Solution TD 6

2022

Loi de probabilite

Pour que $\mathbf{P}_X$ definit une loi de probabilite il faut que:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_x \mathbf{P}_x(x) \\
1 &= \mathbf{P}_x(-3) + \mathbf{P}_x(-2) + \mathbf{P}_x(-1) + \mathbf{P}_x(3) + \mathbf{P}_x(2) + \mathbf{P}_x(1) \\
1 &= 2\left(\frac{9}{a}\right) + 2\left(\frac{4}{a}\right) + 2\left(\frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{28}{a}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$a = 28$$

.

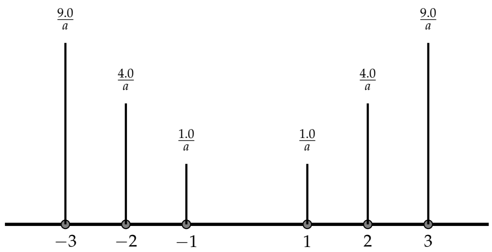

Figure 1: Loi de X

Soit $Z = X^2$, on cherche la loi de probabilite de Z. On a:

$$\mathbf{P}_Z(k) = \mathbf{P}_X(x^2 = k)$$

Ainsi l'ensembles des valeurs k que peut prendre Z est $\{1, 4, 9\}$.

On obtient alors:

$$
P_Z(k) = \begin{cases} \frac{2}{28} & k = 1 \\ \frac{4}{28} & k = 4 \\ \frac{18}{28} & k = 9 \end{cases}
$$

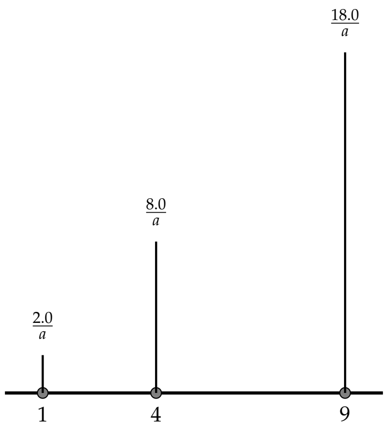

Figure 2: Loi de Z

Loi d'un de truque

La variables X prend des valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Par hypothese, il existe un reel a tel que

$$\mathbf{P}_X(k) = ka$$

Ce reel doit verifier la relation:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{6} \mathbf{P}_X(x) &= 1 \quad (1) \\
a \times \left(\frac{6 \times 7}{2}\right) &= 1 \quad (2) \\
\frac{21}{a} &= 1 \quad (3)
\end{aligned}
$$

D'ou $\mathbf{a} = \frac{1}{21}$

On obtient ainsi la loi suivante:

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}_X(x=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Calculons maintenant l'**esperance** de X.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{x=1}^{6} x\mathbf{P}_X(x) \\ &= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{6} x^2 \\ &= \frac{91}{21} \\ &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

Soit Y une variable definie par $\frac{1}{X}$. Alors la loi de Y est donne par:

Table 1: Loi de probaiblite de Y

$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}_Y(=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Si on calcule l'esperance de Y, on trouve:

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{2}{7} \tag{4}$$

Le but est d'introduire aux etudiantes l'erreur classique que

$$\mathbf{E}\left(g\left(X\right)\right) \neq g(\mathbf{E}\left(X\right))$$

Deux des a trois faces

- L'espace d'etats des variablesd (X_1, X_2) possedent 9 resultat equiprobables. On peut constuire la loi de la variable X pour chaque valeur que peut prendre cette variable aleatoire. on obtient alors:

$$\mathbf{P}_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & x \in \{-2, 2\} \\ \frac{2}{9} & x \in \{-1, 1\} \\ \frac{3}{9} & x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour l'esperance on as:[1]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{x=-2}^{2} x\mathbf{P}_X(x) \\ &= (-2)\cdot\frac{1}{9} + (-1)\cdot\frac{2}{9} + (0)\cdot\frac{3}{9} + (1)\cdot\frac{2}{9} + (2)\cdot\frac{1}{9} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[1] On peut voir aussi que l'esperance est nulle car la loi est centree en 0. Ou parce que $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_2]$ ainsi on obtient $\mathbf{E}[X_1 - X_2] = \mathbf{E}[X_1] - \mathbf{E}[X_2] = 0$.

Pour calculer la **variance**, on calcule tout d'abord

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \sum_x x^2\mathbf{P}_X(x) \\ &= (4)\cdot\frac{1}{9} + (1)\cdot\frac{2}{9} + (0)\cdot\frac{3}{9} + (1)\cdot\frac{2}{9} + (4)\cdot\frac{1}{9} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- On pose $Y = X^2$ et on construit la loi de Y en calculant les probabilites de toutes les valeurs de Y.

$$\mathbf{P}_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & y = 4 \\ \frac{4}{9} & y = 1 \\ \frac{3}{9} & y = 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

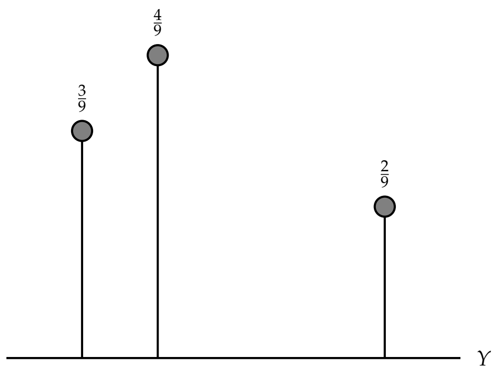

Figure 3: Loi de probabilite de Y

Cles

1. Calculer la loi de probabilite de X, revient a calculer les nombres $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

   on as

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 1) &= \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X = 2) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X = 3) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X = 4) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi X une variable uniforme de parametres $\{1, 4\}$.

2. Pour le calcul, de l'esperance, on peut soit
   - Calculer directement:
   $$\mathbf{E}(X) = \sum_x P_X(x)x = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{2}$$
   - Soit utiliser le resultat demontre qui indique que:
   $$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$$
3. Calculons maintenant la **variance** de X:
$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2\\ &= \frac{1}{4}(1+4+9+16) - \frac{5}{2}\\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Loi de Pascal

1. Calculer de la loi de X. On as
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}(\text{ k-1 Echecs puis success})\\ &= (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$
   C'est la loi **geometrique**.
2. Calculons l'esperance de X. On pose tout d'abord $\mathbf{q} = \mathbf{1} - \mathbf{p}$.
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}\ p\\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} k\ q^{k-1}\\ &= p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dq}q^k\\ &= p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}q^k\\ &= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)\\ &= p\frac{1}{(1-q)^2}\\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$
3. On demontre la propriete de **sans memoire** de cette loi. Soient

$k > j$. On calcul

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > k \mid X > j) &= \frac{\mathbf{P}\left((X > k) \cap (X > j)\right)}{\mathbf{P}(X > j)} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left((X > k)\right)}{\mathbf{P}(X > j)} \\
&= \frac{(1-p)^k}{(1-p)^j} \\
&= (1-p)^{k-j} \\
&= \mathbf{P}(X > k - j)
\end{aligned}
$$

4. Soit Y la variable aleatoire de l'offre d'achat. On pour chaque entier n on as:

$$\mathbf{P}_N(N = n) = (\mathbf{P}(Y < K))^{n-1} \underbrace{\mathbf{P}\,(Y > K)}_{p}$$

Ainsi N est est une variable aleatoire qui suit une loi **geometrique** de parametre p.
Son esperance est donne par $\frac{1}{p}$.

Couple de variables

- A partir de loi jointe de X et Y, les elements qui possedent une masse sont $(1,1),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (4,1),\ (4,3)$. Puisque la sommes des probabilites doit etre egale a **1**, on obitent

$$
\begin{aligned}
c(1+1)^2 + c(1+3)^2 + c(2+1)^2 + c(2+3)^2 + c(4+1)^2 + c(4+3)^2 &= 1 \\
c \cdot (128) &= 1
\end{aligned}
$$

Ainsi on obtient $c = \frac{1}{128}$.

- Les seuls trois instances qui verifient $y < x$ sont $(2,1),\ (4,1),\ (4,3)$.
Ob obtient alors:

$$\mathbf{P}(Y < X) = \mathbf{P}_{XY}(2,1) + \mathbf{P}_{XY}(4,10 + \mathbf{P}_{XY}(4,3) = \frac{83}{128}$$

- On possede un seul etat ou $X = Y$. avec $(x,y) = (1,1)$.

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}_{XY}(1,1) = \frac{4}{128}$$

- La loi de probabilite marginale de X est donnee par $\mathbf{P}_X(x) = \sum_y \mathbf{P}_{XY}(x,y)$..
Si on applique cette regle pour $x = 2$. on obtient

$$\mathbf{P}_X(2) = \mathbf{P}_{XY}(2,1) + \mathbf{P}_{XY}(2,3) = \frac{34}{128}$$

On peut construire toute la loi de $\mathbf{P}_X$:

$$\mathbf{P}_X(x) = \begin{cases} \frac{20}{128} & \text{si } x = 1 \\ \frac{34}{128} & \text{si } x = 2 \\ \frac{74}{128} & \text{si } x = 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On as :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_x x\mathbf{P}_X(x) = 1 \cdot \frac{20}{128} + 2 \cdot \frac{34}{128} + 4 \cdot \frac{74}{128} = 3$$

- On utilise la definition:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= \sum_x \sum_y xy\mathbf{P}_{XY}(x, y) \\ &= 1 \cdot \frac{4}{128} + 2 \cdot \frac{9}{128} + 4 \cdot \frac{25}{128} + 3 \cdot \frac{16}{128} + 6 \cdot \frac{25}{128} + 12 \cdot \frac{49}{128} \\ &= \frac{227}{32} \end{aligned}$$

- On utilise la definition directe de la variance:

$$\text{Var}(X) = (1-3)^2 \frac{20}{128} + (2-3)^2 \frac{34}{128} + (4-3)^2 \frac{74}{128} = \frac{47}{128}$$