Independence

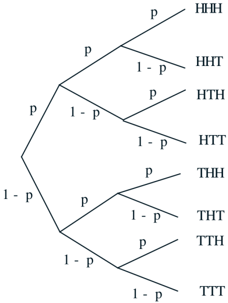
A.Belcaid

ENSA-Safi

March 14, 2022

Un simple modele de conditionnement

- Lance d'un de **trucke** avec $\mathbf{P}(\mathrm{H}) = p$ et $\mathbf{P}(\mathrm{T}) = 1 - p$.



- Regle de multiplication:

$$\mathbf{P}(THT) =$$

- Loi de probabilite totale:

$$\mathbf{P}(\text{Un seul H}) =$$

- Regle de Bayes

$$\mathbf{P}(\text{premier lance est H} \mid \text{1 seul H}) =$$

Independence de deux evenements

Independence de deux evenements

Independence de deux evenements

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

  - Symmetrique par rapport a A et B.

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Symmetrique par rapport a A et B.
- Implique directement que $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.

Independence de deux evenements

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Symmetrique par rapport a A et B.
- Implique directement que $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
- S'applique meme si $P(A) = 0$.

- **Definition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne auccune information sur B.

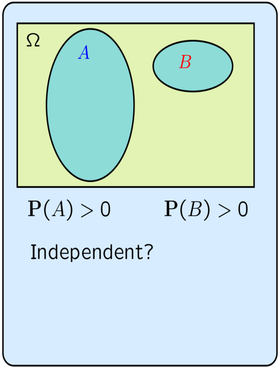
Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Symmetrique par rapport a A et B.
- Implique directement que $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
- S'applique meme si $P(A) = 0$.

B



Exemple 1

On possede une piece de monnaie truquee qu'on lance deux fois. Dans le premier lance on peut obtenir soit H soit T avec une probabilite $\frac{1}{2}$. Cependant le deuxieme lance donne toujours le resultat du lance 1. Ainsi les deux resultats possibles sont $\{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$.

- Est que l'evenement $A = \{\text{H dans le premier lance}\}$ et $\mathrm{B} = \{\text{H dans le deuxieme lance}\}$ sont independents?

Exemple 1

On possede une piece de monnaie truquee qu'on lance deux fois. Dans le premier lance on peut obtenir soit H soit T avec une probabilite $\frac{1}{2}$. Cependant le deuxieme lance donne toujours le resultat du lance 1. Ainsi les deux resultats possibles sont $\{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$.

- Est que l'evenement $A = \{\text{H dans le premier lance}\}$ et $\mathrm{B} = \{\text{H dans le deuxieme lance}\}$ sont independents?

Exemple 2

Soit A un evenement de l'espace d'etats Ω.

- Est que A et Ω sont indpendents?

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Si A et B sont independents, alors A et B^c sont independents?

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Si A et B sont independents, alors A et B^c sont independents?

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
P(A) &= P(A).P(B) + P(A \cap B^c) \\
P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A).P(B) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).(1 - P(B)) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).P(B^c)
\end{aligned}$$

Indpendence deux evenements

Definition

Deux evenements A et B sont **independents**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Si A et B sont independents, alors A et B^c sont independents?

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
P(A) &= P(A).P(B) + P(A \cap B^c) \\
P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A).P(B) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).(1 - P(B)) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).P(B^c)
\end{aligned}$$

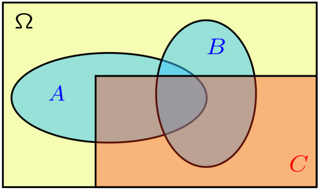
Mini exercice

On suppose que A et B sont independents. Est que A^c et B^c sont independent?

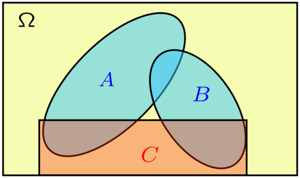
Definition

L'independence **conditionnelle** est definie en utilisant les probablites conditionnelles etant donne $P(. \mid C)$.

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C).P(B \mid C)$$



- On suppose que A et B sont independents.



- Si C est realise, a t on toujours l'independence?

- **Definition Intuitive**: L'information sur quelque evenements ne change par les probabilites des autres evenements.

- **Definition Intuitive**: L'information sur quelque evenements ne change par les probabilites des autres evenements.

Definition

Plusieurs Evenements A_1, $A_2, \dots, A_n$ sont dits **independents** si:

$$P(A_i \cap A_j \cap \dots A_m) = P(A_i)P(A_j)\dots P(A_m).$$

pour tous les indices distints $i, j, \dots, m$

- **Definition Intuitive**: L'information sur quelque evenements ne change par les probabilites des autres evenements.

Definition

Plusieurs Evenements A_1, $A_2, \ldots, A_n$ sont dits **independents** si:

$$P(A_i \cap A_j \cap \ldots A_m) = P(A_i)P(A_j)\ldots P(A_m).$$

pour tous les indices distints $i, j, \ldots, m$

- $n = 3?$:

$$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) & = & P(A_1).P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) & = & P(A_1).P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) & = & P(A_2).P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_2 \cap A_3) & = & P(A_1).P(A_2).P(A_3) \end{cases}$$

Indepence et independence deux a deux

- Lance deux piece de monnaies:
  - H_1: premier lance est H.
  - H_2: deuxieme lance est H.

  $$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

Indepence et independence deux a deux

- Lance deux piece de monnaies:
  - H_1: premier lance est H.
  - H_2: deuxieme lance est H.

  $$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

HH	HT
TH	TT

- $\mathbf{C}$: Les deux lances produisent le meme resultat.

- Lance deux piece de monnaies:
  - H_1: premier lance est H.
  - H_2: deuxieme lance est H.

  $$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

HH	HT
TH	TT

- $\mathbf{C}$: Les deux lances produisent le meme resultat.

- Est que H_1, H_2 et H_3 sont independents **deux a deux**?
- Est qu'il sont indepenents?

Probleme

Un roi vient d'une famille de deux enfants.

- Quelle est la probabilite qu'il as un seour.