Variables Aleaoitres Discrete II

A.Belcaid

ENSA-Safi

April 23, 2022

Variance

- Soit X une Variable Aleatoire (VA) avec une esperance $\mu = \mathbf{E}[X]$.

Variance

- Soit X une Variable Aleatoire (VA) avec une esperance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On consiere alors la VA $X - \mu$.

Variance

- Soit X une Variable Aleatoire (VA) avec une esperance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On consiere alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l' **esperance** de $X - \mu$.

Variance

- Soit X une Variable Aleatoire (VA) avec une esperance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On consiere alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l' **esperance** de $X - \mu$.

- Soit X une Variable Aleatoire (VA) avec une esperance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On consiere alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l' **esperance** de $X - \mu$.

Variance

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}[\ (X - \mu)^2\ ]$$

- On peut la calculer en utilisant l'esperance d'une fonction d'une VA.

$$\text{var}(X) = \sum_x \mathbf{P}_X(x)\ (x - \mu)^2$$

- Soit X une Variable Aleatoire (VA) avec une esperance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On consiere alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l' **esperance** de $X - \mu$.

Variance

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}[\ (X - \mu)^2\ ]$$

- On peut la calculer en utilisant l'esperance d'une fonction d'une VA.

$$\text{var}(X) = \sum_x \mathbf{P}_X(x)\,(x - \mu)^2$$

- Une autre entite reliee a la **variance** est:

Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}\,(X)}$$

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}\left(Y\right) =$$

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

- On note $Y = aX$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

Proprietes Variance

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}(Y) =$$

$$\boxed{\text{var}((aX + b) = a^2 \text{var}(X)}$$

- On note $Y = aX$, calculer

$$\text{var}(Y) =$$

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

$$\text{var}((aX + b) = a^2\text{var}\,(X)$$

- On note $Y = aX$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

On peut endeduire une formule utile pour le calcul de variance:

Formule utile

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \left(\mathbf{E}[X]^2\right)$$

Variance d'une Bernoulli

on considere un VA qui suit une loi **Bernoulli**.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{avec prob } p \\ 0, & \text{avec prob } 1-p \end{cases}$$

Variance d'une Bernoulli

on considere un VA qui suit une loi **Bernoulli**.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{avec prob } p \\ 0, & \text{avec prob } 1-p \end{cases}$$

- Calculer la **Variance** de X avec formule normale:

$$\text{var}(X) = \sum_x (x - \mathbf{E}[X])^2 \mathbf{P}_X(x)$$

- Calculer la **Variance** de X en utilisant la deuxieme formule:

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}[X])^2$$

Variance Loi Uniforme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+2)}{12}
\end{aligned}
$$

Variance Loi Uniforme

$$
\begin{aligned}
\text{var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+2)}{12}
\end{aligned}
$$

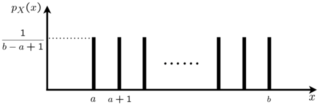
- Pour le cas general entre $[a, b]$. on pose $n = b - a$.

$$
\text{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+2)}{12}
\end{aligned}
$$

- Pour le cas general entre $[a, b]$. on pose $n = b - a$.

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)$$

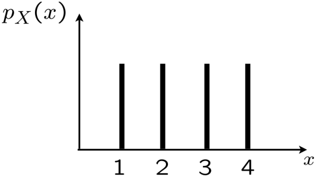


Conditionement sur un evenement

- On considere un evenement A et on utilise la loi de probablite conditionnee sur A.

Loi Classique	**Loi conditionnee**
$\mathbf{P}_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$	$\mathbf{P}_{X\|A}(x) = \mathbf{P}_X(X = x \mid A)$
$\sum_x \mathbf{P}_X(x) = 1$	$\sum_x \mathbf{P}_{X\|A}(x) = 1$
$\mathbf{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbf{P}_X(x)$	$\mathbf{E}[X\|A] = \sum_x x \cdot \mathbf{P}_{X\|A}(x)$
$\mathbf{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot \mathbf{P}_X(x)$	$\mathbf{E}[g(X)\|A] = \sum_x g(x) \cdot \mathbf{P}_{X\|A}(x)$

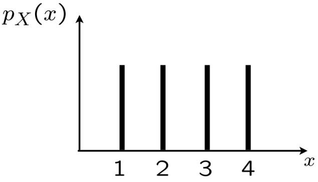
Exemples



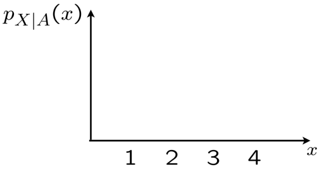
$$\mathbf{E}[X] =$$

$$\text{var}(X) =$$

.



- On considere alors l'evenement $A = X \geqslant 2$



$$\mathbf{E}[X] =$$

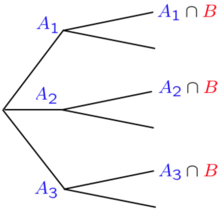
$$\mathrm{var}(X) =$$

.

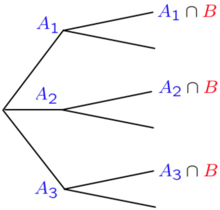
$$\mathbf{E}[X \mid A] =$$

$$\mathrm{var}(X \mid A) =$$

Theoreme d'esperance totale

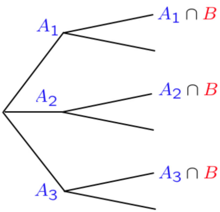


Theoreme d'esperance totale



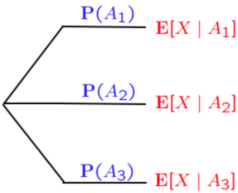
$$P(B) = P_X(A_1)P_X(B|A_1)+\ldots+P_X(A_n)P_X(B|A_n)$$

$$P(x) = P_X(A_1)P_{X|A}(x)+\ldots+P_X(A_n)P_{X|A_n}(x)$$

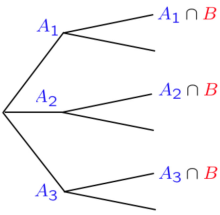


$$P(B) = P_X(A_1)P_X(B|A_1)+\ldots+P_X(A_n)P_X(B|A_n)$$

$$P(x) = P_X(A_1)P_{X|A}(x)+\ldots+P_X(A_n)P_{X|A_n}(x)$$

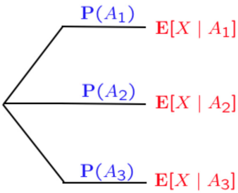


Theoreme d'esperance totale



$$P(B) = P_X(A_1)P_X(B|A_1) + \ldots + P_X(A_n)P_X(B|A_n)$$

$$P(x) = P_X(A_1)P_{X|A}(x) + \ldots + P_X(A_n)P_{X|A_n}(x)$$



Esparance totale

$$\mathbf{E}[X|A] = \sum_{i}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{E}[X|A_i]$$

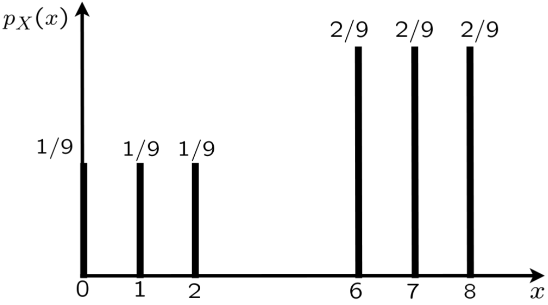


Figure: Calculer l'esperance de cette variable

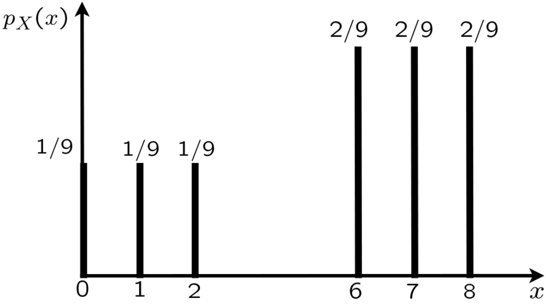


Figure: Calculer l'esperance de cette variable