

- Vous avez **90 minutes** pour compléter l'examen

Nom	
Prénom	
Nom étudiant Devant vous:	
Nom étudiant Derrière:	

Notes

Q1. (*) Questions de cours	/5
Q2. Applications	/7
Q3. Polynômes	/4
Q4. Applications linéaires	/4
Total	/20

Q1. [5 pts] (*) Questions de cours

1. Soient A , B et C trois ensembles de E , développer les expressions suivantes:
 - (a) $A \cap (B \cup C)$
 - (b) $A \cup (B \cap C)$
 - (c) $(A \cap B)^C$
2. Soit $f : A \longrightarrow B$ une application de A et B . Donner l'expression des ensembles suivants:
 - $f(A)$.
 - $f^{-1}(B)$.
3. Soient deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, donner la définition de:
 - $\text{pgcd}(P, Q)$.
 - P est **irréductible**.
4. Soit E un K -espace vectoriel et F un sous ensemble de E . Donner une condition suffisante pour que F soit un **sous espace vectoriel** de E .

Q2. [7 pts] Applications

1. Soit $f : A \longrightarrow B$ une application. Pour toutes parties A de E et B de F , montrer que:
 - si f est injective alors $f^{-1}(f(A)) = A$.
 - si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$.
 - Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

2. Montrer que la fonction:

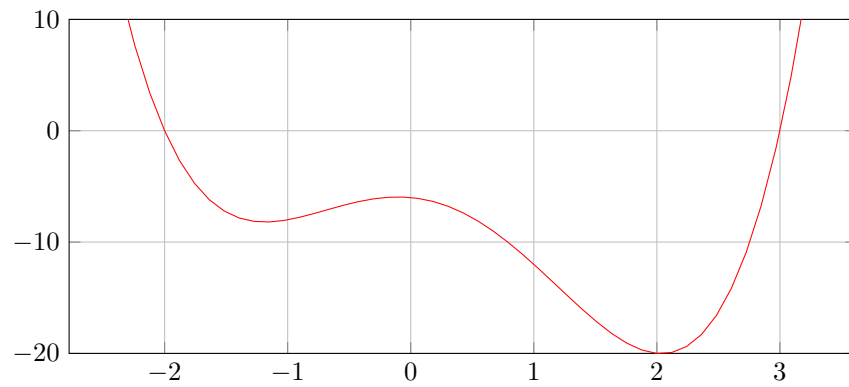
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ x & \longrightarrow & \frac{2x-1}{x+2} \end{array}$$

Q3. [4 pts] Polynômes

On considère le polynôme:

$$P = X^4 - X^3 - 5X^2 - X - 6 \tag{1}$$

- Vérifier que 3 est une racine de P .
- Si on vous donne le graphe de polynôme entre $[-6, 6]$:
Extraire une autre racine de α de P .
- En déduire une décomposition en facteurs **irréductibles** de P dans $\mathbb{R}[X]$.



Q4. [4 pts] Applications linéaires

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie pour chaque $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. A-t-on:

$$\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^4$$