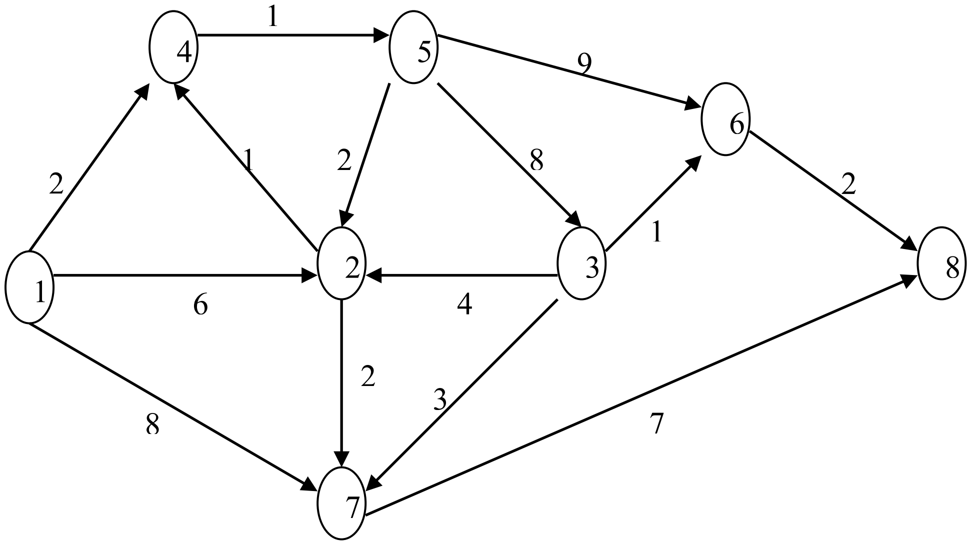
Série 4 de TD : Chemins (Correction)

Exercice 1 :

Déterminer les chemins de longueur minimale entre x_1 et x_8 dans le graphe ci-dessous :



1. Par la méthode de Ford

   Réponse :

   Les étapes de la résolution par l'algorithme de Ford sont regroupées dans le tableau suivant :

Sommets		1	2	3	4	5	6	7	8
Marques initiales des λj		0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
λj améliorés par arc considéré	Arc (1,2)	0	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	Arc (1,4)	0	6	∞	2	∞	∞	∞	∞
	Arc (4,5)	0	6	∞	2	3	∞	∞	∞
	Arc (5,2)	0	5	∞	2	3	∞	∞	∞
	Arc (5,3)	0	5	11	2	3	∞	∞	∞
	Arc (2,7)	0	5	11	2	3	∞	7	∞
	Arc (7,3)	0	5	10	2	3	∞	7	∞
	Arc (3,6)	0	5	10	2	3	11	7	∞
	Arc (6,8)	0	5	10	2	3	11	7	13
Marques finales des λj		0	5	10	2	3	11	7	13

2. Par la méthode de Bellman – Kalaba

Réponse :

Les étapes de la résolution par l'algorithme de Bellman sont regroupées dans le tableau suivant :

λi(8)	λi(7)	λi(6)	λi(5)	λi(4)	λi(3)	λi(2)	λi(1)	Xi	1	2	3	4	5	6	7	8
0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	1	0	6	∞	2	∞	∞	8	∞
5(5)	5(5)	5(5)	5(5)	5(5)	5(5)	6(1)	6(1)	2	∞	0	∞	1	∞	∞	2	∞
10(7)	10(7)	10(7)	10(7)	11(7)	11(7)	11(7)	∞	3	∞	4	0	∞	∞	1	∞	∞
2(1)	2(1)	2(1)	2(1)	2(1)	2(1)	2(1)	2(1)	4	∞	∞	∞	0	1	∞	∞	∞
3(4)	3(4)	3(4)	3(4)	3(4)	3(4)	3(4)	∞	5	∞	2	8	∞	0	9	∞	∞
11(3)	11(3)	11(3)	12(3)	12(3)	12(3)	∞	∞	6	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
7(2)	7(2)	7(2)	7(2)	7(2)	8(1)	8(1)	8(1)	7	∞	∞	3	∞	∞	∞	0	7
13(6)	13(6)	14(6)	14(6)	14(6)	∞	∞	∞	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Comme les λi(7) = λi(8) pour i = 1, …, 8, ces marques représentent les distances minimales de x_1 aux autres sommets x_j.

Les plus courts chemins calculés sont :
(1, 4, 5, 2, 7, 3, 6, 8)

Remarquons qu'il existe dans ce graphe trois circuits de longueurs positives (ex : (x2, x4, x5, x2) de longueur 4), cela rend le problème de la recherche du chemin de valeur maximale de x1 à x8 non réalisable.

3. Par la méthode de Dijkstra

Réponse :

Comme les évaluations des arcs sont touts positives, on peut appliquer l'algorithme de Dijkistra pour calculer le chemin de valeur s minimale dans ce graphe.
Les étapes de la résolution par l'algorithme de Dijkistra sont regroupées dans le tableau suivant :

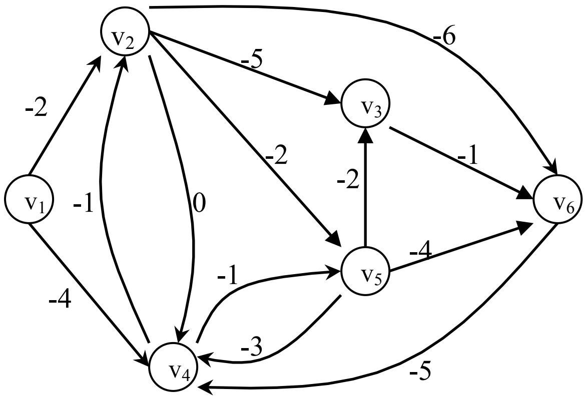
Xi	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	6	∞	2	∞	∞	8	∞
2	∞	0	∞	1	∞	∞	2	∞
3	∞	4	0	∞	∞	1	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞	∞	∞
5	∞	2	8	∞	0	9	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
7	∞	∞	3	∞	∞	∞	0	7
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
λi(1)	**0(1)**	6	∞	2	∞	∞	8	∞
λi(2)		6	∞	**2(1)**	∞	∞	8	∞
λi(3)		6	∞		**3(4)**	∞	8	∞
λi(4)		**5(5)**	11			12	8	∞
λi(5)			11			12	**7(2)**	∞
λi(6)			**10(7)**			12		14
λi(7)						**11(3)**		14
λi(8)								**13(6)**

Les plus courts chemins calculés sont :
(1, 4, 5, 2, 7, 3, 6, 8)

Rappel du principe d'optimalité : un chemin optimal est constitué de chemins optimaux.

Exercice 2 :

Soit le graphe ci-dessous :



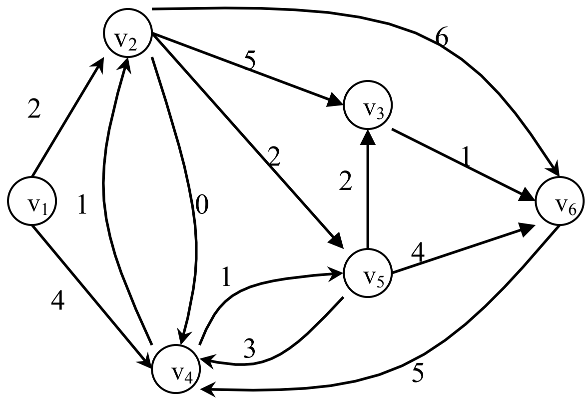
Déterminer un plus long chemin du sommet v_1 au sommet v_6. Préciser la méthode utilisée ainsi que les étapes de la résolution.

Réponse :

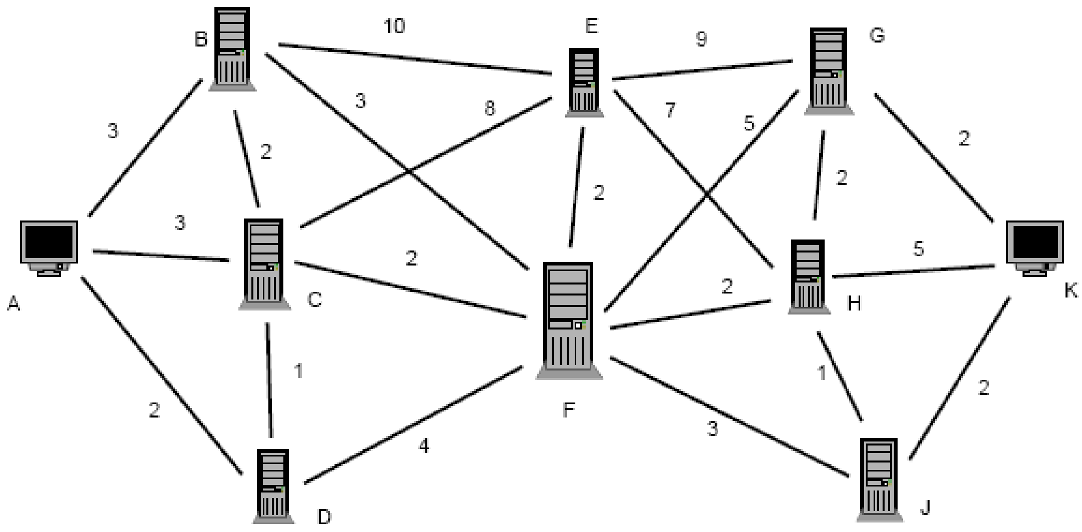
Le problème de calcul du plus **long** chemin dans ce graphe peut être résolu de deux façons :

1- Mettre à jour les algorithmes vus en cours pour le calcul des plus cours chemin en remplaçant le « min « par « max » et appliquer directement sur ce graphe avec les évaluations négatives.
   Remarquons que Dijkistra est aussi applicable dans ce cas même si les évaluations sont négatives car nous calculons un plus long chemin et non un plus court chemin.

2- Transformer le graphe en remplaçant les évaluation par leurs opposés (multiplier par -1) (Voir graphe ci-dessous) et ramener donc le problème de calcul de plus long chemin sur G à un problème de calcul du plus court chemin sur le graphe transformé. Les algorithmes vus en cours seront donc directement applicables sur le graphe modifié.



Exercice 3 :
Le réseau informatique d'une entreprise est représenté par le graphe qui suit. Les sommets représentent les serveurs et les arêtes indiquent le temps nécessaire pour faire passer une information d'un ordinateur à l'autre.



1) Un employé travaillant sur l'ordinateur *A* envoie un document à un collègue utilisant l'ordinateur *K*. Combien de temps faudra-t-il au minimum pour que le document lui parvienne?

Réponse :
En considérant que le temps de transmission d'un document est la somme des temps de transmission des serveurs qu'il visite lors de don routage d'une source vers une destination, le problème revient donc à calculer le plus court chemin de A à K sur le graphe G.

2) Le serveur *F* tombe subitement en panne à cause d'un virus. Combien de temps faut-il maintenant pour envoyer un document de *A* à *K* ?

Réponse :
Il y a deux cas :
- Si F n'appartient pas au plus court chemin de A à K, alors l'arret de F ne change pas le chemin de transmission de A à F.
- Si F appartient au plus court chemin de A à K, alors le calcul des plus court chemin est à refaire. Pour Dijkistra par exemple, on peut reprendre à partir de l'itération juste avant le marquage de sommet F car tous les plus courts chemins calculés ne passe pas par F car il n'est pas encore marqué.