Travaux dirigées
Polynômes

A.Belcaid

December 7, 2022

Contents

;

Chapter 1

1.1 Exercice 1

Question 1: Division Euclidienne

Pour les trois cas listés, calculer la division euclidienne de P par Q.

1. $P = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ et $Q = X^2 + 3X - 1$.
2. $P = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ et $Q = X^2 - X - 7$.
3. $P = X^5 - X^2 + 2$ et $Q = X^2 + 1$.

Proof: 1. Pour le premier cas on obtient:

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 & X^2 + 3X - 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 - 3X^3 + X^2 \phantom{{}+19X-7} & X^2 + 2X + 7 \\ \cline{1-1}
2X^3 + 13X^2 + 19X \phantom{{}-7} & \\
-2X^3 - 6X^2 + 2X \phantom{{}-7} & \\ \cline{1-1}
7X^2 + 21X - 7 & \\
-7X^2 - 21X + 7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2. Pour le deuxième cas:

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 & X^2 - X - 7 \\ \cline{2-2}
-X^4 + X^3 + 7X^2 \phantom{{}+27X+38} & X^2 - 3X - 5 \\ \cline{1-1}
-3X^3 - 2X^2 + 27X \phantom{{}+38} & \\
3X^3 - 3X^2 - 21X \phantom{{}+38} & \\ \cline{1-1}
-5X^2 + 6X + 38 & \\
5X^2 - 5X - 35 & \\ \cline{1-1}
X + 3 &
\end{array}
$$

3. Finalement pour le troisième cas:

$$
\begin{array}{r|l}
X^5 \qquad - X^2 \qquad + 2 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-X^5 - X^3 \phantom{{}-X^2+X+2} & X^3 - X - 1 \\ \cline{1-1}
-X^3 - X^2 \phantom{{}+X+2} & \\
X^3 \qquad + X \phantom{{}+2} & \\ \cline{1-1}
-X^2 + X + 2 & \\
X^2 \qquad + 1 & \\ \cline{1-1}
X + 3 &
\end{array}
$$

☺

1.2 Exercice 2

Question 2: Expression du reste

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$ vaut 1 et que celui de P par $(X-b)$ vaut -1.

1. Évaluer l'image $P(a)$ et $P(b)$?
2. On note $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Quel sera le degré de R?
3. En déduire l'expression de R.

Proof: 1. On sait que

$$P(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)Q_1(x) + 1$$

Ceci implique que

$$P(a) = 1$$

De meme on obtient que

$$P(b) = -1$$

2. Puisque le cardinal de $(X-a)(x-b)$ est 2 le reste R doit être au plus de cardinal 1.

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(x) + \alpha X + \beta$$

On evalue cette expression en a et en b, on trouve le systeme:

$$\begin{cases} \alpha a + \beta & = 1 \\ \alpha b + \beta & = -1 \end{cases}$$

La résolution de système nous donne:

$$\alpha = \frac{2}{a-b} \text{ et } \beta = \frac{-a-b}{a-b}$$

Le reste recherché est donc

$$\frac{2}{a-b}\mathrm{X} + \frac{-a-b}{a-b}$$

😄

1.3 Exercice 3

Question 3

On se propose de déterminer l'ensemble

$$E = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \;\; P(X^2) = (X^3+1)P(X)\right\}$$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi
   que le polynôme $X^3 - 1$ sont dans E.

2. Soit $P \in E$, non nul.
   (a) Démontrer que $P(1) = 0$ puis que $P^{'}(0) = P^{''}(0) = 0$.
   (b) En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P(X) = \lambda(X^3 - 1)$$

3. En déduire l'ensemble E.

Proof: 1. On demontre que le polynôme nul et $X^3 - 1$ sont dans E..

- On a
  $$0(X^2) = 0 = (X^3+1)0(X)$$
  donc le polynome nul est dans E.
- Soit $P_1 = X^3 - 1$, on as:
  $$P_1(X^2) = X^6 - 1$$
  et
  $$(X^3+1)P_1(X) = (X^3+1)(X^3-1) = X^6 - 1$$
  Ainsi on as aussi que P_1 est dans E.

2. On considere alors $P \in E$. selon la definition on aura:
   $$P(1) = (1+1)P(1)$$
   ce qui implique que
   $$P(1) = 0$$
   On dérive la relation de l'équation on obtient:
   $$2P^{'}(X^2) = 3X^2P(X) + (X^3+1)P^{'}(X)$$
   ce qui prouve que $P^{'}(0) = 0$.
   On dérive on deuxième fois:
   $$4P^{''}(X^2) = 6XP(X) + 3X^2P^{''}(X) + 3X^2P^{'}(X) + (X^3+1)P^{''}(X)$$
   on injecte 0 dans cette équation on trouve que:
   $$P^{''}(0) = 0$$

3. Une analyse de dégrée de P selon l'équation vérifiée implique que :
   $$2deg(P) = 3 + deg(P)$$

Ce qui implique que

$$deg(P) = 3$$

Ainsi l'expression de la division euclidienne d'un tel polynome par $X^3 - 1$ donnera :

$$P = \lambda(X^3 - 1) + \beta \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Sachant que $P(1) = 0$ on trouve forcement que $\beta = 0$. Ainsi

$$P = \lambda(X^3 - 1)$$

😄