Ecole Nationale des Sciences Appliques.

Nom: ______________ **Prenom:** ______________

Discipline: ______________ **Date:** ______________

- Vous avez **90 minutes**.
- Vérifier que vous disposez de toutes les pages.
- L'échange d'outils est strictement **interdit**.

Question:	Ensembles	Applications	Relations	Groupes	Total
Points:	5	5	6	4	20

1. Soient A, B et C des sous-ensembles de E, montrer les affirmations suivantes :
   (a) $\boxed{2}$
   $$A \cup B \cup C = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) \cup (A \cup B \cup C)$$
   (b) Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ alors $B \subset C$. $\boxed{3}$
   Que peut on dire sur l'implication inverse ?

2. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ces parties. On considère l'application f $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toutes parties disjoints de E, on ait
   $$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$
   (a) Démontrer que $f(\emptyset) = 0$ $\boxed{2}$
   (b) Monter que pour toutes parties A et B de E on a : $\boxed{3}$
   $$f(A \cup B) - f(A \cap B) = f(A) + f(B)$$

3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \iff x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$
   (a) Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. $\boxed{2}$
   (b) Déterminer la classe d'équivalence de 0 puis en déduire celle de 1. $\boxed{2}$
   (c) Calculer la classe d'équivalence d'un élément quelconque $a \in \mathbb{R}$. $\boxed{2}$

4. (a) On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\boxed{2}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.

(b) On munit $\mathbb{R}^{*+}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\boxed{2}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+} \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Montrer que $*$ est commutative, associative, que 0 est un élément neutre. Montrer qu'aucun élément de $\mathbb{R}^{*+}$ n'admet de symétrique pour $*$.