Задания по лабораторной работе №2
по курсу
«Практикум по программированию методов оптимизации и распознавания данных»

Преподаватель: Пирская Любовь Владимировна, к.т.н., доцент кафедры МОП ЭВМ

ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

1. Теоретическая часть

1.1. Общая постановка транспортной задачи

Транспортная задача (ТЗ) линейного программирования определяется как задача разработки оптимального (с точки зрения экономии затрат) плана перевозок продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в несколько пунктов назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью указания себестоимости перевозки единицы продукции по каждому возможному маршруту.

ТЗ относится к классу специальных задач ЛП. Специализация проявляется в том, что по своему математическому содержанию ТЗ есть типичная задача ЛП, однако математическая форма представления ТЗ имеет специфические особенности, которые позволяют разработать алгоритм ее решения, более простой с точки зрения математики. Примером типичной ТЗ является распределение (транспортировка) однородной продукции, находящейся на складах предприятий-изготовителей, по предприятиям-потребителям.

Приведем классическую постановку ТЗ.

Имеется m поставщиков $A_1, A_2, \dots, A_m$, у которых сосредоточены запасы одного и того же груза в количестве $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц соответственно. Этот груз нужно доставить n потребителям $B_1, B_2, \dots, B_n$, заказавшим $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц этого груза соответственно. Известны также все *тарифы перевозок* груза c_{ij} (стоимость перевозок единицы груза) от поставщика A_i к потребителю B_j. Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной.

Математическое представление ТЗ:

$$\begin{cases} Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Представление ТЗ в виде транспортной таблицы 1:

Таблица 1. Транспортная таблица

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A	$c\ _1$ $x\ _1$	c x	…	$c\ _n$ x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
A_m	c_m x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

В последнем столбце и последней строке записываются мощности соответствующих поставщиков и потребителей. Клетки таблицы, находящиеся на пересечении m строк, соответствующих поставщикам, и n столбцов, соответствующих потребителям, являются **рабочим полем**.

В верхнем левом углу каждой клетки рабочего поля записывают величину себестоимости, соответствующей перевозки c_{ij}. Правый нижний угол клетки предназначен для записи объема соответствующей перевозки - значения поставки x_{ij}. Правая нижняя клетка таблицы отводится для проверки условия баланса ТЗ.

Обозначим суммарный запас груза у всех поставщиков символом *a,* а суммарную потребность в грузе у всех потребителей – символом b. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{2}$$

$$b = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3}$$

Транспортная задача называется ***закрытой***, если $a = b$. Если же $a \neq b$, то транспортная задача называется ***открытой***.

В случае *закрытой задачи* от поставщиков будут вывезены все запасы груза и все заявки потребителей будут удовлетворены. В случае *открытой задачи* при $a < b$ весь груз будет вывезен, однако будут недопоставки груза экономически невыгодным потребителям. При $a > b$, наоборот, будут удовлетворены все потребители, но часть груза останется на складах экономически невыгодных поставщиков.

1.2. Решение ТЗ

Решение транспортной задачи разбивается на 3 этапа:

1. Проверка является ли задача открытой или закрытой.
2. Определение первоначального опорного решения.
3. Определение оптимального решения.

1.2.1. Проверка является ли задача открытой или закрытой

Решение транспортной задачи начинается с выяснения вопроса о том, является ли задача открытой или закрытой.

Если задача является открытой, то необходимо провести *процедуру закрытия задачи.* С этой целью при $a < b$ добавляем *фиктивного поставщика* A'_{m+1} с запасом груза $a'_{m+1} = b - a$. Если же $a > b$, то добавляем *фиктивного потребителя* B'_{n+1} с заказом груза $b'_{n+1} = a - b$.

В обоих случаях соответствующие фиктивным объектам тарифы перевозок c'_{ij} полагаем равными нулю. В результате суммарная стоимость перевозок Z не изменяется.

1.2.2. Определение первоначального опорного решения

Как и при решении задачи ЛП симплекс-методом, итерационный процесс определения оптимального плана ТЗ начинают с нахождения опорного плана. При этом в транспортной таблице заполняются только клетки, соответствующие базисным переменным. Такие клетки в дальнейшем будут называться **занятыми** или **базисными**. Клетки транспортной таблицы, соответствующие свободным переменным, оставляют пустыми и называют **свободными** или **небазисными**.

При заполнении клеток транспортной таблицы должны соблюдаться следующие правила:

1) на каждом шаге в клетку должна быть записана максимально возможная поставка, так, чтобы при этом была полностью исчерпана мощность либо соответствующего поставщика, либо соответствующего потребителя;

2) если на каком-то промежуточном шаге исчерпывается мощность либо поставщика, либо потребителя, то в соответствующих строке или столбце оставшиеся клетки оставляют пустыми;

3) занятые клетки не должны образовывать **цикл**.

Цикл - это последовательность занятых клеток транспортной таблицы, в которой каждая следующая клетка расположена в той же строке или в том же столбце, что и предыдущая, и последняя клетка расположена в той же строке и в том же столбце, что и первая. Выбор клетки-кандидата на заполнение при построении начального опорного плана ТЗ определяется выбором метода построения этого плана, среди которых будут рассмотрены два основных: метод северо-западного *угла* и метод минимального элемента

1.2.2.1. Метод северо-западного угла

Метод северо-западного угла (метод NWC - North West Corner) построения начального плана ТЗ заключается в том, что опорный план строится за m + n -1 последовательных шагов, на каждом из которых заполняется только одна - левая верхняя (северо-западная) клетка незаполненного на текущий момент рабочего поля транспортной таблицы.

Заполнение любой такой клетки «A_iB_j» на пересечении i -й стоки и j -то столбца происходит по принципу

$$x_{ij} = \min \{ a_i, b_j \} \qquad (4)$$

Смысл этого принципа в том, что если потребности магазина B_j составляют b_j единиц, то их следует максимально удовлетворить из имеющихся *запасов* a_i *со склада* A_i.

Применение данного метода рассмотрено в разделе 2.

1.2.2.1. Метод минимального элемента

Метод минимального элемента (метод МЭ, метод наименьших затрат или метод наименьшей стоимости) построения начального опорного плана ТЗ отличается от метода NWC правилом выбора клетки кандидата на заполнение. Если в методе NWC это правило полностью «географическое» и не зависит от себестоимости выбранной перевозки, то в методе МЭ - оно целиком «экономическое», так как величина себестоимости перевозки является определяющей. Свое название метод получил в связи с тем, что применительно к транспортной таблице затраты (себестоимость перевозок) часто называют элементами таблицы.

Поскольку ТЗ - задача минимизации, естественно, что критерием выбора клетки «A_iB_j» для заполнения является минимум себестоимости перевозки c_{ij} - минимальный элемент среди незаполненных клеток транспортной таблицы. Правило заполнения выбранной клетки в точности совпадает с аналогичным правилом метода NWC: обеспечить ее максимальную загрузку x_{ij} для удовлетворения текущих потребностей B_j из имеющихся запасов A_i.

Применение данного метода рассмотрено в разделе 2.

При построении опорного плана любым методом на каждом шаге, кроме последнего, величина поставки формируется так, чтобы полностью исчерпалась мощность либо поставщика, либо потребителя. Только при записи последней поставки в клетку записывается значение, равное одновременно и оставшемуся запасу груза у соответствующего поставщика, и оставшегося неудовлетворенного спроса потребителя. Таким образом обеспечивается выполнение условия о том, что число базисных переменных в опорном плане должно быть равно m + n -1. При этом оказывается, что любая занятая клетка может оказаться единственной в своей строке или своем столбце, но не может быть единственной и в столбце, и в строке одновременно.

Но иногда может возникнуть ситуация, когда после заполнения очередной клетки транспортной таблицы на промежуточном шаге окажутся полностью исчерпаны мощности и поставщика, и потребителя. В этом случае для того, чтобы план получился опорным, необходимо сделать его **невырожденным** с помощью специального приема, суть которого заключается в формальном увеличении числа заполненных клеток. С этой целью в одну из свободных клеток в той же строке или том же столбце записывают поставку, равную нулю, тем самым сделав клетку занятой.

Требование, чтобы число занятых клеток было равно m + n -1, является необходимым, но не достаточным для того, чтобы план считался опорным. Опорный план всегда подразумевает возможность перераспределения поставок внутри транспортной таблицы, т. е., в терминах геометрической интерпретации, возможность перехода от одной вершины многогранника решений к другой. А для этого занятые клетки транспортной таблицы должны образовывать так называемую вычеркиваемую комбинацию, исключающую наличие циклов.

В задачах небольшой размерности проверить возможность образования цикла при добавлении занятой клетки можно визуально. Но если число переменных велико, это может стать проблематичным. В таких случаях следует проверить, образуют ли занятые клетки вычеркиваемую комбинацию.

Это можно сделать следующим образом. Поставим цель поэтапно вычеркнуть все занятые клетки. При этом на каждом этапе вычеркнуть можно только занятую клетку, которая является единственной в своей строке или в своем столбце, причем на последующих этапах вычеркнутые клетки считаются пустыми. Так, если в строке две занятые клетки и одна из них вычеркнута, вторая считается единственной. Если последовательно рассматривая строки, столбцы, снова строки, снова столбцы и т. д., удается вычеркнуть все занятые клетки, значит, их комбинация - вычеркиваемая. Если построенный опорный план - невырожденный, занятые клетки всегда образуют вычеркиваемую комбинацию. В тех же случаях, когда план вырожден и в транспортную таблицу произвольно добавляются базисные нули, полученный план обязательно следует проверять.

1.2.3. Определение оптимального решения ТЗ методом потенциалов

Правила для поиска оптимального плана ТЗ методом потенциалов можно сформулировать следующим образом:

1. Составить уравнения (5) для занятых клеток очередного опорного

плана

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0 \,. \tag{5}$$

2. Решить систему уравнений (5) относительно неизвестных потенциалов $u_i \ (i = 1, \ldots, m)$ и $v_j \ (j = 1, \ldots, n)$.

3. Использовать полученные значения потенциалов для проверки выполнения неравенств (6) для свободных клеток данного опорного плана

$$u_i^* + v_j^* \leqslant c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0 \,, \tag{6}$$

Т.е. определить для всех свободных клеток величины (7), называемые характеристиками клеток:

$$r_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \,, \tag{7}$$

4. Если все характеристики неположительны, то опорный план является *оптимальным*, поскольку уменьшить значение целевой функции невозможно. В противном случае опорный план не оптимален и следует перейти к новому опорному плану к следующему шагу алгоритма.

5. Выбираем клетку, в которой находится максимальное значение среди найденных характеристик r_{ij}. Для этой клетки строим **цикл пересчета**.

Циклом пересчета называется замкнутая ломаная линия (контур), которая строится в рабочем поле транспортной таблицы по следующим правилам:

- начальная и конечная вершины ломаной располагаются в выбранной свободной клетке с наибольшим значением характеристики;

- все остальные вершины ломаной располагаются в занятых клетках;

- все углы ломаной - прямые, так как в каждой вершине встречаются два звена, одно из которых расположено вдоль строки, а другое вдоль столбца;

6. Каждой из клеток, входящих в цикл пересчета, поочередно приписывается определенный знак: «+» или «-», начиная со свободной клетки, которой приписывается знак «+». Клетки со знаком «+» будем называть положительными вершинами (клетками) цикла пересчета, клетки со знаком «-» - отрицательными вершинами (клетками).

7. В свободную клетку записывается число Θ - минимальное значение поставки среди отрицательных вершин цикла пересчета .Далее число Θ

прибавляется ко всем значениям поставок в положительных вершинах и вычитается из значений поставок в отрицательных вершинах цикла пересчета. Очевидно, что при этом клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а клетка, содержавшая минимальное значение поставки, равное Θ, - свободной. Это и есть переход к новому опорному плану.

8. Переход к пункту 1.

2. Практическая часть

2.1. Постановка задачи

Четыре магазина B1, B2, B3 и B4 некоторой фирмы торгуют однородной продукцией, которую получают с любого из трех складов фирмы A_1, A_2 и A_3. Ежедневные потребности магазинов соответственно равны $b_1 = b_2 = 30$, $b_3 = 20$ и $b_4 = 40$ (единиц). Суточный запас продукции на складах составляет соответственно $a_1 = 50$, $a_2 = 45$ и $a_3 = 40$ (единиц). Затраты транспортной фирмы на перевозку единицы продукции по маршрутам, связывающим склады с магазинами, задаются матрицей

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{matrix}$$

Необходимо составить такой план перевозок продукции со складов в магазины, при котором запасы складов используются полностью, потребности магазинов удовлетворяются на 100 %, а общая себестоимость всех перевозок является минимальной.

2.2. Построение математической модели

Запишем поставленную задачу в математической форме.

Переменные ТЗ являются элементы матрицы перевозок:

$$X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \geqslant 0 .$$

Таким образом, целевая функция примет вид:

$$Z(X) = 1x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 1x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 1x_{23} + 5x_{24} +$$

$$+3x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34}. \tag{8}$$

Ограничения по полному вывозу имеющейся продукции со всех складов представлены уравнениями:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40, \end{cases} \tag{9}$$

а ограничения по полному удовлетворению потребностей всех магазинов – уравнениями:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 40. \end{cases} \tag{10}$$

Математическая постановка данной ТЗ состоит в поиске такого неотрицательного решения систем линейных уравнений (9), (10), при котором целевая функция (8) достигает минимального значения

Проверяем является задача открытой или закрытой. Общие запасы равны 135 (единиц) и превышают общие потребности равные 120 (единиц) на 15. Таким образом, построенная ТЗ является открытой. Согласно правилам сведения открытой ТЗ к закрытой, введем виртуальный магазин B_5 с ежедневными потребностями b_5 = 135-120=15 (единиц). Будем считать, что затраты на транспортировку продукции с любого склада в этот «магазин» составляют c_{j5} =0 (i = 1, 2, 3). Закрытая ТЗ будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} Z(X) = 1x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + \ 1x_{14} + 0x_{15} + \\ \quad +2x_{21} + 3x_{22} + \ 1x_{23} + 5x_{24} + 0x_{25} + \\ \quad + 3x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 0x_{35} \to \min, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 40, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 15, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 3, \quad j = 1, \ldots, 5. \end{cases} \tag{11}$$

Построим транспортную таблицу 2 данной задачи.

Таблица 2.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1	2	4	1	0	50
A_2	2	3	1	5	0	45
A_3	3	2	4	4	0	40
Потребности	30	30	20	40	15	135

2.3. Опорное решение методом северо-западного пути

Первая свободная «северо-западная» клетка - « A_1B_1». Потребности B1 составляют 30 единиц, а запасы в A_1 - 50 единиц. Удовлетворим полностью потребности B_1. Тогда x_{11} =30, и ни от какого другого поставщика в B_1 груз больше поступать не будет (x_{21} = X_{31} = 0), при этом остаток запаса у A_1 составит 20 единиц. Соответствующие изменения показателей выделены в таблице 3 полужирным шрифтом. При этом затемненные клетки « A_2B_1» и « A_3B_1» говорят о том, что они «вышли из игры» за право быть занятыми, поскольку потребности магазина B_1 уже удовлетворены.

Таблица 3.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 **30**	2	4	1	0	50-**30=20**
A_2	2	3	1	5	0	45
A_3	3	2	4	4	0	40
Потребности	**30-30=0**	30	20	40	15	135

Из всех оставшихся незаполненных клеток рабочего поля транспортной таблицы левой верхней является «A_1B_2». Тогда «отправим» B_2 остаток со склада A_1 (x_{12} =20), в результате чего его запасы будут полностью исчерпаны. При этом у B_2 еще останется потребность в 10 единицах груза, что и отражено в таблице 4.

Таблица 4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 30	2 **20**	4	1	0	50-30-**20=0**
A_2	2	3	1	5	0	45
A_3	3	2	4	4	0	40
Потребности	30-30=0	30-**20=10**	20	40	15	135

Следующий кандидат на заполнение - клетка «A_2B_2». Из запасов A_2 окончательно «рассчитываемся» с B_2 (x_{22} = 10) и вносим соответствующие изменения в таблицу 5.

Таблица 5.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 30	2 20	4	1	0	50-30-20=0

A_2	2	3 **10**	1	5	0	45-**10=35**
A_3	3	2	4	4	0	40
Потребности	30-30=0	30-20-**10=0**	20	40	15	135

Аналогичным образом распределяем оставшиеся запасы между еще неудовлетворенными потребностями. Последовательное заполнение клеток « A_2B_3», « A_2B_4», « A_3B_4» и « A_3B_5» отражено в таблице 6.

Таблица 6.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 30	2 20	4	1	0	50-30-20=0
A_2	2	3 10	1 **20**	5 **15**	0	45-10-**20-15=0**
A_3	3	2	4	4 **25**	0 **15**	**40-25-25=0**
Потребности	30-30=0	30-20-10=0	**20-20=0**	**40-15-25=0**	**15-15=0**	135

После того как опорный план построен, необходимо проверить, не вырожденный ли он: число занятых клеток должно быть равно

$$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7,$$

что и имеет место в таблице 6. Следовательно, данный опорный план является невырожденным, а общая стоимость запланированных перевозок составляет

$$Z = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 5 \cdot 15 + 4 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 295 \text{ (ден. ед.).}$$

2.2. Опорное решение методом минимального элемента

Выберем в начальной транспортной таблице 2 клетки кандидаты на заполнение: очевидно, это будет одна из клеток столбца «B_5», содержащего наименьшие значения себестоимости перевозок (элементы): $c_{i5} = 0$ ($i = 1,2,3$). Выбрать можно любую из них. Пусть это будет клетка «A3B5». Записываем в эту клетку таблицы 7 поставку, равную $\min\{a_3, b_5\} = 15$. Мощность столбца «B_5» при этом исчерпывается.

Таблица 7.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1	2	4	1	0	50
A_2	2	3	1	5	0	45
A_3	3	2	4	4	0 **15**	40-**15=25**
Потребности	30	30	20	40	15-**15=0**	135

Следующими кандидатами на заполнение по методу МЭ будут клетки «A_1B_1», « A_1B_4» и « A_2B_3», содержащие одинаковые наименьшие элементы: $c_{11}=c_{l4}$ $=c_{23}=1$. Выбрать можно любую из них, но остановимся на «A1B1», заполнив ее так же, как в методе NWC (таблица 8) и вычеркнув из дальнейшего рассмотрения прочие клетки столбца « B_1».

Таблица 8.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 **30**	2	4	1	0	50-**30=20**
A_2	2	3	1	5	0	45
A_3	3	2	4	4	0 15	40-15=25
Потребности	30-**30=0**	30	20	40	15-15=0	135

Следующей заполняемой клеткой автоматически становится «A_1B_4», поскольку по-прежнему содержит наименьший элемент, к тому же, заполнив ее, а не «A_2B_3», можно окончательно «рассчитаться» с A_1 (таблица 9).

Таблица 9.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 30	2	4	1 **20**	0	50-30-**20=0**
A_2	2	3	1	5	0	45
A_3	3	2	4	4	0 15	40-15=25
Потребности	30-30=0	30	20	40-**20=20**	15-15=0	135

Теперь клетка « A_2B_3» остается единственным кандидатом на заполнение на текущем шаге, и этот процесс отображен в таблице 10.

Таблица 10.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 30	2	4	1 20	0	50-30-20=0
A_2	2	3	1 **20**	5	0	45-**20=25**
A_3	3	2	4	4	0 15	40-15=25
Потребности	30-30=0	30	20-**20=0**	40-20=20	15-15=0	135

Аналогичные действия проделываем для оставшихся не занятых клеток и получаем таблицу 11.

Таблица 11.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	1 30	2	4	1 20	0	50-30-20=0
A_2	2	3 **5**	1 20	5 **20**	0	45-20**-5-20=0**
A_3	3	2 **25**	4	4	0 15	40-15-**25=0**
Потребности	30-30=0	30**-25-5=0**	20-20=0	40-20**-20=0**	15-15=0	135

Поскольку для построения плана потребовалось m + n -1 = 7 шагов, очевидно, что план невырожденный.

Суммарные затраты в этом случае составят:

Z = 1•30 + 1•20+ 3•5 + 1•20+ 5•20+ 2•25+ 0•15 = 235 (ден. ед.).

2.3. Оптимальное решение методом потенциалов

Опорным решением будем считать решение, полученное методом МЭ в таблице 11.

Запишем уравнения (5) для занятых клеток таблицы 11:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = c_{11} = 1, \\ u_1 + v_4 = c_{14} = 1, \\ u_2 + v_2 = c_{22} = 3, \\ u_2 + v_3 = c_{23} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 + v_4 = c_{24} = 5, \\ u_3 + v_2 = c_{32} = 2, \\ u_3 + v_5 = c_{35} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Для удобства вычислений добавим к таблице 11 дополнительные столбец и строку, в которых будем записывать потенциалы поставщиков и потребителей соответственно, и заполним новую таблицу 12.

Система уравнений (12) содержит 7 уравнений по числу базисных переменных, но 8 двойственных переменных, т. е. является переопределенной. Поэтому, чтобы однозначно решить ее относительно неизвестных, необходимо одной переменной придать произвольное значение или, что то же самое, добавить уравнение, определяющее одну из переменных. Таким уравнением может быть установка нулевого потенциала одного из пунктов отправления или назначения, например, $u_1=0$ (можно выбрать и другое значение для потенциала, но 0 удобнее). Тогда получим систему (12), получим значения потенциалов и запишем их в таблицу 12.

Таблица 12.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	Потенциалы поставщиков
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	0	50	$u_1=0$
A_2	2	3 **5**	1 **20**	5 **20**	0	45	$u_2=4$
A_3	3	2 **25**	4	4	0 **15**	40	$u_3=3$
Потребности	30	30	20	40	15	135	
	$v_1=1$	$v_2= -1$	$v_3= -3$	$v_4=1$	$v_5=-3$		

Рассчитаем по формуле (7) характеристики свободных клеток транспортной таблицы 12, используя полученные значения потенциалов. Этот расчет также удобно производить непосредственно в таблице. Вычисленные значения характеристик запишем курсивом в правых верхних углах соответствующих им клеток в таблице 13.

Таблица 13.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	Потенциалы поставщиков
A_1	1 **30**	2 *-3*	4 *-7*	1 **20**	0 *-3*	50	u_1=0
A_2	2 *3*	3 **5**	1 **20**	5 **20**	0 *1*	45	u_2=4
A_3	3 *1*	2 **25**	4 *-4*	4 *0*	0 **15**	40	u_3=3
Потребности	30	30	20	40	15	135	
	v_1=1	v_2= -1	v_3= -3	v_4=1	v_5=-3		

Анализ полученных значений характеристик показывает, что критерий оптимальности для данного опорного плана не выполняется, так как среди характеристик есть положительные: r_{21}, r_{25} и r_{31}. Наибольшее значение r_{max} =r_{21} =3 характеристики - в клетке «A_2B_1». Выполняем для этой клетки цикл пересчета.

В таблице 13 цикл пересчета для клетки «A_2B_1» будет иметь форму прямоугольника, связывающего занятые клетки «A_1B_1», «A_1B_4» и «A_2B_4», как показано в таблице 14. При этом вершины, расположенные в клетках «A_2B_1» и «A_1B_4», будут положительными, а вершины, расположенные в клетках «A_1B_1» и «A_2B_4» - отрицательными. В нашей задаче на данном этапе Θ = min {30, 20} = 20.

Таблица 14.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	Потенциалы поставщиков
A_1	1 - **30**	2 *-3*	4 *-7*	1 + **20**	0 *-3*	50	u_1=0
A_2	2 *3* +	3 **5**	1 **20**	5 - **20**	0 *1*	45	u_2=4
A_3	3 *1*	2 **25**	4 *-4*	4 *0*	0 **15**	40	u_3=3
Потребности	30	30	20	40	15	135	
	v_1=1	v_2= -1	v_3= -3	v_4=1	v_5=-3		

Таблица 15.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	Потенциалы поставщиков
A_1	1 **10**	2	4	1 **40**	0	50	u_1=0
A_2	2 **20**	3 **5**	1 **20**	5	0	45	u_2=4
A_3	3	2 **25**	4	4	0 **15**	40	u_3=3
Потребности	30	30	20	40	15	135	
	v_1=1	v_2= -1	v_3= -3	v_4=1	v_5=-3		

Новый опорный план будет выглядеть как показано в таблице 15. Суммарные затраты по этому плану составят:

$Z = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 175$ (ден. ед.).

Далее процесс повторяется: полученный опорный план необходимо вновь проверить на оптимальность. Рассчитываем значения потенциалов по новому базису и характеристики для свободных клеток, заносим результаты в таблицу 16. Среди характеристик есть одна положительная $r_{25} = 1$, значит, план не оптимален. Строим цикл пересчета для клетки «A_2B_5». По циклу переносим поставку, равную $\Theta = \min \{5, 15\} = 5$. В результате получаем перераспределение объемов поставок и новый опорный план в таблице 17.

Таблица 16.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	Потенциалы поставщиков
A_1	1 **10**	2 *0*	4 *-4*	1 **40**	0 0	50	u_1=0
A_2	2 **20**	3 **5**	1 **20**	5 *-3*	0 *1*	45	u_2=1
A_3	3 *-2*	2 **25**	4 *-4*	4 *-3*	0 **15**	40	u_3=0
Потребности	30	30	20	40	15	135	
	v_1=1	v_2= 2	v_3= 0	v_4=1	v_5= 0		

Таблица 17.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	Потенциалы поставщиков
A_1	1 **10**	2 *-1*	4 *-4*	1 **40**	0 *-1*	50	u_1=0
A_2	2 **20**	3 *-1*	1 **20**	5 *-3*	0 **5**	45	u_2=1
A_3	3 *-1*	2 **30**	4 *-3*	4 *-2*	0 **10**	40	u_3=0
Потребности	30	30	20	40	15	135	
	v_1=1	v_2= 1	v_3= 0	v_4=1	v_5= -1		

Рассчитываем новые значения потенциалов и характеристик. Все характеристики неположительны, значит, полученный план является оптимальным.

Оптимальное значение суммарных транспортных затрат при этом составит:

Z = 1•10 + 1•40+ 2•20+ 1•20+ 0•5+ 2•30 + 0•15 = 170 (ден. ед.).

3. Задание

1. Построить математическую модель задачи.

2. Привести задачу к закрытой форме.

3. Разработать программу для нахождения опорного решения задачи методами северо-западного угла и минимального элемента на любом языке программирования (готовые (библиотечные) математические методы и функции языка не использовать!).

4. Разработать программу для нахождения оптимального решения задачи методом потенциалов на любом языке программирования (библиотечные) математические методы и функции языка не использовать!). В качестве опорного решения берете лучшее решение, полученное в предыдущем пункте.

Варианты заданий

1. Для строительства пяти дорог используется гравий из четырёх карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров, соответственно, равны 330,250, 260 и 410 тыс. т. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 230, 350, 200, 220 и 250 тыс. т.

Известны также тарифы перевозок 1 тыс. т. гравия из каждого карьера к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей:

4	10	12	8	6
7	5	9	11	7
6	11	-	5	-
5	9	12	8	11

Составьте такой план перевозок гравия, при котором потребности в нём каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

2. На четырёх стройках ежедневно используются для настила полов объёмы пиломатериалов, равные 175, 180, 160 и 185 тыс.м^3. Пиломатериалы поставляют на стройки четыре лесопилки, вырабатывающие за день их объёмы, равные 100, 150, 250 и 200 тыс. м^3 соответственно. Тарифы перевозок с каждой лесопилки на каждую стройку для 1 тыс. м^3 пиломатериалов известны и заданы матрицей

5	4	2	3
4	-	10	-
10	8	4	6
7	11	9	2

Составьте такой план перевозок пиломатериалов, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

3. На трёх элеваторах ежедневно производится 120, 180 и 100 т муки. Эта мука используется на четырёх хлебозаводах, ежедневные потребности которых равны, соответственно, 100, 160, 90 и 70 т. Тарифы перевозок 1 т муки с элеватора к каждому хлебозаводу заданы матрицей

10	3	12	9
6	5	9	11
7	16	2	7

Составьте такой план перевозки муки, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

4. В трёх хранилищах горючего еженедельно хранятся 165, 135 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных, соответственно, 170, 120, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

8	6	4	2
1	1	3	5
5	9	11	7

Составьте такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

5. На трёх железнодорожных станциях скопилось 110, 130 и 140 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на 5 других железно-дорожных станций, с потребностями в вагонах 90, 80, 60, 90 и 60 вагонов соответственно. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей:

3	5	2	7	8
4	-	6	-	3
9	10	7	4	5

Составьте план перегонки вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

6. На каждом из четырёх филиалов кондитерского объединения могут производиться конфеты четырёх видов «Алёнушка» (А), «Буратино» (Б), «Сласть» (С) и «Детские» (Д). Объём производства равен 120, 80, 160 и 90т в месяц соответственно. Себестоимость каждого из изделий на каждом из филиалов различна и определяется матрицей:

6	1	2	3
3	4	5	2
8	2	-	9
3	4	4	5

Учитывая, что спрос на конфеты А, Б, С, Д в месяц составляет 50, 150, 120 и 130 т, найдите такое распределение выпуска продукции между филиалами, при котором общая себестоимость продукции будет минимальной.

7. На четырёх участках леса могут быть посажены сосна, ясень, клён и берёза. Площадь каждого из участков соответственно равна 500, 240, 135 и 360 га. С учётом наличия семян следует засеять сосной, ясенем, клёном и берёзой, соответственно, 280, 225, 310 и 420 га. Всхожесть каждой из культур для каждого участка земли различна и задана матрицей

78	92	87	95
67	69	77	76
75	85	93	67
86	83	79	91

Определите, сколько га на каждом из участков следует засеять каждой породой деревьев, чтобы общее число выросших деревьев было максимальным.

8. Консервный комбинат имеет в своём составе 5 заводов, на каждом из которых может изготовляться четыре вида консервов. Мощности заводов равны 300, 250, 350, 420 и 180 тыс. банок в день. Ежедневные потребности в консервах каждого вида также известны и составляют 430, 500, 430 и 440 т. Себестоимость 1 т каждого вида консервов на каждом заводе задана матрицей:

4	2	3	4
2	1	5	3
6	-	4	2
7	7	-	5
4	3	5	2

Найдите такое распределение выпуска консервов между заводами, при котором себестоимость изготовляемой продукции минимальна.

9. В пять газетных киосков поставляется печатная продукция с трёх оптовых баз. Ежедневно с баз вывозится 150, 230 и 340 единиц продукции соответственно. Киоски могут разместить 170, 160, 100, 120 и 180 единиц продукции. Тарифы перевозок единицы продукции с каждой базы в киоски задаются матрицей:

12	11	10	13	14
15	10	16	14	23
18	19	22	12	20

Составьте такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

10. Мёд закупается на четырёх пасеках в количествах 230, 320, 520 и 210 т и хранится на пяти складах. Складские помещения могут вместить по 300 т мёда каждое. Затраты, связанные с закупкой и доставкой 1 т мёда, задаются матрицей:

17	21	-	15	16
-	10	16	14	23
15	11	20	21	18
18	19	22	23	17

Составьте такой план доставки мёда на склады, чтобы затраты были минимальными.

Общие требования к лабораторной работе

1. Лабораторные работы выполняются в бригаде из 1-го, 2-х человек.
2. Для защиты у бригады должна быть работающая программа, распечатанный титульный лист отчета, отчет в электронном виде.
3. Отчет сдается в электронном виде (высылается на электронную почту lpirskaya@sfedu.ru как минимум за 3 дня до очной сдачи).
4. Суммарный балл за лабораторную работу складывается за:

- соответствие программы требованиям в задании;
- соответствие отчета представленным ниже требованиям;
- защиту работы, ответы на вопросы преподавателя.

Требования по содержанию и оформлению отчета

<u>Отчет должен содержать:</u>

1. Содержание.

2. Постановку задачи.

3. Математическую модель.

В данном пункте приводится описание составленной математической модели.

4. Алгоритм работы программы.

В данном пункте приводится подробное описание реализации используемых алгоритмов решения задачи.

5. Результаты работы программы.

Приводятся результаты выполнения программы с пояснениями.

6. Заключение.

Заключение представляется собой развернутое подведение итого. В заключение должны быть даны ответы на вопросы:

- Что было сделано?
- С помощью каких методов, способов был достигнут результат?
- Чему научились?

Требования к оформлению отчета:

1. Текст отчета следует печатать, соблюдая следующие размеры полей (формат листа А4): правое – 10 мм, верхнее и нижнее – 20 мм, левое – 30 мм.
2. Интервал – полуторный. Интервалы между абзацами – полуторные. Выравнивание – по ширине. Абзацный отступ – 1 см.
3. Шрифт: основного текста – 12 кегль, заголовки 14-16 кегль, цвет текста – черный. Основой текст –Times New Roman, заголовки – Calibri, Arial, Tahoma.
4. Нумерация страниц отчета по центру внизу страницы.
5. Иллюстрации располагаются в отчете непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице. Подпись к иллюстрации располагается под ней в центре:

«Рисунок номер – Название рисунка».