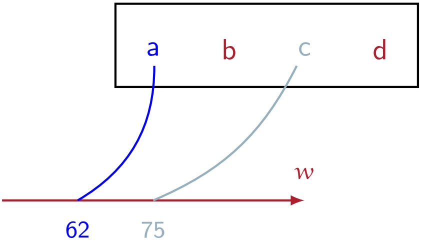
Variable Aleatoire discrete

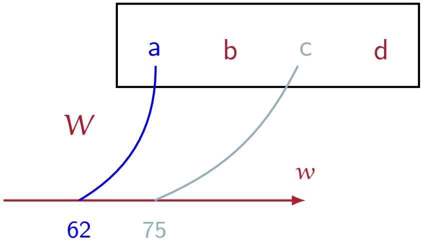
A.Belcaid

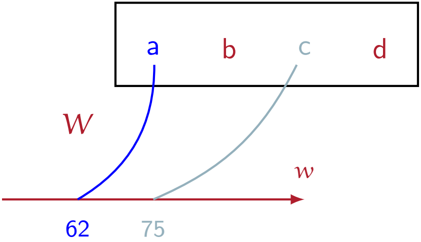
ENSA-Safi

April 13, 2022

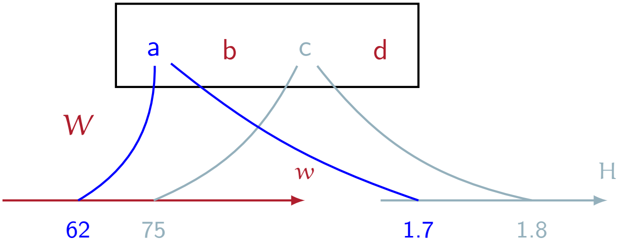
a b c d


a
b
c
d
w
62
75


a
b
c
d
W
w
62
75



On peut penser a W comme une boite noire :



On peut penser a W comme une boite noire :

Formalisme

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.
- Methematiquement on l'as represente comme:

$$X \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

Formalisme

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.
- Methematiquement on l'as represente comme:

$$X \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

- L'espace d'etat peut etre **discret** ou **continu**.

Formalisme

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.
- Methematiquement on l'as represente comme:

$$X \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

- L'espace d'etat peut etre **discret** ou **continu**.

Formalisme

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.
- Methematiquement on l'as represente comme:

$$X \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

- L'espace d'etat peut etre **discret** ou **continu**.

Notation

Varaible aleatoire X valeur numerique x

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.
- Methematiquement on l'as represente comme:

$$X \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

- L'espace d'etat peut etre **discret** ou **continu**.

Notation

Varaible aleatoire X valeur numerique x

- On peut avoir plusieurs VA associes a la meme experience aleatoire.

- Une Variable Aleatoire (VA) est une fonction qui associe une valeur a chaque **etat** d'une experience aleatoire.
- Methematiquement on l'as represente comme:

$$X \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

- L'espace d'etat peut etre **discret** ou **continu**.

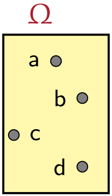
Notation

Varaible aleatoire X valeur numerique x

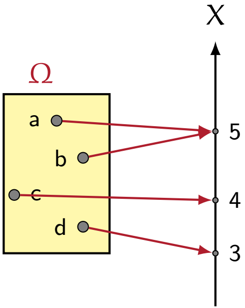
- On peut avoir plusieurs VA associes a la meme experience aleatoire.
- Une fontion d'une ou plusieurs VA est aussi une **variable aleaoitre**

$$B = \frac{W}{H^2}$$

- C'est la loi de distribution de chaque valeur de X.

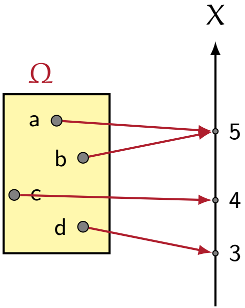


- C'est la loi de distribution de chaque valeur de X.
- Pour une variable discrete on la represente sous forme d' **histograme**.



Loi de probabilite

- C'est la loi de distribution de chaque valeur de X.
- Pour une variable discrete on la represente sous forme d' **histograme**.



Definition

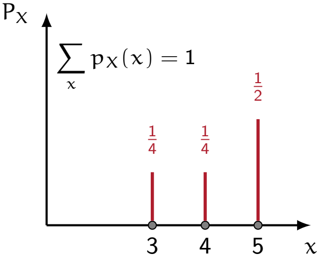
$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}\left(\{w \in \Omega \mid X(w) = x\}\right)$$

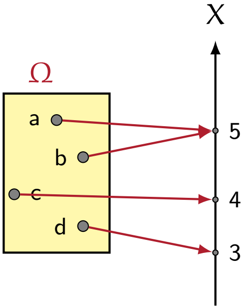
Loi de probabilite

- C'est la loi de distribution de chaque valeur de X.
- Pour une variable discrete on la represente sous forme d' **histograme**.

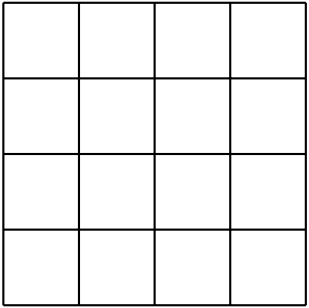
Definition

$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}\left(\{w \in \Omega \mid X(w) = x\}\right)$$





- On considere notre exemple classique de lance d'un de a **quatres faces**.



1. On considere la variable aleatoire

$$Z = X + Y$$

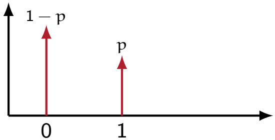
2. calculer la probabilite $P_Z(3)$.
3. Completer tout l'histograme de cette variable.

- L'exemple le plus simple d'une variable discrete avec un **parametre** $p \in [0, 1]$

Bernoulli

- L'exemple le plus simple d'une variable discrete avec un **parametre** $p \in [0, 1]$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilite } p \\ 0 & \text{avec probabilite } 1 - p \end{cases}$$

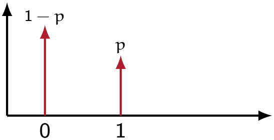


- Cette variable modelise ces exerprience aleatoire de (success/echec).
- Aussi tres utile comme fonctione indicatrice d'un **evenement**

$$I_A = 1 \iff \text{A est realise}$$

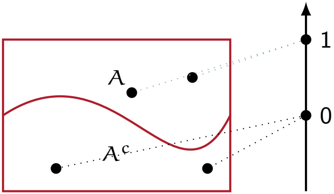
- L'exemple le plus simple d'une variable discrete avec un **parametre** $p \in [0, 1]$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilite } p \\ 0 & \text{avec probabilite } 1 - p \end{cases}$$



- Cette variable modelise ces exerprience aleatoire de (success/echec).
- Aussi tres utile comme fonctione indicatrice d'un **evenement**

$$I_A = 1 \iff \text{A est realise}$$



$$\mathbf{P}_{I_A} = \mathbf{P}(I_A = 1) = \mathbf{P}(A)$$

Loi discrete uniforme

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.

Loi discrete uniforme

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Tous equiprobble.

Loi discrete uniforme

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \dots, b\}$. Tous equiprobble.
- **Espace d'etats**: $\{a, a+1, \dots, b\}$.

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Tous equiprobble.
- **Espace d'etats**: $\{a, a+1, \ldots, b\}$.
- **Variable aleatoire**: $X: \quad X(w) = w$

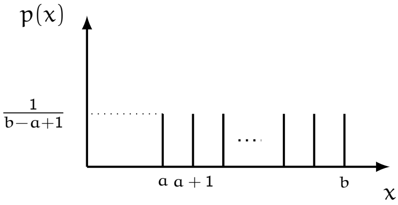
Loi discrete uniforme

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Tous equiprobble.
- **Espace d'etats**: $\{a, a+1, \ldots, b\}$.
- **Variable aleatoire**: $X: \quad X(w) = w$
- **Modele de** : ignorance complete!!

Loi discrete uniforme

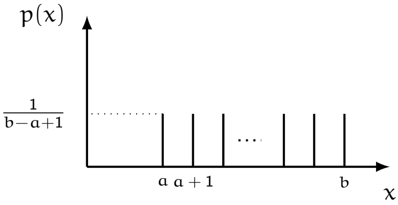
- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Tous equiprobble.
- **Espace d'etats**: $\{a, a+1, \ldots, b\}$.
- **Variable aleatoire**: $X: \quad X(w) = w$
- **Modele de** : ignorance complete!!

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Tous equiprobble.
- **Espace d'etats**: $\{a, a+1, \ldots, b\}$.
- **Variable aleatoire**: $X: \quad X(w) = w$
- **Modele de** : ignorance complete!!

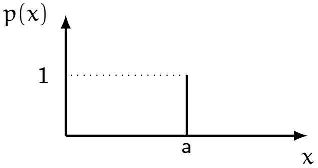


Loi discrete uniforme

- **Parametres** : enttiers **a, b**; $a \leqslant b$.
- **Experience** : Tirer un element de $\{a, a+1, \dots, b\}$. Tous equiprobble.
- **Espace d'etats**: $\{a, a+1, \dots, b\}$.
- **Variable aleatoire**: $X: \quad X(w) = w$
- **Modele de** : ignorance complete!!

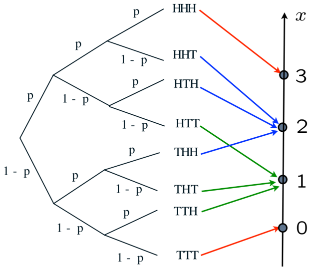


Cas special $a = b$.



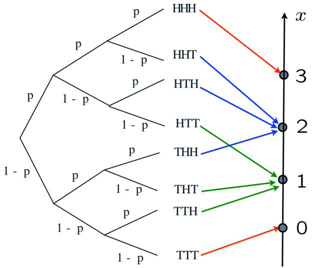
Variable Aleatoire Binomiale

- **Experience**: n repetition d'experiences Bernoulli identiques et **independents**.
- **Parametres**: **n**: nombre de repetition, p probabilite de success.
- **Espace D'etats**: Ensemble de (S{succes}, E{Echecs}) de longueur n.
- **Variable aleatoire** X : Nombre de success.
- **Modelise**: Nombre de cas reussi dans une repetition identique et **independents**.



Variable Aleatoire Binomiale

- **Experience**: n repetition d'experiences Bernoulli identiques et **independents**.
- **Parametres**: **n**: nombre de repetition, p probabilite de success.
- **Espace D'etats**: Ensemble de (S{succes}, E{Echecs}) de longueur n.
- **Variable aleatoire** X : Nombre de success.
- **Modelise**: Nombre de cas reussi dans une repetition identique et **independents**.



$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

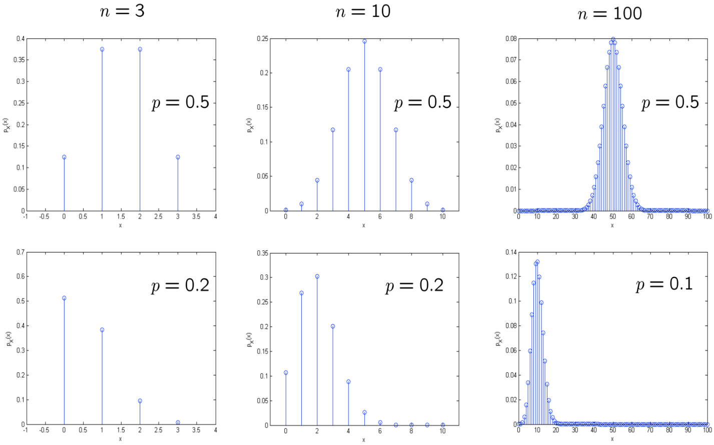


Figure: Illustration des distrutions Binomiale pour differentes parametres (n, p)

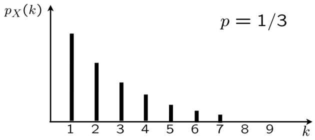
Loi geometrique

- **Experience**: Repetition **infinie** d'une Bernoulli.
- **Parametres** p parametre succes de Bernouli.
- **Espace d'etats**: Une suite infinie de $\{$S(success),E(Echec)$\}$
- **Modelise** : Temps d'attente jusq'a un **success**

Loi geometrique

- **Experience**: Repetition **infinie** d'une Bernoulli.
- **Parametres** p parametre succes de Bernouli.
- **Espace d'etats**: Une suite infinie de $\{$S(success),E(Echec)$\}$
- **Modelise** : Temps d'attente jusq'a un **success**

- $\mathbf{P}_X(k) =$



- $\mathbf{P}$(pas de succes)

- **Motivation**: On joue a un jeu 1000 fois. Le gain aleatoire est decrit comme:

- **Motivation**: On joue a un jeu 1000 fois. Le gain aleatoire est decrit comme:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } \frac{2}{10} \\ 2 & \text{a.p } \frac{5}{10} \\ 4 & \text{a.p } \frac{3}{10} \end{cases}$$

- **Attention**: Si on dipspose d'une somme **infinie**, alors il faut qu'elle soit bien definie:

$$\sum_x |x| p_X(x) < \infty$$

- **Motivation**: On joue a un jeu 1000 fois. Le gain aleatoire est decrit comme:
- Quel sera la gain **moyen**?

$$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } \frac{2}{10} \\ 2 & \text{a.p } \frac{5}{10} \\ 4 & \text{a.p } \frac{3}{10} \end{cases}$$

- **Attention**: Si on dipspose d'une somme **infinie**, alors il faut qu'elle soit bien definie:

$$\sum_x |x| p_X(x) < \infty$$

- **Motivation**: On joue a un jeu 1000 fois. Le gain aleatoire est decrit comme:
- Quel sera la gain **moyen**?

$$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } \frac{2}{10} \\ 2 & \text{a.p } \frac{5}{10} \\ 4 & \text{a.p } \frac{3}{10} \end{cases}$$

Definition

$$E[X] = \sum_x x p_x(x)$$

-
  - **Attention**: Si on dipspose d'une somme **infinie**, alors il faut qu'elle soit bien definie:

$$\sum_x |x| p_X(x) < \infty$$

- **Motivation**: On joue a un jeu 1000 fois. Le gain aleatoire est decrit comme:
- Quel sera la gain **moyen**?

$$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } \frac{2}{10} \\ 2 & \text{a.p } \frac{5}{10} \\ 4 & \text{a.p } \frac{3}{10} \end{cases}$$

Definition

$$E[X] = \sum_x x p_x(x)$$

- **Interpretation**: Moyen d'un grand nombre de repetetion **independent** repetition.

-
  - **Attention**: Si on dipspose d'une somme **infinie**, alors il faut qu'elle soit bien definie:

$$\sum_x |x| p_X(x) < \infty$$

- $$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } p \\ 0 & \text{a.p } 1 - p \end{cases}$$

Esperance d'une Bernoulli

- $$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } p \\ 0 & \text{a.p } 1-p \end{cases}$$

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

- $$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } p \\ 0 & \text{a.p } 1-p \end{cases}$$

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

- Si X est l'indicatrice de A, $X = I_A$.

Esperance d'une Bernoulli

- $$X = \begin{cases} 1 & \text{a.p } p \\ 0 & \text{a.p } 1-p \end{cases}$$

  $$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

- Si X est l'indicatrice de A, $X = I_A$.

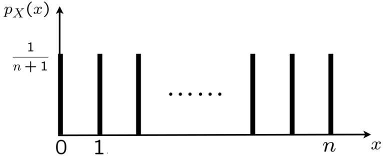
  X est un bernoulli avec $p = \mathbf{P}(A)$

  $$E[I_A] = \mathbf{P}(A)$$

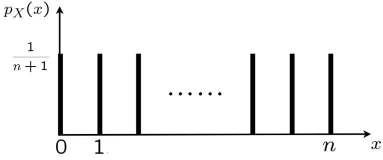
Esperance d'une variable uniforme

- Une loi uniforme de $0, 1, \ldots, n$.

- Une loi uniforme de $0, 1, \ldots, n$.



- Une loi uniforme de $0, 1, \ldots, n$.



$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{n} x p_X(x) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + n) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Esperance comme moyenne

- n etudiants.

Esperance comme moyenne

- n etudiants.
- Note de chaque etudiant x_i.

- n etudiants.
- Note de chaque etudiant x_i.
- On suppose que les notes sont distribues uniformement:

Esperance comme moyenne

- n etudiants.
- Note de chaque etudiant x_i.
- On suppose que les notes sont distribues uniformement:
  - $\mathbf{P}_X(x_i)$:

- n etudiants.
- Note de chaque etudiant x_i.
- On suppose que les notes sont distribues uniformement:
  - $\mathbf{P}_X(x_i)$:
  - $\mathbb{E}[X]$:

- Si $X \geqslant 0$ alors

$$\mathbf{E}[X] \geqslant 0$$

Propriete

- Si $X \geqslant 0$ alors

$$\mathbf{E}[X] \geqslant 0$$

- Si $a \leqslant X \leqslant b$ alors:

$$a \leqslant \mathbf{E}[X] \leqslant b$$

Propriete

- Si $X \geqslant 0$ alors
$$\mathbf{E}[X] \geqslant 0$$

- Si $a \leqslant X \leqslant b$ alors:
$$a \leqslant \mathbf{E}[X] \leqslant b$$

- Si c est une constante, alors
$$\mathbf{E}(c) = c$$

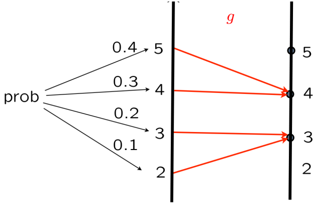
Esperance d'une fonction de VA

- Soit **X** et $Y = g(X)$.

Esperance d'une fonction de VA

- Soit **X** et $Y = g(X)$.
- Moyenne en utilisant y.

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{y} y P_Y(y)$$

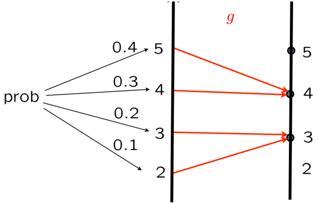


- Soit $\mathbf{X}$ et $Y = g(X)$.
- Moyenne en utilisant y.

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{y} y P_Y(y)$$

- Moyenne en utilisant x.

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x} g(x) \mathbf{P}_X(x)$$

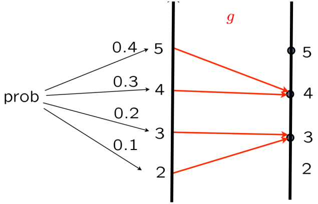


- Soit $\mathbf{X}$ et $Y = g(X)$.
- Moyenne en utilisant y.

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_y y P_Y(y)$$

- Moyenne en utilisant x.

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\mathbf{P}_X(x)$$



-

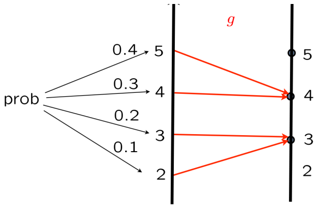
$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)P_X(x) \\ &= \sum_y y \sum_{x:g(x)=y} P_X(x) \\ &= \sum_y y P_Y(y)\end{aligned}$$

- Soit $\mathbf{X}$ et $Y = g(X)$.
- Moyenne en utilisant y.

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_y y P_Y(y)$$

- Moyenne en utilisant x.

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\mathbf{P}_X(x)$$



-

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)P_X(x) \\
&= \sum_y y \sum_{x:g(x)=y} P_X(x) \\
&= \sum_y y P_Y(y)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{E}[X^2] =$
- Attention En general

$$\mathbf{E}[g(X)] \neq g(\mathbf{E}[X])$$

Linearite d'esperance

$$\mathbf{E}[aX + b] = a\mathbf{E}[X] + b$$

- Intuitive.
- Demontrer ce resultat.