Travaux dirigés

Université Euromed Fès

Polynômes

Exercice 1 (★):

Pour les trois cas listés, calculer la division euclidienne de P par Q.

1. $P = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ et $Q = X^2 + 3X - 1$.
2. $P = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ et $Q = X^2 - X - 7$.
3. $P = X^5 - X^2 + 2$ et $Q = X^2 + 1$.

Exercice 2 (★ ★):

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ vaut 1 et que celui de P par $(X - b)$ vaut -1.

1. Évaluer l'image $P(a)$ et $P(b)$?
2. On note $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. Quel sera le degré de R?
3. En déduire l'expression de R.

Exercice 3 (★ ★):

On se propose de déterminer l'ensemble

$$E = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \ \ P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\right\}$$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $X^3 - 1$ sont dans E.
2. Soit $P \in E$, non nul.
   (a) Démontrer que $P(1) = 0$ puis que $P^{'}(0) = P^{''}(0) = 0$.
   (b) En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P(X) = \lambda(X^3 - 1)$$
3. En déduire l'ensemble E.

Exercice 4 (★):

Pour chaque cas, déterminer le **PGCD** entre P et Q.

1. $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
2. $P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.
3. $P = X^n - 1$ et $Q = (X - 1)^n$.

Exercice 5 (★):

Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$AU + BV = 1$$

où $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$.

Exercice 6 (★):

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants. Montrer que l'équivalence entre:

1. P et Q ont un facteur commun.
2. il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tel que
   $$AP = BQ$$
   et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\quad \deg(B) < \deg(P)$

Exercice 7 (★):

Quel est pour $n \geq 1$ l'ordre de multiplicité de 2 du polynôme:

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}$$

Exercice 8 (★ ★):

Soit $P(X) = a_nX^n + \ldots + a_0$ un polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$. On suppose aussi que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ tel que $p \wedge q = 1$.

1. Développer que la forme $P(r) = 0$.
2. Démontrer que $p \mid a_0$.
3. Prouver que $q \mid a_n$

4. En déduire que $P = X^5 - X^2 + 1$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 9 (★):

1. Le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + 1$ est il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?
2. La relation $P\mathcal{R}Q \iff P$ divise Q est-elle une relation d'ordre?

Exercice 10 (★):

Pour chaque polynôme, donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

1. $P_1(X) = X^4 + 1$
2. $P_2(X) = X^8 - 1$
3. $P_3(X) = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$

Exercice 11 (★ ★):

Soit P le polynôme définit par:

$$P(X) = 2X^4 + X^2 - 3$$

1. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 (★ ★ ★):

Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Même question pour $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 (★ ★ ★):

On considère les deux polynômes suivants:

- $P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$
- $Q(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$.

1. Sachant que P et Q admettent une racine **commune** a, Quelle est la relation entre $(X - a)$ et pgcd(P, Q)?
2. En appliquant l'algorithme d'Euclide, montrer que le **pgcd** de P et Q est $X - 3$?
3. Calculer le polynôme P_1 tel que
$$P = (X - 3)P_1$$
4. Même question pour Q_1 tel que:
$$Q = (X - 3)Q_1$$
.
5. En déduire une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P et Q.