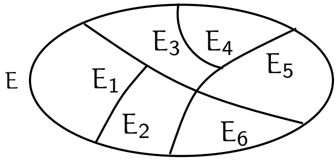
Pour une relation d'**équivalence** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, il est très utile de définir **classe d'équivalence** d'un élément x qui contient tous les éléments qui sont en relation avec x.

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \tag{5}$$



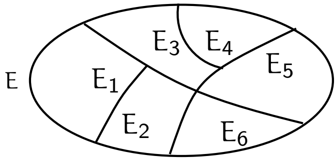
- On trouve aussi la notation $\overline{x} = \mathrm{cl}\,(x) \subset E$.

Propriétés



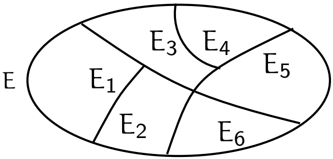
Propriétés

- $\mathsf{cl}(x) = \mathsf{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$.



Propriétés

- $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$.
- $\forall x, y \in E \quad \big(\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)\big)$ ou $\big(\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \emptyset\big)$.



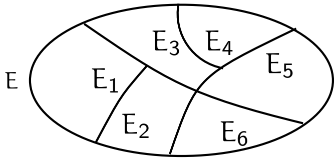
Propriétés

- $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$.
- $\forall x, y \in E \quad \big(\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)\big)$ ou $\big(\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \emptyset\big)$.

Partition

Soit un ensemble E et un ensemble $\{E_i\}$ des parties de E. On dit que $\{E_i\}$ forment une **partition** de E si:

$$\begin{cases} \cup_i E_i = E \\ E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j) \end{cases}$$



Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

Exemple partition

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Exemple 1

On considère la relation $\mathcal{R}$ des ensembles des étudiants qui relie deux étudiants s'ils ont le *même age*.

- Deux étudiants appartient à la même classe s'ils ont le même age.
- Deux étudiants sont soit dans la même classe soit à deux classes **différentes**.
- La classe peut être décomposé en différentes parties selon leur age.

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b (\text{mod } n) \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \tag{6}$$

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b (\text{mod } n) \iff \left(a - b\right) \text{ est un multiple de } n \tag{6}$$

- **Exemple**: $1 \equiv 5(\text{mod } 2)$ et $3 \equiv 10(\text{mode } 3)$.

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \iff \left(a - b\right) \text{ est un multiple de } n \tag{6}$$

- **Exemple**: $1 \equiv 5(\text{mod } 2)$ et $3 \equiv 10(\text{mode } 3)$.
- Vérifier que $\equiv$ est une relation d' **équivalence**.

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \tag{6}$$

- **Exemple**: $1 \equiv 5(\text{mod } 2)$ et $3 \equiv 10(\text{mode } 3)$.
- Vérifier que $\equiv$ est une relation d' **équivalence**.
- La **classe d'équivalence** d'un nombre note $\overline{a}$ est donné par:

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a(\text{mode } n)\}\\ \overline{a} &= \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + k\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Définition

Soit $E = \mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \iff (a - b) \text{ est un multiple de } n \tag{6}$$

- **Exemple**: $1 \equiv 5(\text{mod } 2)$ et $3 \equiv 10(\text{mode } 3)$.
- Vérifier que $\equiv$ est une relation d' **équivalence**.
- La **classe d'équivalence** d'un nombre note $\overline{a}$ est donné par:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a(\text{mode } n)\} \\ \overline{a} &= \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + k\mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Une **partition** par cette relation de $\mathbb{Z}$ qu'on note $\mathbb{Z}/\mathbf{n}\mathbb{Z}$ est donnée par:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Exercices

- Lister les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$