

Практические задания к уроку 2

1 Задание

Напишите уравнение параболы, проходящей через три точки (x,y):
(1,2), (3,10), (5,1)

Решение.

Уравнение параболы - квадратное уравнение. Т.к. по трем точкам нельзя определить тип параболы, т.е. будет ли x^2 или y^2 , то следует решить оба варианта.

1.

Handwritten solution on grid paper:

$$y = ax^2 + bx + c$$

For point (1,2): $2 = a \cdot 1^2 + b + c \Rightarrow c = 2 - a - b, \Rightarrow (2)$

For point (3,10): $10 = a \cdot 9 + 3b + c$

For point (5,1): $1 = a \cdot 25 + 5b + c$

Substituting (2) into the other equations:

$$10 = 9a + 3b + 2 - a - b \Rightarrow 8 = 8a + 2b$$
$$1 = 25a + 5b + 2 - a - b \Rightarrow 8 = 24a + 4b$$
$$b = 4 - 4a, \Rightarrow (3)$$

Substituting (3) into the first equation:

$$25a + 5(4 - 4a) + 2 - a - 4 + 4a = 1$$
$$8a = -17, \quad a = -\frac{17}{8} = -2\frac{1}{8}$$
$$b = 4 + 4 \cdot \frac{17}{8} = 12\frac{1}{2}$$
$$c = 2 + 2\frac{1}{8} - 12\frac{1}{2} = -8 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = -8\frac{3}{8}$$
$$y = -2\frac{1}{8}x^2 + 12\frac{1}{2}x - 8\frac{3}{8}$$

2.

$$\begin{aligned}
 x &= ay^2 + by + c \\
 (1,2): \quad & 1 = 4a + 2b + c, \\
 (3,10): \quad & 3 = 100a + 10b + c, \\
 (5,1): \quad & 5 = a + b + c; \Rightarrow c = 5 - a - b, \\
 1 &= 4a + 2b + 5 - a - b, \quad -4 = 3a + b, \quad b = -3a - 4, \\
 3 &= 100a + 10(-3a - 4) + 5 - a + 3a + 4 \\
 72a &= 32, \quad a = \frac{4}{9}, \\
 b &= -3 \cdot \frac{4}{9} - 4 = -\frac{31}{3} = -7\frac{4}{3} \\
 c &= 5 - \frac{4}{9} + 7\frac{4}{3} = 12, \\
 x &= \frac{4}{9}y^2 - 7\frac{4}{3}y + 12,
 \end{aligned}$$

2 Задание

Известно, что свежий огурец на 99% состоит из воды. Месяц назад взвесили мешок со свежими огурцами. Получилось, что огурцов ровно 100 кг. Мешок убрали, а через месяц снова взвесили. Огурцы за это время усохли, и теперь вода составляет уже только 98% их веса. Сколько теперь (в кг) весят огурцы?

Решение.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & x - \text{«неводная» часть огурца;} \\
 & x + 99 = 100 \Rightarrow x = 1 \text{ кг} \\
 2) \quad & y - \text{масса огурцов через месяц} \\
 & y = 1 + 0,98y, \quad 0,02y = 1, \quad y = 50 \text{ кг}
 \end{aligned}$$

3 Задание

Определение логарифма. Решить уравнения:

$$\begin{aligned} 1. \quad 2^x &= 256, & \log_2 2^x &= \log_2 256, \\ x \cdot \log_2 2 &= \log_2 2^8 = 8 \cdot \log_2 2, \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 2^x &= 300, & x &= \log_2 300 = \log_2 (125 \cdot 2.4) = \\ & & &= \log_2 2^7 + \log_2 2.4 = 7 + \log_2 2.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \log_8 2^{8x-4} &= 4, & \log_{2^3} 2^{8x-4} &= 4, \\ \frac{1}{3} (8x-4) &= 4, & 8x-4 &= 12, & x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad 3^{\log_9 (5x-5)} &= 5, & 3^{\frac{1}{2} (\log_3 (5x-5))} &= 5, \\ (\sqrt{3})^{\log_3 (5x-5)} &= (\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 5}, \\ \log_3 (5x-5) &= \log_{\sqrt{3}} 5 = 2 \log_3 5 = \log_3 25, \\ 5x-5 &= 25, & x &= 6 \\ \text{ОДЗ: } 5x-5 &> 0, & \text{Ответ: } x &= 6. \end{aligned}$$

$$5. \quad x^{\log_3 x + 1} = 9,$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty),$$

$$x^{\log_3 x} = 9x^{-1}, \quad \log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 (9x^{-1}),$$

$$(\log_3 x)^2 = 2 - \log_3 x.$$

$$\text{Положим } V = \log_3 x, \text{ тогда:}$$

$$V^2 + V - 2 = 0,$$

$$V_1 = 1, \quad V_2 = -2.$$

$$1) \log_3 x = 1, \quad x = 0 \notin \text{ОДЗ},$$

$$2) \log_3 x = -2, \quad \underline{x = 1/9}.$$

4 Задание

Свойства логарифмов. Вычислить:

$$6. \quad \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2.$$

$$7. \quad \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2.$$

$$8. \quad \log_{25} 5 = \log_{5^2} 5 = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}.$$

$$9. \quad \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

$$10. \quad \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 (12/3) = 2.$$

$$11. \quad \log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 12 \cdot 3 = 2.$$

$$12. \quad e^{\ln 5} = 5.$$

$$13. \frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \log_{15} 225 = 2.$$

$$14. \log_4 32 + \log_{0,1} 10 = \log_{2^2} 2^5 + \log_{10^{-1}} 10 \\ = \frac{1}{2} \cdot 5 - 1 = 1,5$$

$$15. 9 \log_3 \sqrt{5} = 3^{2 \cdot \log_3 \sqrt{5}} = 3^{\log_3 5} = 5$$