Applications

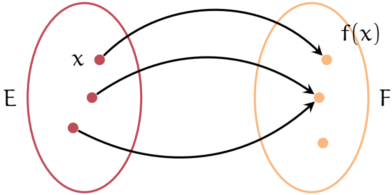
A.Belcaid

Université Euromed de Fès

November 16, 2020

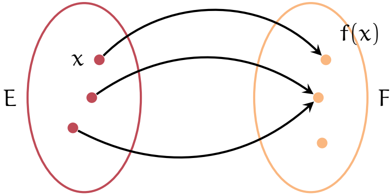
Définition

One appelle une **application** $f : E \to F$ entre deux ensembles E et F, une correspondance qui associe a **tout** élément $x \in E$ un élément **unique** $y \in F$ noté $f(x)$



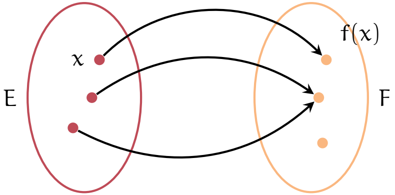
Définition

One appelle une **application** $f : E \to F$ entre deux ensembles E et F, une correspondance qui associe a **tout** élément $x \in E$ un élément **unique** $y \in F$ noté $f(x)$



Définition

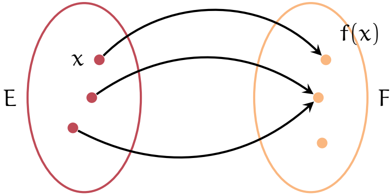
One appelle une **application** $f : E \to F$ entre deux ensembles E et F, une correspondance qui associe a **tout** élément $x \in E$ un élément **unique** $y \in F$ noté $f(x)$



- E: **Ensemble de départ**.

Définition

One appelle une **application** $f : E \to F$ entre deux ensembles E et F, une correspondance qui associe a **tout** élément $x \in E$ un élément **unique** $y \in F$ noté $f(x)$



- E: **Ensemble de départ**.
- F: **Ensemble d'arrivée**.

- Si E et F sont des **sous ensembles** de $\mathbb{R}$. On peut représenter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par son **graphe**:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\} \tag{1}$$

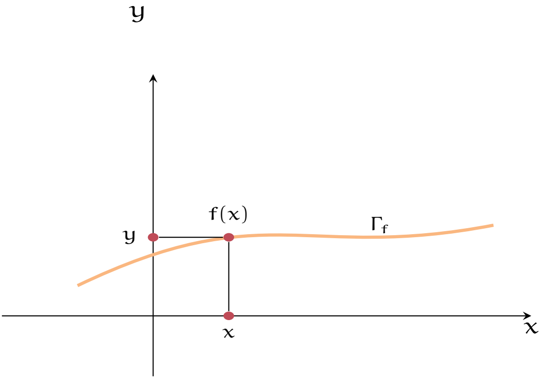
Application sur $\mathbb{R}$

- Si E et F sont des **sous ensembles** de $\mathbb{R}$. On peut représenter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par son **graphe**:

$$\Gamma_f = \left\{ \left(x, f(x)\right) \in E \times F \mid x \in E \right\} \tag{1}$$

- Si E et F sont des **sous ensembles** de $\mathbb{R}$. On peut représenter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par son **graphe**:

$$\Gamma_f = \left\{ \left(x, f(x)\right) \in E \times F \mid x \in E \right\} \tag{1}$$



Égalité

Deux applications f et $g : E \to F$ sont dites **égales** $f = g$ si:

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$$

Égalité

Deux applications f et $g : E \to F$ sont dites **égales** $f = g$ si:

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$$

Composition

Soit les deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G.$ On définit alors la **composée**:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Égalité

Deux applications f et $g : E \to F$ sont dites **égales** $f = g$ si:

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$$

Composition

Soit les deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit alors la **composée**:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G
\end{tikzcd}$$

Identité

Une application particulière est l'application **identité**:

$$\begin{aligned} id_E \quad : \quad & E \to E \\ & x \to x \end{aligned}$$

Identité

Une application particulière est l'application **identité**:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E \quad : \quad & E \to E \\ & x \to x \end{aligned}$$

Mini Exercice

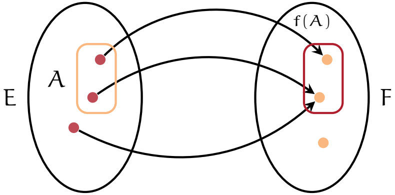
Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, et $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

- Donner $f \circ \mathrm{id}$, $\mathrm{id} \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.

Image directe

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathbf{A}$ une partie de E. On note l'**image directe** de A par f l'ensemble:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in E\} \tag{2}$$



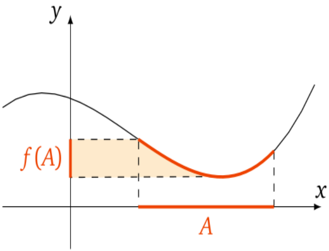
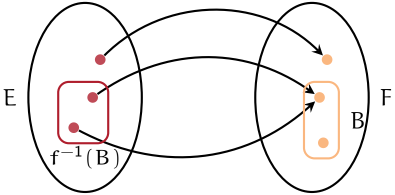
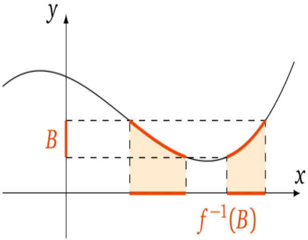


Image directe

Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$ une application de E dans F. On définit **l'image réciproque** de B par f:

$$f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\} \tag{3}$$

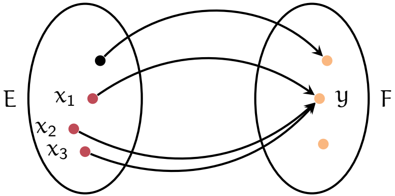


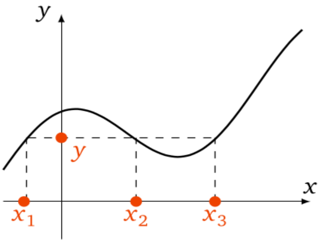


Antécédent

Soit une application $f : E \to F$ et $y \in F$. Un élément $\mathbf{x}$ est un **antécédent** de y si on as

$$y = f(x)$$





- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.

Mini exercices

- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.
- Représenter le graphe de la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \dfrac{4}{n+1}$

- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.
- Représenter le graphe de la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \dfrac{4}{n+1}$
- Soient f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par:

  Donner l'expression des fonctions suivantes: $f \circ (h \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$

- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.
- Représenter le graphe de la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \dfrac{4}{n+1}$
- Soient f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par:
  - $f(x) = x^2$

Donner l'expression des fonctions suivantes: $f \circ (h \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$

- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.
- Représenter le graphe de la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \dfrac{4}{n+1}$
- Soient f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par:
  - $f(x) = x^2$
  - $g(x) = 2x + 1$

Donner l'expression des fonctions suivantes: $f \circ (h \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$

- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.
- Représenter le graphe de la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \dfrac{4}{n+1}$
- Soient f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par:
  - $f(x) = x^2$
  - $g(x) = 2x + 1$
  - $h(x) = x^3 - 1$

  Donner l'expression des fonctions suivantes: $f \circ (h \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$

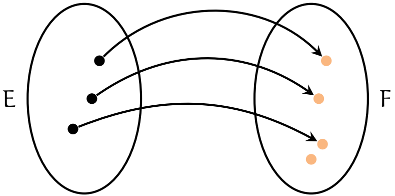
- Soient f et $g : E \to F$ deux applications. Donner la **négation** de $f = g$.
- Représenter le graphe de la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \dfrac{4}{n+1}$
- Soient f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par:
  - $f(x) = x^2$
  - $g(x) = 2x + 1$
  - $h(x) = x^3 - 1$

  Donner l'expression des fonctions suivantes: $f \circ (h \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$
- Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Donner les ensembles suivants: $f([0, 1[)$, $f(\mathbb{R})$, $f(]-1, 2[)$, $f^{-1}([1, 2[)$, $f^{-1}(]-1, 1[)$, $f^{-1}(3)$.

Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **injective** si:

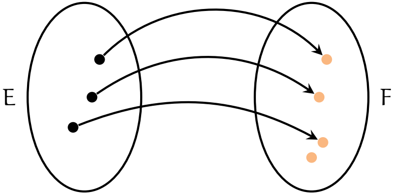
$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \big(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\big) \tag{4}$$



Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **injective** si:

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \Big(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\Big) \tag{4}$$



- Formuler l'injectivité en utilisant la notion d'**antécedent**?

Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **surjective** si:

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \, (y = f(x)) \tag{5}$$

Définition

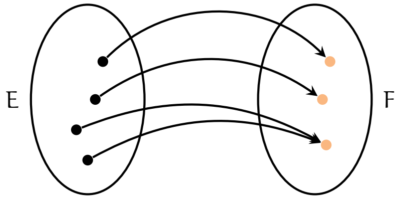
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **surjective** si:

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \, (y = f(x)) \tag{5}$$

Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **surjective** si:

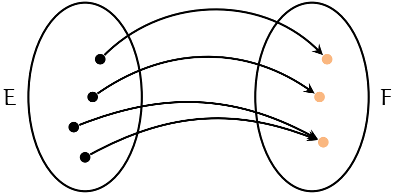
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \, (y = f(x)) \tag{5}$$

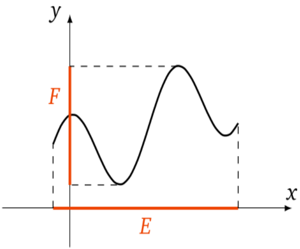


Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **surjective** si:

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \, (y = f(x)) \tag{5}$$

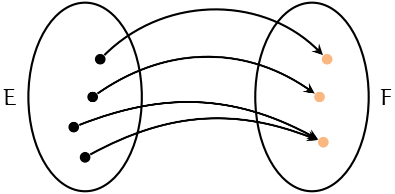


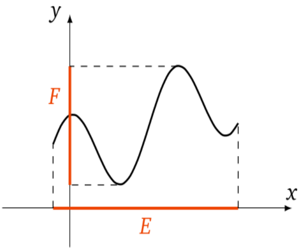


Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite **surjective** si:

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \, (y = f(x)) \tag{5}$$

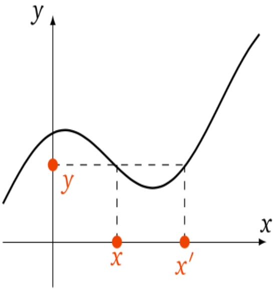


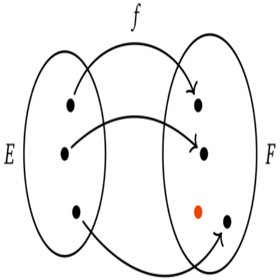


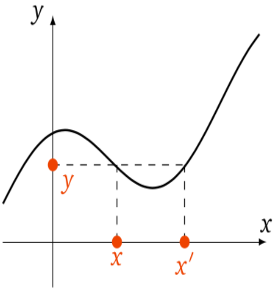
- Formuler la surjectivitié en utilisant la notion d'**antécedent**?

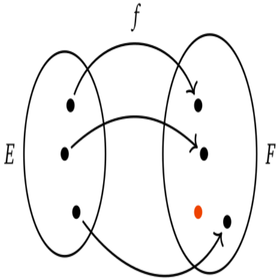
Tester vos connaissances

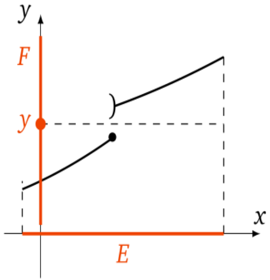
Tester vos connaissances

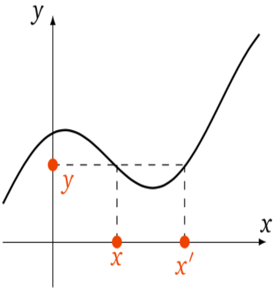


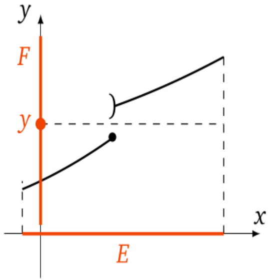


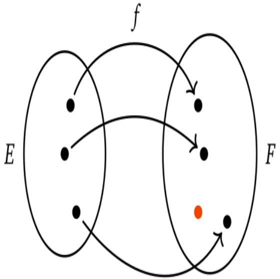

y
x
y
x
x′

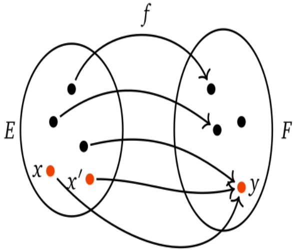

f
E
F


y
F
y
x
E


y
y
x
x
x′


y
F
y
x
E


f
E
F


f
E
F
x
x′
y

Exemple 1

Domontrer que la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(n) = \dfrac{1}{n+1}$ est **injective**.

Exemple 2

Démonter par **contre exemple** que la fonction x^3 n'est pas **injective**.

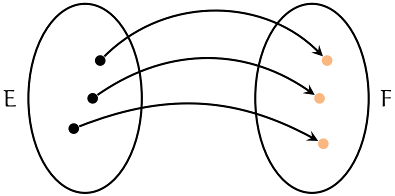
Exemple 3

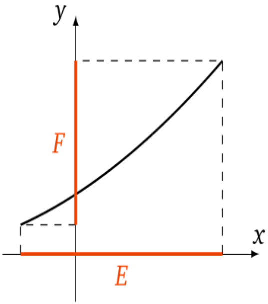
La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est elle **surjective**?

Définition

Une fonction $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est injective et surjective. Cela revient à dire que:

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad (y = f(x)) \tag{6}$$





Proposition

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que:
   - $f \circ g = id_F$
   - $g \circ f = id_E$.
2. Si f est bijective alors l'application g est **unique** et elle est aussi bijective.

- L'applicaiton g s'appelle **bijection réciproque** de f est elle est notée f^{-1}. On vérifie que $(f^{-1})^{-1} = f$

Exemple

La bijection réciproque de la fonction $f : R \to]0, \infty[$ par $f(x) = \exp(x)$ est la fonction $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x)$

Proposotion

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si les deux applications f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si les deux applications f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Ainsi si, f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Alors l'application $(g \circ f)$ est **bijective**. Sa bijection réciproque est donnée par:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \tag{7}$$

- Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?
  1. $f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty[, \ f_1(x) = x^2$.
  2. $f_2 : [0, \infty] \to [0, \infty[, \ f_2(x) = x^2$.
  3. $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f_3(n) = n^2$.
  4. $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ f_4(n) = n - 7$.
  5. $f_5 : \mathbb{R} \to [0, \infty], \ f_5(x) = |x|$.
- Montrer que la fonction $f :]1, \infty[\to]0, \infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ est bijective. Calculer sa bijection réciproque.

Cardinal

Un ensemble E est **fini** si il existe une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dans ce cas l'entier n s'appelle **cardinal** de E et il est noté $\text{Card}E$ ou $|E|$.

Voici quelque exemples:

Cardinal

Un ensemble E est **fini** si il existe une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dans ce cas l'entier n s'appelle **cardinal** de E et il est noté $\mathrm{Card} E$ ou $|E|$.

Voici quelque exemples:

1. $E = \{\text{Rouge}, \text{Bleu}, \text{Vert}\}$ est de $\mathrm{Card} E = 3$.

Cardinal

Un ensemble E est **fini** si il existe une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dans ce cas l'entier n s'appelle **cardinal** de E et il est noté $\mathrm{Card} E$ ou $|E|$.

Voici quelque exemples:

1. $E = \{\text{Rouge}, \text{Bleu}, \text{Vert}\}$ est de $\mathrm{Card} E = 3$.
2. $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.

Cardinal

Un ensemble E est **fini** si il existe une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dans ce cas l'entier n s'appelle **cardinal** de E et il est noté $\mathrm{Card} E$ ou $|E|$.

Voici quelque exemples:

1. $E = \{\text{Rouge}, \text{Bleu}, \text{Vert}\}$ est de $\mathrm{Card} E = 3$.
2. $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.
3. Le cardinal de $\emptyset$ est 0.

Propriétés Cardinal

Propriétés Cardinal

- Si $B \subset A$ et A est **fini**. Alors B est aussi fini et

$$\text{Card}B \leqslant \text{Card}A \tag{8}$$

$$\text{Card}(A - B) = \text{Card}A - \text{Card}B \tag{9}$$

Ainsi si $\text{Card}A = \text{Card}B \implies A = B$

Propriétés Cardinal

- Si $B \subset A$ et A est **fini**. Alors B est aussi fini et

$$\text{Card}B \leqslant \text{Card}A \tag{8}$$

$$\text{Card}(A - B) = \text{Card}A - \text{Card}B \tag{9}$$

Ainsi si $\text{Card}A = \text{Card}B \implies A = B$

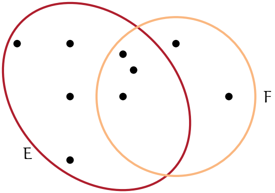
- Pour deux ensembles A et B **disjoints**:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B \tag{10}$$

Cardinal Union

Pour deux ensembles quelconques

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}A + \mathrm{Card}B - \mathrm{Card}(A \cap B) \tag{11}$$



- **Preuve:** Utiliser la décomposition:

$$A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$$

Proposition

Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Alors:

1. Si f est injective alors $\mathrm{Card} E \leqslant \mathrm{Card} F$.
2. Si f est surjective alors $\mathrm{Card} E \geqslant \mathrm{Card} F$.
3. Si f est bijective alors $\mathrm{Card} E = \mathrm{Card} F$.

Proposition

Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Alors:

1. Si f est injective alors $\mathrm{Card}E \leqslant \mathrm{Card}F$.
2. Si f est surjective alors $\mathrm{Card}E \geqslant \mathrm{Card}F$.
3. Si f est bijective alors $\mathrm{Card}E = \mathrm{Card}F$.

Démonstration

- Supposons que f est injective. Notons $F^{'} = f(E) \subset F$ l'image directe de E. Ainsi chaque élément de $F^{'}$ admet un antécédent unique dans E. On conclut que $\mathrm{Card}F^{'} = \mathrm{Card}E \leqslant \mathrm{Card}F$.
- Supposons que f est surjective, Ainsi tous les éléments de F admet au moins un antécédent, On conclut alors que $\mathrm{Card}E \geqslant \mathrm{Card}F$.

Proposition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Si

$$\mathrm{Card} E = \mathrm{Card} F \tag{12}$$

les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

- **Indice:** Prouver que $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$

Proposition

Soit E et F tel que $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$.

Alors le nombre d'applications *différentes* entre E et F est $\mathbf{p^n}$

- **Indice Preuve:** On fixe l'ensemble F et on démontre par récurrence sur le cardinal de E.

Exemple

- Donner le nombre d'application entre $\{0, 1, 3\}$ et $\{0, 1, 2\}$.
- **Codage binaire**: Combien de nombre entiers peut on **coder** sur 8 bits.

Nombre d'injections

Soit E et F tel que $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$. Alors le nombre **d'injections** est donné par:

$$p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times (p-(n-1))$$

Nombre d'injections

Soit E et F tel que $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$. Alors le nombre **d'injections** est donné par:

$$p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times (p-(n-1))$$

- **Indice Preuve:** Fixer l'ensemble F et considérer une récurrence sur E.

Nombre d'injections

Soit E et F tel que $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$. Alors le nombre **d'injections** est donné par:

$$p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times (p-(n-1))$$

- **Indice Preuve:** Fixer l'ensemble F et considérer une récurrence sur E.

Nombre d'injections

Soit E et F tel que $\mathrm{Card}E = n$ et $\mathrm{Card}F = p$. Alors le nombre **d'injections** est donné par:

$$p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times (p-(n-1))$$

- **Indice Preuve:** Fixer l'ensemble F et considérer une récurrence sur E.

Bijections

Le nombre de bijections entre deux ensembles de même cardinal est n :

$$n!$$

Nombre sous ensemble

Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card} E = n$. Le nombre de sous ensembles de E est donné par:

$$\mathrm{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n \tag{13}$$

Nombre sous ensemble

Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}E = n$. Le nombre de sous ensembles de E est donné par:

$$\mathrm{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n \tag{13}$$

Exemple

Énumérer les éléments de $\mathcal{P}\big(\{1, 2, 3, 4, 5\}\big)$ selon leur cardinal.

- **Indice preuve:**: Utiliser une récurrence sur le cardinal de E.

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Corrolaire

- $\binom{n}{0} = 1$

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Corrolaire

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Corrolaire

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Corrolaire

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Corrolaire

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{n} = 2^n$.

Coefficients de Binôme

Définition

Le nombre de parties contenant $\mathbf{k}$ éléments d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ ou C_k^n.

Corrolaire

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{n} = 2^n$.

Proposition

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (0 < k < n) \tag{14}$$

Proposition

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (0 < k < n) \tag{14}$$

- **Indice preuve**: Pour un un ensemble E de cardinal n. Considérer un élément $x \in E$, Diviser les parties de taille k en ceux qui contiennent x et ce ceux qui ne le contiennent pas.

Proposition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{15}$$

Proposition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{15}$$

Proposition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{15}$$

- **Indice Preuve:** Utiliser une récurrence sur n et la proposition précédante du cours.

1. Donner le nombre d'injections entre un ensemble de cardina $\mathbf{n}$ et un autre de cardinal $n+1$.

1. Donner le nombre d'injections entre un ensemble de cardina $\mathbf{n}$ et un autre de cardinal $n+1$.
2. Calculer le nombre main de taille 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Donner le nombre d'injections entre un ensemble de cardina $\mathbf{n}$ et un autre de cardinal $n + 1$.
2. Calculer le nombre main de taille 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.
3. Calculer le nombre de listes de taille 3 qu'on peut construire avec des chiffres (< 10). Par exemple $(1, 2, 3)$ et $(2, 2, 3)$ mais pas $(10, 2, 3)$.