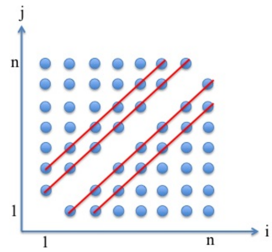
Solution TD 2

2022

Exercice 1

L'espace d'etats est $\Omega = \{(i,j) \mid i \neq j \ , \ 1 \leq i,j \leq n\}$ *ouleresultat* (i,j) represente la position de parking d'Ali et Najib. Ainsi on applique la loi **uniforme** pour calculer la probababilite de l'evenement concerne:



$$A = \{(i,j) \in \Omega \mid |i-j| \leq 2\}$$

On calcule tout d'abord le **cardinal** de Ω. On possede n^2 pairs (i,j). Cependant une position avec (i,i)[1], le cardinal de Ω est

$$n^2 - n = n(n-1)$$

[1] deux voitures ne peuvent pas parquer dans la meme position.

On considere tout d'abord le cas ou $n \geq 3$, l'evenement A consiste des **quatre** lignes traces dans la figure. Il contient $2(n-1) + 2(n-2) = 4n - 6$ elemenets.

Pour $n = 2$, l'evenement A contient seulement les deux elements $(1,2)$ et $(2,1)$, ce qui est consistent avec la formule $4(2) - 6 = 2$. Ainsi on conclut que:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4n-6}{n(n-1)}$$

Calcul de probabilite espace continu

1. Probabilite de **A**:
   La figure montre l'espace des etats continu et les regions hachuree correspondent a l'evenemtn A.

   Puisqu'il sagit d'une loi de probabilite **uniforme**, on reduit le calcul des probabilite auy calcul de la surface.

$$\mathbf{P}(A) = 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \frac{4}{9}$$

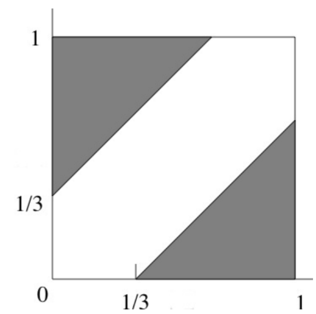


Figure 1: Choix qui differe par plus de 1/3.

2. Probabilite de **B**:
   L'ensemble qui correspond a B est trace dans la figure suivante:

   Ainsi la probabilite est egale:

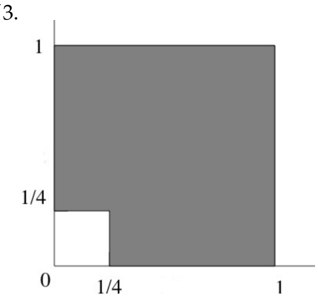


Figure 2: Les deux superieurs a 1/4.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= 1 - \mathbf{P}(B^c) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

3. Probabilite de **C**:
   La figure montre la region qui correspond a C.

$$\mathbf{P}(C) = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1-x} dy = 0$$

4. La probabilite de l'evenement **D**:

$$\mathbf{P}(D) = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

5. Probabilite de $A \cap D$:

$$\mathbf{P}(A \cap D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{89}{288}$$

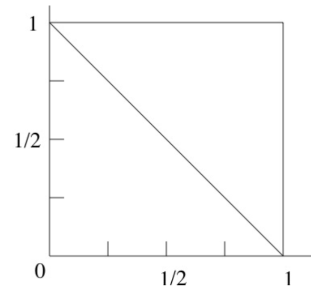


Figure 3: Region $x + y = 1$.

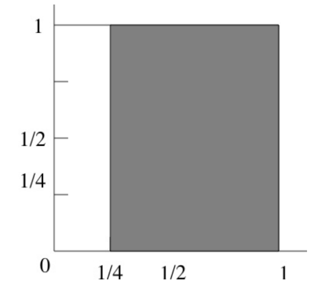


Figure 4: Region $x \geq \frac{1}{4}$.

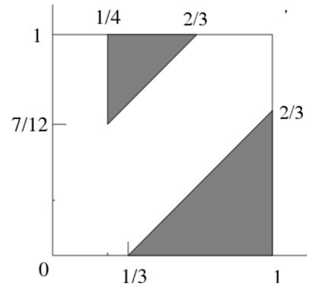


Figure 5: Region d'intersection entre A et D.

Inegalite de Benferroni

1. Regle pour **deux evenements**:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$$

   On a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left((A_1 \cap A_2)^c\right) &= \mathbf{P}\left(A_1^c \cup A_2^c\right) \leq \mathbf{P}(A_1^c) + \mathbf{P}(A_2^c) \\
1 - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) &\leq 1 - \mathbf{P}(A_1^c) + 1 - \mathbf{P}(A_2^c) \\
\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) &\geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - 1
\end{aligned}$$

2. **Generalisation**:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) - (n-1)$$

- **Cas Initial** : Pour $n = 2$ c'est deja demontre dans la premiere question.
- **Heredite**: On suppose que la relation est vrai pour $n-1$ et on la demontre pour n.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\underbrace{A_1 \cap \ldots}_{B} \cap A_n) &\geq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A_n) - 1 \\
&\geq \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_{n-1}) - (n-2) + \mathbf{P}(A_n) - 1 \\
&\geq \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) - (n-1)
\end{aligned}$$