Solution TD 5

2022

Mots d'un alphabet

1. On dispose de 5 choix pour la premiere lettre, 4 pour la deuxieme. Ainsi le nombre de choix possible est

$$5 \times 4 \times \ldots \times 1 = 5! = 60$$

2. Le nombre de sous ensembles est donne par :

$$2^5 = 32$$

3. On applique le principe de denomrement avec trois scenarios:

   (a) Tout d'abord on choisit si A va precedder B ou non, alors on **2** choix.

   (b) Ensuite, on dois choisir la position du couple AB (ou BA) dans le mot. On dipose alors de **4** choix.[1].

   (c) Finalement pour chaque emplacement du couple AB, il nous faut placer le reste des trois lettres. Ceci est donne par le nombre de permutation de l'ensemble $\{C, D, E\}$. On trouve alors $3! = 6$

   Ainsi le nombre ces motes sera donne par:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

[1] Ces positions sont soit 1,2,3 ou 4

4. Le cardinal de l'espace d'etats est

$$card(\Omega) = 5! = 120$$

   Ainsi, la probabilite de construire un tel mot est:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Anecdode Anniversaire

On cherche a calculer la probabilite de $A = \{\text{aucun anniversaire conside avec les autres}\}$.

On pose alors l'espace des etats

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\text{toutes les anniversaires possible}\} \\ card\{\Omega\} &= (365)^n \end{aligned}$$

Pour l'evenement d'interet, on dispose alors de

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots (365 - n + 1)$$

On obtient alors

$$\mathbf{P}(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

l'anecdote ici est que ce nombre converge facilement vers **0** comme le montre la figure (1). Ainsi deja pour une fete de $n = 40$ personnes on a une probbabilite de $\mathbf{P} = \mathbf{0.10}$.

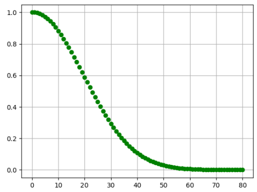

Figure 1: Convergene rapide de cette probbailite vers 0

Probleme des tours

On note l'evenement $A = \{\text{toutes les tours ne s'attaquent pas}\}$

On alors:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|\text{Position correcte des tours}|}{|\text{Toutes les positions possibles.}|}$$

Pour le cardinal de toutes les positions possibles on obtient:

$$64 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot 57$$

Pour la deuxieme quantite, on doit placer sequentiellement 8 tours. Ainsi

- Pour la premiere tour on dispose de

  $$64 = 8 \times 8$$

  cases disponibles.[2].

- Pour la deuxieme tour choisir la la ligne i et la colonne j ou $((i, j))$ est la position de la premiere tour. Ainsi on obtient

  $$49 = 7 \times 7$$

  .

- Par la meme analyse on obtient 6^2 pour la troisieme, 5^2 pour la quatrieme etc.

En resumant le cardinal d'evenement d'interet est

$$8^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots 4.1 = \prod_{i=1}^{8} i^2$$

Finalement la proabilite est donnee par:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\prod_{i=1}^{8} i^2}{64 \cdot 63 \cdot \ldots 57}$$

[2] Tout l'echequier est disponible