Solution TD 4

2022

Self-Inependence

Soit A un evenement de Ω et on suppose que A est independant de A.

alors on aura que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap A) &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A) \\ \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A)^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\mathbf{P}(A) = 1$ ou $\mathbf{P}(A) = 0$.

Modele conditionel

on introduit les evenements

- $P = \{\text{Etudiant a prepare}\}$.
- $R = \{\text{Etudiant a reussi}\}$.

Selon l'enone on a:

$$\mathbf{P}(P) = p, \quad \mathbf{P}(R \mid P^c) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(R^c \mid P^c) \quad \text{et } \mathbf{P}(R \mid P) = \alpha$$

La probabilite qu'on cherche est:

$$\begin{aligned} P(P^c \mid R^c) &= \frac{\mathbf{P}(P^c \cap T^c)}{\mathbf{P}(R^c)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(R^c \mid P^c) \cdot \mathbf{P}(P^c)}{\mathbf{P}(R^c)} \end{aligned}$$

Maintenant on applique la loi de **probabilite totale** pour calculer $\mathbf{P}(R^c)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R^c) &= \mathbf{P}(P) \cdot \mathbf{P}(R^c|P) + \mathbf{P}(P^c) \cdot \mathbf{P}(R^c|P^c) \\ &= p(1-\alpha) + \frac{1-p}{2} \end{aligned}$$

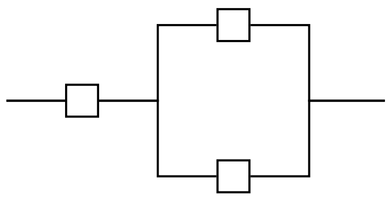
Ce qui nous donne que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T^c \mid R^c) &= \frac{\mathbf{P}(R^c \mid P^c) \cdot \mathbf{P}(P^c)}{\mathbf{P}(R^c)} \\ &= \frac{1-p}{1-p+2(1-\alpha)p} \end{aligned}$$

Independence mutuelle

1. Demontrons que les trois evenements A, B et C sont independent deux a deux.
   On a $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$.
   Pour l'evenement A, on peut lister l'espace d'etat
   $$\Omega = \{(F, G), (F, F), (G, F), (G, G)\}$$
   On endeduit que la probabilite de A est $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$.
   On calcule alors les probabilite suivante:
   (a) $P(A \cap B) = \mathbf{P}(\{(F, F)\}) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$
   (b) $P(A \cap C) = \mathbf{P}(\{(G, G)\}) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C)$
   (c) $P(B \cap C) = \mathbf{P}(\{(F, G)\}) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$
   On conclut alors, que ces evenements sont independent **deux a deux**.
2. Verifions si les trois sont mutuellement independents: On as:
   $$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$$

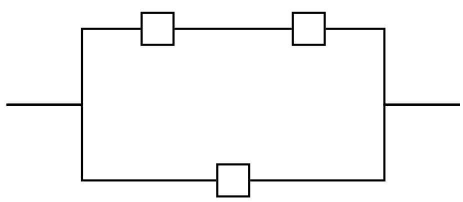
Fiabilite



1. Dans le premier diagramme:
   Pour ce diagramme, on calcule tout d'abord, la probabilite de l'unite en **paralelle**[1] soit en panne est les deux unites soit en panne. Ceci peut arriver avec une probabilite $(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$. Ainsi cette unite sera fonctionnelle avec une probabilite $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Maintenant Le systeme sera fonctionnel si celle a gauche et a droite sont fonctionnelles.[2]. Ceci peut arriver avec une probabilite:
   $$(\frac{8}{9}) \cdot (\frac{2}{3}) = \frac{16}{27}$$

[1] Celle qui est a droite

[2] Puisqu'ils sont en serie



2. Pour le deuxieme diagramme:
   Il sera en panne si les deux entites[3]. sont en panne.
   - Celle en haut, elle sera en panne si **l'une des deux entites est en panne**.
     $$\mathbf{P}(\text{Up fonctionnelle}) = (\frac{2}{3}) \cdot (\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$$
   - Ainsi la probabilite de panne sera:
     $$\mathbf{P}(\text{Up en panne}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

[3] en haut en serie, et celle en bas

- La probabilite que l'unite en bas soit en panne est

$$\mathbf{P}(\text{Up en panne}) = \frac{1}{3} \tag{1}$$

Ainsi si on resume, on retrouve que le systeme sera en panne avec:

$$\mathbf{P}(\text{Systeme en panne}) = (\frac{5}{9}) \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$$

Ce qui donne que la probablite qu'elle soit fonctionnelle est

$$\mathbf{P}(\text{Systeme fonctionel}) = 1 - \frac{5}{27} = \frac{22}{27}$$