

Analyse des données : ACP

Exercice 1 :

Soit la matrice des données suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Soient C_1 et C_2 les vecteurs colonnes de X . Centrer et normer les variables C_1 et C_2 .
- 2) Déterminer la matrice V des variances-covariances et la matrice Γ des corrélations.
- 3) Diagonaliser la matrice V . On note λ_i ses valeurs propres.
- 4) Déterminer les vecteurs propres F_i associés aux valeurs propres λ_i .

Exercice 2 :

Réaliser l'ACP de la matrice suivante, à partir de sa matrice de dispersion (données centrées mais non réduites) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \\ 6 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

On veut faire l'ACP centrée de la matrice :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a 4 lignes-individus et 4 colonnes-variables. La pondération des lignes est uniforme, la pondération des colonnes est unitaire, la transformation préalable est le centrage par colonne.

- 1) Donner les moyens des 4 variables. Donner les variances des 4 variables. Donner la matrice des variances-covariances de la matrice X .
- 2) Donner les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs propres de l'ACP de X .
- 3) Donner $tr(\Lambda)$, où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres.
- 4) Donner le 2^{ème} axe principal de l'ACP de X .
- 5) Donner les coordonnées des lignes sur le 2^{ème} axe principal de l'ACP de X .
- 6) Donner les coordonnées des colonnes sur le 2^{ème} axe principal de l'ACP de X .

Exercice 4:

Une étude gastronomique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre restaurants. Pour cela, un expert a noté ces restaurants avec des notes allant de -3 à 3. Les résultats sont les suivants :

Restaurant	Service	Qualité	Prix
R_1	-2	3	-1
R_2	-1	1	0
R_3	2	-1	-1
R_4	1	-3	2

- 1) Calculer le vecteur moyen des individus. Qu'en conclure ?
 - 2) Donner la matrice V des variances-covariances.
 - 3) Donner la matrice Γ de corrélation.
- On veut faire une ACP centrée avec des poids uniformes.
- 4) Vérifier que V admet une valeur propre $\lambda_3 = 0$.
 - 5) On donne $\lambda_1 = \frac{61}{8}$. En déduire λ_2 .
 - 6) Calculer les pourcentages d'inertie. Quelle est la dimension à retenir ?
 - 7) Soient les vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,8 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,11 \\ -0,75 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes principales.
 - 8) Représenter les individus dans le plan principal (1,2).
 - 9) Déterminer la corrélation entre les variables initiales et les composantes principales.