Solution TD 6

2022

Loi de probabilite

Pour que $\mathbf{P}_X$ definit une loi de probabilite il faut que:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_x \mathbf{P}_x(x) \\
1 &= \mathbf{P}_x(-3) + \mathbf{P}_x(-2) + \mathbf{P}_x(-1) + \mathbf{P}_x(3) + \mathbf{P}_x(2) + \mathbf{P}_x(1) \\
1 &= 2\left(\frac{9}{a}\right) + 2\left(\frac{4}{a}\right) + 2\left(\frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{28}{a}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$a = 28$$

.

Soit $Z = X^2$, on cherche la loi de probabilite de Z. On a:

$$\mathbf{P}_Z(k) = \mathbf{P}_X(x^2 = k)$$

Ainsi l'ensembles des valeurs k que peut prendre Z est $\{1, 4, 9\}$.

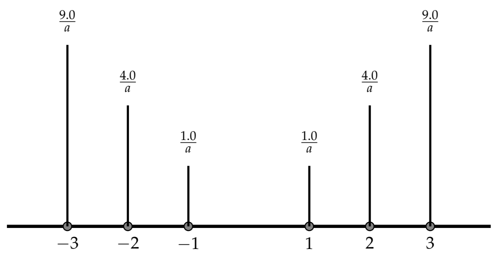

Figure 1: Loi de X

On obtient alors:

$$
P_Z(k) = \begin{cases} \frac{2}{28} & k = 1 \\ \frac{4}{28} & k = 4 \\ \frac{18}{28} & k = 9 \end{cases}
$$

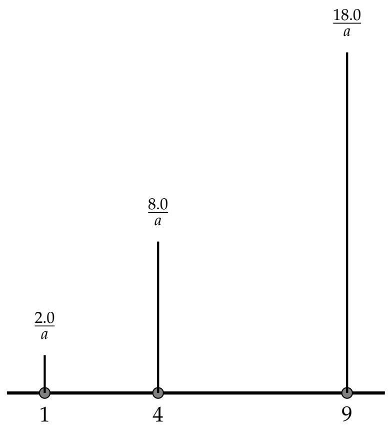

Figure 2: Loi de Z

Loi d'un de truque

La variables X prend des valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Par hypothese, il existe un reel a tel que

$$\mathbf{P}_X(k) = ka$$

Ce reel doit verifier la relation:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{6} \mathbf{P}_X(x) &= 1 \quad (1) \\
a \times \left(\frac{6 \times 7}{2}\right) &= 1 \quad (2) \\
\frac{21}{a} &= 1 \quad (3)
\end{aligned}
$$

D'ou $\mathbf{a} = \frac{1}{21}$

On obtient ainsi la loi suivante:

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}_X(x = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Table 1: Loi de distribution du de

Calculons maintenant l'**esperance** de X.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{x=1}^{6} x\mathbf{P}_X(x) \\
&= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{6} x^2 \\
&= \frac{91}{21} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Soit Y une variable definie par $\frac{1}{X}$. Alors la loi de Y est donne par:

$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}_Y(= k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Table 2: Loi de probaiblite de Y

Si on calcule l'esperance de Y, on trouve:

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{2}{7} \tag{4}$$

Le but est d'introduire aux etudiantes l'erreur classique que

$$\mathbf{E}(g(X)) \neq g(E(X))$$