Задания по лабораторной работе №1
по курсу
«Практикум по программированию методов оптимизации и распознавания данных»

Преподаватель: Пирская Любовь Владимировна, к.т.н., доцент кафедры МОП ЭВМ

ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

1. Теоретическая часть

1.1. Постановка общей задачи линейного программирования с n переменными

Среди множества оптимизационных задач существуют особые задачи, которые называют задачами линейного программирования. Все они характеризуются некоторыми общими чертами. В каждой из них элементы решения представляют собой ряд неотрицательных переменных x_1, x_2, …, x_n. Требуется так выбрать значения этих переменных, чтобы:

1) выполнялись некоторые ограничения, имеющие вид линейных неравенств или неравенств относительно переменных x_1, x_2, …, x_n;

2) некоторая линейная функция f тех же переменных обращалась в максимум (минимум).

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП) называют задачу, в которой функция цели, которую надо оптимизировать, представляет собой линейную комбинацию известных коэффициентов $c_j\,(j=\overline{1,n})$ и неизвестных переменных $x_j\,(j=\overline{1,n})$ вида:

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

Функцию f называют также целевой функцией или критерием эффективности задачи. Неизвестные неотрицательные переменные xj называются управляющими переменными.

Ограничения, накладываемые на область возможных решений, имеют вид линейных неравенств или равенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,,\ \ i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ge b_i\,, i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,, i = \overline{m_2 + 1, m,} \end{cases} \tag{1.2}$$

где a_{ij}, b_i– известные величины, причем величины a_{ij}, x_j, b_i $(j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n})$ положительные.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных x_j, удовлетворяющих ограничениям (1.2), при которых целевая функция (1.1) принимает минимальное или максимальное значение.

Допустимым решением задачи линейного программирования будем называть любую совокупность неотрицательных переменных, удовлетворяющих условиям (1.2):

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}) \tag{1.3}$$

Оптимальным решением $\vec{X}_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ будем называть то из допустимых решений, для которого линейная функция f (1.1) обращается в максимум (минимум).

В **классической постановке** математическая модель задачи ЛП представляет собой группу соотношений: целевую функцию (1.1), которую надо либо максимизировать, либо минимизировать, все ограничения, заданные неравенствами со знаком ≤ (1.4), при заданных условиях всех неотрицательных переменных (1.3).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \tag{1.4}$$

Существуют *симметричные* формы записи ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}, \tag{1.5}$$

$$x_j \ge 0\,, (j = \overline{1,n})$$

или:

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{1.6}$$

$$x_j\ge 0\ ,(j=\overline{1,n}).$$

При **канонической форме** целевая функция стремится к максимуму, ограничения представлены уравнением (1.7) и заданы условия неотрицательности переменных (1.3).

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{1.7}$$

Форма записи ЗЛП может быть **матричной:**

$$F=CX\to\max,\ AX=A_0,\ X\ge 0, \tag{1.8}$$

где A – матрица коэффициентов системы уравнений; X – матрица-столбец переменных задачи; A_0 – матрица-столбец правых частей системы ограничений.

$$\text{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

называется матрицей условий, технологической матрицей или матрицей норм расхода в зависимости от того, какой смысл вложен в совокупность ее элементов.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}$$ - вектор переменных, $$A_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}$$ - вектор ограничений,

$$\text{C}=\begin{pmatrix}\text{c}_1\\\text{c}_2\\\dots\\\text{c}_n\end{pmatrix}$$ - вектор весовых коэффициентов. CX – скалярное произведение векторов c и x.

Такое разнообразие форм записи условий задач затрудняет создание и использование общих методов и вычислительных алгоритмов их решения.

Рассмотрим метод и алгоритм решения канонической задачи линейного программирования и способы сведения любой задачи линейного программирования к канонической форме.

Если по условиям задачи требуется отыскать минимум функции *f*:

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \tag{1.9}$$

то задачу можно свести к задаче максимизации функции *f*’, связанной с функцией *f* следующим образом:

$$f'=-f=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n=-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{1.10}$$

Максимум функции (1.10) и минимум функции (1.9) будут достигаться при одном и том же наборе переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих условиям неотрицательности переменных и уравнениям, задающим область допустимых решений.

Если в ограничениях (1.2) задачи стоят неравенства вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=\overline{1, m_1}, \tag{1.11}$$

то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: прибавить в левой части неравенств новые переменные x_j, $(j=\overline{n+1, n+m_1})$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \cdots \\ a_{m_11}x_1+a_{m_12}x_2+\cdots+a_{m_1n}x_n+x_{n+m_1}=b_{m_1}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Если в ограничениях задачи стоят неравенства вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i=\overline{m_1+1, m_2}, \tag{1.13}$$

то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: вычесть в левой части неравенств новые переменные $x_j, j=\overline{n+m_1+1, n+m_2}$:

$$\begin{cases} a_{(m_1+1)1}x_1+a_{(m_1+1)2}x_2+\cdots+a_{(m_1+1)n}x_n-x_{n+(m_1+1)}=b_{(m_1+1)}, \\ a_{(m_1+2)1}x_1+a_{(m_1+2)2}x_2+\cdots+a_{(m_1+2)n}x_n-x_{n+(m_1+2)}=b_{(m_1+2)}, \\ \cdots \\ a_{m_21}x_1+a_{m_22}x_2+\cdots+a_{m_2n}x_n-x_{n+m_2}=b_{m_2}. \end{cases} \tag{1.14}$$

В результате подобных преобразований задача линейного программирования будет приведена к канонической форме записи.

1.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования.

Алгоритм симплекс-метода заключается в следующем:

Шаг 1. Получение начального решения.

Выбираются m переменных, называемых *базисными* и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 – в остальные уравнения системы.

Остальные $n – m$ переменных называются свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные – равные правым частям соответствующих ограничений системы.

Пусть m базисных переменных – это переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (в противном случае переменные всегда можно перенумеровать). Тогда начальное решение X_0 имеет вид:

$$X_0 = \{x_1=b_1, x_2=b_2,..., x_m=b_m, x_{m+1}=0, \ldots , x_n=0\}. \qquad (1.14)$$

Если все $b_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}$, то начальное решение является допустимым.

Переходят к шагу 2. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

Шаг 2. Выражение функции f только через свободные переменные.

$$f= \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j. \qquad (10.2)$$

Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий задачи линейного программирования, имеющей предпочтительный вид, к другому, на котором целевая функция принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую симплекс-таблицу.

Она имеет следующий вид: (n + 3) столбцов, где n – число переменных в предпочтительном виде, (m + 2) строк, где m – число ограничений равенств. Сверху записывают строку коэффициентов целевой функции, снизу находится индексная строка. В столбце БП записываются базисные переменные. Столбец $C_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец A_0 – столбец свободных членов системы ограничений. Основное поле таблицы занимают коэффициенты a_{ij} системы ограничений.

Максимизировать целевую функции

$$Z_{\max} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + c_4 \cdot x_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{13}\, x_3 + a_{14} x_4 = b_1, \\ \qquad\qquad x_2 + a_{23} x_3. + a_{24} x_4 = b_2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности переменных: x_1, x_2, x_3, $x_4 \geq 0$.

Предположим, что $b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$, т.е. система уравнений приведена к опорному решению (b_1, b_2, 0, 0). Значение целевой функции на этом решении равно

$$Z_{\max} = c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2.$$

Заполним симплекс-таблицу 1.1.

Таблица 1.1

№ итерации	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
				c_1	c_2	c_3	c_4	
0	x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	b_i/a_{ij}
	x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
	$Z_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $Z_j - c_j$. Здесь расположены значение функции цели для начального опорного плана x_0, т.е. $Z(x_0) = \Delta_0 = C_Б \cdot A_0$ и оценки индексной строки $\Delta_j = C_Б \cdot A_j - c_j$.

По симплекс-таблице четко видны результаты исследования, проведенные на предыдущей итерации:

1. *Критерий оптимальности.* Если индексная строка симплекс-таблицы не содержит отрицательных элементов, то достигнутое опорное решение является оптимальным.

2. Критерий неразрешимости. Если индексная строка симплекс-таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце нет положительных элементов $a_{1j} < 0$ и $a_{2j} < 0$, то задача линейного программирования не имеет решения: $Z \to \infty$.

3. *Критерий улучшения решения.* Если индексная строка симплекс-таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j<0$, и в соответствующем этому элементу столбце есть положительные элементы, то, совершив с помощью симплексных преобразований переход к новому базису (при соответствующем Δ_j разрешающем столбце), получим другое опорное решение, на котором целевая функция Z примет значение, не меньшее, чем на предыдущем опорном решении.

Примечание 1. Так как число опорных решений системы конечно, конечным будет и процесс решения задачи линейного программирования.

Примечание 2. Если в задаче линейного программирования необходимо найти минимум целевой функции Z, то вводится функция $F = -Z$. Вследствие равенства $Z + F = 0$, $Z_{\min} = -F_{\max}$, а поэтому, решая задачу максимизации F , мы одновременно решаем задачу минимизации Z.

2. Практическая часть

2.1. Постановка задачи

Предприятие изготавливает два вида продукции — $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья — А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и $П_2$ дан в таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 ед.продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. — для $П_1$ и 4 д. е. — для $П_2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

2.2. Построение математической модели

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответов на следующие вопросы:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель, т. е. как идентифицировать *переменные* данной задачи?

2. Какие *ограничения* должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3. В чем состоит *цель задачи*, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Ответы на вышеперечисленные вопросы могут быть сформулированы для данной задачи так: фирме требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в д. е. от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \le 9;\\
&3x_1 + 2x_2 \le 13;\\
&x_1 - x_2 \le 1;\\
&x_2 \le 2;\\
&x_1 \ge 0;\\
&x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$ составит:

$$f = 3x_1 + 4x_2.$$

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция f принимает максимальное значения $f_{\max}$.

2.3. Решение задачи симплекс-методом

Приведем задачу к каноническому виду. Для этого вычтем из левой части неравенств фиктивные переменные x_3, x_4, x_5, x_6

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 13, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 1, \\ x_2 - x_6 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$f_{max} = 3x_1 + 4x_2$

Теперь задача представлена в предпочтительном виде для решения с использованием симплекс-таблиц. Занесем данные в симплекс-таблицу 1.2.

Таблица 1.2.

№ итер.	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				3	4	0	0	0	0	
0	x_3	0	9	2	3	1	0	0	0	9/2
	x_4	0	13	3	2	0	1	0	0	13/3
	x_5	0	1	1	-1	0	0	1	0	1 min
	x_6	0	2	0	1	0	0	0	1	-
	$Z_j - c_j$		Z_0=0	– 3	– 4	0	0	0	0	

Среди элементов $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ таблицы 1.2 выбираем максимальный. Это 2 элемента: $\boldsymbol{a}_{41}$, $\boldsymbol{a}_{32.}$ Рассмотрим строку оценок. Здесь есть две отрицательные оценки: – 3 и– 4. Выбираем большую. То есть в качестве разрешающего столбца выбираем x_1. Вычисляем симплексные отношения b_i/a_{ij}. Получим: 9/2, 13/3, 1. Если приходится делить на ноль, ставим прочерк. Наименьшее из них 1, значит разрешающий элемент 1, стоящий на пересечении строк x_5 и столбца x_1л (выделены в таблице)

Следовательно, элемент $\boldsymbol{a}_{32} = 1$ – разрешающий. Переменную $\boldsymbol{x_5}$ выведем из базиса, а $\boldsymbol{x}_1$ введем в базис. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца заполняем нулями, кроме $\boldsymbol{a_{31}}'$=1, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу треугольника (прямоугольника).

Правило прямоугольника: чтобы получить элемент a_{ij} новой симплекс-таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент.

Правило треугольника: для получения любого элемента новой симплекс-таблицы нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент.

Таким образом, новый базис будет состоять из x_3, x_4, x_1, x_6. В новой симплекс-таблице 1.3 записываем выделенную строку без изменения, т.к. разрешающий элемент уже равен 1.

Для получения нулей в столбце x_1 проводим преобразования. Так, например, умножим выделенную строку на 2 и вычтем из первой строки третью. Такие преобразования проводим для всех строк таблицы.

Таблица 1.3.

№ итер.	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				3	4	0	0	0	0	
1	x_3	0	7	0	5	1	0	-2	0	7/5
	x_4	0	10	0	5	0	1	-3	0	10/5
	x_1	3	1	1	-1	0	0	1	0	-
	x_6	0	2	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j - c_j$		Z_1=3	0	-7	0	0	3	0	

Повторяем все рассуждения для табл. 1.3. Выбираем разрешающий столбец – столбец для x_2. Разрешающая строка – это строка для x_3 Разрешающий элемент находится на пересечении первой строки и второго столбца. Делим первую строку на 5 и заполняем таблицу 1.4.

Для получения нулей в столбце x_2 проводим преобразования. Так, например, умножим выделенную строку, деленную на 5, на 5 и вычтем из второй строки первую. Аналогичные преобразования проводим для всех строк таблицы.

Таблица 1.4.

№ итер.	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				3	4	0	0	0	0	
2	x_2	4	1,4	0	1	0,2	0	-0,4	0	
	x_4	0	3	0	0	-1	1	-1	0	
	x_1	3	2,4	1	0	0,2	0	0,6	0	
	x_6	0	0,6	0	0	-0,2	0	0,4	1	
	$Z_j - c_j$		Z_2= 12,8	0	0	1,4	0	0,2	0	

Так как среди оценок нет отрицательных, то мы получили оптимальный план:

$x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0{,}6$ или (2,4; 1,4; 0; 3; 0; 0,6).

Переменные x_3, x_4, x_5, x_6 являются фиктивными переменные, таким образом , оптимальный план задачи x_1=2,4; x_2=1,4.

Подставляя найденные значения в линейную функцию, получим:

$$f = 3x_1 + 4x_2 = 12{,}8.$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции вида $П_1$ должен быть равен 2,4 единицам, а продукции $П_2$ - 1,4 единицам продукции. Доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 д. е.

3. Задание

1. Построить математическую модель задачи.
2. Привести представление модели задачи к каноническому виду.
3. Разработать программу для решения задачи симплекс методом на любом языке программирования (готовые (библиотечные) математические методы и функции языка не использовать!).

Варианты заданий

1. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина, $м^3$:			
1-го вида	0,2	0,1	40
2-го вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость, чел.ч	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия, р.	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов следует изготавливать фабрике, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

2. Для изготовления трех видов изделий А, В и С используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, прибыль от реализации одного изделия данного вида представлены в таблице:

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	А	В	С	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль, р.	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

3. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов представлены в таблице:

Питательные вещества	Содержание, г, питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	–	–	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов, р.	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

4. Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B, и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, общее количество сырья каждого вида, прибыль от реализации 1т. карамели представлены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья, т, на 1 т карамели			Общее количество сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	–	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции, р.	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

5. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них представлены в таблице:

Длина заготовки, см	Варианты разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	–	–	–
35		1	–	3	1	–
50	–	–	1	-	1	2
Величина отходов, см	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

6. На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия, имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида представлены в таблице:

Артикул ткани	Норма расхода ткани, м, на одно изделие вида				Общее количество ткани, м
	1	2	3	4	
I	1	–	2	1	180
II	–	1	3	2	210
III	4	2	–	4	800
Цена одного изделия, р.	9	6	4	7	

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

7. Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара, используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м^2. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи представлены в таблице:

Показатели	Товар				Общее количество ресурсов
	A	B	C	D	
Расход рабочего времени на единицу товара, ч	0,6	0,8	0,6	0,4	840
Использование площади торгового зала на единицу товара, м^2	0,1	0,2	0,4	0,1	180
Прибыль от продажи единицы товара, р.	5	8	7	9	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

8. Из трех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. – вещества В и 24 ед. – вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, цена 1 кг сырья каждого вида представлены в таблице:

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
A	1	1	–	4
B	2	–	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья, р.	5	6	7	4

Составить смесь, содержащую не менее нужного количества веществ данного вида и имеющую минимальную стоимость.

9. При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида для каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, представлены в таблице:

Технологическая операция	Нормы затрат времени, ч, на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени, ч
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7 200
Наложение изоляций	1,0	0,4	0,8	0,7	5 600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11 176
Освинцовывание	3,0	–	1,8	2,4	3 600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4 200
Прибыль от реализации 1 км кабеля, р.	1,2	0,8	1,0	1,3	

Определить план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

10. Для производства трех видов изделий А, В, С предприятие использует четыре вида сырья. Нормы затрат сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида, прибыль от реализации одного изделия каждого вида представлены в таблице:

Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг, на единицу продукции		
	A	B	C
I	2	3	–
II	–	4	6
III	5	5	2
IV	4	–	7
Прибыль от реализации одного изделия	25	28	27

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но для их производства предприятие может использовать сырье I вида не более 200 кг, II вида – не более 120 кг, III вида – не более 180 кг, IV вида – не более 138 кг.

Определить план производства продукции, при котором общая прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы наибольшей.

11. Туристическое агентство собирается заказать издательству выпуск художественных альбомов трех типов A, B, C. Их изготовление лимитируется затратами ресурсов трех видов, удельные расходы которых представлены в таблице:

Вид ресурса	Удельные затраты ресурсов на выпуск альбомов		
	A	B	C
Финансы, $	2	1	4
Бумага, л.	4	2	2
Трудозатраты, чел. ч	1	1	2

Издательство для выполнения заказа получило финансовые средства в объеме $ 3 600, имеет в наличии 52 000 л. бумаги и может использовать трудовые ресурсы в объеме 2 200 чел. ч.

Агентство платит за выпуск одного альбома типа A – 22 дол., за альбом B – 18 дол., за альбом C – 30 дол.

Сколько альбомов каждого типа должно выпустить издательство, чтобы получить наибольшую прибыль?

12. Для производства трех видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида, общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объемы имеющегося сырья каждого вида, цена одного изделия каждого вида, ограничения на возможный выпуск каждого из изделий представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресур сов
	1	2	3	
Производительность оборудования в нормочасах:				
I типа	2	–	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырье, кг:				
1-го вида	10	15	20	1 495
2-го вида	30	20	25	4 500
Цена одного изделия, р.	10	15	20	–
Выпуск, шт.:				
минимальный	10	20	25	
максимальный	20	40	100	–

Составить план производства продукции, по которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, при максимальной общей стоимости всей изготовляемой продукции.

Общие требования к лабораторной работе

1. Лабораторные работы выполняются в бригаде из 1-го, 2-х человек.
2. Для защиты у бригады должна быть работающая программа, распечатанный титульный лист отчета, отчет в электронном виде.
3. Отчет сдается в электронном виде (высылается на электронную почту lpirskaya@sfedu.ru как минимум за 3 дня до очной сдачи).
4. Суммарный балл за лабораторную работу складывается за:

- соответствие программы требованиям в задании;
- соответствие отчета представленным ниже требованиям;
- защиту работы, ответы на вопросы преподавателя.

Требования по содержанию и оформлению отчета

Отчет должен содержать:

1. Содержание.
2. Постановку задачи.
3. Математическую модель.

В данном пункте приводится описание составленной математической модели.

4. Алгоритм работы программы.

В данном пункте приводится подробное описание реализации используемых алгоритмов решения задачи.

5. Результаты работы программы.

Приводятся результаты выполнения программы с пояснениями.

6. Заключение.

Заключение представляется собой развернутое подведение итого. В заключение должны быть даны ответы на вопросы:

- Что было сделано?
- С помощью каких методов, способов был достигнут результат?
- Чему научились?

Требования к оформлению отчета:

1. Текст отчета следует печатать, соблюдая следующие размеры полей (формат листа А4): правое – 10 мм, верхнее и нижнее – 20 мм, левое – 30 мм.
2. Интервал – полуторный. Интервалы между абзацами – полуторные. Выравнивание – по ширине. Абзацный отступ – 1 см.
3. Шрифт: основного текста – 12 кегль, заголовки 14-16 кегль, цвет текста – черный. Основой текст –Times New Roman, заголовки – Calibri, Arial, Tahoma.
4. Нумерация страниц отчета по центру внизу страницы.
5. Иллюстрации располагаются в отчете непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице. Подпись к иллюстрации располагается под ней в центре:

«Рисунок номер – Название рисунка».