

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
Высшего профессионального образования

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

## Расчетно-пояснительная записка к курсовому проекту по курсу «Численные методы»

**Разработка электронного методического пособия для решения  
обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Студент группы ИУ9-72

\_\_\_\_\_ Разборщикова Анастасия Викторовна

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Преподаватель

\_\_\_\_\_ Домрачева Анна Борисовна

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Москва

2018

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Необходимые теоретические сведения</b>	<b>4</b>
<b>2 Обзор аналогов</b>	<b>5</b>
2.1 Coursera . . . . .	5
2.2 Udemу . . . . .	5
2.3 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ» . . . . .	7
2.4 Stepik . . . . .	7
2.5 Сравнение платформ . . . . .	8
2.6 Мобильные приложения для решения дифференциальных уравнений . . . . .	10
<b>3 Реализация приложения</b>	<b>12</b>
3.1 Базовая концепция . . . . .	12
3.2 Алгоритмы . . . . .	12
3.3 Фреймворки и структуры данных . . . . .	13
<b>4 Тестирование</b>	<b>13</b>
4.1 Интерфейс . . . . .	13
4.2 Валидация . . . . .	13
4.3 Обработка ошибок . . . . .	13
<b>Заключение</b>	<b>14</b>
<b>Список литературы</b>	<b>15</b>

# Введение

На сегодняшний день видна тенденция по автоматизации многих процессов, в том числе образовательных. Появляются новые методы и технологии обучения: удаленный доступ к лекционным материалам, автоматические системы тестирования и т.д. В связи с этим разрабатываются различные образовательные платформы, которые имеют свои плюсы и минусы. В интернете можно найти много приложений и онлайн-тренажеров для обучения, например, иностранным языкам, программированию, вождению.

Однако фундаментальные дисциплины, как правило, все еще преподаются классическим методом: преподаватель читает лекционный материал, на семинарских занятиях разбираются некоторые задачи, часть задач остается студенту для самостоятельного разбора. При этом часто студент не имеет возможности проверить самостоятельно правильность своего решения до момента проверки преподавателем. В частности, такая проблема возникает при решении дифференциальных уравнений.

В связи с этим необходимо произвести анализ существующих на данный момент систем тестирования, выявить существующие недостатки и создать приложение, восполняющие их. Например, предоставить возможность отработать решение определенного типа уравнений при помощи автоматической проверки ответа без использования тяжеловесных и дорогостоящих систем символьных вычислений или интернета.

В данной работе поставлена задача реализовать инструмент для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) численными методами.

# 1 Необходимые теоретические сведения

Здесь и далее в определениях и формулах  $t$  (либо  $x$ ) — независимая переменная,  $y = y(t)$  — зависимая переменная (искомая функция).

**Определение 1.** *Вычислительные методы (численные методы) — методы, используемые в вычислительной математике для преобразования вычислительных задач к виду, удобному для реализации на ЭВМ. [1, с. 55]*

**Определение 2.** *Вычислительная задача — одна из трех задач, возникающих при рассмотрении математических моделей: прямая задача, обратная задача или задача идентификации (см. [1, с. 43]).*

**Определение 3.** *Решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка  $y' = f(t, y(t))$  называется дифференцируемая функция  $y(t)$ , которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График решения дифференциального уравнения называют интегральной кривой. Совокупность решений ДУ составляет поле направлений. Для выделения частного решения среди всего множества решений ДУ задают начальные условия  $y(t_0) = y_0$ . [1, сс. 411-412])*

**Определение 4.** *Задача Коши (задача с начальными условиями) — задача нахождения при  $t > t_0$  решения дифференциального уравнения  $y' = f(t, y(t))$  при начальных условиях  $y(t_0) = y_0$ . [1, с. 412])*

Из теоремы существования и единственности (см. [2, с. 29]) следует, что для существования решения задачи Коши, на отрезке достаточно непрерывности функции  $f(t, y(t))$ . Так как аналитически можно решить лишь некоторый класс известных типов дифференциальных уравнений (в то время как на самом деле решение имеет намного более широкий класс), вычислительные методы являются более универсальными, так как имеют, как правило, меньше ограничений по сравнению с аналитическими и часто позволяют найти приближенное решение там, где это невозможно сделать символьно.

## 2 Обзор аналогов

Рассмотрим несколько популярных обучающих платформ: Coursera, Udemy, Stepik, Intuit, MathSemester - выделим их общие элементы, плюсы и минусы. Так же проведем краткий обзор некоторых аналогов, доступных для платформы Android на момент написания данной работы.

### 2.1 Coursera

Платформа была основана в 2012 году Стэнфордскими профессорами в области компьютерных наук, которые хотели сделать свои знания доступными онлайн. Сейчас на сайте 35 млн студентов и более 2,700 курсов. Есть возможность получить степень магистра. Платформа содержит курсы от ведущих университетов и организаций. По завершении курса слушатель может получить сертификат. [3]

На сайте есть бесплатный курс обыкновенных дифференциальных уравнений от Корейского университета передовых технологий (Korea Advanced Institute of Science and Technology). В программу курса включены видео с объяснениями преподавателя и практические упражнения (тесты). На момент написания работы этот курс – единственный курс Coursera, посвященный дифференциальным уравнениям (поиск велся как на русском, так и на английском языках).

На рисунках 1 и 2 приведены скриншоты с примерами подачи теоретического материала и тестирования.

### 2.2 Udemy

Данная платформа, в отличие от Coursera, не является академической, то есть курсы, представленные на ней, не аккредитованы высшими университетами, институтами или колледжами. В основном курсы рассчитаны на работающих взрослых, которые хотят улучшить свои профессиональные навыки, а так же компании, желающие расширить компетенции своих сотрудников. Многие курсы являются платными и приносят доход своим авторам. Платформа позволяет добавлять в курс видео, PowerPoint-презентации, PDF-файлы, аудио,

**Example 2**  
Modeling of vibrating strings, under some ideal conditions, leads to a PDE, called the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

where  $t$  is the time,  $x$  the location along the string,  $c$  the wave speed, and  $u = u(x, t)$  the displacement of the string.

1-2 Order and Normal Form

Возник вопрос? Обсудите эту лекцию на форумах недели.

Интерактивный текст видеоматериала

Английский

Помощь в переводе

0:04 The order of a differential equation, which is either an ordinary differential equation or a partial differential equation.

0:16 The order of a differential equation is the order of the highest derivative appearing in the equation.

0:25 For example, okay, differential equation three, which is an ordinary differential equation,  $e$  to the  $x$  times  $y'' - 3$  times  $y'$  square  $+ 2xy = x$  times  $e$  to the  $x$ . This is a second order ordinary differential equation, because the highest derivative involved for the unknown  $y$  is 2, right? On the other hand, the partial differential equation, the so-called wave equation, equation number two right here, this is second order partial differential equation, right? Because the highest order derivative involved is second derivative of  $u$ , and either the  $t$  variable or the  $x$  variable, okay?

Загрузки

Видеолекция mp4

Субтитры (Английский) WebVTT

Текст видео (Английский) txt

Хотите оказать нам Помощь в переводе текста видео и субтитров на другие языки?

Рисунок 1 — Формат изложения теоретического материала на платформе Coursera.

1 point

2. Which of the following is correctly matched?

☐  $x^2 y''' - e^x y'' + \sin x (y')^2 = 0$  : linear, third order

☐  $(\cos xy) y'' + (y')^2 - xy = 0$  : linear, second order

☐  $(y'' - xy')^2 + 3y = 0$  : nonlinear, fourth order

☐  $(y')^3 - e^{-x} y = 0$  : nonlinear, third order

☐  $e^x y''' - (\sin x) y' - 2y = 0$  : linear, third order

---

1 point

3. Find the constant  $a$  so that  $\phi(x) = xe^{2x}$  is a solution to  $y' + ay - e^{2x} = 0$ .

☐ 4

☐ 3

☐ 1

☐ -1

☐ -2

---

1 point

4. Find the constant  $a$  so that  $e^{xy} + y = x - 1$  is an implicit solution to

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} + ay}{e^{-xy} + x}.$$

☐ -5/2

☐ -2

☐ -1

Рисунок 2 — Пример тестирования по курсу дифференциальных уравнений на платформе Coursera.

файловые архивы, чаты. По заявлению создателей, Udemu является лидирующей площадкой для обучения и объединения студентов. На данный момент она предоставляет около 100 тыс. курсов от 42 тыс. инструкторов для 30 млн. обучающихся. По завершению курса слушателям предоставляются сертификаты. [4]

На момент написания работы на платформе представлено 7 курсов по запросу «differential equations» стоимостью от 19,99\$ до 89,99\$. Ни одного курса на русском языке найдено не было. Курсы предлагают видео-лекции и печатные материалы для скачивания.

## **2.3 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»**

ООО «Интуит.ру» – некоммерческая организация, в 2016 году получившая лицензию Департамента образования города Москвы на предоставление дополнительного профессионального образования. Курсы на этой платформе создаются как организациями (академиями, университетами, коммерческими фирмами), так и частными авторами. По окончании курса слушатель может получить бесплатный электронный сертификат, также есть возможность получить платно сертификат о повышении квалификации. Есть возможность получить высшее образование дистанционно. [5]

Помимо онлайн-курсов организация выпускает учебную литературу (книги, DVD), действуя, как издательство. Также существует приложение, предоставляющее доступ к возможностям платформы с мобильных устройств.

На момент написания работы платформа содержит три бесплатных курса на русском языке, посвященных дифференциальным уравнениям. Все они имеют одинаковое содержание: предоставляют записи лекций, размещенные на видеохостинге YouTube, и тесты в формате, представленном на рис. 3.

## **2.4 Stepik**

«Первые учебные материалы были размещены на платформе в 2013 году. Сегодня среди охваченных курсами тем: программирование, информатика, математика, статистика и анализ данных, биология и биоинформатика, инженерно-технические и естественные науки. Онлайн-курсы, размещенные

**Задание:**

Задано дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y'' + (ax^2 + bx + c)y' + (fx + g)y = 0, \text{ где}$$

a	288
b	168
c	13
f	24
g	7

Найти решение с помощью подстановки:  $y = z(x)e^{-0,5 \int (ax^2 + bx + c) dx}$ . Показать, что решение имеет вид:  
 $y = (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))e^{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x}$ . В ответе укажите значение  $\alpha$ .

(Ответ необходимо ввести в поле ввода.)

Ответить

Прокомментировать

Прервать

Рисунок 3 — Пример теста для курса «Дифференциальные уравнения» на сайте «Интуит.ру».

на Stepik, неоднократно становились призерами конкурсов онлайн-курсов, а система автоматизированной проверки задач используется в ряде курсов на платформах Coursera и edX. Также Stepik активно развивает направление адаптивного обучения, где каждый сможет изучать материал, подобранный индивидуально под свой уровень знаний.» (Цитата с сайта Stepic.org [6])

На момент написания работы платформа не содержит курсов по запросу «дифференциальные уравнения» или «differential equations».

Для остальных курсов платформа предлагает учебный материал в виде слайдов, записей лекций. Контрольные задания выполняются в виде автоматизированных тестов и ответов в свободной форме, проверяемых преподавателем. Платформа имеет мобильное приложение с тем же функционалом.

## 2.5 Сравнение платформ

В завершение обзора проведем сравнение обозреваемых платформ в таблице 1. Стоит отметить, что, во-первых, все из перечисленных платформ предоставляют преимущественно теоретический материал. Наибольшую практическую направленность (больше типов заданий для проверки, вплоть до автоис-



полнения программного кода) имеет Stepik, в то время как Udemу вообще не имеет механизмов проверки знаний. Coursera и Intuit являются более академическими ресурсами, позволяющими получить не только сертификат об окончании курса, но и ученую степень (Coursera) или сертификат по повышении квалификации (Intuit).

Таблица 1 — Сравнение образовательных платформ.

Платформа	Кто может создавать курсы	Есть ли материалы по теме ДУ	Теоретический материал	Практические упражнения и тесты
Coursera	Университеты и организации	Есть, на английском	Видео, слайды	Автоматизированные и проверяемые учителем
Udemу	Любой желающий	—	Видео, аудио, PPT-презентации, PDF-файлы, ZIP-архивы	—
Intuit	Любой желающий (аккредитация Департамента образования)	3 бесплатных курса на русском языке	Видео на видеохостинге YouTube, текст	Тесты и вопросы с ответом в свободной форме
Stepik	Любой желающий	—	Видео, текстовые материалы	Тесты, задачи, проверяемые учителем, Автотестирование кода

Все из перечисленных систем имеют мобильные приложения, предоставляющие доступ к функционалу платформ с мобильных устройств.

Тестирующие модули рассмотренных обучающих систем разработаны только для контроля усвоения знаний и выставления прогресса обучающегося. Ни один из них не может быть использован для отработки навыков и самопроверки, что позволяет сделать вывод о необходимости разработки такого инструмента.

## 2.6 Мобильные приложения для решения дифференциальных уравнений

Для мобильных устройств (рассмотрим Andoid и официальных магазин приложений Play Store) существует несколько приложений, позволяющих решать дифференциальные уравнения численно.

Несмотря на то, что по запросам «differential equations» и «дифференциальные уравнения» было получено большое количество результатов, лишь несколько приложений соответствуют искомой тематике и позволяют решать дифференциальные уравнения.

Таблица 2 — Сравнение мобильных приложений.

Название приложения	Алгоритм решения	Формат решения	Преимущества	Недостатки
DE Solver Free (SunshineTechie)	Численный	График функции	Решение уравнений II и III порядков	Нет решений систем ОДУ
Differential Equations Steps (Ivan Petuhov)	Символьный	Пошаговое решение	Разбор хода решения	Решение доступно при подписке
Symbolab – Math Solver (Symbolab)	Символьный	Аналитическое решение и график	Аналитическое решение	Нет решений систем ОДУ

Многие приложения с похожими названиями не подходят для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Например:

- Differential equations (referencehunt) содержит только теоретические сведения о решении дифференциальных уравнений;
- PDE Solver дает возможность решать только уравнения в частных производных (в данной работе поставлена задача решения обыкновенных дифференциальных уравнений);
- Equation Solver (Alex Gwyn) позволяет решать только алгебраические уравнения.

Таким образом, существующие решения имеют либо не предоставляют некоторый функционал, либо платны, в связи с чем возникает необходимость создания инструмента, покрывающего эти недостатки.

## 3 Реализация приложения

### 3.1 Базовая концепция

Для реализации системы самопроверки было выбрано автономное Android-приложение, так как оно позволит инструменту быть доступным и мобильным.

Для обеспечения автономности и высокой скорости работы и простоты реализации были выбраны численные методы решения дифференциальных уравнений. Вывод численного решения на экран пользователю предоставляется в виде графика функции (интегральной кривой).

В рамках данной работы была поставлена задача реализовать решение задачи Коши численными методами.

Согласно определению 4 (с. 4) и техническому заданию, интерфейс приложения должен обладать следующими базовыми элементами:

- поле для ввода уравнения  $y' = f(x, y)$ ;
- поля для ввода начальных условий  $x_0$  и  $y(x_0)$ ;
- вывод графика решения;
- возможность проверить решение пользователя.

Для проверки решения пользователя было решено выводить на одном графике полученные численно изоклины и график пользовательского решения.

Графическое представление решения ДУ позволяет судить о поведении функции и характере физического явления, описываемого данной задачей Коши.

### 3.2 Алгоритмы

Существуют различные численные методы решения задачи Коши [1, сс. 410-481]. Они отличаются погрешностью, скоростью сходимости, устойчивостью.

**Определение 5.** Решение  $y = \varphi(t)$  системы дифференциальных уравнений  $y' = f(t, y)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  называют устойчивым по Ляпунову (устойчивым), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всякого решения  $y(t)$

той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta,$$

при всех  $t \geq t_0$  выполняется неравенство

$$|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Если же такого  $\varepsilon > 0$  не существует, то решение  $\varphi(t)$  называется неустойчивым.

Решение  $\varphi(t)$  называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть если из неравенства  $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$  следует  $y(t) - \varphi(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ).

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора  $t_0$ . [2, сс. 87-88]

Выбор метода численного решения

### **3.3 Фреймворки и структуры данных**

## **4 Тестирование**

### **4.1 Интерфейс**

### **4.2 Валидация**

### **4.3 Обработка ошибок**

## **Заключение**

## Список литературы

- [1] Амосов А. А. Дубинский Ю. А. Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. Высш. шк., 1994. С. 554.
- [2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. С. 176.
- [3] Coursera | Online Courses & Credentials by Top Educators [Электронный ресурс]. URL: <https://www.coursera.org/> (дата обращения: 30.09.2018).
- [4] Learn About Udemy culture, mission, and careers | About Us [Электронный ресурс]. URL: <https://about.udemy.com/> (дата обращения: 30.09.2018).
- [5] НОУ ИНТУИТ | О проекте [Электронный ресурс]. URL: <https://www.intuit.ru/content/about-project> (дата обращения: 30.09.2018).
- [6] О нас – Stepik [Электронный ресурс]. URL: <https://welcome.stepik.org> (дата обращения: 30.09.2018).