Операции над высказываниями и предикатами. Теоремы

Цели

После изучения данного модуля Вы сможете:

называть основные свойства конъюнкции и дизъюнкции высказываний;

усвоить понятия отрицания, импликации и эквиваленции;

уметь строить отрицание простых и составных высказываний;

называть основные свойства отрицания, импликации и эквиваленции;

Перечень учебных элементов модуля

1. Конъюнкция и дизъюнкция. – внимательно причитать, разобрать примеры
2. Отрицание высказываний и предикатов. – внимательно причитать, разобрать примеры
3. Импликация и эквиваленция. – внимательно причитать, разобрать примеры
4. Кванторы и теоремы. – составить конспект лекции.
5. Контрольные задания – выполнить, используя предоставленный материал.

Конъюнкция и дизъюнкция

Определение. *Конъюнкцией* высказываний А и В называется высказывание «А и В», которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Конъюнкцию высказываний А и В обозначают $A \wedge B$.

Например, высказывание «Число 18 делится на 2 и на 3» представляет собой конъюнкцию высказываний «Число 18 делится на 2» и «Число 18 делится на 3». Оба высказывания истинны, значит, и конъюнкция истинна. Высказывание «Число 18 делится на 2 и на 5» ложно, так как одно высказывание «Число 18 делится на 2» – истинно, а другое «Число 18 делится 5» – ложно.

Определение. *Дизъюнкцией* высказываний А и В называется высказывание «А или В», которое ложно, когда оба высказывания ложны, и истинно, когда хотя бы одно из этих высказываний истинно.

Дизъюнкцию высказываний А и В обозначают $A \vee B$.

Например, высказывание «Число 20 делится на 2 или больше 10» представляет собой дизъюнкцию высказываний «Число 20 делится на 2» и «Число 20 больше 10». Оба высказывания истинны, значит, и дизъюнкция истинна. Высказывание «Число 20 делится на 3 или больше 10» тоже истинно, так как одно высказывание «Число 20 делится на 3» – ложно, а другое «Число 20 больше 10» – истинно. Дизъюнкция «Число 20 делится на 3 или больше 30» ложна, так как оба составляющих ее высказывания «Число 20 делится на 3» и «Число 20 больше 30» ложны.

Для конъюнкции и дизъюнкции высказываний выполняются следующие свойства.

1) Переместительное или коммутативное свойство: $A\wedge B = B\wedge A$ и $A\vee B = B\vee A$.

2) Сочетательное или ассоциативное свойство: $(A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B \wedge C)$ и $(A\vee B)\vee C = A\vee(B \vee C)$.

3) $A \wedge Л = Л$ (ложное высказывание является поглощающим элементом для конъюнкции),

$A \vee И = И$ (истинное высказывание является поглощающим элементом для дизъюнкции).

4) $A \wedge И = A$ (истинное высказывание является нейтральным элементом для конъюнкции),

$A \vee Л = A$ (ложное высказывание является нейтральным элементом для дизъюнкции).

5) Дистрибутивное свойство конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

6) Дистрибутивное свойство дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

Определение. *Конъюнкцией предикатов* $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $A(x) \wedge B(x)$, обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых истинны оба предиката.

Множество истинности конъюнкции предикатов есть пересечение множеств истинности образующих ее предикатов. Если обозначить множество истинности предиката $A(x)$ через T_A, множество истинности предиката $B(x)$ через T_B, а множество истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$ через $T_{A \wedge B}$, то $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$.

Определение. *Дизъюнкцией предикатов* $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $A(x) \vee B(x)$, обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых истинен хотя бы один из предикатов $A(x)$ или $B(x)$.

Множество истинности дизъюнкции предикатов есть объединение множеств истинности образующих ее предикатов, т. е. $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$.

П р и м е р 1. Выясните, в каких случаях можно найти значения истинности высказываний $A \wedge B$ и $A \vee B$, если: а) A – «и»; б) A – «л».

Р е ш е н и е. а) Если высказывание A истинно, то значение истинности конъюнкции зависит от значения истинности высказывания B, поэтому, сказать каким будет значение истинности высказывания $A \wedge B$ в данном случае нельзя. Если высказывание A истинно, то дизъюнкция $A \vee B$ будет истинной независимо от значения истинности высказывания B.

б) Если высказывание A ложно, то конъюнкция $A \wedge B$ по определению будет ложной, а значение истинности дизъюнкции $A \vee B$ установить нельзя, так как оно в данном случае зависит от значения истинности высказывания B.

П р и м е р 2. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов логики, определив их значение истинности:

а) число 45 делится на 5 и на 9;

б) число 2,5 является натуральным или целым.

Р е ш е н и е. а) Выделим в составном высказывании «Число 45 делится на 5 и на 9» два элементарных высказывания: A – «Число 45 делится на 5» и B – «Число 45 делится на 9». Оба элементарных высказывания истинны, следовательно, конъюнкция $A \wedge B$ истинна.

б) Высказывание «Число 2,5 является натуральным или целым» представляет собой дизъюнкцию, так как содержит логическую связку «или». Выделим элементарные высказывания: А – «Число 2,5 является натуральным», В – «Число 2,5 является целым». Оба высказывания ложны, значит, дизъюнкция $A \vee B$ ложна.

П р и м е р 3. Пусть на множестве $X = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ заданы предикаты $A(x)$ – «Число x делится на 5» и $B(x)$ – «Число $x > 50$». Сформулируйте предикаты $A(x) \vee B(x)$, $A(x) \wedge B(x)$. Будут ли принадлежать: а) множеству истинности $T_{A \vee B}$ числа 12, 25, 66; б) множеству истинности $T_{A \wedge B}$ числа 4, 30, 60, 92?

Р е ш е н и е. а) Предикат $A(x) \vee B(x)$ имеет вид: «Число x делится на 5 или больше 50». Число 12 не делится на 5 и не больше 50, следовательно, оно не принадлежит множеству истинности $T_{A \vee B}$. Число 25 делится на 5, значит, входит в множество истинности предиката $A(x)$, а следовательно, и в множество истинности $T_{A \vee B}$. Число 66 больше 50, значит, входит в множество истинности предиката $B(x)$, следовательно, и в множество истинности $T_{A \vee B}$.

б) Предикат $A(x) \wedge B(x)$ можно сформулировать в виде: «Число x делится на 5 и больше 50». Его множество истинности $T_{A \wedge B}$ является пересечением множеств истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$. Из чисел 4, 30, 60, 92 только 60 входит в это пересечение, следовательно, числа 4, 30, 92 множеству $T_{A \wedge B}$ не принадлежат, а число $60 \in T_{A \wedge B}$.

Отрицание высказываний и предикатов

Отрицание

Определение. *Отрицанием* высказывания А называется высказывание $\bar{A}$, которое истинно, если А ложно, и ложно, если А истинно. Высказывание $\bar{A}$ читается так: «не А» или «неверно, что А».

Например, для высказывания «Число 12 делится на 4» отрицанием будет высказывание «Число 12 не делится на 4», для высказывания «Число 20 больше 10 и делится на 3» отрицанием будет «Неверно, что число 20 больше 10 и делится на 3».

Отрицание высказываний обладает следующими свойствами:

1) $\bar{\bar{A}} = A$ (двойное отрицание равно самому высказыванию);
2) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ (отрицание конъюнкции равно дизъюнкции отрицаний);
3) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ (отрицание дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний).

Определение. *Отрицанием* предиката $A(x)$, заданного на множестве Х, называется предикат $\bar{A}(x)$, истинный при тех значениях $x \in X$, при которых предикат $A(x)$ ложен и наоборот.

Множество истинности предиката $\bar{A}(x)$ является дополнением к множеству истинности предиката $A(x)$ в множестве Х. Обозначим через $T_{\bar{A}}$ множество истинности предиката $\bar{A}(x)$, а через T_A – множество истинности предиката $A(x)$. Тогда $T_{\bar{A}} = T'_A$.

П р и м е р 1. Объясните, почему высказывания А и В не являются отрицаниями друг друга, если А – «угол С острый», В – «угол С тупой».

Р е ш е н и е. По определению отрицания отрицанием высказывания А будет такое высказывание, которое ложно, когда А истинно, и истинно, когда А ложно. В данном случае, если А истинно, т.е. угол С острый, то он не может быть тупым, т.е. В ложно. Если А ложно, т.е. угол С не острый, то он может быть не только тупым, но и прямым, а в последнем случае В тоже ложно. Определение отрицания не выполнено, значит, высказывания А и В не являются отрицаниями друг друга.

П р и м е р 2. Постройте отрицания следующих высказываний и укажите, что истинно – само высказывание или его отрицание:

а) число 50 кратно 6;

б) число 18 не делится на 2;

в) Саратов расположен на Волге и имеет миллион жителей.

Р е ш е н и е. а) Высказывание «Число 50 кратно 6» является простым ложным высказыванием. Его отрицанием будет высказывание «Число 50 не кратно 6», которое является истинным.

б) Высказывание «Число 18 не делится на 2» ложно. Его отрицанием будет высказывание «Неверно, что число 18 не делится на 2». Оно представляет собой двойное отрицание, по свойству 1) его можно заменить на высказывание «Число 18 делится на 2», которое является истинным.

в) Высказывание «Саратов расположен на Волге и имеет миллион жителей» представляет собой конъюнкцию двух высказываний: «Саратов расположен на Волге» и «Саратов имеет миллион жителей». Первое высказывание истинно, второе – ложно, вся конъюнкция – ложна. Отрицанием конъюнкции будет дизъюнкция отрицаний, т.е. высказывание «Саратов расположен не на Волге или не имеет миллион жителей». Составляющие дизъюнкцию высказывания являются ложным и истинным, значит, вся дизъюнкция истинна.

Импликация и эквиваленция

Определение. *Импликацией* высказываний А и В называется высказывание «если А, то В», которое ложно в одном случае, когда А истинно, а В ложно, и истинно во всех остальных случаях.

Импликацию высказываний А и В обозначают $A \Rightarrow B$ и читают: «Из А следует В» или «Если А, то В». Высказывание А называют условием импликации, высказывание В – ее заключением.

Например, высказывание «Если число 20 больше 15, то 12 больше 6» представляет собой импликацию высказываний «Число 20 больше 15» и «Число 12 больше 6». Оба высказывания истинны, значит, и импликация истинна. Высказывание «Если число 18 делится на 2, то оно делится на 5» ложно, так как условие импликации «Число 18 делится на 2» – истинно, а заключение «Число 18 делится на 5» – ложно. Импликация «Если $6 < 2$, то 15 делится на 5» истинна, так как истинно заключение импликации «15 делится на 5». Примером истинной импликации может служить высказывание «Если $6 < 2$, то 10 – простое число». Заметим, что импликация будет истинной, если ее заключение истинно. Она также истинна, если условие ложно.

Импликация высказываний связана с дизъюнкцией: $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$. Отсюда следует, что $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

Выделяют 4 вида импликаций:

$A \Rightarrow B$ – прямая импликация,

$B \Rightarrow A$ – обратная импликация,

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – противоположная импликация,

$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – обратная противоположной импликация.

Имеет место равенство $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, то есть прямая импликация и обратная противоположной равны. Например, импликация «Если число 20 делится на 10, то оно делится на 5» равносильна импликации «Если число 20 не делится на 5, то оно не делится на 10».

Определение. *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание «A тогда и только тогда, когда B», которое истинно, если оба высказывания A и B истинны или ложны одновременно, и ложно в остальных случаях.

Эквиваленцию высказываний A и B обозначают $A \Leftrightarrow B$ и читают: «A эквивалентно B» или «A равносильно B», или «A тогда и только тогда, когда B».

Например, высказывание «Число 20 больше 10, тогда и только тогда, когда 12 больше 6» представляет собой эквиваленцию высказываний «Число 20 больше 10» и «Число 12 больше 6». Оба высказывания истинны, значит, и эквиваленция истинна. Если в этом примере второе высказывание заменить на ложное высказывание «Число 12 больше 20», то получим эквиваленцию с истинностным значением «ложно».

Эквиваленция высказываний связана с другими операциями над высказываниями: $A \Leftrightarrow B = A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.

Определение. *Импликацией предикатов* $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$, обращающийся в ложное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых предикат $A(x)$ истинен, а предикат $B(x)$ ложен.

Множество истинности импликации предикатов есть объединение множества истинности предиката $B(x)$ и дополнения к множеству истинности предиката $A(x)$. Если обозначить множество истинности предиката $A(x)$ через T_A, множество истинности предиката $B(x)$ через T_B, а множество истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ через $T_{A \Rightarrow B}$, то $T_{A \Rightarrow B} = T'_A \cup T_B$.

Определение. Если множество истинности условия импликации является подмножеством множества истинности заключения импликации, то импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$, заданная на множестве X, будет истинной при всех значениях x. В этом случае говорят, что $B(x)$ *логически следует* из $A(x)$. $B(x)$ называют *необходимым* условием для $A(x)$, $A(x)$ называют *достаточным* условием для $B(x)$.

Из определения следует, что импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$ будет логическим следованием тогда и только тогда, когда $T_A \subset T_B$.

Например, импликация предикатов «Если x делится на 4, то x делится на 2» является логическим следованием, так как множество чисел, делящихся на 4, является подмножеством множества чисел, делящихся на 2. Можно сказать: «Для того чтобы число делилось на 4 необходимо, чтобы оно делилось на 2», и «Для того чтобы число делилось на 2 достаточно, чтобы оно делилось на 4».

Определение. *Эквиваленцией предикатов* $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых предикаты $A(x)$ и $B(x)$ одновременно истинны или одновременно ложны.

Если множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ совпадают, то такие предикаты называются *эквивалентными* или *равносильными*. В этом случае говорят также, что $A(x)$ является *необходимым и достаточным* условием для $B(x)$ и наоборот.

Например, предикаты « x – двузначное число, записанное одинаковыми цифрами» и « x – двузначное число, делящееся на 11» на множестве натуральных чисел имеют одинаковые множества истинности. Поэтому для всех натуральных чисел справедливо утверждение: «Двузначное число можно записать с помощью одинаковых цифр тогда и только тогда, когда оно делится на 11». Это же утверждение можно сформулировать так: « Для того чтобы двузначное число было записано с помощью одинаковых цифр необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 11».

П р и м е р 1. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов логики, определив их значение истинности:

а) если число 45 делится на 5, то 12 больше 9;

б) если Саратов южнее Москвы, то в Саратове миллион жителей;

в) 10 – простое число тогда и только тогда, когда 10 больше 20;

г) $2 \cdot 6 + 12 = 25$ тогда и только тогда, когда 18 делится на 2.

Р е ш е н и е. а) Разобьем высказывание «Если число 45 делится на 5, то 12 больше 9» на два элементарных: А – «Число 45 делится на 5» и В – «Число 12 больше 9». Оба высказывания истинны, следовательно, импликация $A \Rightarrow B$ истинна.

б) Высказывание «Если Саратов южнее Москвы, то в Саратове миллион жителей» представляет собой импликацию двух простых высказываний: С – «Саратов южнее Москвы» и D – «В Саратове миллион жителей». Высказывание С – истинно, высказывание D – ложно, значит, импликация $C \Rightarrow D$ ложна.

в) Определим вид составного высказывания «10 – простое число тогда и только тогда, когда 10 больше 20». Оно содержит логическую связку «тогда и только тогда, когда», следовательно, представляет собой эквиваленцию высказываний. Выделим элементарные высказывания: А – «10 – простое число» и В – «10 больше 20». Оба высказывания являются ложными. По определению эквиваленции в этом случае она истинна.

г) Высказывание представляет собой эквиваленцию. Элементарные высказывания: С – «$2 \cdot 6 + 12 = 25$» является ложным, и D – «18 делится на 2», являющееся истинным. Эквиваленция $C \Leftrightarrow D$ ложна по определению.

П р и м е р 2. Данные предложения переформулируйте, используя различные способы прочтения утверждения $A(x) \Rightarrow B(x)$:

а) Всякий прямоугольник является параллелограммом;

б) для того чтобы число делилось на 5, достаточно, чтобы его запись оканчивалась нулем.

Р е ш е н и е. а) В данном предложении можно выделить два предиката: $A(x)$ – «Четырехугольник x – прямоугольник» и $B(x)$ – «Четырехугольник x – параллелограмм». Они находятся в отношении логического следования, так как множество прямоугольников является подмножеством множества параллелограммов. Данное предложение можно переформулировать:

1) Из того, что четырехугольник – прямоугольник, следует, что он параллелограмм.

2) Если четырехугольник – прямоугольник, то он параллелограмм.

3) Четырехугольник является параллелограммом – это следствие того, что четырехугольник – прямоугольник.

4) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы он был прямоугольником.

5) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы он был параллелограммом.

б) В данном предложении так же как и в а), можно выделить два предиката: P(x) – «число x делится на 5» и Q(x) – «запись числа x оканчивается нулем», причем второй является достаточным условием для первого. Поэтому имеет место логическое следование Q(x) ⇒ P(x), которое можно сформулировать так:

1) Из того, что запись числа оканчивается нулем, следует, что число делится на 5.

2) Всякое число, запись которого оканчивается нулем, делится на 5.

3) Делимость числа на 5 – это следствие того, что его запись оканчивается нулем.

4) Если запись числа оканчивается нулем, то оно делится на 5.

5) Для того чтобы запись числа оканчивалась нулем, необходимо, чтобы оно делилось на 5.

П р и м е р 3. Доказать, что из уравнения $5x(x-3)=0$ следует уравнение $5x(x-3)(x+6)=0$, если уравнения заданы на множестве ***R*** действительных чисел.

Р е ш е н и е. Множество решений первого уравнения – $T_1=\{0, 3\}$, множество решений второго – $T_2=\{0, 3, -6\}$. Видим, что $T_1 \subset T_2$. Следовательно, из уравнения $5x(x-3)=0$ следует уравнение $5x(x-3)(x+6)=0$.

П р и м е р 4. Вместо многоточия вставьте слова «необходимо» либо «достаточно», либо «необходимо и достаточно», чтобы данные предложения были истинными:

а) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 5, … , чтобы каждое слагаемое делилось на 5.

б) Для того чтобы число делилось на 45, … , чтобы оно делилось на 5 и на 9.

Р е ш е н и е. а) Выделим в данном предложении два предиката: A(x , y) – «Сумма двух натуральных чисел x и y делится на 5» и B(x , y) – «Каждое слагаемое в сумме x + y делится на 5» и выясним, какое из них является следствием другого или, возможно, эти предикаты равносильны. Импликация A(x , y) ⇒ B(x , y) не является логическим следованием, так как можно привести пример 25 = 12 + 13, в котором сумма двух чисел делится на 5, а каждое слагаемое не делится на 5. Импликация B(x , y) ⇒ A(x , y) является логическим следованием, поскольку представляет собой известное свойство делимости суммы двух чисел. Вместо многоточия нужно поставить слово «достаточно»: для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 5, достаточно, чтобы каждое слагаемое делилось на 5.

б) Выделим в данном предложении два предиката: A(x) – «Число x делится на 45» и B(x) – «Число x делится на 5 и на 9». Каждый из них является логическим следствием другого. Значит, вместо многоточия нужно поставить слова «необходимо и достаточно»: Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9.

Кванторы и теоремы

Определение. Слова, превращающие высказывательную форму или предикат в высказывание, называются *кванторами* . Выражение «для всех x » («для любого x », «для каждого x ») называется *квантором общности* и обозначается $\forall x$. Выражение «существует такое x » («для некоторых x », «хотя бы для одного x », «найдется такое x ») называется *квантором существования* и обозначается $\exists x$.

Высказывание, полученное из предиката P(x) при помощи квантора общности, записывается в виде ($\forall$ $x \in$ X) P(x) и читается: «Для любого (каждого, всякого) значения x из множества X имеет место P(x)» или «Любой (каждый, всякий) элемент x из множества X обладает свойством P». Например, если P(x) – «Натуральное число x является целым числом», то высказывание с квантором общности будет выглядеть так: «Любое натуральное число x является целым числом».

Высказывание, полученное из предиката P(x) при помощи квантора существования, записывается в виде ($\exists$ $x \in$ X) P(x) и читается: «Для некоторого значения x из множества X имеет место P(x)» или «Найдется элемент x из множества X, который обладает свойством P», или «Существует элемент x в множестве X, для которого выполняется свойство P». Например, если P(x) – «Натуральное число x делится на 2», то высказывание с квантором существования будет выглядеть так: «Найдется натуральное число x , которое делится на 2».

Чтобы установить истинность утверждения с квантором общности, надо провести доказательство, чтобы установить его ложность – достаточно привести опровергающий его пример. Высказывание, содержащее квантор общности, может быть представлено в виде конъюнкции высказываний.

Высказывание с квантором существования истинно, если можно привести пример, то есть найти такое значение переменной, при котором предикат обращается в истинное высказывание. Ложность высказывания с квантором существования устанавливается путем доказательства. Высказывание, содержащее квантор существования, может быть представлено в виде дизъюнкции высказываний.

Для того чтобы получить высказывание из многоместного предиката, надо связать кванторами каждую переменную. Например, если P(x , y) – двухместный предикат, то ($\forall$ $x \in$ X) ($\exists$ $y \in$ Y) P(x , y) – высказывание. Так, если P(x , y) – предикат « $x > y$ », определенный на множестве натуральных чисел, то ($\forall$ $x \in \boldsymbol{N}$) ($\exists$ $y \in \boldsymbol{N}$) $x > y$ – высказывание, которое можно прочитать следующим образом: «Для любого натурального числа x существует натуральное число y такое, что $x > y$ ». Очевидно, что это высказывание ложно.

Для построения отрицаний с кванторами надо: 1) квантор общности заменить на квантор существования, а квантор существования – на квантор общности; 2) предикат заменить его отрицанием. Таким образом, справедливы формулы:

$\overline{(\forall x \in X)P(x)} = (\exists x \in X)\overline{P(x)}$ и $\overline{(\exists x \in X)P(x)} = (\forall x \in X)\overline{P(x)}$.

Если задана словесная формулировка высказывания с квантором, то нужно: 1) слово «любой» («каждый», «всякий», «все») заменить на слово «существует» («найдется», «некоторый», «хотя бы один») и наоборот; 2) поставить перед глаголом частицу «не».

Это правило сохраняется и в том случае, если высказывание содержит не один, а несколько кванторов, например:

$\overline{(\forall x \in X)(\exists y \in Y)P(x,y)} = (\exists x \in X)(\forall y \in Y)\overline{P(x,y)}$.

П р и м е р 1. Найти значения истинности высказываний:

а) среди чисел множества X = {1, 2, 3, 4} найдется простое число;

б) любое число из множества A = {6, 8, 12, 28} кратно 2.

Р е ш е н и е. а) Высказывание «Среди чисел множества X = {1, 2, 3, 4} найдется простое число» содержит квантор существования и поэтому может быть представлено в виде дизъюнкции высказываний: «1 – простое число», или «2 – простое число», или «3 – простое число» или «4 – простое число». Для доказательства истинности дизъюнкции достаточно истинности одного из высказываний, например: «2 – простое число», которое истинно. Следовательно, истинно и исходное высказывание.

б) Высказывание «Любое число из множества А = {6, 8, 12, 28} кратно 2» содержит квантор общности и поэтому может быть переформулировано в виде конъюнкции «6 кратно 2, и 8 кратно 2, и 12 кратно 2 и 28 кратно 2». Так как все четыре высказывания истинны, то истинна и вся конъюнкция, а, следовательно, и исходное высказывание.

П р и м е р 2. Выявить логическую структуру следующих высказываний:

а) некоторые четные числа делятся на 3;

б) сумма двух любых нечетных чисел кратна 2;

в) в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.

Р е ш е н и е. а) В этом предложении имеется квантор существования, он выражен словом «некоторые», и предикат «четные числа делятся на 3», заданный на множестве X четных чисел. Обозначим предикат через $A(x)$, тогда логическая структура данного предложения такова: $(\exists x \in X)\ A(x)$.

б) В данном предложении имеется квантор общности, он представлен словом «любой», и двухместный предикат «сумма двух нечетных чисел кратна 2», заданный на множестве нечетных натуральных чисел X. Обозначим предикат через $P(x, y)$, тогда логическая структура данного предложения может быть записана в виде: $(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ P(x, y)$.

в) В данном высказывании квантора в явном виде нет, но подразумевается, что свойством «иметь взаимно перпендикулярные диагонали» обладают любые ромбы, следовательно, в данное высказывание можно включить квантор общности, не изменив его сути: «в любом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны». Тогда его структура такова: $(\forall x \in X)\ A(x)$, где X – множество ромбов, $A(x)$ – предикат «в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны».

П р и м е р 3. Запишите, используя символы, следующие высказывания и определите их значения истинности:

а) всякое число, умноженное на нуль, есть нуль;

б) уравнение $x + 3 = 5$ имеет решение в множестве натуральных чисел;

в) квадрат любого числа положителен.

Р е ш е н и е. а) Данное высказывание содержит квантор общности, он выражен словом «всякий». Предикат $x \cdot 0 = 0$ задан на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Поэтому высказывание можно записать в виде $(\forall x \in \boldsymbol{R})\ x \cdot 0 = 0$. Это высказывание истинное, поскольку по определению умножение числа на 0 дает 0.

б) В явном виде квантор в данном предложении не присутствует. Переформулируем предложение так: «В множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ существует число, которое является решением уравнения $x + 3 = 5$», теперь ясно, что здесь есть квантор существования (слово «существует»), и высказывание можно записать так: $(\exists x \in \boldsymbol{N})\ x + 3 = 5$. Высказывание истинное, потому что при $x = 2$ получим верное равенство.

в) Данное высказывание содержит квантор общности, он выражен словом «любой». Предикат $x^2 > 0$ определен на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Предложение можно записать так: $(\forall x \in \boldsymbol{R})\quad x^2 > 0$. Высказывание является ложным, так как при $x = 0$ неравенство $0 > 0$ не выполняется.

П р и м е р 4. Построить отрицание высказывания «некоторые двузначные числа делятся на 12».

Р е ш е н и е. Заменим квантор существования (он выражен словом «некоторые») на квантор общности «все» и построим отрицание предложения, стоящего после слова «некоторые», поставив частицу «не» перед глаголом. Получим высказывание «Все двузначные числа не делятся на 12».

П р и м е р 5. Сформулировать отрицание высказывания «В каждом классе хотя бы один ученик не справился с контрольной работой».

Р е ш е н и е. Данное высказывание содержит квантор общности, выраженный при помощи слова «каждый», и квантор существования, выраженный при помощи слов «хотя бы один». По правилу построения отрицаний высказываний с кванторами надо квантор общности заменить на квантор существования, а квантор существования – на квантор общности и убрать у глагола частицу «не». Получим: «Найдется такой класс, в котором все ученики справились с контрольной работой».

Строение и виды теорем

Определение. *Теорема* – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством доказательства.

Большинство математических теорем может быть записано в виде: $(\forall x \in X)\ A(x) \Rightarrow B(x)$. Такие теоремы состоят из трех частей:

1) описания множества X, к элементам которого относится данная теорема;

2) условия теоремы (предикат $A(x)$);

3) заключения теоремы (предикат $B(x)$).

Часто в формулировке теоремы множество X не называется, а только подразумевается. Например, теорему «Вертикальные углы равны» можно сформулировать подробнее: «Для всех углов справедливо утверждение: если два угла вертикальные, то эти два угла равны». В данной теореме множество X – это множество углов. Условием теоремы является двухместный предикат: «Углы x и y – вертикальные», соответственно заключение: «Углы x и y равны».

По отношению к теореме $(\forall x \in X)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ можно сформулировать теорему:

а) обратную данной $(\forall x \in X)\ B(x) \Rightarrow A(x)$;

б) противоположную данной $(\forall x \in X)\ \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$;

в) обратную противоположной $(\forall x \in X)\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$.

Прямая теорема и обратная противоположной равносильны.

Некоторые теоремы могут иметь такой вид: $(\forall x \in X)\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Доказательство таких теорем сводится к доказательству двух взаимно обратных теорем: $(\forall x \in X)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ и $(\forall x \in X)\ B(x) \Rightarrow A(x)$, одна из которых выражает необходимость, другая – достаточность.

П р и м е р 1. Выделите условие и заключение в каждой теореме:

а) Если углы смежные, то их сумма равна 180°.

б) Диагонали прямоугольника равны.

в) Для того чтобы натуральное число делилось на 5, достаточно, чтобы его последняя цифра была нулем.

г) Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

Р е ш е н и е. а) В этой теореме условием будет предикат «Углы x и y – смежные», а заключением предикат «Сумма углов x и y равна 180°».

б) Сформулируем теорему иначе; «Если четырехугольник x – прямоугольник, то в четырехугольнике x диагонали равны». Теперь легко выделить условие теоремы:

«Четырехугольник x – прямоугольник» и ее заключение: «В четырехугольнике x диагонали равны».

в) Прежде всего, выясним, к какому предложению относится слово «достаточно». Оно и будет условием теоремы. В данной теореме слово «достаточно» относится к предложению «Последняя цифра в записи числа x является нулем», – следовательно, это и будет условие теоремы. Тогда заключением будет предложение «Натуральное число x делится на 5».

г) В этой теореме надо выяснить, какой предикат представляет собой необходимое условие. Он будет заключением теоремы. Это предикат «Сумма чисел x и y – четна». Тогда условие теоремы выражает предложение: «Каждое слагаемое в сумме $x + y$ – четно».

П р и м е р 2. Дана теорема: «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник – параллелограмм». Сформулируйте теоремы, являющиеся обратной и противоположной данной.

Р е ш е н и е. Выделим условие и заключение данной теоремы. Условие: «В четырехугольнике противоположные стороны попарно равны». Заключение: «Четырехугольник – параллелограмм».

Меняя местами условие и заключение, получим теорему обратную данной: «Если четырехугольник – параллелограмм, то его противоположные стороны попарно равны».

Заменив условие и заключение исходной теоремы их отрицаниями, получим теорему, противоположную данной: «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно не равны, то четырехугольник не параллелограмм».

Контрольные задания

1. Какие из следующих высказываний содержат квантор общности, а какие – квантор существования? Являются они истинными или ложными:

а) все рыбы являются животными;

б) существуют числа, кратные семи;

в) в любом прямоугольнике диагонали равны;

г) каждое целое число является натуральным;

д) найдется такое натуральное число x , что $x < 8$;

е) некоторые озера имеют пресную воду?

2. Для теоремы «Диагонали прямоугольника равны» сформулируйте обратную, противоположную и обратную противоположной теоремы. Какие из них верные?

3. Для доказательства каких из следующих утверждений необходимо провести рассуждения в общем виде, а для каких – достаточно привести пример:

а) в любом треугольнике сумма внутренних углов равна 180° ;

б) найдется прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны;

в) для любого целого числа x имеет место неравенство $x^2 + 1 > 0$;

г) существуют равносторонние треугольники?