

Ensembles et Applications

A.Belcaid

Université Euro Méditerranéenne de Fès

19 octobre 2020

① Ensembles et Applications.

- Ensembles.
- Applications.
- Injection/Surjection/Bijection.
- Ensembles finis.
- Relations d'équivalence.

② Nombres Complexe

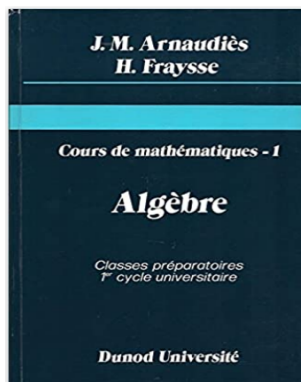
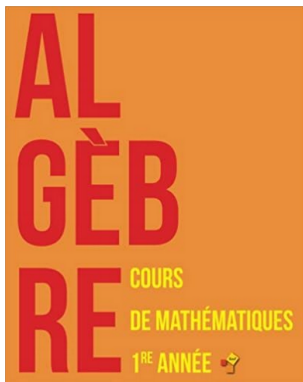
- Définition.
- Equation de second ordre.
- Trigonométrie.
- Relation avec la géométrie.

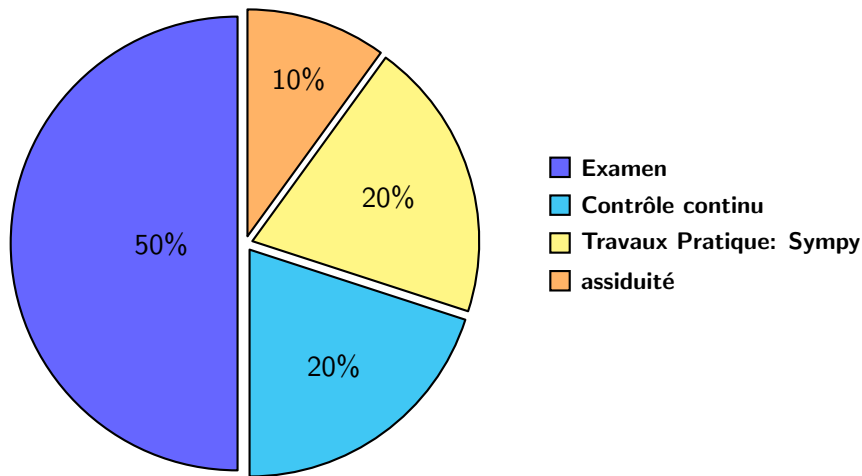
③ Théorie de groupes

- Groupe.
- Sous groupes.
- Morphisme de groupe.
- Groupe de permutation.

④ Polynômes

- Définition.
- Arithmétique sur les polynômes.
- Racine de polynômes.
- Fractions rationnelles.





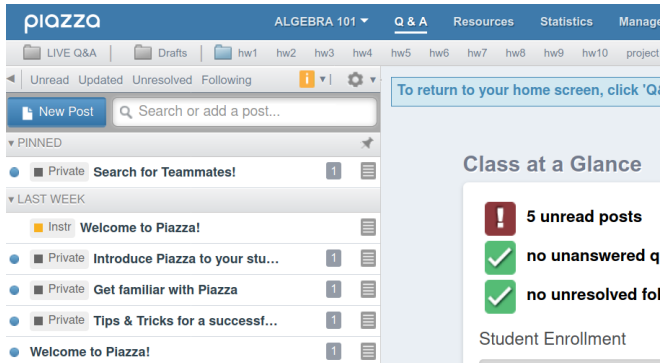


Figure: Plateforme de discussion

piazza.com/ueuromed.org/fall2020/algebra101/home

Dans votre apprentissage de mathématiques, vous avez utiliser les ensembles suivants:

- 1 Ensemble des nombres **entiers naturels**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- 2 Ensemble des nombres **entiers relatifs**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- 3 Ensemble des nombre **rationnels**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

- 4 Ensemble des **réels** \mathbb{R} comme $\sqrt{2}$, π , et $\log(2)$.

- 5 Finalement l'ensemble des nombres **complexes** \mathbb{C} .

Définition

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs {rouge, vert, bleu}.

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs {rouge, vert, bleu}.
- Ensemble des nombres **pairs**:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$$

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** à cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs {rouge, vert, bleu}.
- Ensemble des nombres **pairs**:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$$



$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}$$

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** à cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs {rouge, vert, bleu}.
- Ensemble des nombres **pairs**:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$$



$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}$$



$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$$

Appartenance

Appartenance

- Si un élément x appartient à un ensemble E . On écrit:

$$x \in E \quad (1)$$

Appartenance

- Si un élément x appartient à un ensemble E . On écrit:

$$x \in E \quad (1)$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \quad (2)$$

Appartenance

- Si un élément x appartient à un ensemble E . On écrit:

$$x \in E \quad (1)$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \quad (2)$$

Exemple

Appartenance

- Si un élément x appartient à un ensemble E . On écrit:

$$x \in E \quad (1)$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \quad (2)$$

Exemple

Appartenance

- Si un élément x appartient à un ensemble E . On écrit:

$$x \in E \quad (1)$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \quad (2)$$

Exemple

$$2 \in \mathbb{N}. \quad -2 \notin \mathbb{N}. \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Appartenance

- Si un élément x appartient à un ensemble E . On écrit:

$$x \in E \quad (1)$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \quad (2)$$

Exemple

$$2 \in \mathbb{N}. \quad -2 \notin \mathbb{N}. \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Ensemble vide

Un ensemble **particulier** est l'ensemble **vide** note \emptyset et qui ne contient aucun élément.

2. Relations entre ensemble

2. Relations entre ensemble

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

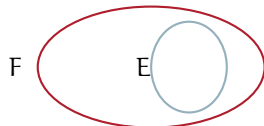


Figure: Inclusion

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

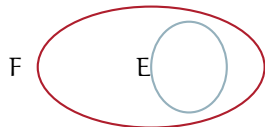


Figure: Inclusion

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

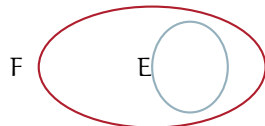


Figure: Inclusion

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

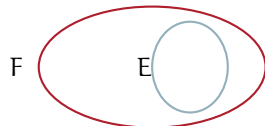


Figure: Inclusion

Négation

$$E \not\subset F \iff$$

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

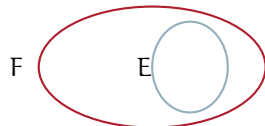


Figure: Inclusion

Négation

$$E \not\subset F \iff$$

2. Relations entre ensemble

Inclusion

On note $E \subset F$ si **tous** les éléments de E sont dans F .

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \quad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F .

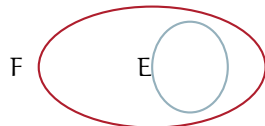
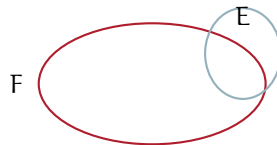


Figure: Inclusion

Négation

$$E \not\subset F \iff (\exists x \in E) \text{ tel que } x \notin F \quad (4)$$



Égalité

$$E = F \iff (E \subset F) \text{ et } (F \subset E) \quad (5)$$

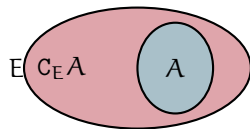
Égalité

$$E = F \iff (E \subset F) \text{ et } (F \subset E) \quad (5)$$

Complémentaire

Si $A \subset E$, on note son **complémentaire** $C_E A$ l'ensemble:

$$C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\} \quad (6)$$



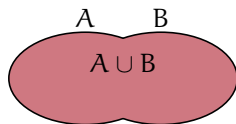
- Dans la littérature on trouve aussi les notations A^c , \overline{A} ou $E \setminus A$.

Union

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **l'union** $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (7)$$

On doit mentionner que le **ou** n'est pas exclusive, i.e x peut appartenir ou deux ensembles en même temps.

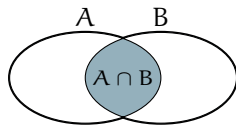


Intersection

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **l'intersection** $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \quad (8)$$

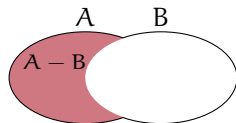
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**



Différence

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **la différence** $A - B$:

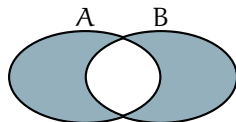
$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} \quad (9)$$



Différence symétrique

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **la différence symétrique** $A \Delta B$:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (10)$$



Mini Exercices

- 1 Donner l'ensemble $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$
- 2 Calculer l'ensemble $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$
- 3 Calculer $\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\}$.
- 4 Donner $\{1, 2, 3\} \Delta \{3, 4, 5\}$.
- 5 Soit $B = C_E A$, evaluer $A \cup B$ et $A \cap B$.

Intersection

Etant donné les deux ensembles:

$$A = \{2, a^2 - 4a + 7\}$$

$$B = \{a + 1, a^2 + 1, a^2 - 1\}$$

Sachant que $A \cap B = \{4\}$, quelle est la valeur de a ?

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**
 - $A \cup B = B \cup A$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**
 - $A \cup B = B \cup A$
 - $A \cap B = B \cap A$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**
 - $A \cup B = B \cup A$
 - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité:**

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

- **Associativité:**

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

- **Associativité:**

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

- **Associativité:**

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- **Idempotente:**

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

- **Associativité:**

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- **Idempotente:**

- $A \cup A = A$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Commutativité:**

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

- **Associativité:**

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- **Idempotente:**

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Distributivité:**

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Distributivité:**

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Distributivité:**

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Distributivité:**

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Loi de Morgan:**

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Distributivité:**

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Loi de Morgan:**

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Soit A , B et C des ensembles de E .

Règles de calcul

- **Distributivité:**

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Loi de Morgan:**

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_E = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_F$

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_E = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_F$

- Supposons que $x \in E \implies x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$:

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \quad (11)$$

$$x \in A \implies x \in (A \cup C) \quad (12)$$

Selon (11) et (12), on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ainsi:

$$E \subset F \quad (13)$$

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_E = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_F$

- Supposons que $x \in E \implies x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$:

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \quad (11)$$

$$x \in A \implies x \in (A \cup C) \quad (12)$$

Selon (11) et (12), on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ainsi:

$$E \subset F \quad (13)$$

- Supposons que $x \in F \implies x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$.

On traite alors deux cas:

- $x \in A \implies x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in E$

- $x \notin A \implies x \in B$ et $x \in C \implies x \in (B \cap C) \implies x \in E$

$$F \subset E \quad (14)$$

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_E = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_F$

- Supposons que $x \in E \implies x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$:

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \quad (11)$$

$$x \in A \implies x \in (A \cup C) \quad (12)$$

Selon (11) et (12), on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ainsi:

$$E \subset F \quad (13)$$

- Supposons que $x \in F \implies x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$.

On traite alors deux cas:

- $x \in A \implies x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in E$

- $x \notin A \implies x \in B$ et $x \in C \implies x \in (B \cap C) \implies x \in E$

$$F \subset E \quad (14)$$

Selon (13) et (14), on conclut que:

$$E = F \quad (15)$$

Mini Exercises

Mini Exercices

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$

Mini Exercices

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$
- 2 Calculer $A \cap \emptyset$

Mini Exercises

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$
- 2 Calculer $A \cap \emptyset$
- 3 Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$

Mini Exercices

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$
- 2 Calculer $A \cap \emptyset$
- 3 Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
- 4 Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.

Mini Exercices

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$
- 2 Calculer $A \cap \emptyset$
- 3 Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
- 4 Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.
- 5 Prouver que $A \subset B \iff B^c \subset A^c$

Mini Exercices

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$
- 2 Calculer $A \cap \emptyset$
- 3 Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
- 4 Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.
- 5 Prouver que $A \subset B \iff B^c \subset A^c$
- 6 On suppose que $E = \{1, 2, \dots, 9\}$, et soit $A = \{2, 5, 7, 3, 1\}$ et $B = \{9, 8, 7, 5, 2\}$. En utilisant la loi de **Morgan**, calculer $A^c \cup B^c$.

Mini Exercices

- 1 Évaluer $A \cup \emptyset$
- 2 Calculer $A \cap \emptyset$
- 3 Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
- 4 Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.
- 5 Prouver que $A \subset B \iff B^c \subset A^c$
- 6 On suppose que $E = \{1, 2, \dots, 9\}$, et soit $A = \{2, 5, 7, 3, 1\}$ et $B = \{9, 8, 7, 5, 2\}$. En utilisant la loi de **Morgan**, calculer $A^c \cup B^c$.
- 7 Donner une démonstration des deux lois de **Morgan**.

Ensemble des parties

Pour un ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous ensembles (parties) de E .

Par exemple, pour l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad (16)$$

Ensemble des parties

Pour un ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous ensembles (parties) de E .

Par exemple, pour l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad (16)$$

Exercice

Donner l'ensemble $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$

Définition

Soit deux ensemble E et F , on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \quad (17)$$

Définition

Soit deux ensemble E et F , on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \quad (17)$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

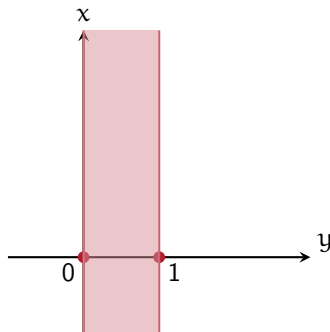
Définition

Soit deux ensemble E et F, on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \quad (17)$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R} \times [0, 1] = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$



Mini Exercices

Mini Exercices

- Représenter graphiquement l'ensemble suivant:

$$([0, 1[\cup]2, 3[) \times [-1, 1] \quad (18)$$

Mini Exercices

- Représenter graphiquement l'ensemble suivant:

$$([0, 1[\cup]2, 3[) \times [-1, 1] \quad (18)$$

- Même question pour:

$$(\mathbb{R} - [0, 1]) \times ([0, 1]) \quad (19)$$

Mini Exercices

- Représenter graphiquement l'ensemble suivant:

$$([0, 1[\cup]2, 3[) \times [-1, 1] \quad (18)$$

- Même question pour:

$$(\mathbb{R} - [0, 1]) \times ([0, 1]) \quad (19)$$

- Exprimer le cube suivant en utilisant le produit:

