Travaux dirigées
Ensembles

A.Belcaid

November 3, 2022

Contents

Chapter 1

1.1 Exercice 1

Question 1

Montrer que $\emptyset \subset X$, pour tout ensemble X.

Proof: On procède par **contraposition**:

On suppose alors

$$\exists X \subset E \mid \emptyset \not\subset X$$

Ce qui se traduit par:

$$\exists x \in \emptyset \text{ et } x \notin X$$

Ce qui est absurde car l'expression $x \in \emptyset$ est toujours **fausse**.

1.2 Exercice 2

Question 2

Soit E un ensemble donné et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$, montrer par contraposition les assertions suivantes:

1. $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

Proof: 1. On procède la aussi par **contraposition**. On suppose alors que $A \neq B$ et on démontre que $A \cap B \neq A \cup B$.

Puisque $A \neq B$, on peut supposer (**sans perte de généralité**) que:

$$\exists x \in A \quad \text{et } x \notin B$$

Note:-
En cas contraire, on peut permuter le rôle de A et B et la démonstration reste la même.

Ainsi

$$x \in A \cup B \quad et \quad x \notin A \cap B$$

Ce qui prouve que:

$$A \cup B \neq A \cap B$$

2. Pour la deuxième partie de la question: On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ et on démontre que $B = C$.

   (a) On commence par la première inclusion $B \subset C$.

   Soit alors $x \in B$. Alors on doit traiter deux cas:

   i. $x \in A \implies x \in A \cap B = A \cap C \implies x \in C$

   ii. $x \notin A$ et $x \in A \cup B = A \cup C$.
   puisque $x \notin A$ et $x \in A \cup C$ on conclut forcement que $x \in C$.

   (b) L'inclusion inverse suit le même processus.

😄

1.3 Exercice 3

Question 3

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E vers F.

Démontrer que:

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$

Proof:

1. On suppose que $A \subset B$ et on demontre que $f(A) \subset f(B)$.

   Soit $y \in f(A) \implies \exists x \in A$ tel que $y = f(x)$ Comme $A \subset B$, on conclut alors que:

   $$\exists x \in B \ \text{ tel que } y = f(x) \implies y \in f(B)$$

   Ainsi

   $$f(A) \subset f(B).$$

2. On démontre que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Soit alors $y \in f(A \cap B) \implies \exists y \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.

   On conclut que

   $$\begin{cases} \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x) & \implies y \in f(A). \\ \exists x \in B \text{ tel que } y = f(x) & \implies y \in f(B). \end{cases}$$

   Ainsi on conclut que

   $$y \in f(A) \cap f(B)$$

3. On procède par double inclusion:

(a) On demontre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Soit alors $y \in f(A \cup B) \implies \exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Étant le rôle symétrique que joue A et B, on peut supposer **sans perte de généralité** que

$$x \in A \implies y \in f(A) \implies y \in f(A) \cup f(B)$$

(b) On démontre que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Soit alors

$$y \in f(A) \cup f(B)$$

Ainsi on aura que

$$\begin{cases} \exists x \in A \text{ tel que} & y = f(x) \\ \text{ou} & \\ \exists x \in B \text{ tel que} & y = f(x) \end{cases}$$

on conclut alors que

$$\exists x \in A \cup B \text{ tel que } y = f(x) \implies y \in f(A \cup B)$$

On utilise la simple définition:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cup B) &= \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in A \cup B\} \\ &= \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in A\} \cup \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\} \\ &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

4. On as

$$\begin{aligned} f^{-1}(F \backslash A) &= \{x \in E \text{ tel que } f(x) \notin A\} \\ &= \overline{\{x \in E \text{ tel que } f(x) \in A\}} \\ &= E \backslash f^{-1}(A) \end{aligned}$$

😃

1.4 Exercice 4

Question 4

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Proof:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= \big[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)\big] \cap (C \cup A) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{aligned}$$

😃

Note:-

Dans la deuxième ligne de l'équation, on a élimine des ensembles redondants comme

$$(A \cap B) \cup (A \cap B) = (A \cap B)$$

1.5 Exercice 5

Question 5

Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

1. $(F \subset G \iff F \cup G = G)$
2. $(F \subset G \iff \complement F \cup G = E)$.

En déduire que :

1. $(F \subset G \iff F \cap G = F)$
2. $(F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset)$.

Proof:

1. On démontre la premier eh implication:
   - On suppose que $F \subset G$. On sait deja que pour n'importe quel deux ensembles on $G \subset F \cup G$. On prend alors un $x \in F \cup G \implies \{x \in F \text{ ou } x \in G\} \implies \{x \in G \text{ ou } x \in G\} \implies x \in G.$. Ainsi on conclut que
   $$F \subset G \implies F \cup G = G$$
   - **Implication inverse**: On suppose que $F \cup G = G$.

     Soit alors $x \in F \implies x \in \underbrace{F \cup G}_{G} \implies x \in G$
2. De même on procède par double implication.
   - **On suppose que** $F \subset G$. On a deja que $\complement F \cup G \subset E$ pour n'importe quel deux ensembles dans E. On demontre alors l'inclusion inverse:

     Soit $x \in E \implies x \in G \text{ ou } x \notin G \implies x \in G \text{ ou } x \in \complement G$
     et puisque $F \subset G \implies \complement G \subset \complement F$. On conclut alors que
     $$x \in G \text{ ou } x \in \complement F$$

   Pour la deuxième partie on utilise les premiers résultats.

1. On a
$$F \subset G \iff \complement G \subset \complement F \underbrace{\iff}_{1} \complement G \cup \complement F = \complement F \iff G \cap F = F$$
2.
$$F \subset G \underbrace{\iff}_{2} \complement F \cup G = E \underbrace{\iff}_{\text{morgan}} F \cap \complement G = \emptyset$$

😃

1.6 Exercice 6

Question 6

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

- Écrire le produit cartésien $A \times B$.
- Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Proof:

- $$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant 4 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 5\}$$

Note:-

On peut aussi lister tous les couples qui ont un cardinal de **20**

- Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n. Ainsi

$$Card\big(\mathcal{P}(A \times B)\big) = 2^{20}$$

😊

1.7 Exercice 7

Question 7

Soit $A \subset E$, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques.
Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$.
2. fg.
3. $f + g - fg$.
4. $f + g - 2fg$

Proof: Je vais utiliser la notation Π_A pour dénoter la fonction **caractéristique** d'un ensemble A. Ainsi $f = \Pi_A$ et $g = \Pi_B$.

1. $$1 - f = \Pi_A = \begin{cases} 1-1 & x \in A \\ 1-0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \notin \overline{A} \\ 1 & x \in \overline{A} \end{cases} = \Pi_{\overline{A}}$$

2. De même on trouve que
$$fg = \Pi_A\,\Pi_B = \Pi_{A\cap B}.$$

3. $$f + g - fg \;=\; \Pi_A + \Pi_B - \Pi_A\,\Pi_B \;=\; \Pi_{A\cup B}$$

4. $$f + g - 2fg \;=\; \Pi_A + \Pi_B - 2\Pi_A\,\Pi_B \;=\; \Pi_{A\Delta B}$$

😊

1.8 Exercice 8

Question 8

Soit un ensemble E et deux parties A et B de E.

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que

$$A \triangle A' = A' \triangle A = X$$

.

Indice: *Il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

Proof: Par définition du cours on as :

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

1.

$$\begin{array}{rcl} A \triangle B & = & \{x \in E \mid x \in (A \cup B) \text{ et } x \notin (A \cap B)\} \\ & = & \Big\{x \in E \mid \big(x \in A \text{ et } x \notin (A \cap B)\big) \text{ ou } \big(x \in B \text{ et } x \notin (A \cap B)\big)\Big\} \\ & = & \Big\{x \in E \mid \big(x \in A \text{ et } x \notin B\big) \text{ ou } \big(x \in B \text{ et } x \notin A\big)\Big\} \\ & = & (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \end{array}$$

On reprend la première question mais cette fois en utilisant la notion de fonction **caractéristique**: On admet que

$$\Pi_A = \Pi_B \iff A = B$$

Note:-

Ce qui veut dire que l'égalité des fonctions caractéristiques est équivalente a l'égalité des ensembles. Ainsi pour démontrer que deux ensembles sont égales, il suffit de démonter que leurs fonctions caractéristiques sont égales.

On a déjà établi que

- $\Pi_{\overline{A}} = 1 - \Pi_A$
- $\Pi_{A \cap B} = \Pi_A \Pi_B$.
- $\Pi_{A \cup B} = \Pi_A + \Pi_B - \Pi_{A \cap B}$.
- $\Pi_{A \triangle B} = \Pi + A + \Pi_B - 2\Pi_A \Pi_B$

Il nous reste alors an en déduire la fonction caractéristique de $A \backslash B$. Puisque

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

On conclut que

$$\begin{array}{rcl} \Pi_{A \backslash B} & = & \Pi_A \, \Pi_{\overline{B}} \\ & = & \Pi_A \, (1 - \Pi_B) \\ & = & \Pi_A - \Pi_A \Pi_B \end{array}$$

Il suffit maintenant de prouver que

$$\Pi_{(A\backslash B)\cup(B\backslash A)} = \Pi_A + \Pi_B - 2\Pi_A\Pi_B$$

On procède par les relations établies:

$$\begin{aligned}
\Pi_{(A\backslash B)\cup(B\backslash A)} &= \Pi_{A\backslash B} + \Pi_{B\backslash A} - \Pi_{A\backslash B}\Pi_{B\backslash A} \\
&= \Pi_A - \Pi_A\Pi_B + \Pi_B - \Pi_{A\backslash B}\Pi_{B\backslash A} \\
&= \Pi_A - \Pi_A\Pi_B + \Pi_B - (\Pi_A - \Pi_A\Pi_B)(\Pi_B - \Pi_A\Pi_B) \\
&= \Pi_A + \Pi_B - 2\Pi_A\Pi_B
\end{aligned}$$

😄

Note:-

Dans le calcul de la derrières ligne on utilise l'astuce que

$$\Pi_A\Pi_B\Pi_A = \Pi_{A\cap B\cap A} = \Pi_{A\cap B} = \Pi_A\Pi_B$$

Proof: • On procède par fonction caractéristique pour calculer

$$\Pi_{(A\triangle B)\triangle C} \text{ et } \Pi_{A\triangle(B\triangle C)}.$$

- – **Existence** On sait que

  $$\forall A \subset E \quad A\triangle\emptyset = \emptyset\triangle A = (A\cup\emptyset)\backslash(A\cap\emptyset) = A\backslash\emptyset = A$$

  – **Unicité** On suppose qu'il existe un ensemble $B \neq \emptyset$ tel que: $A\triangle B = B\triangle A = A$ Puisque $B \neq \emptyset$ soit alors $x \in B$. On as deux cas:

  1. $x \in A \implies x \notin A\triangle B \implies x \notin A$. Absurde.
  2. $x \notin A \implies x \in A\triangle B \implies x \in A$. Absurde

  Ainsi $\emptyset$ est l'**unique** élément neutre de la différence symétrique.

- – **Existence**

  $$\forall A \subset E \quad A\triangle A = (A\cup A)\backslash(A\cap A) = A\backslash A = \emptyset$$

  – **Unicité** On suppose qu'il existe un ensemble $B \neq A$. tel que

  $$A\triangle B = B\triangle A = \emptyset$$

  Puisque

  $$B \neq A \implies \exists x \in B \text{ et } x \notin A \implies x \in B\backslash A \implies x \in A\triangle B = \emptyset$$

  .
  Ce qui est absurde.

😄

1.9 Exercice 9

Question 9

Soient $A, B \subset E$.
Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Proof: Traitons d'abord la première équation. Puisque $A \subset A \cup X$. Une telle équation ne peut avoir une solution que si $A \subset B$. Supposons donc cette condition **remplie**.
On détermine alors toutes les solutions. Supposons d'abord que X est une solution. Puisque $X \subset A \cup X$, on a nécessairement $X \subset B$. De plus, X doit nécessairement contenir tous les éléments de B qui ne sont pas dans A. Autrement dit

$$B \backslash A \subset X \ \subset B$$

Réciproquement, soit X une partie de $\mathcal{P}(E)$ telle que

$$B \backslash A \subset X \subset B \implies A \cup X \subset B \cup B = B$$

De plus on as

$$B = A \cup (B \backslash A) \subset A \cup X$$

On conclut alors que

$$A \cup X = B$$

Note:-

Dans toutes les solutions sont les parties X tel que

$$B \backslash A \subset X \subset B.$$

La deuxième équation se traite de façon similaire puisque on peut revenir a la première Question en appliquant le **complémentaire**. On trouve la solution X doit vérifier:

$$B \subset X \subset (B \cup \overline{A}).$$

😆

1.10 Exercice 10

Question 10: Composition

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

- A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Proof:

1. On calcule $f \circ g$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = f(x^2 - 1) = 3x^2 - 2$$

2. De même on calcule l'expression de $g \circ f$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = g(3x + 1) = 9x^2 + 6x$$

Ainsi on conclut que

$$(f \circ g) \neq (g \circ f)$$

😆

Note:-

Le but de l'exercice est d'inciter que la composition de fonctions n'est pas **commutative**

1.11 Exercice 11

Question 11

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants:
   - $f([-3,-1])$
   - $f([-2,1])$
   - $f([-3,-1] \cup [-2,1])$
   - $f([-3,-1] \cap [-2,1])$
2. Mêmes questions avec les ensembles:
   - $f^{-1}(]-\infty, 2])$
   - $f^{-1}([1,+\infty[)$
   - $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1,+\infty[)$
   - $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1,+\infty[)$

Proof: Pour la première partie:

1. $f([-3,-1]) = [f(-1), f(-3)] = [1,9]$.
2. $f([-2,1]) = f([-2,0]) \cup f([0,1]) = [0,4] \cup [0,1] = [0,4]$
3. $f\left([-3,-1] \cup [-2,1]\right) = f([-3,-1]) \cup f([-2,1]) = [1,9] \cup [0,4] = [0,9]$.
4. $f\left([-3,-1] \cup [-2,1]\right) = f([-2,-1]) = [1,4]$.

Pour la deuxième partie:

1. $f^{-1}\left(]-\infty, 2]\right) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
2. $f^{-1}\left([1,\infty[\right) = [1,\infty[$
3. $f^{-1}\left([-\infty, 2] \cup [1,\infty]\right) = [-\sqrt{2}, \infty[$
4. $f^{-1}\left([-\infty, 2] \cap [1,\infty]\right) = f^{-1}\left([1,2]\right) = [1, \sqrt{2}]$

😃

1.12 Exercice 12

Question 12

On définit les cinq ensembles suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
A_1 & = & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+y<1\right\} \\
A_2 & = & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+y>-1\right\} \\
A_3 & = & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |x+y|<1\right\} \\
A_4 & = & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |x|+|y|<1\right\} \\
A_5 & = & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |x-y|<1\right\}
\end{array}
$$

1. Représenter ces cinq ensembles.

2. En déduire par une démonstration géométrique que

$$(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

Proof: ☺

1.13 Exercice 13

Question 13

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit

$$f^n = \begin{cases} \text{id} & \text{si } n=0 \\ f^{n+1} = f^n \circ f & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$
$$f^{n+1} = f \circ f^n$$
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$$

Proof: Pour la première question on procède par récurrence:

1. **Cas initial** pour $n=0$. On as
$$f^{0+1} = f = f \circ id = f \circ f^0.$$
2. **Hérédité** On suppose que la relation est vraie pour n et on la démontre pour $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n \circ f && (1.1)\\ &= \underbrace{(f \circ f^{n-1})}_{\text{Hérédité}} \circ f && (1.2)\\ &= f \circ (f^{n-1} \circ f) && (1.3)\\ &= f \circ f^n && (1.4) \end{aligned}$$

On suppose que f est bijective, et on procède par récurrence:

1. **Cas initial** pour $n=0$ on as :
$$\left(f^{-1}\right)^0 = \text{id} = \text{id}^0$$
2. **Hérédité** Calculons

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ (f^{-1})^{n+1} &= f^n \circ f \circ f^{-1} \circ (f^{-1})^n && (1.5)\\ &= f^n \circ (f^{-1})^n && (1.6)\\ &= f^n \circ (f^n)^{-1} && (1.7)\\ &= \text{id} && (1.8) \end{aligned}$$

De même on calcule

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})^{n+1} \circ f^{n+1} &= f^{-1} \circ (f^{-1})^n \circ f^n \circ f && (1.9)\\
&= f^{-1} \circ (f^n)^{-1} \circ f^n \circ f && (1.10)\\
&= f^{-1} \circ f && (1.11)\\
&= \mathrm{id} && (1.12)
\end{aligned}
$$

☺

1.14 Exercice 14

Question 14

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.

- f est-elle injective? surjective?
- Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(\mathbf{R}_+)$.

Proof:

Non la fonction n'est pas injective: on a

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et } 0 \neq 1$$

Puisque la fonction est continue, on etudie le tableau de croissance de f puis on calcule l'image de

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]) \cup f([-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup f([\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty[)$$

. On conclut que

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Pour la deuxième partie:

On note a la solution de l'equations

$$x^3 - x + 1 = 0$$

i.e a est l'antecedant de -1. De meme on note b

$$x^3 - x - 1 = 0$$

$$f^{-1}([-1,1]) = [a,b]$$

Pour l'image de $\mathbb{R}_+$.

$$f(\mathbb{R}_+) = f([0, \frac{\sqrt{3}}{3}]) \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty] = [-2\frac{\sqrt{3}}{9}, 0] \cup [-2\frac{\sqrt{3}}{9}, \infty[= [-2\frac{\sqrt{3}}{9}, \infty[$$

☺

1.15 Exercice 15

Question 15

Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Proof: 1.
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$$
est injective mais elle est pas **surjective** car 1 n'as pas d'antecedant.

2.
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$
est **bijective**.

3.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$
n'est pas surjective car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. et elle est pas aussi injective car $f(-1) = f(1) = 1$.

4.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$
La fonction devient surjectives mais elle est pas toujours **injective**.

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$$

- Elle est surjective car on $\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \exists z_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1^2 = z$

  Note:-
  Théorème a accepter qu'on doit démontrer on b arithmétique

  .
- La fonction n'est pas **injective**, il suffit de prendre l'exemple

$$(-1)^2 = 1 \quad (1)^2 = 1$$

😊

1.16 Exercice 16

Question 16

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Proof: 1. La fonction f est injective mais elle est pas **surjective** car 0 n'as pas d'antécédent. $-1 \notin \mathbb{N}$.

2. Pour le cas de g puisque on travaille dans $\mathbb{Z}$, elle est **bijective** car

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists! n_1 = n - 1 \quad g(n_1) = n$$

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on cherche l'existence d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x + y = & a \\ x - y = & b \end{cases}$$

On trouve que

$$\begin{cases} x = & \dfrac{a+b}{2} \\ y = & \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Puisque ces valeurs sont uniques, on déduit que l'application est **bijective**.

4. Soit $y \in \mathbb{R}$ on cherche si y admet un antécédent par la fonction k.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

Ce qui implique que

$$x + 1 - xy + y = 0$$

Ainsi on aura

$$x(1 - y) = -1 - y$$

Et si $y \neq 1$ on as :

$$x = \frac{-1-y}{1-y}$$

Aini la fonction est **injective** mais elle est pas **surjective** car 1 n'as pas d'antécédent.

😄

1.17 Exercice 17

Question 17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. (optionnelle) Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Proof:

1. La fonction f n'est pas injective car $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$.

f n'est pas surjective, car $y = 2$ n'as pas d'antécédent: en effet l'équation

$$f(x) = 2 \quad (1.13)$$
$$2x = 2(1 + x^2) \quad (1.14)$$
$$x^2 - x + 1 = 0 \quad (1.15)$$

La dernière équation n'as pas de solution de $\mathbb{R}$.

2. L'équation $f(x) = y$ est équivalente a

$$yx^2 - 2x + y = 0$$

Cette equation admet des solutions **reels** si seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$. Donc il y as des solutions si et seulement si

$$y \in [-1, 1]$$

Ainsi on conclut que:

$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

3. Soit $y \in]-1, 1[\ \{0\}$, les solutions possibles de l'équation $g(x) = y$ sont

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \\ x = & \dfrac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \end{cases}$$

La deuxième solution n'est pas dans $[-1, 1]$ car elle est supérieure a 1 si $y > 0$ et inférieure a -1 si $(y < 0)$. Pour la première solution on as:

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}$$

est dans [-1,1]. Il nous reste le cas de $y = 1$, $y = -1$ ou $y = 0$.

- Pour $y = 1$ l'équation $g(x) = 1$ a pour une solution unique $x = 1$.
- Pour $y = -1$, l'équation $g(x) = -1$ a pour une solution unique $x = -1$.
- Pour $y = 0$ la solution est $x = 0$.

Ainsi on a prouve que

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \exists! x \in [-1, 1] \quad g(x) = y$$

Ce qui prouve que g est bijective entre ces deux intervalles.

☺

1.18 Exercice 18

Question 18

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que:

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Proof:

1. Pour la première implication on as :

$$f(a) = f(b) \implies g \circ f(a) = g \circ f(b)$$

Puisque $g \circ f$ est injective, on déduit que

$$a = b$$

2. Soit $y \in C$, puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = y$.

On pose alors $b = f(a)$, On as alors $g(b) = y$, ce qui prouve que g est surjective.

☺

1.19 Exercice 19

Question 19

Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective $\iff \forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective $\iff \forall A \subset X \ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective $\iff \forall A \subset X \ f(\complement A) = \complement f(A)$.

Proof: 1. Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \implies \exists x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $x \in f^{-1}(B) \implies f(x) = y \in B$ Ainsi

$$y \in B \cap f(X)$$

Soit $y \in B \cap f(X)$. Puisque $y \in f(X)$ implique qu'il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On ajoute le fait que $y \in B$, on conclut que

$$y \in f(f^{-1}(B))$$

2. Pour la première implication, on suppose que f est **surjective**, en utilisant la premiere question on as:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$$

Le fait que f est surjective implique que $f(X) = Y$ Ainsi

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap Y = B$$

Pour la deuxième implication: on considère l'égalité pour $B = Y$.

$$f(f^{-1}(Y)) = Y$$

Ce qui implique que

$$F(X) = Y$$

Ainsi f est surjective.

Première implication

On suppose que f est injective, On a deja que $A \subset f^{-1}(f(A))$, on démontre l'autre inclusion.

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$ et $x \notin A$.

Le fait que $x \in f^{-1}(f(A))$ implique qu'il existe $y \in f(A)$ tel que $f(x) = y$.
Comme f est **injective**, le seul antécédent de y est x. On conclut alors que $x \in A$ ce qui contredit l'hypothèse $x \notin A$. Ainsi

$$\forall x \in f^{-1}(f(A)) \quad \text{On as } x \in A$$

3. Implication inverse. On suppose que

$$\forall A \subset X \ \ f^{-1}(f(A)) = A.$$

et on démontre que f est injective.

Supposons qu'il existe $x_1 \neq x_2 \ \ | \ f(x_1) = f(x_2) = y$.

On note alors l'ensemble $B = \{x_1\}$, par l'hypothèse on as :

$$f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$$

ce qui ce traduit par

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\}$$

Comme $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ car $f(x_2) = y$ on conclut que

$$x_2 \in \{x_1\} \implies x_1 = x_2$$

Ce qui prouve que f est injective.

4. On suppose que f est bijective et on démontre que

$$f\left(\complement A\right) = \complement f(A).$$

(a) on suppose qu'il existe $y \in f\left(\complement A\right)$ et $y \notin \complement f(A)$. Comme $y \in f\left(\complement\right)$ on conclut que

$$\exists x \notin A \quad f(x) = y \tag{1.16}$$

Comme $y \notin \complement f(A)$ on as alors $y \in f(A) \implies \exists x_2 \in A \quad$ tel que $y = f(x_2)$ Comme f est injective, on aura que

$$x = x_2$$

Ce qui est absurde car $x \notin A$ et $x_2 \in A$.

(b) On suppose maintenant qu'il existe $y \in \complement f(A)$ tel que $y \notin f\left(\complement A\right)$.

Comme f est surjective, on as forcement l'existence d'un $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
Comme $y \notin f(A)$ on conclut alors que $x \notin A$. Ainsi on a prouve que:

$$\exists x \in \complement A \quad y = f(x) \implies y \in f(\complement A).$$

ce qui est absurde.

Maintenant on démontre l'implication inverse.

(a) Pour démontrer que f est surjective, il suffit de considérer le cas de $A = \emptyset$. On aura alors:

$$f(\complement\emptyset) = \complement f(\emptyset).$$

ce qui se traduit par:

$$f(X) = Y$$

ce qui prouve que f est surjective.

(b) Soit x_1 et x_2 dans X tel que

$$f(x_1) = f(x_2) = y$$

On considère alors $A = \{x_1\}$, puisque $x_2 \notin A \implies y \in f(\complement A) = \complement f(A) = \complement\{y\}$.
Ce qui est absurde. Ainsi f est injective.

😃

1.20 Exercice 20

Question 20

Soit $f : X \longrightarrow Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes:

i. f est injective.

ii. $\forall A, B \subset X \;\; f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

iii. $\forall A, B \subset X \;\; A \cap B = \emptyset \implies f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Proof: On démontre par implication circulaire.

- $(i) \implies (ii)$ Soit $y \in f(A \cap B) \implies x \in A \cap B \quad y = f(x)$ Ainsi on as:

  $$\begin{cases} \exists x \in A \quad y = f(x) & \implies y \in f(A) \\ \exists x \in B \quad y = f(x) & \implies y \in f(B) \end{cases}$$

  On conclut que
  $$y \in f(A) \cap f(B).$$

  Inversement on considère $y \in f(A) \cap f(B)$ On as alors

  $$\begin{cases} y \in f(A) \implies \exists x_1 \in A & y = f(x_1) \\ y \in f(B) \implies \exists x_2 \in B & y = f(x_2) \end{cases}$$

  Comme f est injective on conclut que $x_1 = x_2$. Ainsi

  $$\exists x_1 \in A \cap B \quad y = f(x_1)$$

  Ce qui prouve que $y \in f(A \cap B)$.

- $(ii) \implies (iii)$
  Soient $A, B \subset X$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Selon (ii) on as:

  $$\begin{aligned} f(A) \cap f(B) &= f(A \cap B) && (1.17) \\ &= f(\emptyset) && (1.18) \\ &= \emptyset && (1.19) \end{aligned}$$

- $(iii) \implies (i)$.

  On suppose qu'il existe $x_1 \neq x_2$ tel que
  $$y = f(x_1) = f(x_2)$$
  On prend alors $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Selon (iii) on as

  $$\begin{aligned} f(A) \cap f(B) &= \emptyset && (1.20) \\ \{y\} \cap \{y\} &= \emptyset && (1.21) \end{aligned}$$

  Absurde, ainsi f est injective.

😄

Question 21

Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (a', b') \iff a + b' = b + a'$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Proof:

1. **Réflexive**: $(a, b)\ \mathcal{R}\ (a, b)$ car $a + b = b + a$.

2. **symétrique** : On suppose que $(a_1, b_1)\,\mathcal{R}\,(a_2, b_2)$ alors on aura que:

$$a_1 + b_2 = b_1 + a_2$$

Ainsi

$$a_2 + b_1 = b_2 + a_1$$

On conclut alors

$$(a_2, b_2)\,\mathcal{R}\,(a_1, b_1)$$

3. **Transitive** On considère trois points $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ et (a_3, b_3). tel que

$$\begin{cases} (a_1, b_1) & \mathcal{R}\,(a_2, b_2) \\ (a_2, b_2) & \mathcal{R}\,(a_3, b_3) \end{cases}$$

On aura

$$\begin{cases} a_1 + b_2 & = b_1 + a_2 \\ a_2 + b_3 & = b_2 + a_3 \end{cases}$$

On prend la somme des deux équations: On aura

$$a_1 + b_3 = b_1 + a_3$$

ce qui prouve que

$$(a_1, b_1)\,\mathcal{R}\,(a_3, b_3)$$

😊

Question 22

Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \iff y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Proof: La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En effet, elle est:

1. **Réflexive**:

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x, y) \text{ car } x = x$$

2. **symétrique**:
si $(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2)$ on as alors $x_1 = x_2$ qui peut s'écrire aussi comme $x_2 = x_1$ ce qui implique que

$$(x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)$$

3. **Transitive** Si $(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3)$. On aurra:

$$y_1 = y_2 \quad y_2 = y_3$$

Ainsi

$$y_1 = y_3$$

Ce qui prouve que

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3)$$

Pour la deuxième question, on cherche la classe 'd'équivalence d'un point $A(x_0, y_0)$, c'est determiner tous les points $((x, y)$ tel que

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x_0, y_0) \iff y = y_0$$

Ainsi

$$Cl(A) = \{(x, y_0)\ x \in \mathbb{R}\}$$

😆

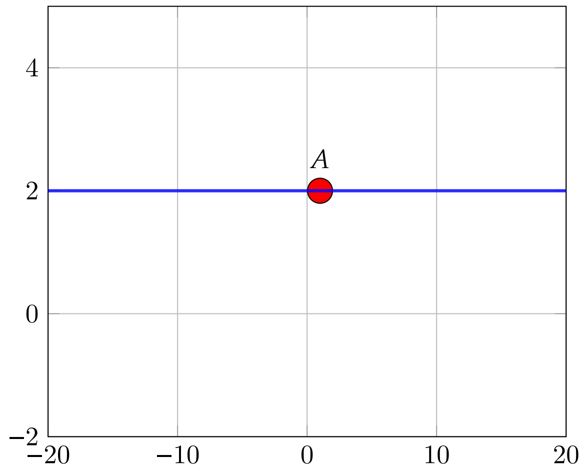

Figure 1.1: Classe d'équivalence du point $A(1, 2)$.

Question 23

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$

   est une relation d'équivalence.

2. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Proof: Démontrons qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence:

- **Réflexive**
  On as

$$xe^x = xe^x \implies x\ \mathcal{R}\ x$$

- **symétrique**

  Supposons que $x\ \mathcal{R}\ y$ On as alors

$$xe^y = ye^x \implies ye^x = xe^y \implies y\ \mathcal{R}\ x$$

- **Transitive** On suppose que

$$x\ \mathcal{R}\ y \quad \text{et} \quad y\ \mathcal{R}\ z$$

  On aura alors

$$\begin{cases} xe^y & = ye^x \\ ye^z & = ze^y \end{cases}$$

  On multiplies les deux équations (pour $x \neq 0$) on trouve que

$$xye^ye^z = zye^xe^y$$

On obtient alors

$$xe^z = ze^x$$

Note:-

pour le cas de $x = 0$, aura alors forcement que $y = 0$ et $z = 0$. Ainsi

$$x \mathcal{R} z$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$ un élément de $\mathbb{R}$ et cherchons sa classe d'équivalence.

$$\begin{aligned} Cl(x) &= \{y \in \mathbb{R} \quad xe^y = ye^x\} && (1.22)\\ Cl(x) &= \{y \in \mathbb{R} \quad xe^{-x} = ye^{-y}\} && (1.23)\\ & && (1.24) \end{aligned}$$

Ainsi la classe de x est l'ensemble des antécédent de $f(x)$ ou $f(x) = xe^{-x}$. Si on représente cette fonction on trouve

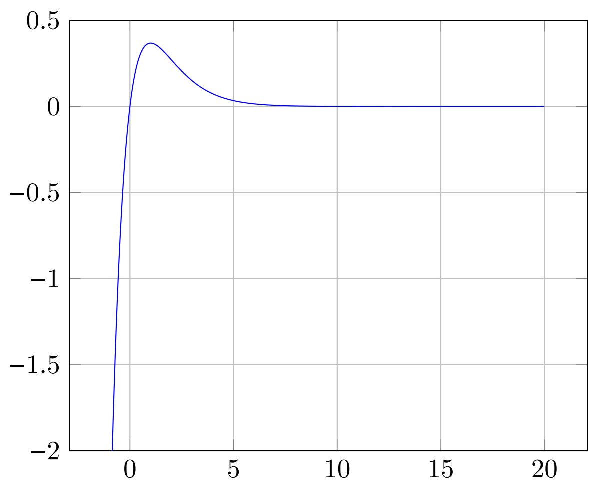

Figure 1.2: Graphe de la fonction xe^{-x}

On remarque depuis le graphe que

- si $x \in]0, \infty[$ le nombre d'antécédent est 2.
- Pour le reste chaque élément admet un seul antécédent.

1.21 Exercice 24

Question 24

Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes, dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathcal{P}(E)$:
$$A \mathcal{R}_1 B \iff A \subset B$$
2. Dans $\mathcal{P}(E)$
$$A \mathcal{R}_2 B \iff A \cap B = \emptyset$$
3. Dans $\mathbb{Z}$:
$$a \mathcal{R}_3 b \iff \exists n \in \mathbb{N} \;\; a - b = 3n$$

Proof: 1. Demontrons que la premiere relation est une relation d'ordre.

   (a) **Reflexive** : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset A \implies A \mathcal{R}_1 A$

   (b) **anti-symétrique**:
$$\text{si } A \subset B \quad \text{et } B \subset A \implies A = B$$
   (c) **transitive**:
$$\text{si } A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset C \implies A \subset C$$
   S'agit t'il d'une relation d'ordre totale, **Non**, car par exemple $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, On as
$$A \not\subset B \quad \text{et} \quad B \not\subset A$$
   Oui la relation admet un petit élément et grand élément
$$\forall A \subset E, \emptyset \subset A \quad \text{et} \quad A \subset E.$$

2. La deuxieme n'est pas une relation car elle n'est pas **réflexive**
$$A \cap A = A \implies \lceil (A \mathcal{R}_2 A)$$

3. Démontrons que $\mathcal{R}_3$ est une relation d'ordre.

   (a) **Reflexive** : $\forall n \in \mathbb{Z} n - n = 0 = 3 \times 0 \implies n \mathcal{R}_3 n$

   (b) **anti-symétrique**:
$$\begin{cases} a \mathcal{R} b & \implies \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad a - b = 3n_1 \\ b \mathcal{R} a & \implies \exists n_2 \in \mathcal{N} \quad b - a = 3n_2 \end{cases}$$
   On conclut que $n_1 = -n_2 \implies n_1 = n_2 = 0$ Ainsi
$$a = b$$
   .

   (c) **transitive**
$$\begin{cases} a \mathcal{R} b & \implies \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad a - b = 3n_1 \\ b \mathcal{R} c & \implies \exists n_2 \in \mathcal{N} \quad b - c = 3n_2 \end{cases}$$
   Ainsi

$$a - c = 3\underbrace{(n_1 + n_2)}_{\in \mathbb{N}}$$

Ce qui prouve que

$$a \mathcal{R} c$$

😊

1.22 Exercice 25

Question 25

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.
On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\prec$ par

$$X \prec Y \quad \text{ssi} \quad (X = Y \ \text{ ou } \ \forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leqslant y).$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Proof: On démontre qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

1. **Réflexive**
$$\forall X \subset E \quad X = X \implies X \prec X$$

2. **anti-symétrique**: Soit deux ensembles X et Y tel que $X \prec Y$ et $Y \prec X$. On note $R(X, Y)$ la deuxième condition:
$$R(X, Y) = \forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leqslant y$$
Pour le cas d'égalité c'est déjà ce qu'on cherche. Il reste le cas ou on as
$$R(X, Y) \quad \text{et} \quad R(Y, X)$$
Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $x \notin Y$. On prend $y \in Y$.
$$\begin{cases} R(X, Y) & \implies x \leqslant y \\ R(Y, X) & \implies y \leqslant x \end{cases}$$

Note:-
On peut choisir cet élément car $Y = \emptyset$

On conclut alors que
$$x = y$$
Ce qui est absurde. Ainsi
$$X = Y$$

3. **transitive**: Pour trois ensemble X, Y et Z, on suppose qu'on as:
$$X \prec Y \quad \text{et} \quad Y \prec Z$$
On aura quatre cas:
$$\begin{cases} X = Y \text{ et } Y = Z & \implies X = Z \implies X \prec Z \\ X = Y \text{ et } R(Y, Z) & \implies R(X, Z) \implies X \prec Z \\ R(X, Y) \text{ et } Y = Z & \implies R(X, Z) \implies X \prec Z \\ R(X, Y) \text{ et } R(Y, Z) & \implies R(X, Z) \implies X \prec Z. \end{cases}$$

😊