# Задания по лабораторной работе №3
# по курсу
# «Практикум по программированию методов оптимизации и распознавания данных»

Преподаватель: Пирская Любовь Владимировна, к.т.н., доцент кафедры МОП ЭВМ

## ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

### 1. Теоретическая часть

### 1.1. Постановка задачи целочисленного линейного программирования

Под задачей целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП) понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения.

Математическая модель задачи целочисленного линейного программирования имеет вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{m_2 + 1, m}, \\ x_j \in Z \quad j = \overline{1, p} \ \ (p \le n). \end{cases}$$

Здесь Z – множество целых чисел. Если p = n, то задачу называют полностью целочисленной, если p < n, то частично целочисленной.

Для нахождения оптимальных планов задач целочисленного линейного программирования используют две основные группы методов:

- методы отсечений;

- комбинаторные методы;

- приближенные методы.

*Методы отсечений*, основными из которых является метод Гомори, реализуются путем построения на этапах алгоритма дополнительных ограничений-неравенств, которые и определяют отсекающие гиперплоскости. Дополнительные ограничения должны удовлетворять двум необходимым условиям:

- *Условие правильности* – дополнительному ограничению должны удовлетворять все планы исходной задачи целочисленного линейного программирования;
- *Условие отсечения* – ограничению не должен удовлетворять оптимальный план соответствующей задачи целочисленного линейного программирования.

*Комбинаторные методы* базируются на переборе всех допустимых целочисленных планов, реализуя процедуру целенаправленного поиска оптимума на дискретном множестве планов задачи. На каждом шаге этой процедуры из рассмотрения исключается определенное количество неоптимальных планов.

Наиболее распространенным из этой группы методов является **метод ветвей и границ**.

## 1.2. Метод ветвей и границ решения задач целочисленного линейного программирования

Метод «ветвей и границ» – это метод направленного перебора множества вариантов решений задачи. В качестве верхней границы на множестве планов рассматривают значение целевой функции без условий целочисленности. Пусть $x_i$ – целочисленная переменная, значение $x_i^*$ которой в оптимальном решении исходной задачи является дробным. Рассмотрим интервал $[x_i^*] < x_i^* < [x_i^*] + 1$. Он не содержит допустимых целочисленных компонент решения. Поэтому допустимое целое значение $x_i$ должно удовлетворять одному из неравенств: $x_i \le [x_i^*]$ или $x_i \ge [x_i^*]+1$. Два последних неравенства разбивают область допустимых решений для переменной $x_i$ на две подобласти. То есть исходная задача разветвилась на две подзадачи, каждая их которых решается отдельно как ЗЛП с целевой функцией исходной задачи.

Если один из найденных оптимальных планов подзадач удовлетворяет требованию целочисленности, это решение фиксируют как наилучшее. Для дальнейшего разветвления выбирают подзадачу с наибольшим значением целевой функции (при ее максимизации) и производят новое ветвление. Как только получают оптимальное решение ЗЛП с ослабленными ограничениями, удовлетворяющее требованию целочисленности, его сопоставляют с уже имеющимися (если таковые есть) и фиксируют наилучшее из них (в смысле оптимального значения целевой функции). Процесс ветвления продолжают до тех пор, пока каждая порожденная подзадача не приведет к оптимальному решению, удовлетворяющему требованию целочисленности, или пока не будет установлена невозможность улучшения уже зафиксированного наилучшего решения.

Схематически метод "ветвей и границ" можно представить в виде схемы (рис.1).


Рисунок 1 - Схематическое изображение решения метода «ветвей и границ»

**Алгоритм метода ветвей и границ заключается в следующем:**

- Решение ЗЦЛП симплекс-методом.
- Если полученное оптимальное решение оказывается допустимым для целочисленной задачи (имеет целочисленное значение), то его следует зафиксировать как наилучшее.
- Иначе задача должна быть разбита на две подзадачи.
- Как только полученное допустимое целочисленное решение одной из подзадач оказывается лучше имеющегося, оно фиксируется вместо зафиксированного ранее.
- Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока каждая подзадача не приведет к целочисленному решению или пока не будет установлена невозможность улучшения уже имеющегося.

## 2. Практическая часть

### 2.1. Постановка задачи

На приобретение оборудования для нового цеха выделено 35 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 36 $м^2$ (с учетом проходов). Предприятие может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 5 ден. ед., требующие площадь в 4 $м^2$ и обеспечивающие производительность 2 тыс. ед. продукции за смену, и более мощные машины типа В стоимостью 7 ден. ед., занимающие площадь 9 $м^2$ и дающие за смену 3 тыс. ед. продукции.

Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий новому цеху максимальную производительность.

### 2.2. Построение математической модели

Пусть $x_1$ – количество машин типа А, $x_2$ – типа В, которые планируется приобрести, f – общая производительность нового участка.

Математическая модель задачи представлена так:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

### 2.3. Решение задачи методом ветвей и границ

Приведем задачу к каноническому виду. И решим её симплекс-методом, описанном в методических рекомендациях к лабораторной работе 1.

В результате получили решение: $x_1$ = 3,705882, $x_2$ = 2,352941. Значение целевой функции $f$ = 14,47059.

Как видно, ответ получился не целочисленным (значения $x_1$ и $x_2$ не целые числа).Для получения целочисленного ответа воспользуемся методом ветвей и границ.

Так как обе переменные принимают нецелые значения, то любая из них может быть выбрана в качестве переменной, продолжающей процесс ветвления.

Выбор, например переменной $x_2$, порождает две подзадачи, связанные с условием $x_2 \le [x_2^*]$ или $x_2 \ge [x_2^*]+1$.

Так как $x_2 \le [\frac{40}{17}] = 2$, имеем две подзадачи 1.1. и 1.2 (так же будем обозначать вершины дерева ветвления):

| 1.1 | 1.2. |
| --- | --- |
| $f = 2x_1+3x_2 \to \max$ | $f = 2x_1+3x_2 \to \max$ |
| $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$ | $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$ |
| $x_2 \le 2$ | $x_2 \ge 3$ |

Порожденные подзадачи содержат все допустимые целочисленные решения исходной задачи, т.е. исходное множество допустимых целочисленных решений остается неизменным в процессе ветвления.

В результате решения подзадачи 1.1 симплекс-методом получили решение: $x_1 = 4{,}2$, $x_2 = 2$. Значение целевой функции $f = 14{,}4$.

В результате решения подзадачи 1.2 симплекс-методом получили решение: $x_1 = 2{,}25$, $x_2 = 3$. Значение целевой функции $f = 13{,}5$.

На следующем шаге осуществляется выбор одной из подзадач 1.1 или 1.2 для решения и при, необходимости, для дальнейшего ветвления. Не существует точных способов реализации указанного выбора. Выбор различных альтернатив приводит к разным последовательностям подзадач и, следовательно, к различным количествам итераций.

Проведем ветвление вершины 1.1. Как видно, ответ получился не целочисленным (значения $x_1$ не целое число). Выбор переменной $x_1$ порождает две подзадачи: 2.1 и 2.2 с дополнительными ограничениями соответственно, т.е. $x_1 \le 4$ или $x_1 \ge 5$.

2.1

$$f=2x_1+3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

$$x_2 \le 2, \qquad x_1 \le 4$$

2.2

$$f=2x_1+3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

$$x_2 \le 2, \qquad x_1 \ge 5$$

Порожденные подзадачи содержат все допустимые целочисленные решения исходной задачи, т.е. исходное множество допустимых целочисленных решений остается неизменным в процессе ветвления.

В результате решения подзадачи 2.1 симплекс-методом получили решение: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Значение целевой функции $f = 14$.

В результате решения подзадачи 2.2 симплекс-методом получили решение: $x_1 = 5$, $x_2 = 1{,}428571$ Значение целевой функции $f=14{,}28571$.

Наличие у подзадачи 2.1 целочисленного решения не означает, что найдено оптимальное целочисленное решение исходной задачи, потому что еще не решены подзадачи 1.2. и 2.2, которые могут дать лучшее решение, чем 2.1. Целочисленное решение подзадачи 2.1 определяет нижнюю границу f = 14 значений целевой функции. Нет необходимости рассматривать те последующие подзадачи, для которых оптимальные значения $f$ меньше указанной нижней границы.

Вернемся к подзадаче 1.2. Для нее $f = 13{,}5$, что не превышает значения $f = 14$, поэтому поиск вдоль ветви $x_2 \ge 3$ следует прекратить.

Продолжение ветвления подзадачи 2. 2 дает подзадачи 3.1 и 3.2.

3.1

$$f=2x_1+3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

$$x_2 \le 2, \qquad x_1 \ge 5$$

$$x_2 \le 1$$

3.2

$$f=2x_1+3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

$$x_2 \le 2, \qquad x_1 \ge 5$$

$$x_2 \ge 2$$

В результате решения подзадачи 3.1 получили решение: $x_1$ = 5,6, $x_2$ = 1. Значение целевой $f$ = 14,2, что меньше, чем $f$ = 14,28571 в вершине 2.2. Значит процесс ветвления этой подзадачи закончен.

Вторая ветвь даёт пустое множество допустимых решений.

Продолжение ветвления подзадачи 3.1 показывает, что $f$ = 14,2, что меньше, чем в вершине 2.2. Вторая ветвь 3.2 дает пустое множество допустимых решений.

Таким образом, оптимальным будет вариант, при котором приобретаются 4 машины типа А и 2 машины типа В. При этом останется 1 ден. ед. и 2 м$^2$ производственной площади останутся неиспользованными. Максимальная сменная производительность нового цеха будет составлять 14 тыс. ед. продукции.

Изобразим схематически ход решения задачи (рис. 2):

<table>
<tr><td colspan="4">0.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>Ответ: $x_1$=3,705882, $x_2$=2,352941.<br>Значение целевой функции: $f$ = 14,47059.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.1.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>$x_2 \le 2$<br>Ответ: $x_1$=4,2, $x_2$=2.<br>Значение целевой функции:<br>$f$ = 14,4.</td><td>1.2.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>$x_2 \ge 3$<br>Ответ: $x_1$=2,25, $x_2$=3. Значение целевой функции:<br>$f$ = 13,5.</td></tr>
<tr><td>2.1.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>$x_2 \le 2,$<br>$x_1 \le 4$<br>Ответ:<br>$x_1$=4, $x_2$=2.<br>Значение ЦФ:<br>$f$ = 14.</td><td colspan="2">2.2.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>$x_2 \le 2, \quad x_1 \ge 5$<br>Ответ:<br>$x_1$=5, $x_2$=1,428571.<br>Значение ЦФ: $f$ = 14,28571.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3.1.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>$x_2 \le 2,$<br>$x_1 \ge 5$<br>$x_2 \le 1$<br>Ответ: $x_1$=5,6, $x_2$=1.<br>Значение ЦФ:<br>$f$ = 14,2.</td><td>3.2.<br>$f=2x_1+3x_2 \to max$<br>$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 35, \\ 4x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$<br>$x_2 \le 2,$<br>$x_1 \ge 5$<br>$x_2 \ge 2$<br>Ответ: пустое множество допустимых решений.</td><td></td></tr>
</table>

Рисунок 2 - Схематическое изображение хода решения задачи методом ветвей и границ

## 3. Задание

1. Построить математическую модель задачи.
2. Привести представление модели задачи к каноническому виду.
3. Разработать программу для решения задачи методом ветвей и границ на любом языке программирования (готовые (библиотечные) математические методы и функции языка не использовать!).
4. В результаты работы программы должно быть построено схематическое изображение хода решения задачи методом «ветвей и границ». Итерационное решение задачи симплекс-методом выводить не обязательно.

### *Варианты заданий*

**1–3.** На приобретение оборудования для нового цеха выделено $b_1$ тыс. ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей $b_2$ м$^2$. Предприятие может заказать оборудование двух видов: машины типа А стоимостью $a_{11}$ тыс. ден. ед., требующие площадь (с учетом проходов) в $a_{21}$ м$^2$ и обеспечивающие производительность $c_1$ ед. продукции за смену и машины типа В стоимостью $a_{12}$ тыс. ден. ед., занимающие площадь $a_{22}$ м$^2$ и дающие за смену $c_2$ ед. продукции. При этом следует учесть, что машин типа А можно заказать не более $b_3$ штук.

Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий новому цеху максимальную производительность.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице:

| Номер варианта | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 49 | 2128 | 5 | 7 | 3 | 112 | 228 | 10 | 12 |
| **2** | 24 | 984 | 10 | 2 | 4 | 41 | 322 | 4 | 14 |
| **3** | 36 | 672 | 5 | 6 | 3 | 32 | 91 | 7 | 10 |

**4–6.** Из Самары в Москву необходимо перевезти оборудование трех типов: $b_1$ ед. типа А, $b_2$ ед. типа В и $b_3$ ед. типа С. Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта: $T_1$ и $T_2$. На единицу транспорта вида $T_1$ может быть погружено оборудования типа А не более $a_{11}$ ед., оборудования типа В – не более $a_{21}$ ед., оборудования типа С – не более $a_{31}$ ед.; на единицу транспорта вида $T_2$ – не более $a_{12}$, $a_{22}$, $a_{32}$ ед. оборудования соответственно типа А, В, С. Сменные затраты, связанные с эксплуатацией единицы транспорта вида $T_1$, составляют $c_1$ ден. ед., единицы транспорта вида $T_2$ – $c_2$ ден. ед.

Найти оптимальный план заказа транспорта для перевозки с минимальными затратами.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице:

| Номер варианта | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{31}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{32}$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 555 | 138 | 135 | 111 | 6 | 9 | 28 | 23 | 12 | 13 | 10 |
| **5** | 40 | 468 | 20 | 8 | 36 | 1 | 2 | 49 | 4 | 7 | 5 |
| **6** | 1953 | 147 | 126 | 279 | 7 | 9 | 100 | 21 | 10 | 12 | 9 |

**7–9.** Для выполнения работ $P_1$, $P_2$, $P_3$ сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок А и В, стоимость соответственно $c_1$ и $c_2$ ден. ед. каждый. С использованием новой техники необходимо выполнить не менее $b_1$ условных единиц работы $P_1$, не менее $b_2$ условных единиц работы $P_2$ и не менее $b_3$ условных единиц работы $P_3$. За рассматриваемый промежуток времени с использованием трактора марки А можно выполнить $a_{11}$ условных единиц работы $P_1$, $a_{21}$ – работы $P_2$ или $a_{31}$ – работы $P_3$; с использованием трактора марки В – $a_{12}$ условных единиц работы $P_1$, $a_{22}$ – работы $P_2$ или $a_{32}$ – работы $P_3$. Требуется найти оптимальный вариант приобретения тракторов, чтобы затраты на новую технику были минимальные.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице:

| Номер варианта | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{31}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{32}$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | 20 | 190 | 88 | 4 | 19 | 4 | 1 | 15 | 15 | 3 | 5 |
| **8** | 77 | 40 | 138 | 7 | 2 | 23 | 12 | 12 | 6 | 1 | 2 |
| **9** | 92 | 3712 | 56 | 4 | 232 | 8 | 23 | 357 | 3 | 24 | 22 |

## Общие требования к лабораторной работе

1. Лабораторные работы выполняются в бригаде из 1-го, 2-х человек.
2. Для защиты у бригады должна быть работающая программа, распечатанный титульный лист отчета, отчет в электронном виде.
3. Отчет сдается в электронном виде (высылается на электронную почту lpirskaya@sfedu.ru как минимум за 3 дня до очной сдачи).
4. Суммарный балл за лабораторную работу складывается за:

- соответствие программы требованиям в задании;
- соответствие отчета представленным ниже требованиям;
- защиту работы, ответы на вопросы преподавателя.

## Требования по содержанию и оформлению отчета

Отчет должен содержать:

1. Содержание.
2. Постановку задачи.
3. Математическую модель.

В данном пункте приводится описание составленной математической модели.

4. Алгоритм работы программы.

В данном пункте приводится подробное описание реализации используемых алгоритмов решения задачи.

5. Результаты работы программы.

Приводятся результаты выполнения программы с пояснениями.

6. Заключение.

Заключение представляется собой развернутое подведение итого. В заключение должны быть даны ответы на вопросы:

- Что было сделано?
- С помощью каких методов, способов был достигнут результат?
- Чему научились?

Требования к оформлению отчета:

1. Текст отчета следует печатать, соблюдая следующие размеры полей (формат листа А4): правое – 10 мм, верхнее и нижнее – 20 мм, левое – 30 мм.
2. Интервал – полуторный. Интервалы между абзацами – полуторные. Выравнивание – по ширине. Абзацный отступ – 1 см.
3. Шрифт: основного текста – 12 кегль, заголовки 14-16 кегль, цвет текста – черный. Основой текст –Times New Roman, заголовки – Calibri, Arial, Tahoma.
4. Нумерация страниц отчета по центру внизу страницы.
5. Иллюстрации располагаются в отчете непосредственно после текста, в

котором они упоминаются впервые, или на следующей странице. Подпись к иллюстрации располагается под ней в центре:

«Рисунок номер – Название рисунка».