ΤΡΙΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Πληροφορικής

Μάθημα:

«Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας»

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ ΙΩΑΝΝΑ ΜΕΞΑ

Π18101

Άσκηση 1:

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές α, β, γ, δ, θ με τα αντίστοιχα ψηφία του αριθμού μητρώου μου (Π18101), η μορφή της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + x^3 + 1$$

<u>Διαδικασία διερεύνησης της συνάρτησης:</u>

Αρχικά, υπολογίζω την πρώτη παράγωγο και βρίσκω τις ρίζες της.

$$f'(x) = 5x^4 - 32x^3 + 3x^2 = x^2(5x^2 - 32x + 3)$$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι $x = 0, x = \frac{16}{5} + \frac{\sqrt{241}}{5} = 6.3048$ $και$ $x = \frac{16}{5} - \frac{\sqrt{241}}{5} = 0.0952.$

Στην συνέχεια, βρίσκω την δεύτερη παράγωγο και υπολογίζω την τιμή της για κάθε ρίζα της πρώτης παραγώγου.

$$f''(x) = 20x^3 - 96x^2 + 6x$$

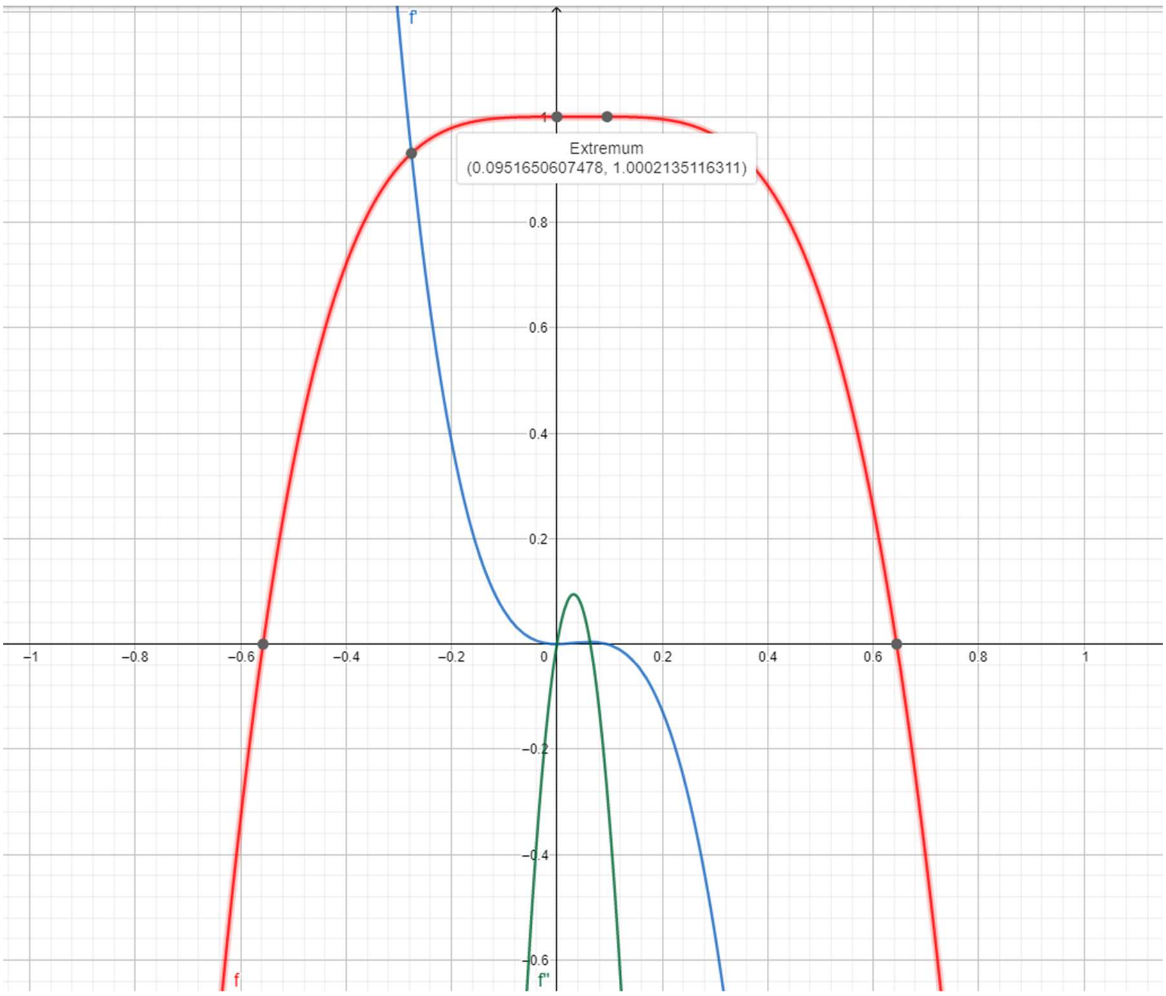
Για $x = 0.0952$: $f''(x) = -0.2811$ τοπικό μέγιστο στο σημείο 0.0952 με $f(0.0952) = 1.0002$

Για $x = 6.3048$: $f''(x) = 1234.2011$ τοπικό ελάχιστο στο σημείο 6.3048 με $f(6.3048) = -2426.9707$

Για $x = 0$: $f''(x) = 0$, άρα πρέπει να ελέγξω την τρίτη παράγωγο.

$$f'''(x) = 60x^2 - 192x + 6$$

Επειδή, $f'''(x) \neq 0$ για $x = 0$, το σημείο $(0, f(0) = 1)$ δεν αποτελεί μέγιστο αλλά σημείο καμπής.



Εικόνα 1: Οι γραφικές παραστάσεις των f, f', f'' και το τοπικό μέγιστο

Σημείωση: Έχει γίνει στρογγυλοποίηση μέχρι τέσσερα ψηφία μετά την υποδιαστολή.

Α) <u>Μέθοδος Δυαδικής Αναζήτησης – Διχοτόμησης (Bisection Search):</u>

Η μέθοδος είναι υλοποιημένη στο αρχείο *«exercise1.m»* του Matlab. Χρησιμοποιήθηκαν 22 επαναλήψεις για να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης, δηλαδή το σημείο $(0.0952, 1.0002)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω screenshot:

Workspace

Name ▲	Value
e	1.0000e-06
f	1.0002
f1	3.8178e-07
i	22
lb	0.0952
ub	0.0952
x	0.0952

Εικόνα 2: Αποτελέσματα Matlab

Β) <u>Μέθοδος Newton-Raphson:</u>

Η μέθοδος είναι υλοποιημένη στο αρχείο *«exercise1.m»* του Matlab. Χρησιμοποιήθηκαν 10 επαναλήψεις για να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης, δηλαδή το σημείο $(0.0952, 1.0002)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω screenshot:

Workspace

Name ▲	Value
e	1.0000e-06
f	1.0002
f1	-4.3132e-09
f2	-0.2812
i	10
newx	0.0952
x	0.0952

Εικόνα 3: Αποτελέσματα Matlab

Γ) <u>Μέθοδος Generalized Reduced Gradient (GRG):</u>

Έχω χρησιμοποιήσει τον solver του Excel που είναι ενσωματωμένη η μέθοδος GRG και το αρχείο είναι το «GRG.xlsx». Ως σημείο εκκίνησης έδωσα το (1,-5). Παρατίθενται σχετικά screenshots:

x		max f(x)
1,0000000		-5

Εικόνα 4: Σημείο εκκίνησης

x		max f(x)
0,0951638		1,000213512

Εικόνα 5: Αποτελέσματα solver

Άσκηση 2:

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές α, β, γ με τα αντίστοιχα ψηφία του αριθμού μητρώου μου (Π18101 και αντί για β = 0, βάζω β = 1), η μορφή της συνάρτησης είναι:

$$f(x,y) = x - y - x^2 + xy - y^2$$

<u>Αναγκαίες συνθήκες (1^{ης} τάξης):</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x + y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + x - 2y = 0$$

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει το προς εξέταση σημείο $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

<u>Ικανές συνθήκες (2^{ης} τάξης):</u>

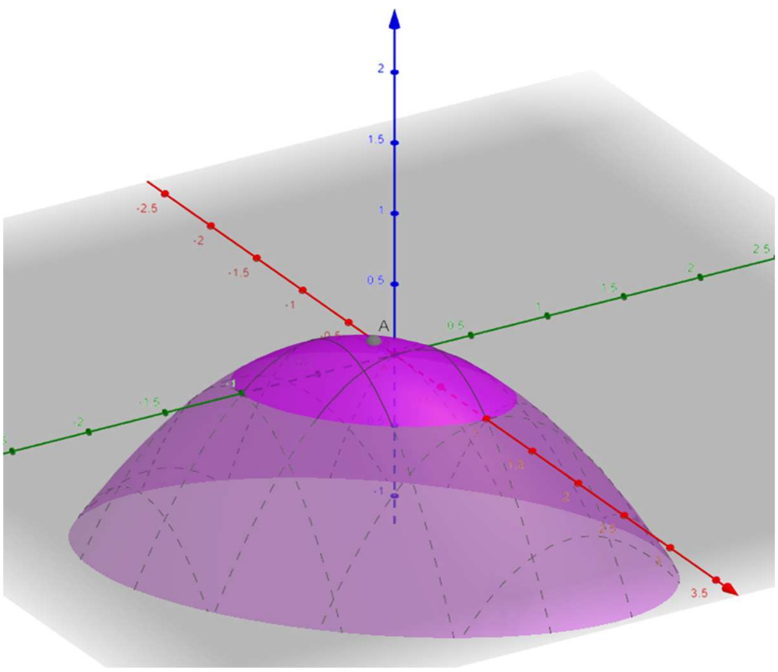
Το πρόσημο των ηγετικών κυρίως ελασσόνων οριζουσών εναλλάσσεται, άρα ο Εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος.

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad D_1 = -2 < 0 \quad D_2 = 3 > 0$$

Επομένως, ισχύει η σχέση $(-1)^k D_k > 0, \forall\, k = 1, \ldots, n$.

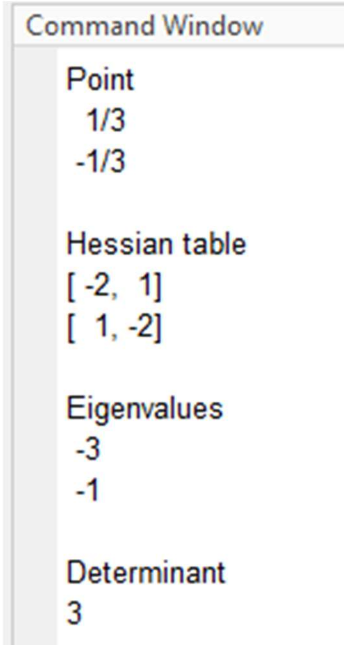
Βέβαια, μπορούμε να καταλάβουμε και από τις ιδιοτιμές ότι ο Εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, καθώς το πρόσημό τους είναι αρνητικό (-3, -1).

Επειδή, $D_1 < 0$ και $D_2 > 0$ το σημείο $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο. Επιπλέον, ο Εσσιανός πίνακας δίνει μια γενική εικόνα για την κυρτότητα της συνάρτησης, διότι δεν αναφέρεται μόνο στο σημείο προς εξέταση (αφού δεν περιέχει μέσα του τις μεταβλητές x, y). Άρα, η συνάρτηση είναι αυστηρώς κοίλη και άρα το σημείο $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ είναι ολικό μέγιστο.



Εικόνα 6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης και απεικόνιση του σημείου $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Στο αρχείο «exercise2.m» του Matlab είναι υλοποιημένη η παραπάνω διαδικασία για την εύρεση των απαραίτητων δεδομένων, τα οποία φαίνονται στο παρακάτω screenshot:



Εικόνα 7: Αποτελέσματα Matlab

Άσκηση 3:

Αντικαθιστώντας τον συντελεστή α με 11 (Π18101), η μορφή της συνάρτησης και του περιορισμού είναι:

$$Min\, f(x,y) = x^2 + 11y^2 \qquad\qquad g(x,y) = 11x + 11y - 11 = 0$$

Υπολογίζω την συνάρτηση Lagrange και τις μερικές παραγώγους.

$$L = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + 11y^2 + \lambda(11x + 11y - 11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + 11\lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 22y + 11\lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 11x + 11y - 11 = 0$$

Λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x = -11\lambda \\ 22y = -11\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{11}{2}\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τα x και y στη μερική παράγωγο που αντιστοιχεί στον περιορισμό:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

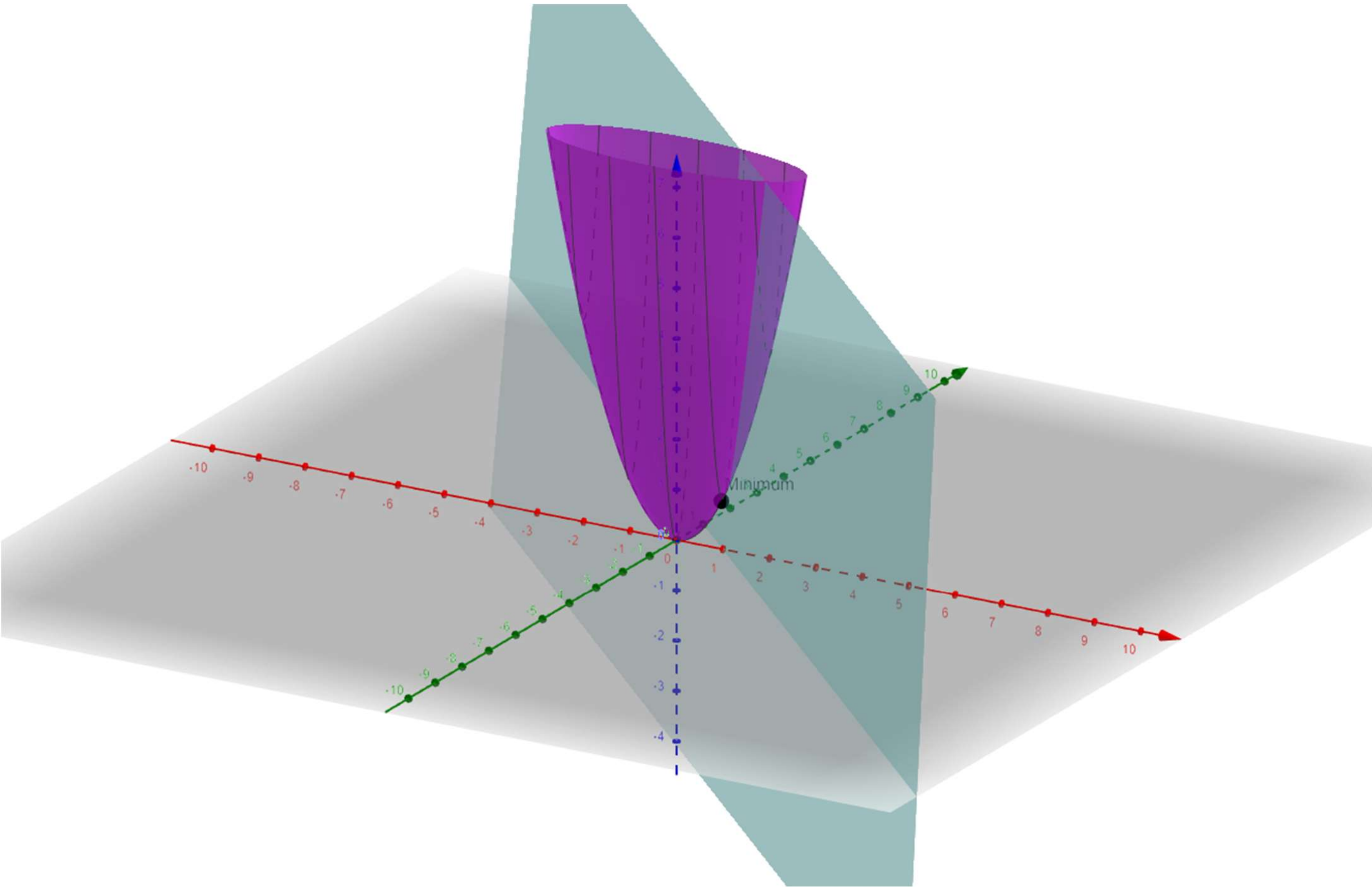
Άρα, $x = \frac{11}{12}$ και $y = \frac{1}{12}$.

Επόμενο, είναι να δημιουργήσουμε τον περιφραγμένο Εσσιανό πίνακα και να βρούμε την ηγετική κύρια ελάσσων ορίζουσα.

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 11 & 2 & 0 \\ 11 & 0 & 22 \end{bmatrix} \quad \det(H^B) = -2904$$

Το πρόβλημα αποτελείται από n = 2 μεταβλητές και m = 1 περιορισμό, άρα θα πρέπει να εξετάσουμε την τελευταία (n – m = 2 – 1 = 1) ηγετική κύρια ελάσσων ορίζουσα του περιφραγμένου Εσσιανού πίνακα, η οποία φαίνεται παραπάνω.

Η ορίζουσα είναι αρνητική και έχει το ίδιο πρόσημο με τη σχέση $(-1)^m = (-1)^1$, συνεπώς συμπεραίνουμε ότι το σημείο $\left(\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Επιπλέον, ο περιφραγμένος Εσσιανός πίνακας δίνει μια γενική εικόνα για την κυρτότητα της συνάρτησης, διότι δεν αναφέρεται μόνο στο σημείο προς εξέταση (αφού δεν περιέχει μέσα του τις μεταβλητές x, y). Άρα, η συνάρτηση είναι αυστηρώς κοίλη και άρα το σημείο $\left(\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο.



Εικόνα 8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης και απεικόνιση του σημείου $f\left(\frac{11}{12}, \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12}$.