ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΠΡΩΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ - ΑΝΑΦΟΡΑ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-24

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ | 10079
ΤΗΜΜΥ ΑΠΘ | anasster@ece.auth.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το παρόν έγγραφο αποτελεί μία αναφορά για την πρώτη εργασία του μαθήματος *Τεχνικές Βελτιστοποίησης* με θέμα *«Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα»*. Στόχος της εργασίας είναι η εύρεση ενός διαστήματος αρκετά μικρού, το οποίο να περιλαμβάνει το ελάχιστο της δοθείσας συνάρτησης εντός του αρχικού διαστήματος $[a, b]$.

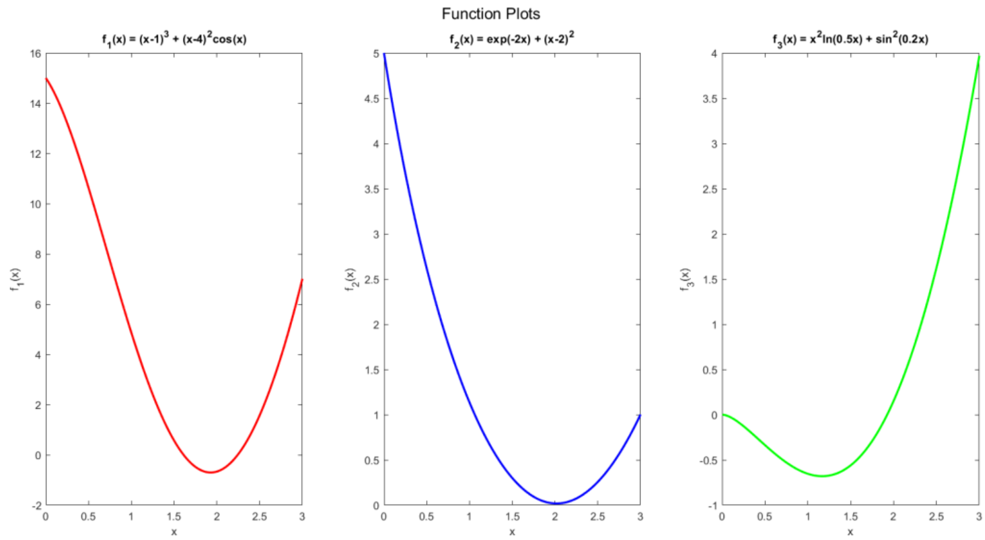
Στη συγκεκριμένη εργασία, το αρχικό διάστημα αναζήτησης ελαχίστου είναι το $[0, 3]$, και οι συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση είναι οι:

$$f_1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2 \cdot \cos(x)$$

$$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$$

$$f_3(x) = x^2 \cdot \ln(0.5x) + \sin(0.2x)^2$$

Χαράσσοντας μέσω MATLAB τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών, φαίνεται ότι είναι κυρτές, καθώς:



Όπως φαίνεται λοιπόν, παρουσιάζουν ολικό ελάχιστο η καθεμιά στο διάστημα $[0, 3]$.

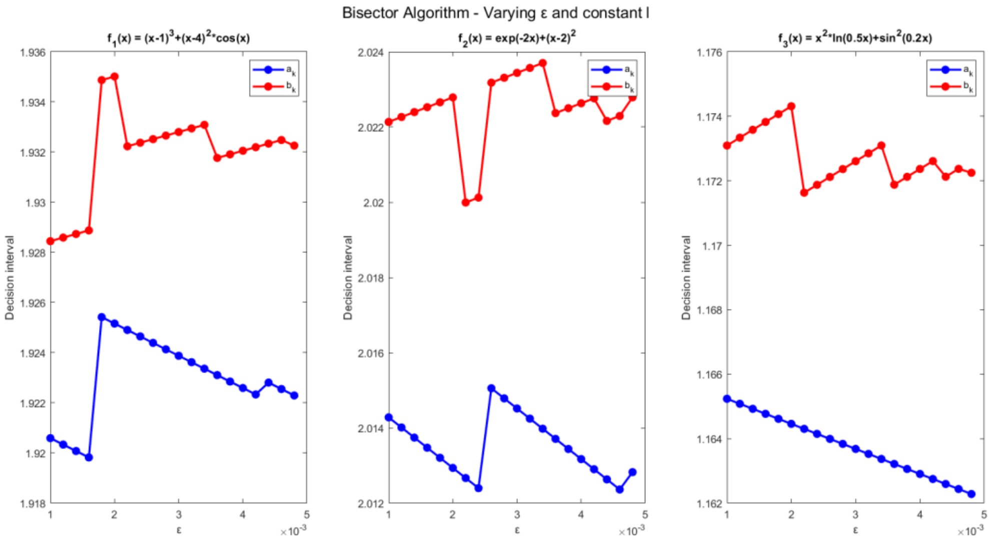
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

I. Αλγόριθμος Διχοτόμου

Ο πρώτος αλγόριθμος που εφαρμόστηκε για την εύρεση διαστήματος τοπικού ελαχίστου είναι ο *Αλγόριθμος της Διχοτόμου*.

Για τον αλγόριθμο της διχοτόμου δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές τόσο για την παράμετρο l όσο και για την ε. Αρχικά, τέθηκε το l σε μία σταθερή τιμή $l = 0.01$ ενώ το $\varepsilon > 0$ είχε μεταβαλλόμενη τιμή, ξεκινώντας από $\varepsilon = 0.001$ και με βήμα 0.0002 να φτάσει έως πριν από την τιμή $\frac{l}{2} = 0.005$, λόγω του περιορισμού $l \geq 2 \cdot \varepsilon$.

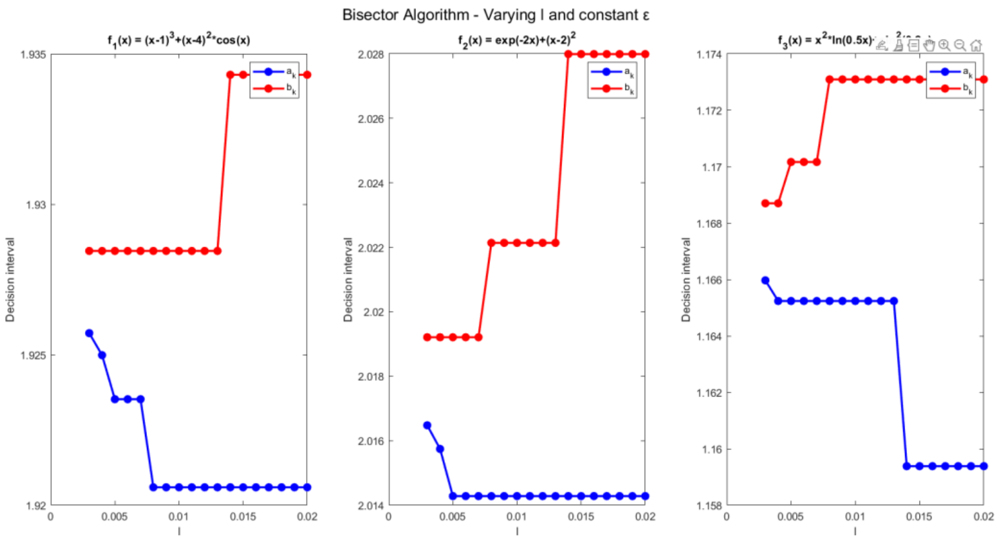
Τα αποτελέσματα και για τις τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



Στα διαγράμματα αυτά, με έντονες τελείες σημειώνονται τα άκρα του τελικού διαστήματος αναζήτησης κατά τον τερματισμό του αλγορίθμου, για κάθε τιμή του ε με l σταθερό (με μπλε γραμμή το αριστερό άκρο a_k και με κόκκινη το δεξιό άκρο b_k.

Διαισθητικά, παρατηρώντας και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, φαίνεται ότι το διάστημα στο οποίο εντοπίζεται το ελάχιστο είναι αρκετά στενό, έχοντας κατά μέσο όρο μήκος λιγότερο από 0.01, επομένως ανεξάρτητα από τις τιμές του ε για σταθερό l φαίνεται ότι έχουμε ικανοποιητικά καλή σύγκλιση.

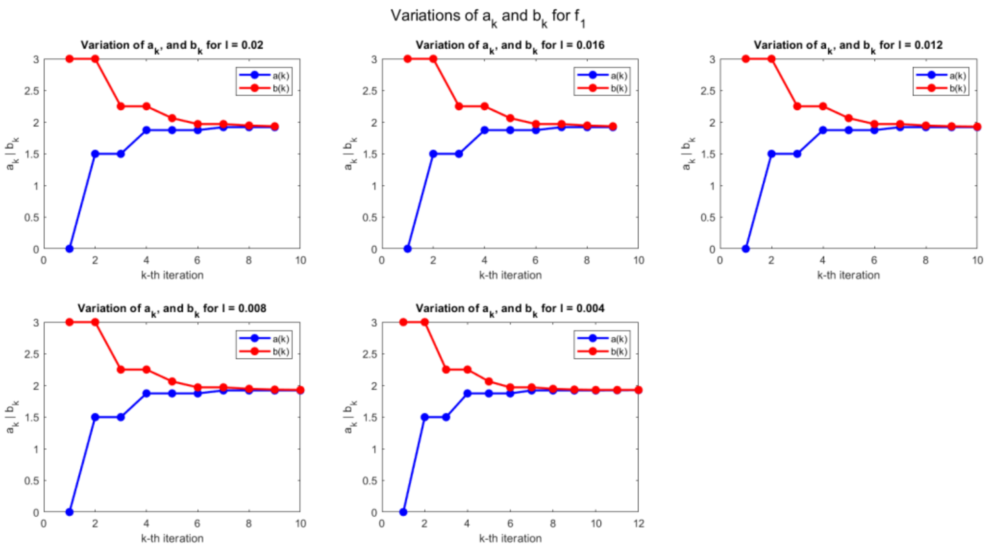
Στη συνέχεια, τέθηκε το ε σε μία σταθερή τιμή $\varepsilon = 0.001$, και έγινε δοκιμή του αλγορίθμου μεταβάλλοντας διαρκώς το l, σε ένα πεδίο τιμών από 0.02 έως 0.003 (οριακά πάνω από $2 \cdot \varepsilon$). Τα αποτελέσματα φαίνονται και για τις τρεις συναρτήσεις στα παρακάτω διαγράμματα:



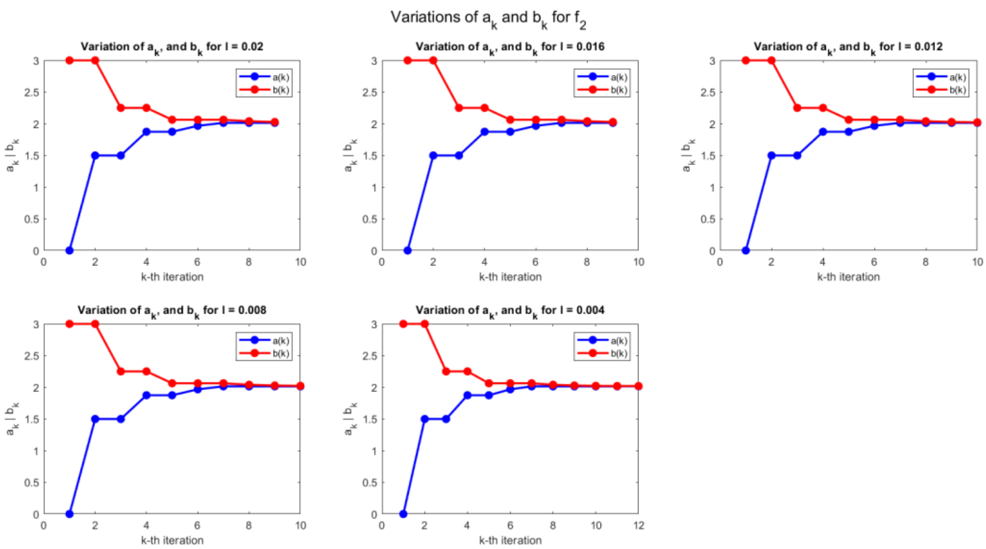
Όπως φαίνεται, για διάφορες τιμές του l, το διάστημα επί της ουσίας παραμένει σταθερό καθώς υπάρχουν πολύ λίγες μεταβολές, τόσο στο a_k όσο και στο b_k. Επομένως ο αλγόριθμος είναι σχετικά ανεξάρτητος του l.

Τέλος, για τον αλγόριθμο της διχοτόμου παρουσιάζονται τα άκρα a_k και b_k συναρτήσει της k-οστής επανάληψης του αλγορίθμου για διάφορες τιμές του l.

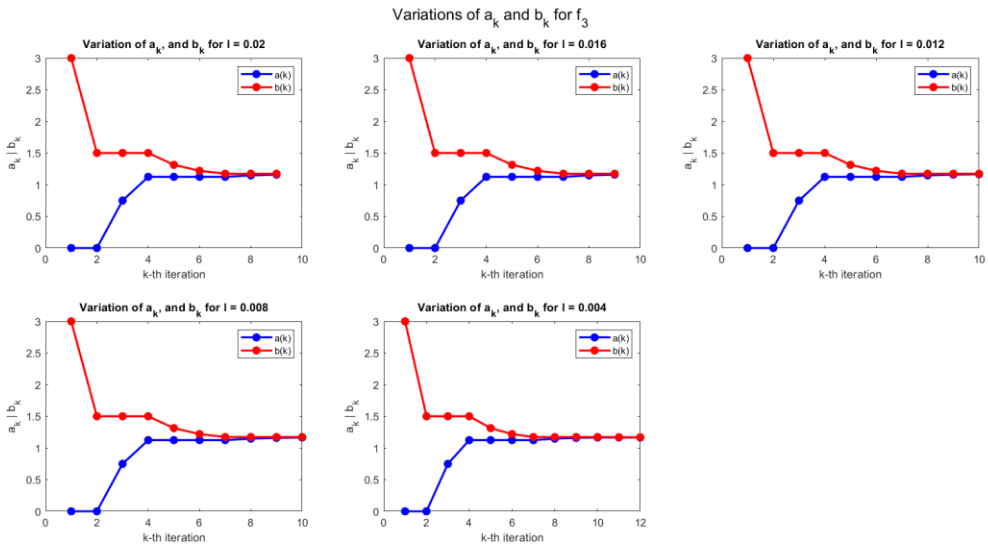
Για την f_1:



Για την f_2:



Για την f_3:

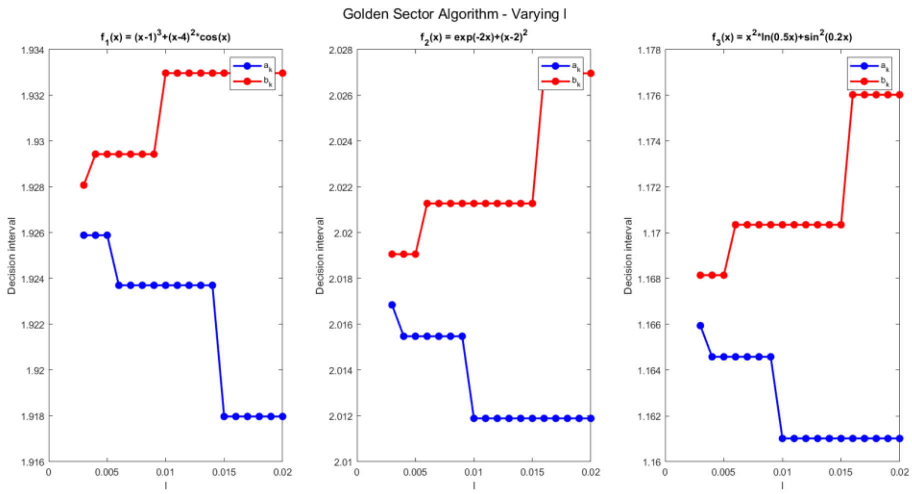


Από τα παραπάνω διαγράμματα, φαίνεται ότι κατά μέσο όρο ο αλγόριθμος συγκλίνει στις 10 επαναλήψεις, με εξαίρεση την περίπτωση $l = 0.004$, όπου και έχουμε ελαφρώς πιο αργή σύγκλιση στις 12 επαναλήψεις.

II. Αλγόριθμος του Χρυσού Τομέα

Στο μέρος αυτό, παρουσιάζονται και σχολιάζονται αποτελέσματα του *Αλγορίθμου του Χρυσού Τομέα*, για τις ίδιες αντικειμενικές συναρτήσεις.

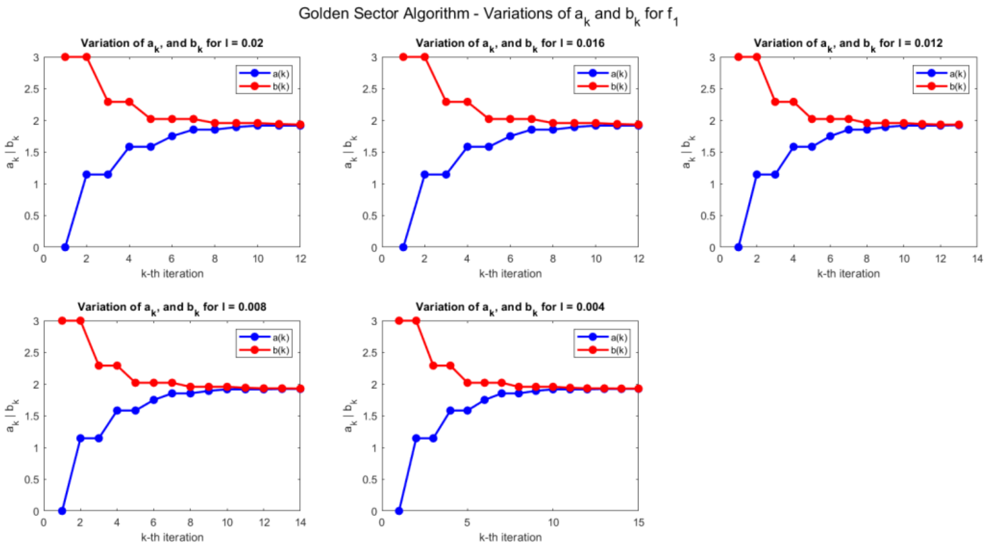
Αρχικά, παρουσιάζονται τα τελικά άκρα του διαστήματος αναζήτησης για διάφορες τιμές του l. Να σημειωθεί πως χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες τιμές με τον αλγόριθμο της διχοτόμου, και θα χρησιμοποιηθούν και στους υπόλοιπους αλγορίθμους για να μπορεί να γίνει σύγκριση.



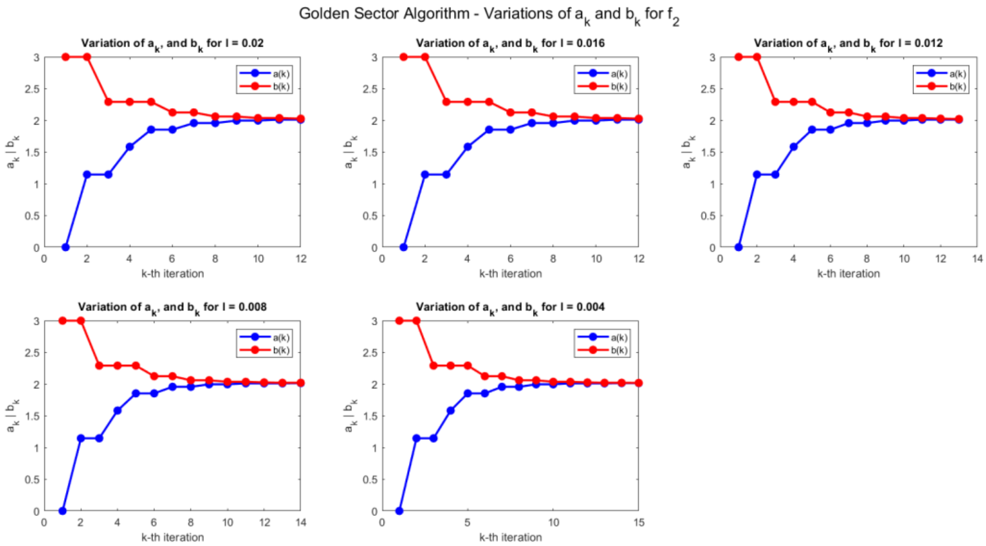
Και στον αλγόριθμο του χρυσού τομέα, δεν υπάρχουν ιδιαίτερα πολλές διαβαθμίσεις στα άκρα, συνεπώς και εδώ υπάρχει μία σχετική ανεξαρτησία ως προς το l.

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης των συναρτήσεων συναρτήσει του k, για όλες τις συναρτήσεις.

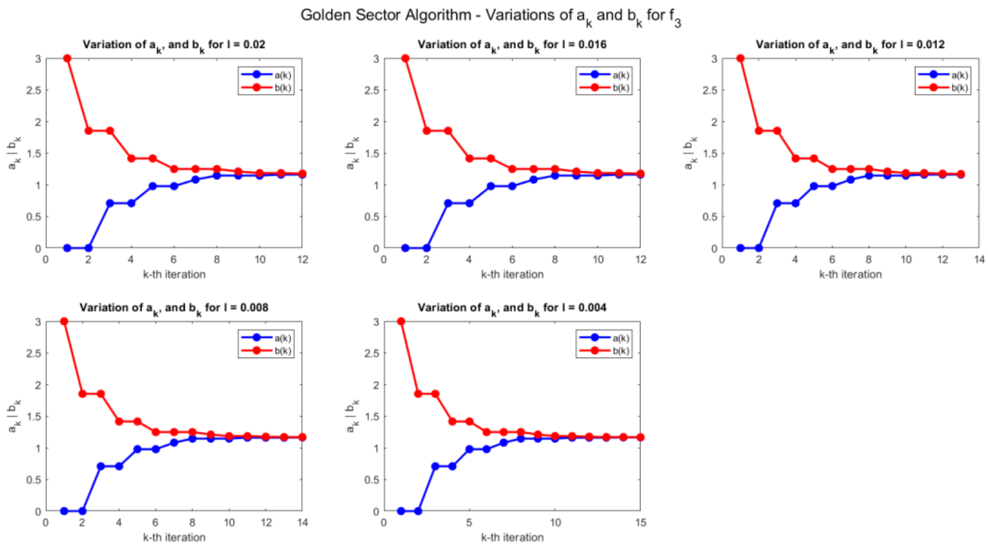
Για την f_1:



Για την f_2:



Για την f_3:

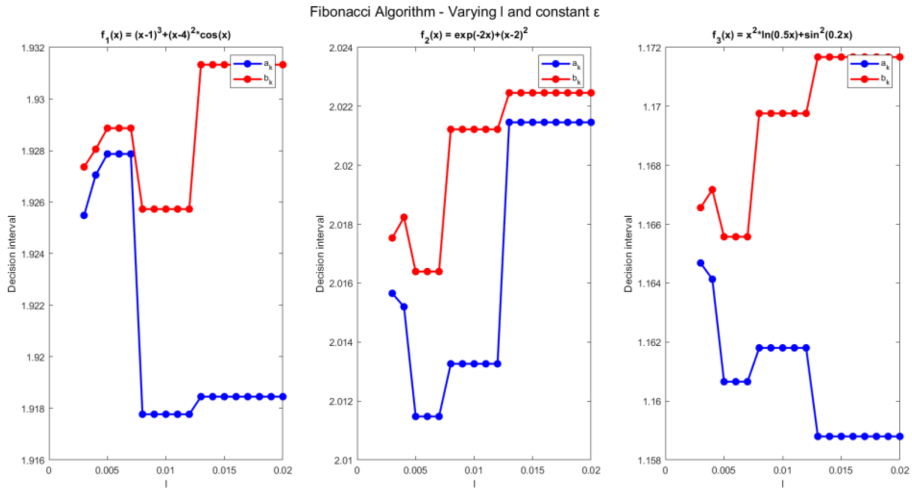


Εδώ όπως φαίνεται ο αλγόριθμος συγκλίνει λίγο πιο αργά από τον αλγόριθμο της διχοτόμου, συγκεκριμένα χρειάζεται δύο, έως και τρεις παραπάνω επαναλήψεις για τα αντίστοιχα l. Ωστόσο, η ακρίβεια με την οποία συγκλίνει είναι υπερδιπλάσια από αυτήν του αλγορίθμου της διχοτόμου, καθώς όπως φαίνεται το μήκος των τελικών διαστημάτων κυμαίνεται στις τιμές 0.002 έως 0.004 κατά μέσο όρο. Άρα υπάρχει ένα trade-off ακρίβειας και χρόνου ολοκλήρωσης.

III. <u>Αλγόριθμος Fibonacci</u>

Ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί στο μέρος αυτό, είναι ο *Αλγόριθμος του Fibonacci*. Και πάλι, θα παρουσιαστούν τα τελικά άκρα του διαστήματος αναζήτησης συναρτήσει διάφορων τιμών του l, και στη συνέχεια θα χαραχθεί γραφική παράσταση των τιμών των άκρων του διαστήματος αναζήτησης συναρτήσει του k.

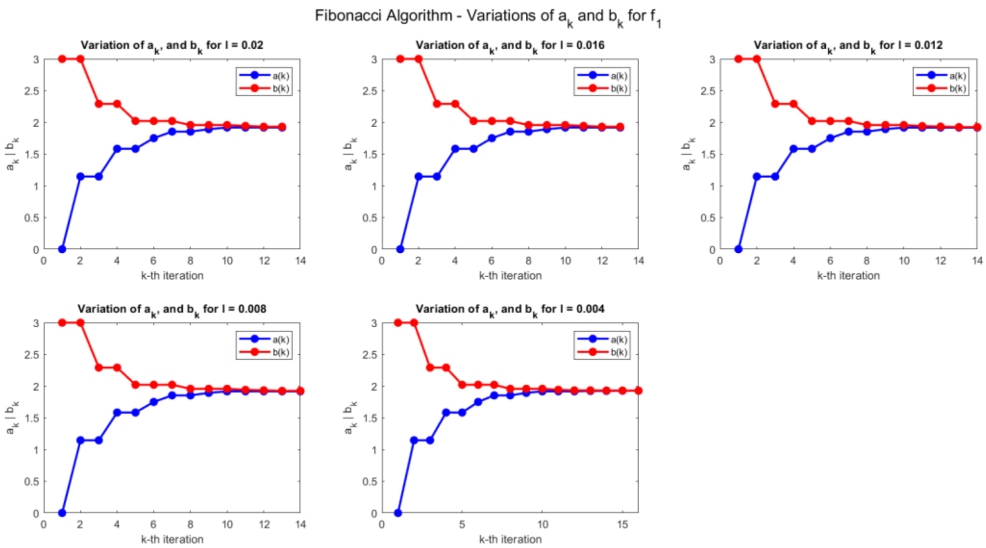
Παρακάτω παρουσιάζονται τα άκρα του τελικού διαστήματος αναζήτησης, για διάφορες τιμές του l. Σημειώνεται πως στον αλγόριθμο του Fibonacci, υπάρχει και μία παράμετρος ε, η οποία τέθηκε ίση με 0.001 (όπως στον αλγόριθμο της διχοτόμου).



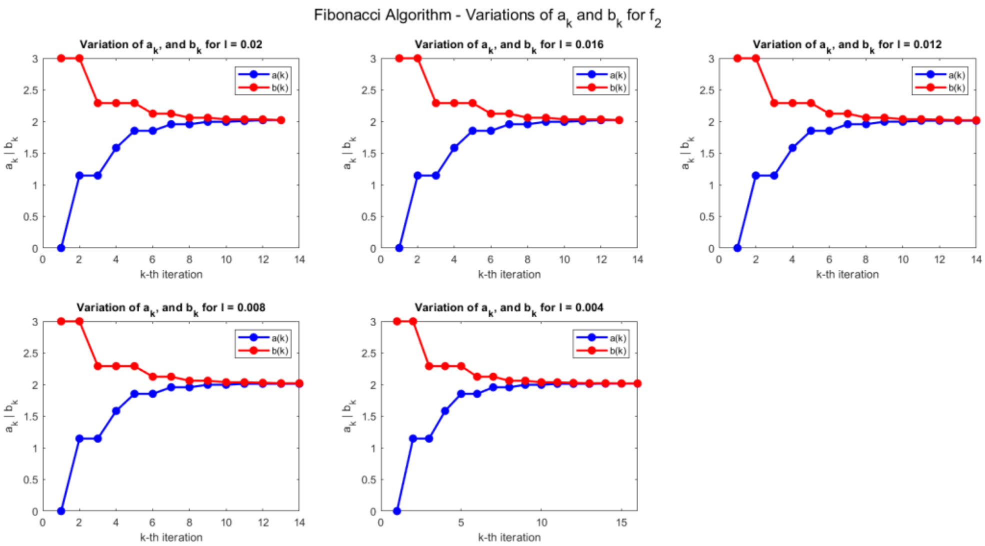
Με εξαίρεση την f_2, όπου τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά ακριβή, φαίνεται ότι για μεγάλες τιμές του l η ακρίβεια του αλγορίθμου είναι κακή, καθώς το μήκος του διαστήματος αναζήτησης ξεπερνά το 0.01. Ωστόσο, για μικρές τιμές του l φαίνεται και στις τρεις συναρτήσεις ότι υπάρχει πολύ ακριβής σύγκλιση, με ακρίβεια περίπου στο 0.001, που είναι διπλάσια έως και τετραπλάσια από τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα άκρα του διαστήματος για τις τρεις συναρτήσεις υπό μελέτη, συναρτήσει του k.

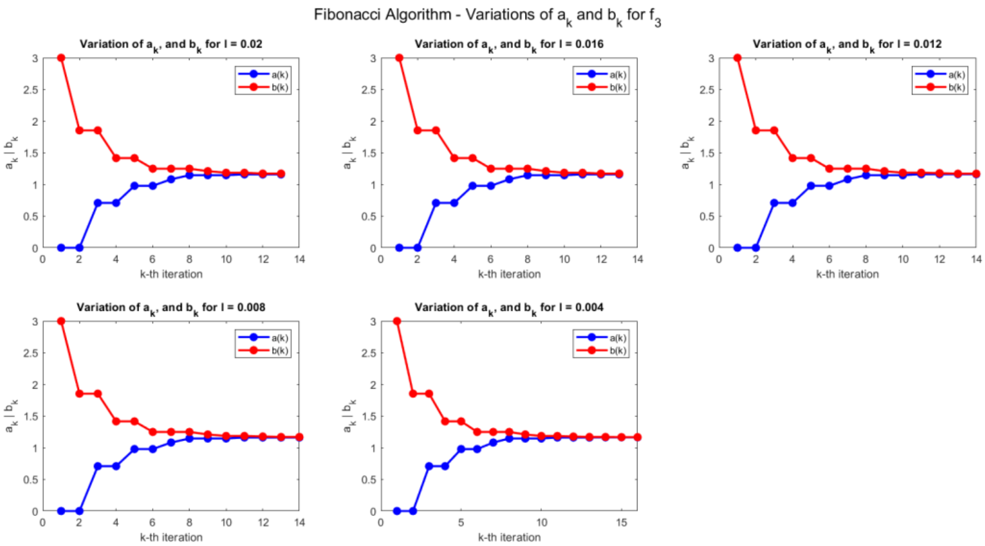
Για την f_1:



Για την f_2:



Για την f_3:

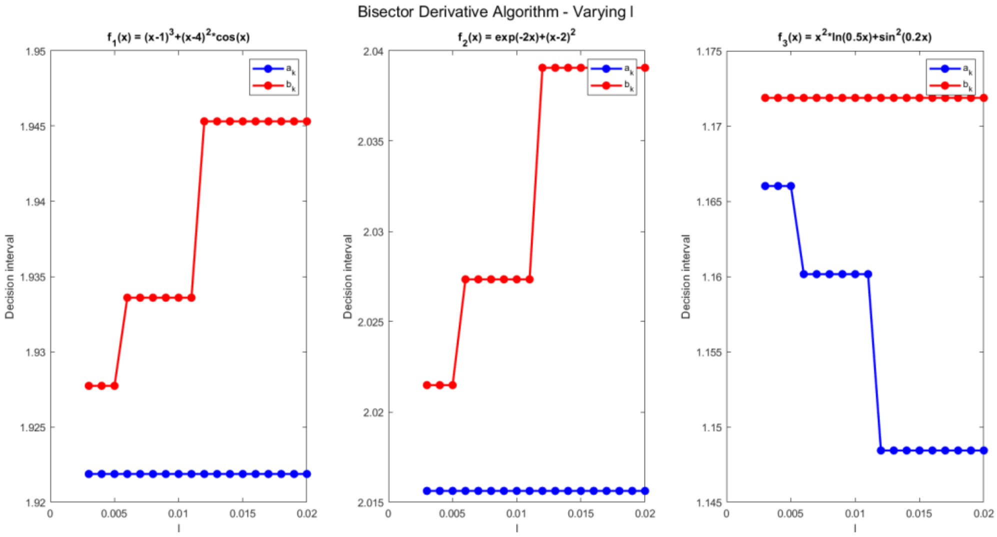


Όπως φαίνεται, ο αλγόριθμος του Fibonacci χρειάζεται 13 με 16 επαναλήψεις για να καταλήξει σε σύγκλιση, που είναι υπολογιστικά πιο αργό από τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα, αλλά και τον αλγόριθμο της διχοτόμου.

IV. Αλγόριθμος Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

Τέλος, επαναλαμβάνεται η χρήση του *Αλγορίθμου της Διχοτόμου*, αλλά αυτή τη φορά με *χρήση της παραγώγου της συνάρτησης*. Όπως και πριν, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για διάφορες τιμές του l και στη συνέχεια τα άκρα του διαστήματος συναρτήσει του k.

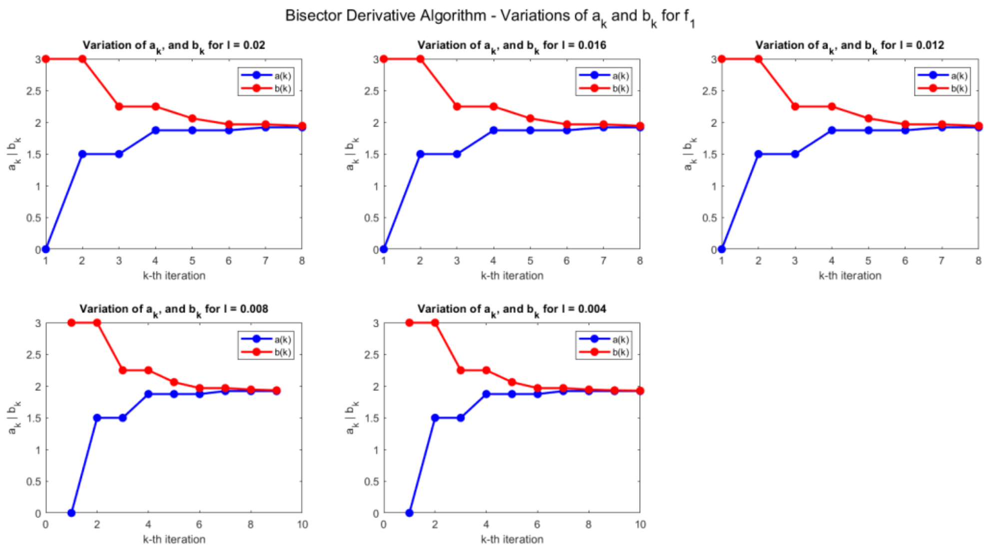
Για διάφορες τιμές του l, έχουμε:



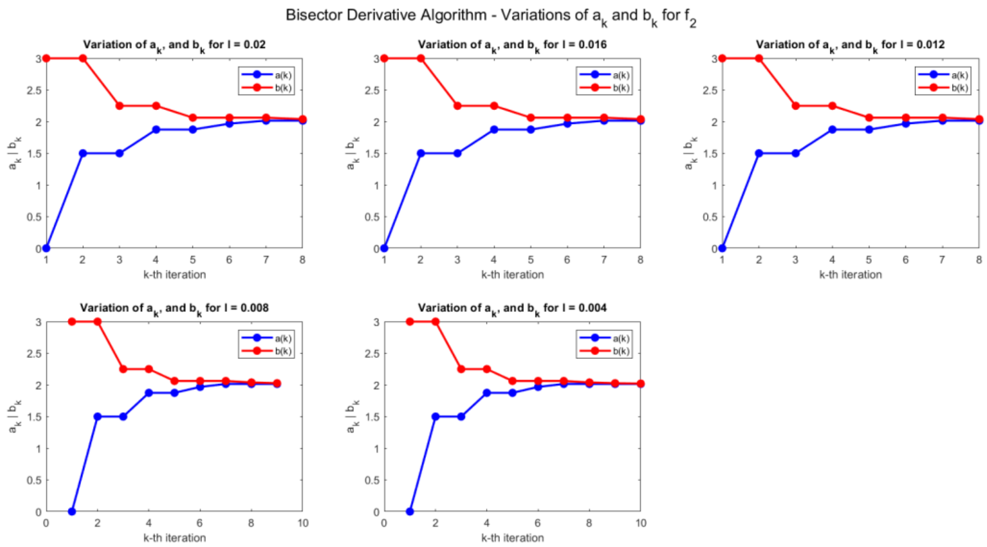
Όπως φαίνεται, για μικρές τιμές του l έχουμε σχετικά καλή ακρίβεια, με το μήκος του διαστήματος αναζήτησης να κυμαίνεται περίπου στο 0.01, όσο και στην περίπτωση της διχοτόμου. Ωστόσο, καθώς το l αυξάνεται, η ακρίβεια χειροτερεύει πολύ, με το μήκος να ξεπερνά το 0.02. Συγκριτικά, όσον αφορά την ακρίβεια, ο αλγόριθμος αυτός είναι ο χειρότερος συγκριτικά με τους υπόλοιπους που δοκιμάστηκαν.

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα άκρα του διαστήματος συναρτήσει του k.

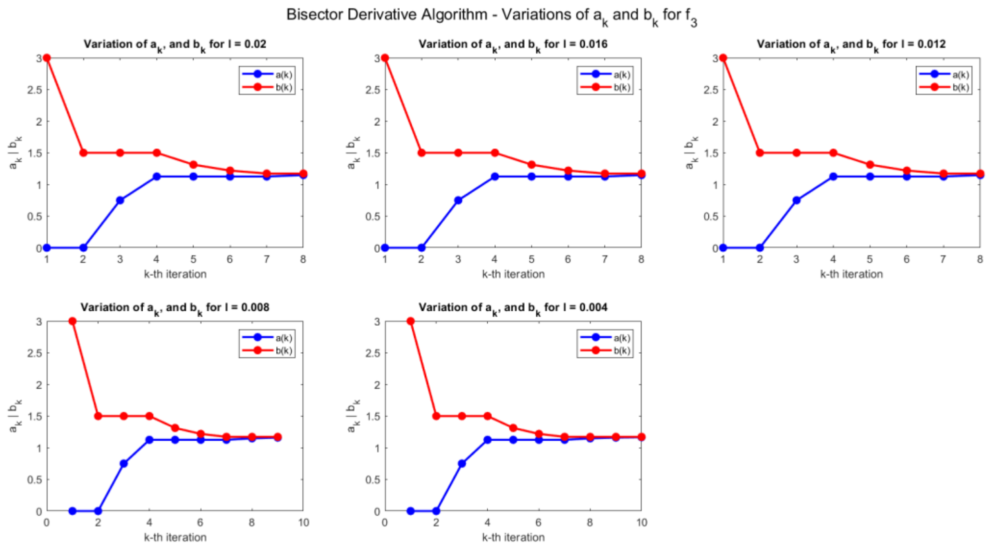
Για την f_1:



Για την f_2:



Για την f_3:



Όπως φαίνεται, η σύγκλιση εδώ ξεκινά από την όγδοη επανάληψη μόλις, γεγονός που καθιστά τον αλγόριθμο υπολογιστικά γρηγορότερο από τους υπόλοιπους, με κόστος όμως την ακρίβεια.

ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εφόσον παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα και των τεσσάρων αλγορίθμων, θα σχολιαστεί η ποιότητα των αλγορίθμων. Όσον αφορά την ακρίβεια σύγκλισης, ο αλγόριθμος με το μικρότερο τελικό διάστημα αναζήτησης είναι αυτός του Fibonacci, ενώ ο χειρότερος όσον αφορά την ακρίβεια είναι αυτός της διχοτόμου με χρήση πρώτης παραγώγου.

Αντιθέτως στην ταχύτητα, έρχεται τελευταίος ο αλγόριθμος του Fibonacci, με αμέσως επόμενο τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα και στη συνέχεια τον αλγόριθμο της διχοτόμου χωρίς παράγωγο. Στην ταχύτητα, ο κορυφαίος αλγόριθμος είναι αυτός της διχοτόμου με παράγωγο, ο οποίος χρειάζεται μιάμιση φορά λιγότερες επαναλήψεις συγκριτικά με τον αλγόριθμο Fibonacci.

Μπορεί λοιπόν να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η ακρίβεια και η ταχύτητα των αλγορίθμων αυτών είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη.

ΠΕΡΙΓΡΑΓΗ ΚΩΔΙΚΑ

Στο σημείο αυτό, θα περιγραφούν συνοπτικά τα αρχεία που περιλαμβάνει το project σε κώδικα MATLAB.

Τα αρχεία `bisectorAlgorithm.m`, `goldenSectionAlgorithm.m`, `fibonacciAlgorithm.m` και `bisectorDerivativeAlgorithm.m` είναι τα αρχεία όπου υλοποιούνται οι αντίστοιχες συναρτήσεις που εκτελούν τους αλγορίθμους που παρουσιάστηκαν. Όλοι οι αλγόριθμοι δέχονται σαν ορίσματα τα αρχικά άκρα `a1` και `b1`, την παράμετρο `l` και την παράμετρο `epsilon` (όπου χρειάζεται), καθώς και τη συνάρτηση `f`. Εξαίρεση αποτελεί η συνάρτηση `bisectorDerivativeAlgorithm`, η οποία δέχεται σαν όρισμα την *πρώτη παράγωγο* της `f`, `df`.

Το αρχείο `functionPlots.m` παράγει ένα figure με τις γραφικές παραστάσεις των τριών υπό μελέτη συναρτήσεων.

Τέλος, τα αρχεία `demoBisector.m`, `demoGoldenSector.m`, `demoFibonacci.m` και `demoBisectorDerivative.m` είναι τα scripts στα οποία παράγονται όλα τα διαγράμματα που φαίνονται στην αναφορά, το καθένα για τον αλγόριθμο που υποδηλώνει και ο τίτλος του αρχείου. Να σημειωθεί πως στο `demoBisectorDerivative.m` υπολογίζονται εκ των προτέρων οι παράγωγοι των συναρτήσεων, ώστε να δωθούν ως ορίσματα στη συνάρτηση του αλγορίθμου διχοτόμου με παράγωγο. Για να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα, αρκεί ο χρήστης να κάνει run το κάθε demo αρχείο.

ΤΕΛΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ