Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №1 по курсу «Моделирование»

Сравнение модели Галилея и модели Ньютона для решения баллистической задачи.

Студент группы ИУ9-81
______________ А. В. Разборщикова
«___» _________ 2018 г.
Преподаватель
______________ А. Б. Домрачева
«___» _________ 2018 г.

Москва
2018

Оглавление

Постановка задачи

Дано: свинцовый шар диаметром 10см брошен с поверхности Земли с заданной начальной v_0 скоростью под углом α. Найти: расстояние, на котором упадет снаряд от точки запуска (решение баллистической задачи). В ходе лабораторной работы требуется сравнить модель Галилея и модель Ньютона для решения поставленной задачи. Известные параметры:

– диаметр снаряда $d = 0{,}1$ м,
– плотность свинца $\rho_с = 11340$ кг/м^3,
– плотность воздуха $\rho_в = 1.29$ кг/м^3,
– ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2,
– баллистическая постоянная $C \approx 0{,}15$,
– начальная скорость v_0,
– угол α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

1 Необходимые теоретические сведения

1.1 Модель Галилея

Модель Галилея подразумевает, что на падающее тело не действуют никакие силы, кроме силы тяжести, поверхность Земли представляет собой плоскость, а ускорение свободного падения постоянно. Схематически модель Галилея представлена на рисунке 1.

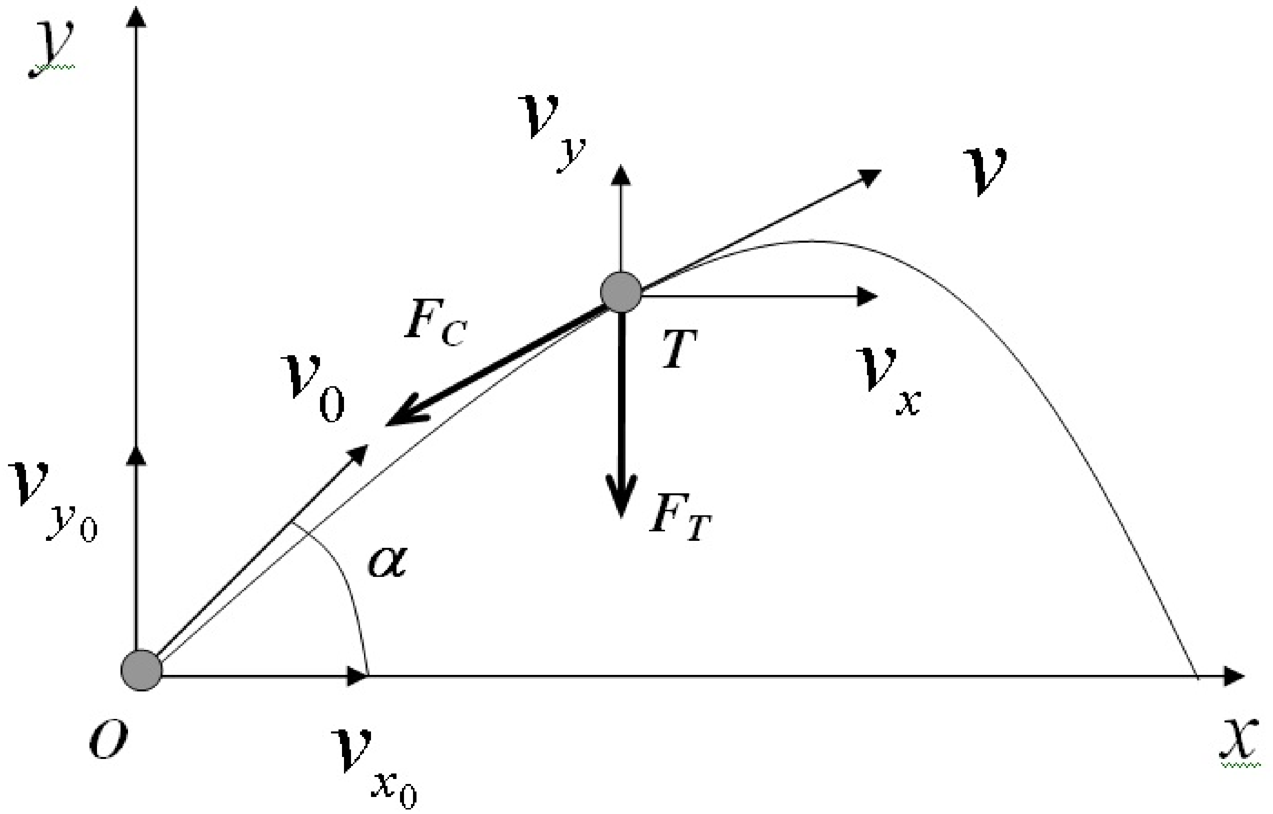

Рисунок 1 — Модель Галилея
(изображение с сайта rudn.ru).

Модель Ньютона описывается системой уравнений, где координаты x, y есть функции от t, где t — время. В каждый момент скорости ее горизонтальная составляющая равна $v_x = v_0 \cos\alpha$, а вертикальная равна $v_y = v_0 \sin\alpha$.

В каждый момент времени координаты x, y выражаются как

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где $g = 9.8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Если выразить из первого уравнения системы t через x и подставив во второе уравнение, получим модель Галилея в следующем виде:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha.$$

Данное уравнение задает *обратную задачу*, так как необходимо найти ненулевое расстояние по горизонтали x, при котором $y = 0$ (условие приземления тела).

1.2 Модель Ньютона

В модели Ньютона, в отличие от модели Галилея, учитывается сила сопротивления воздуха F, направленная противоположно вектору скорости v и по модулю пропорциональная квадрату скорости v^2. Схема модели Ньютона приведена на рисунке 2.

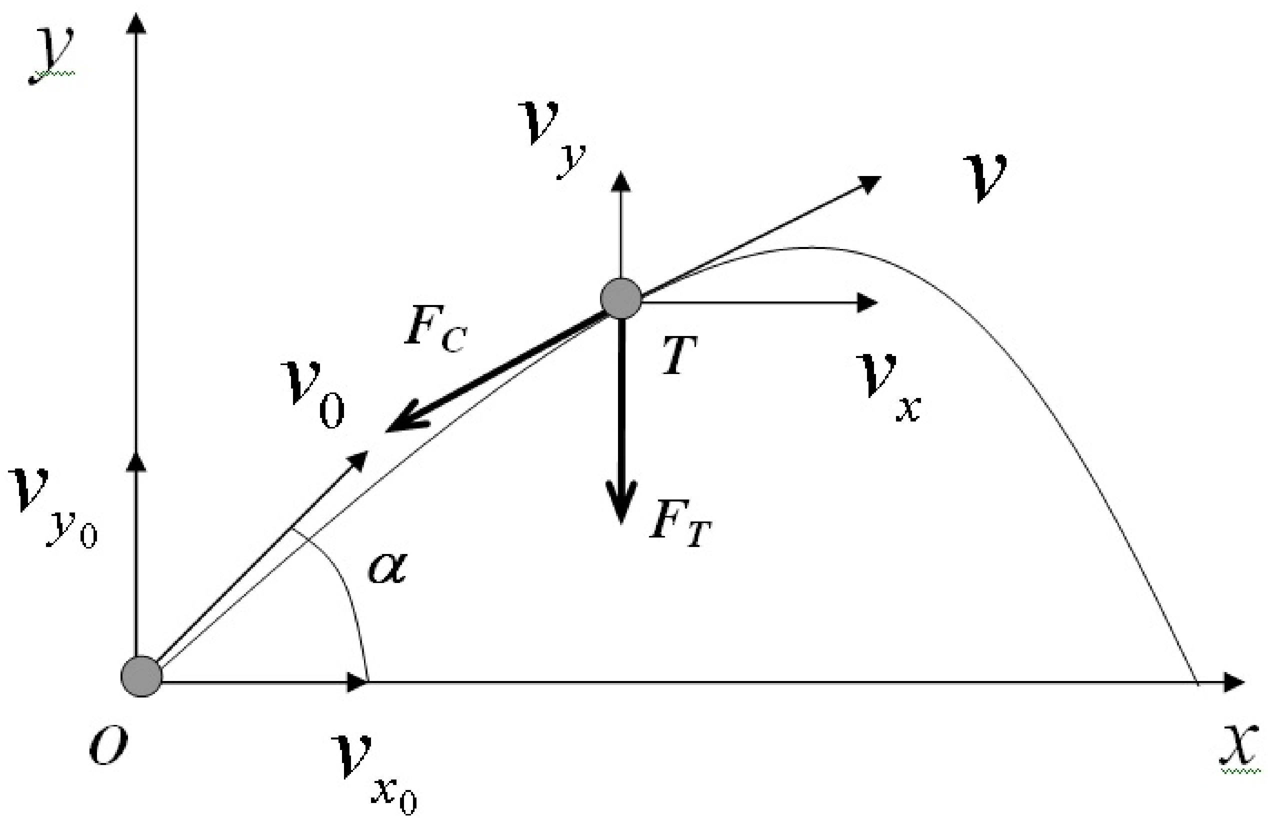

Рисунок 2 — Модель Ньютона
(изображение с сайта orenstudent.ru).

Сила сопротивления воздуха вычисляется по формуле $F_{\text{с}} = -\beta v^2$, $\beta = \frac{C\rho_{\text{в}} S}{2}$, где C — баллистическая постоянная, $C \approx 0{,}15$, S — площадь поперечного сечения снаряда, $\rho_{\text{в}}$ — плотность воздуха, $\rho_{\text{в}} = 1{,}29$ кг/м^3. Обозначив координаты вектора скорости v как $v_x = u$, $v_y = w$, запишем суммарное действие $F = (F_x, F_y)$ сил $F_{\text{с}}$ и $F_{\text{т}}$, действующие на снаряд в каждый момент времени ($F_{\text{т}}$ — сила тяжести, $F_{\text{т}} = mg$):

$$\begin{cases} F_x = -\beta u\sqrt{u^2 + w^2}, \\ F_y = -\beta w\sqrt{u^2 + w^2} - mg, \end{cases}$$

Откуда можно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих движение тела:

$$\begin{cases} m\dfrac{du}{dt} &=& -\beta u\sqrt{u^2 + w^2}, \\ m\dfrac{dw}{dt} &=& -\beta w\sqrt{u^2 + w^2} - mg, \\ \dfrac{dx}{dt} &=& u, \\ \dfrac{dy}{dt} &=& w. \end{cases} \tag{1}$$

Получаем задачу Коши с начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0) &=& v_0 \cos\alpha, \\ w(0) &=& v_0 \sin\alpha, \\ x(0) &=& 0, \\ y(0) &=& 0. \end{cases}$$

Полученная модель, описывающая движение тела, брошенного под углом к горизонту с учетом силы сопротивления воздухе, является моделью Ньютона. Можно показать, что при $\beta = 0$ модель Ньютона совпадает с моделью Галилея.

Система 1 не решается аналитически и требует численных методов решения систем дифференциальных уравнений, таких как метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

2 Текст программы

Для сравнения моделей Галилея и Ньютона была написана программа, рисующая графики движения тела, брошенного под углом к горизонту и вычисляющая координаты точек падения для каждого метода. Программа реализована на языке Python, решение системы 1 выполняется функцией `solve_ivp` модуля `scipy.integrate`. Массивы решений для x и y `coords` отрисовываются на экране с помощью функции `plot` модуля `matplotlib.pyplot`. Для каждого момента времени t из массива `t_arr`, вычисляем соотвутствующие координаты x и y, используя модель Галилея, полученные массивы точек `gal_xval` и `gal_yval` так же отрисовываются на том же графике.

Листинг 1 — Вычисление параметров системы 1.

```
rho_lead = 11340  # kg/m^3
rho_air = 1.29    # kg/m^3
d = 0.1  # m
alpha = pi / 4  # angle, radians
v0 = 200          # start velocity
t_0   = 0        # time limits, sec
t_max = 100
eps = 1.e-2

r = d/2
V = (4/3) * pi*(r**3)  # volume
m = rho_lead * V
C = 0.15  # ballistic constant
# C = 0
S = pi * (r**2)
beta = C * rho_air * S / 2
g = 9.8  # m/sec^2
```

Листинг 2 — Решение системы дифференциальных уравнений, описывающих движение тела в модели Ньютона.

```python
## Функция, реализующая правые части системы
def f(t, system):
    (u, w, x, y) = system
    root = math.sqrt(u**2 + w**2)
    factor = -beta*root/m
    return np.ndarray((4,), buffer=np.array([u*factor, w*factor-g, u, w]))

## Начальные условия
u0 = v0*math.cos(alpha)
w0 = v0*math.sin(alpha)
x0 = 0
y0 = 0

## Функция, отбрасывающая точки правее точки приземления
def trim(arr):
    M = np.where(arr[1] >= 0)[-1][-1]
    return arr[:M, :M]

t_arr = coords['t']  # Массив точек t
system0 = np.ndarray((4,), buffer=np.array([u0, w0, x0, y0]))
coords = solve_ivp(f, (t_0, t_max), system0, max_step=eps)
```

Листинг 3 — Вычисление координат снаряда в каждый момент времени в модели Галилея.

```python
def Galilei_x(t):
    return v0*math.cos(alpha)*t

def Galilei_y(t):
    return v0*math.sin(alpha)*t-g*(t**2)/2

gal_xvals = [Galilei_x(t) for t in t_arr] # t_arr — массив точек t
gal_yvals = [Galilei_y(t) for t in t_arr]
```

3 Тесты

3.1 Начальная скорость 200 м/с

Возьмем $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $v_0 = 200$м/с. Сопротивление воздуха в модели Ньютона учитывается. Максимальный шаг $\Delta t = 1.e - 2$.

Результат работы программы представлен на рисунке 3.
Координаты точки падения тела в модели Ньютона: $(x_N, y_N) = (2952.89, 2.06)$.
Координаты точки падения тела в модели Галилея: $(x_G, y_G) = (4079.70, 1.93)$.

Отличие результатов дальности полета в модели Галилея и в модели Ньютона составляет $|1 - \frac{x_G}{x_N}| \times 100\% = 38\%$.

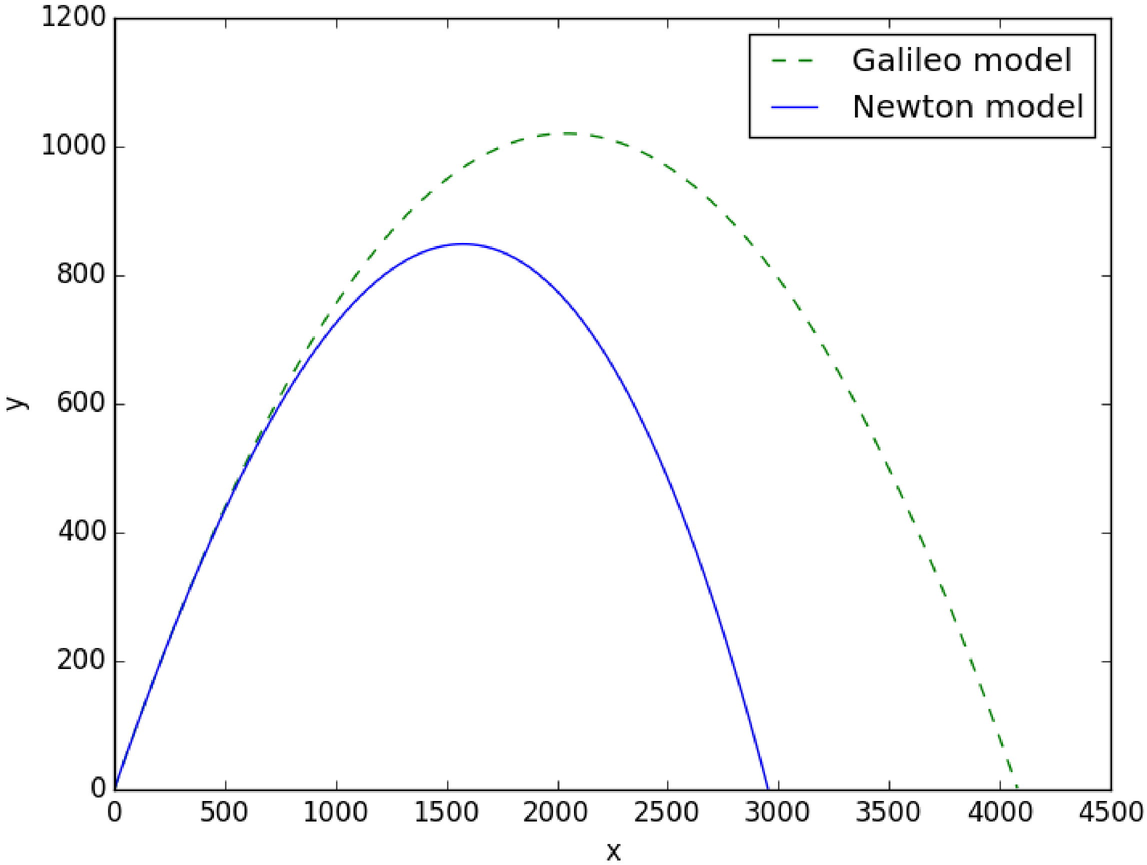

Рисунок 3 — Моделирование полета тела, брошенного под углом к горизонту, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $v_0 = 200$ м/с, сопротивление воздуха учитывается.

Результат работы программы в случае, когда коэффициент β равен нулю (сопротивление воздуха не учитывается) представлен на рисунке 4.

Координаты точки падения тела в модели Ньютона: $(x_N, y_N) = (4079.70, 1.93)$.
Координаты точки падения тела в модели Галилея: $(x_G, y_G) = (4079.70, 1.93)$.

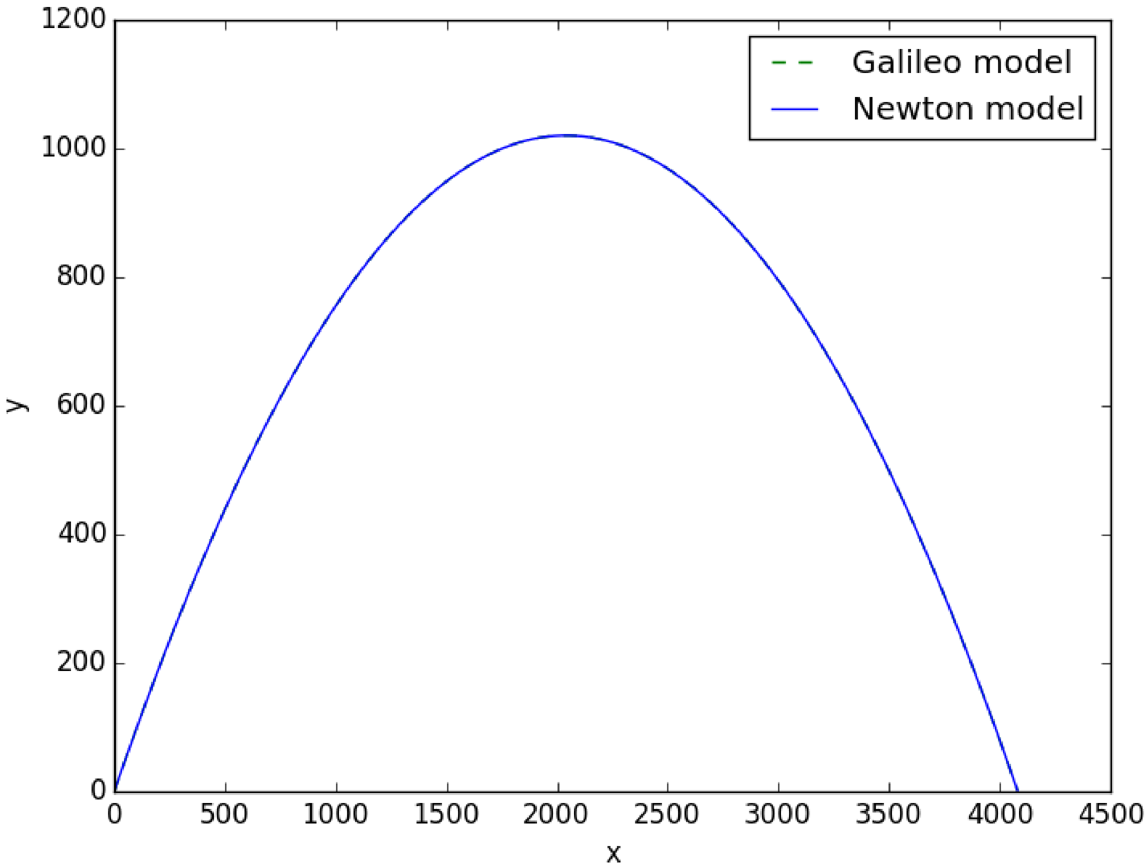

Рисунок 4 — Моделирование полета тела, брошенного под углом к горизонту, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 200$ м/с, сопротивление воздуха не учитывается.

Как видно из результатов тестов, расстояние, которое пролетает тело в модели Галилея и в модели Ньютона совпадают в условиях отсутствия сопротивления воздуха.

3.2 Начальная скорость 50 м/с

Возьмем $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 200$м/с. Сопротивление воздуха в модели Ньютона учитывается. Максимальный шаг $\Delta t = 1.e - 2$.

Результат работы программы представлен на рисунке 5.
Координаты точки падения тела в модели Ньютона: $(x_N, y_N) = (248.31, 0.47)$.
Координаты точки падения тела в модели Галилея: $(x_G, y_G) = (254.67, 0.43)$.

Отличие результатов дальности полета в модели Галилея и в модели Ньютона составляет $|1 - \frac{x_G}{x_N}| \times 100\% = 2{,}4\%$

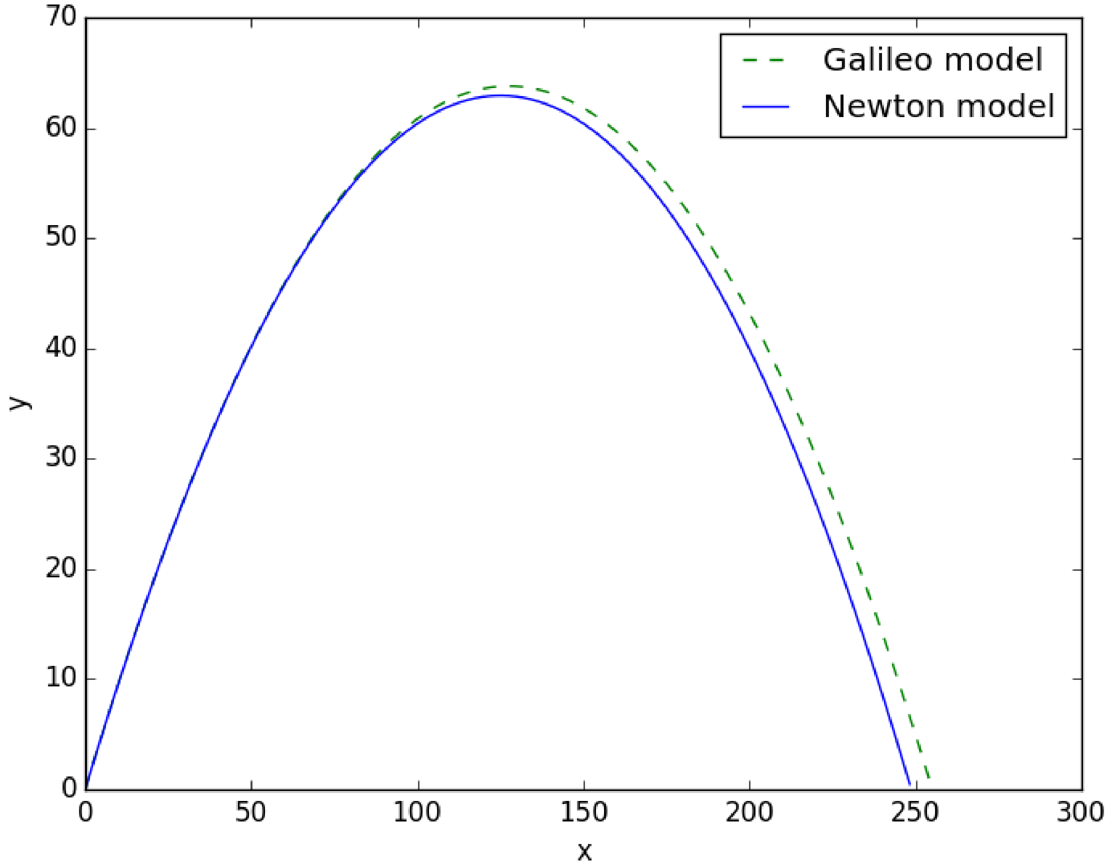

Рисунок 5 — Моделирование полета тела, брошенного под углом к горизонту, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $v_0 = 50$ м/с, сопротивление воздуха учитывается.

3.3 Начальная скорость 5 м/с

Возьмем $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $v_0 = 200$м/с. Сопротивление воздуха в модели Ньютона учитывается. Максимальный шаг $\Delta t = 1.e - 3$.

Результат работы программы представлен на рисунке 6.

Координаты точки падения тела в модели Ньютона: $(x_N, y_N) = (2.546, 0.004)$.

Координаты точки падения тела в модели Галилея: $(x_G, y_G) = (2.547, 0.004)$.

Отличие результатов дальности полета в модели Галилея и в модели Ньютона составляет $|1 - \frac{x_G}{x_N}| \times 100\% = 0{,}04\%$

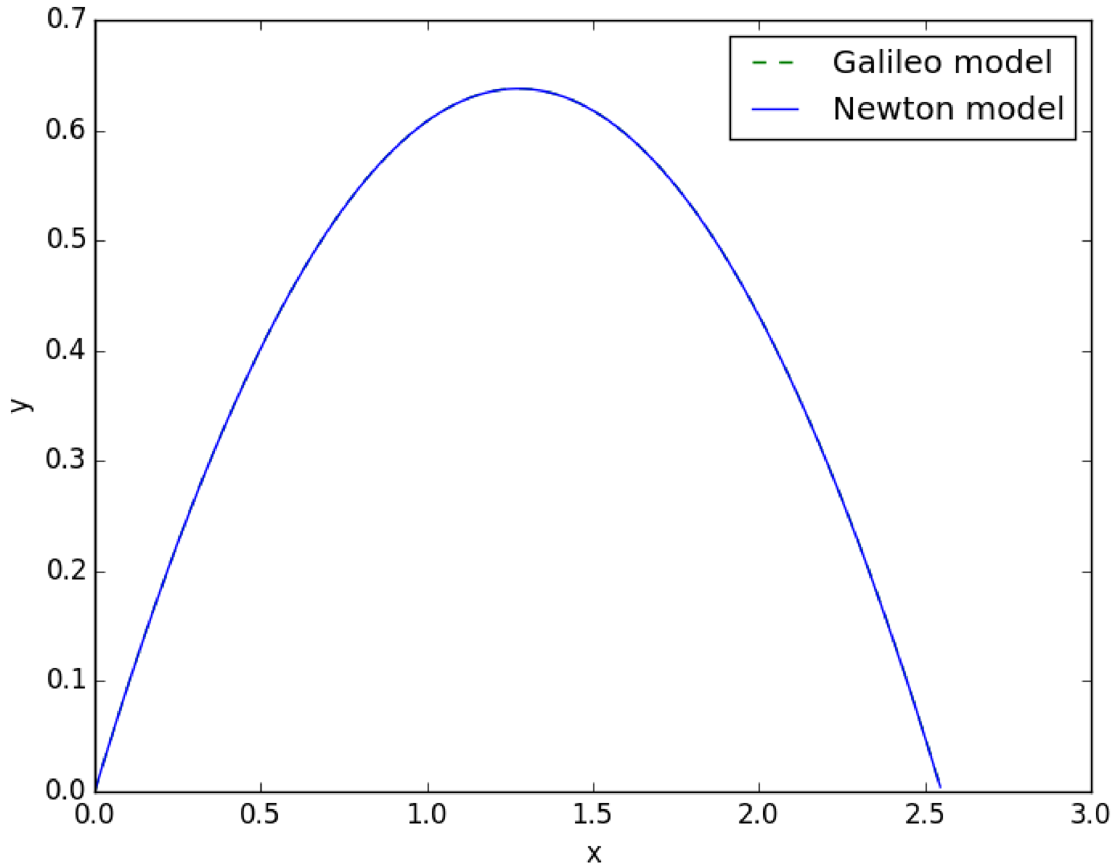

Рисунок 6 — Моделирование полета тела, брошенного под углом к горизонту, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $v_0 = 5$ м/с, сопротивление воздуха учитывается.

Заключение

По результатам проведенных тестов можно сделать вывод, что дальность падения снаряда, брошенного под углом к горизонту, для моделей Галилея и Ньютона отличается тем больше, чем больше начальная скорость (для дальности полета в несколько километров разница составила больше 1 км, для дальности полета в двести метров — разница в несколько метров, при дальности полета в несколько метров отличия практически не заметны).

Таким образом, модель Галилея применима для бросания снаряда на небольшие расстояния. При увеличении дальности полета влияние силы сопротивления воздуха становится достаточно значительным, и им уже нельзя принебречь.

При еще больших расстояниях становится необходимо учитывать и кривизну поверхности Земли, и изменение ускорения свободного падения g, и момент вращения снаряда, поэтому модель Ньютона также становится неприменимой.