Solution TD 6

2022

Loi de probabilite

Pour que $\mathbf{P}_X$ definit une loi de probabilite il faut que:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_x \mathbf{P}_x(x) \\ 1 &= \mathbf{P}_x(-3) + \mathbf{P}_x(-2) + \mathbf{P}_x(-1) + \mathbf{P}_x(3) + \mathbf{P}_x(2) + \mathbf{P}_x(1) \\ 1 &= 2\left(\frac{9}{a}\right) + 2\left(\frac{4}{a}\right) + 2\left(\frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{28}{a} \end{aligned}$$

Ainsi

$$a = 28$$

.

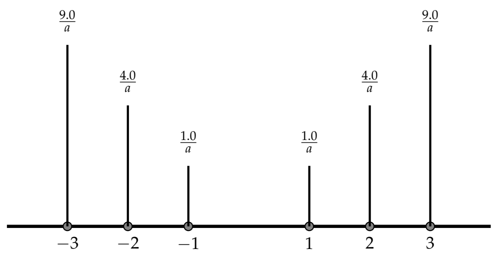

Figure 1: Loi de X

Soit $Z = X^2$, on cherche la loi de probabilite de Z. On a:

$$\mathbf{P}_Z(k) = \mathbf{P}_X(x^2 = k)$$

Ainsi l'ensembles des valeurs k que peut prendre Z est $\{1, 4, 9\}$.

On obtient alors:

$$P_Z(k) = \begin{cases} \frac{2}{28} & k = 1 \\ \frac{4}{28} & k = 4 \\ \frac{18}{28} & k = 9 \end{cases}$$

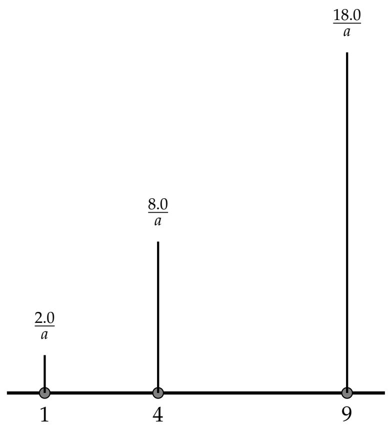

Figure 2: Loi de Z

Loi d'un de truque

La variables X prend des valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Par hypothese, il existe un reel a tel que

$$\mathbf{P}_X(k) = ka$$

Ce reel doit verifier la relation:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{6} \mathbf{P}_X(x) &= 1 && (1) \\ a \times \left(\frac{6 \times 7}{2}\right) &= 1 && (2) \\ \frac{21}{a} &= 1 && (3) \end{aligned}$$

D'ou $\mathbf{a} = \frac{1}{21}$

On obtient ainsi la loi suivante:

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}_X(x=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Calculons maintenant l'**esperance** de X.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{x=1}^{6} x\mathbf{P}_X(x)\\ &= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{6} x^2\\ &= \frac{91}{21}\\ &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

Soit Y une variable definie par $\frac{1}{X}$. Alors la loi de Y est donne par:

Table 1: Loi de probaiblite de Y

$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}_Y(=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Si on calcule l'esperance de Y, on trouve:

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{2}{7} \tag{4}$$

Le but est d'introduire aux etudiantes l'erreur classique que

$$\mathbf{E}\left(g\left(X\right)\right) \neq g(\mathbf{E}\left(X\right))$$

Cles

1. Calculer la loi de probabilite de X, revient a calculer les nombres $\mathbf{P}(X=k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

on as

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=1) &= \frac{1}{4}\\ \mathbf{P}(X=2) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\\ \mathbf{P}(X=3) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\\ \mathbf{P}(X=4) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ainsi X une variable uniforme de parametres $\{1,4\}$.

2. Pour le calcul, de l'esperance, on peut soit
   - Calculer directement:
   $$\mathbf{E}(X)=\sum_x P_X(x)x=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{5}{2}$$
   - Soit utiliser le resultat demontre qui indique que:
   $$\mathbf{E}(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$$
3. Calculons maintenant la **variance** de X:

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2)-(\mathbf{E}(X))^2\\ &= \frac{1}{4}(1+4+9+16)-\frac{5}{2}\\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Loi de Pascal

1. Calculer de la loi de X. On as

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}(\text{ k-1 Echecs puis success})\\ &= (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

C'est la loi **geometrique**.

2. Calculons l'esperance de X. On pose tout d'abord $\mathbf{q} = \mathbf{1} - \mathbf{p}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}\, p \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k \\
&= p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \\
&= p \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) \\
&= p \frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

3. On demontre la propriete de **sans memoire** de cette loi. Soient $k > j$. On calcul

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > k \mid X > j) &= \frac{\mathbf{P}\left((X > k) \cap (X > j)\right)}{\mathbf{P}(X > j)} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left((X > k)\right)}{\mathbf{P}(X > j)} \\
&= \frac{(1-p)^k}{(1-p)^j} \\
&= (1-p)^{k-j} \\
&= \mathbf{P}(X > k - j)
\end{aligned}$$

4. Soit Y la variable aleatoire de l'offre d'achat. On pour chaque entier n on as:

$$\mathbf{P}_N(N = n) = (\mathbf{P}(Y < K))^{n-1} \underbrace{\mathbf{P}\,(Y > K)}_{p}$$

Ainsi N est est une variable aleatoire qui suit une loi **geometrique** de parametre p.
Son esperance est donne par $\frac{1}{p}$.