

Probabilité : Science d'Incertainitude et de Données.

A.Belcaid

ENSA-Safi

February 8, 2022

1 Introduction

- Definition
- Modelisation Abstraction
- Objectif cours

2 Expérience Évènement Aléatoire

- Espace d'états
- discret fini
- Exemple continue
- Axiome de probabilité
- Exemple discret uniforme

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le **HASARD**.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le **HASARD**.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique:** (physique quantique, physique des particules)

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le **HASARD**.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le **HASARD**.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.
- **Traitement de signal et de la parole**.

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le **HASARD**.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.
- **Traitement de signal et de la parole**.
- **Biologie, Écologie**

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le **HASARD**.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.
- **Traitement de signal et de la parole**.
- **Biologie, Écologie**
- **Économie, Finance, Assurance**

- Innombrable situations où le hasard intervient

Modèle probabiliste.

- Innombrable situations où le hasard intervient

Abstraction

Nécessite d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Innombrable situations où le hasard intervient

Abstraction

Nécessite d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Aussi utilise pour des fins **fin numeriques**: **Methodes de Monte-Carlo**.

- Innombrable situations où le hasard intervient

Abstraction

Nécessite d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Aussi utilise pour des fins **fin numeriques**: **Methodes de Monte-Carlo**.
- Efficace en **grande dimension**.

- Innombrable situations où le hasard intervient

Abstraction

Nécessite d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Aussi utilise pour des fins **fin numeriques**: **Methodes de Monte-Carlo**.
 - Efficace en **grande dimension**.
 - Simulation de **phénomènes irréguliers**.

Le but de ce cours est de vous donner une approche **élémentaire** mais **rigoureuse** de la théorie probabiliste et de l'illustrer avec un certain nombre de simulations.

A la fin de cours, on souhaite vous transmettre une démarche de mathématique appliquées, qui se décrit par les trois étapes suivantes:

- Modélisation.

Le but de ce cours est de vous donner une approche **élémentaire** mais **rigoureuse** de la théorie probabiliste et de l'illustrer avec un certain nombre de simulations.

A la fin de cours, on souhaite vous transmettre une démarche de mathématique appliquées, qui se décrit par les trois étapes suivantes:

- Modélisation.
- Résolution théorique

Le but de ce cours est de vous donner une approche **élémentaire** mais **rigoureuse** de la théorie probabiliste et de l'illustrer avec un certain nombre de simulations.

A la fin de cours, on souhaite vous transmettre une démarche de mathématique appliquées, qui se décrit par les trois étapes suivantes:

- Modélisation.
- Résolution théorique
- Expérimentation numérique

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ , qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**^a.

^aOn ne peut pas prédire leur résultat par avance

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ , qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**^a.

^aOn ne peut pas prédire leur résultat par avance

- Pour décrire une telle expérience, il nous faut:

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ , qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**^a.

^aOn ne peut pas prédire leur résultat par avance

- Pour décrire une telle expérience, il nous faut:
 - Décrire tous les résultats possibles

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ , qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**^a.

^aOn ne peut pas prédire leur résultat par avance

- Pour décrire une telle expérience, il nous faut:
 - Décrire tous les résultats possibles
 - Décrire notre croyance pour chaque résultat.



Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.



Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:

Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
 - Mutuellement **exclusive**.

Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
 - Mutuellement **exclusive**.
 - Collectivement **exhaustive**

Espace d'État

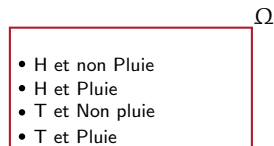
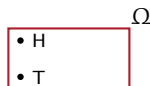
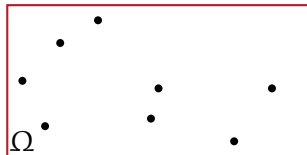
Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
 - Mutuellement **exclusive**.
 - Collectivement **exhaustive**
 - Au niveau correct de **détail?**.

Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
 - Mutuellement **exclusive**.
 - Collectivement **exhaustive**
 - Au niveau correct de **détail?**.



- Pour l'expérience de lancer un de, pour chaque choix, **Déterminer** si on possède un espace d'états correct.

- Pour l'expérience de lancer un de, pour chaque choix, **Déterminer** si on possède un espace d'états correct.

-

$$\Omega = \{H \text{ et pluie}, H \text{ et non pluie}, T\} \quad (1)$$

- Pour l'expérience de lancer un dé, pour chaque choix, **Déterminer** si on possède un espace d'états correct.



$$\Omega = \{\text{H et pluie, H et non pluie, T}\} \quad (1)$$

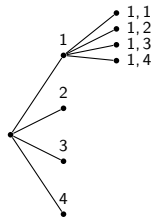


$$\Omega = \{\text{H et pluie, T et non pluie, T}\} \quad (2)$$

Exemple

Lance de deux de a **quatre** faces.

4				
3		2,3		
2			3,2	
1	1,1			
	1	2	3	4



Modèle arbre

- Lancé d'une balle dans une **position** (x, y) tel que $0 \leq x, y \leq 1$.

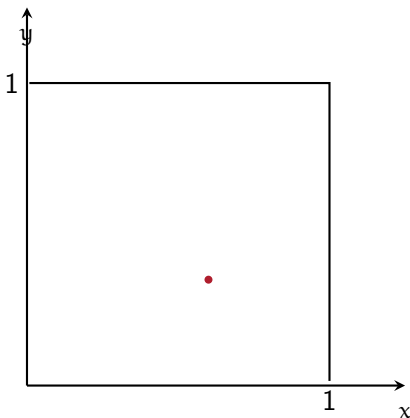


Figure: Exemple d'espace d'état continu

Évènement

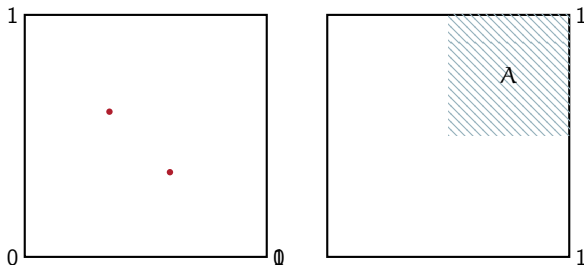
On appelle un **Évènement aléatoire** A un sous ensemble de l'ensemble d'état ξ

- On associe des **probabilités** a des évènements.

Évènement

On appelle un **Évènement aléatoire** A un sous ensemble de l'ensemble d'état ξ

- On associe des **probabilités** a des évènements.



Axiomes

① Positivité:

$$P(A) \geq 0 \quad (3)$$

② Normalité:

$$P(\Omega) = 1 \quad (4)$$

③ Additivité

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (5)$$

Axiomes

- $P(A) \geq 0$

- $P(\Omega) = 1$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conséquences

- $P(A) \leq 1$

- $P(\emptyset) = 0$

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Plus Généralement, pour k évènements disjoints:

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k) \quad (6)$$

- si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

Lance d'un de a quatre faces.

4				
3				
2				
1				
	1	2	3	4

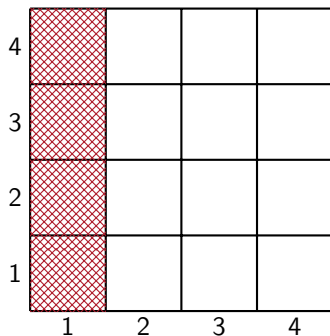
- $P(X = 1) =$

Lance d'un de a quatre faces.

4				
3				
2				
1				
	1	2	3	4

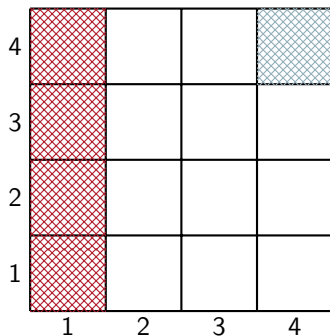
• $P(X = 1) =$

Lance d'un de a quatre faces.



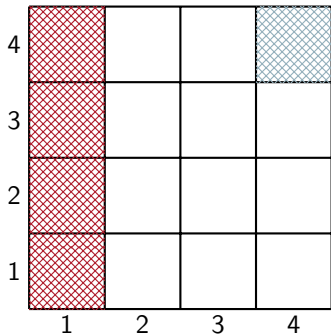
- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$

Lance d'un de a quatre faces.



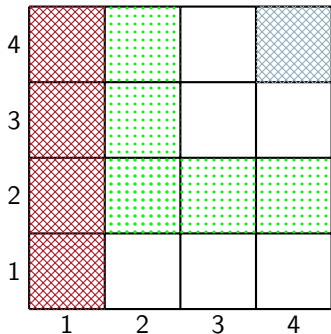
- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$

Lance d'un de a quatre faces.



- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$
- $P(Z = 2) =$

Lance d'un de a quatre faces.

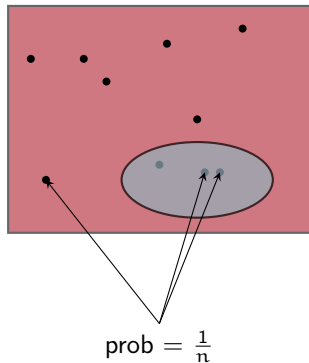


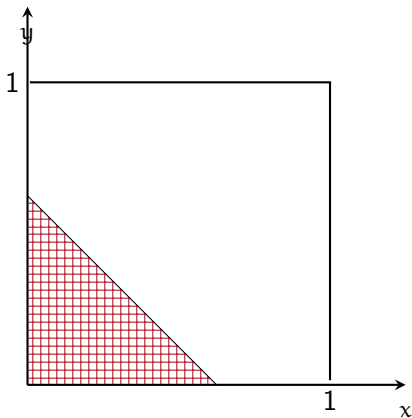
- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$
- $P(Z = 2) =$

- On assume que Ω consiste de n .
- Tous les éléments ont la **même probabilité**.
- L'évènement A contient k éléments.

- On assume que Ω consiste de n .
- Tous les éléments ont la **même probabilité**.
- L'évènement A contient k éléments.

$$P(A) = \frac{k}{n} \quad (7)$$





- Simple exemple uniforme:
probabilité = surface.



$$P \left(\left\{ (x, y) \mid x + y \leq \frac{1}{2} \right\} \right)$$



$$P(\{(0.5, 0.3)\}) =$$

- 1 Spécifier l'espace des **États**
- 2 Spécifier la **loi de probabilité!!**
- 3 Identifier l'**évènement**.
- 4 Calculer...

- Espace d'états $\{1, 2, \dots\}$

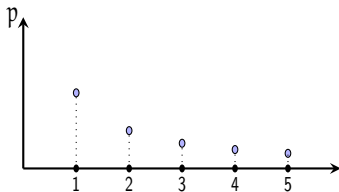
- Espace d'états $\{1, 2, \dots\}$
- la loi de probabilité est donnée par:

$$P(n) = \frac{1}{2^n}$$

- Espace d'états $\{1, 2, \dots\}$
- la loi de probabilité est donnée par:

$$P(n) = \frac{1}{2^n}$$

- S'agit il d'une loi de probabilité?



- Calculer $P(\text{résultat pair}) =$

- Resultat plus fort que la somme:

Theroeme

Si A_1, A_2, A_3, \dots est une **suite** d'évènements **disjoints**, alors:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots \quad (8)$$

- Faites attention que la somme doit etre **dénombrable**.