

[lg n]

Програма:

begin

 R := 0;

 while N > 9 do

 begin

 R := R + 1;

 N := N div 10

 end

end

Вхідні дані: N=17

6. Довести семантичну правильність програми (верифікація).

Нехай вхідні дані $st = [N \rightarrow n]$. Тоді якщо виконаються k ітерацій циклу, то отримуємо стан $st_k = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k]$.

База індукції:

$st_0 = [N \rightarrow n, R \rightarrow 0]$.

$AS^R(\bar{0})(st) = AS^R(\bar{0})([N \rightarrow n]) = [N \rightarrow n] \nabla [R \rightarrow \bar{0}(st)] = [N \rightarrow n] \nabla [R \rightarrow 0] = [N \rightarrow n, R \rightarrow 0]$ - виконується.

Крок індукції

Припустимо, що для k це виконується, доведемо для k+1.

Для цього застосуємо тіло циклу до стану $st_k = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k]$.

$$st_{k+1} = AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \overline{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \overline{10}))(st_k) = AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \overline{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \overline{10}))([R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k]) =$$

Послідовне виконання = $AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \overline{10}))(AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \overline{1}))([R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k]))$

- $AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \overline{1}))([R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k]) = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [R \rightarrow S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \overline{1})] = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [R \rightarrow \text{add}(R \Rightarrow(st_k), \overline{1}(st_k))] = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [R \rightarrow \text{add}(k, 1)] = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [R \rightarrow k+1] = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k] = st_k`$

- $AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \overline{10}))(st_k`) = AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \overline{10}))([R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k]) = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [N \rightarrow S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \overline{10})] = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [N \rightarrow \text{div}(N \Rightarrow(st_k`), \overline{10}(st_k`))] = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [N \rightarrow \text{div}(n/(10)^k, 10)] = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [N \rightarrow n/(10)^k * 1/10] = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^k] \nabla [N \rightarrow n/(10)^{k+1}] = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^{k+1}] = st_{k+1}$

Отримали те, що потрібно: $st_{k+1} = [R \rightarrow k+1, N \rightarrow n/(10)^{k+1}]$,
отже твердження індукції виконується.

З даного твердження маємо, що якщо цикл завершився після k ітерацій, то результуючий стан буде $st_k = [R \rightarrow k, N \rightarrow n/(10)^k]$.

З умови виходу циклу: $S^2(gr, N \Rightarrow, \bar{9})(st_k) = gr(N \Rightarrow(st_k), \bar{9}(st_k)) = gr(n/(10)^k, 9) = \text{false}$ маємо, що $n/(10)^k < 9$. Так як цикл виконувався на $k-1$ кроці, то маємо: $S^2(gr, N \Rightarrow, \bar{9})(st_{k-1}) = gr(N \Rightarrow(st_{k-1}), \bar{9}(st_{k-1})) = gr(n/(10)^{k-1}, 9) = \text{true}$, отже $n/(10)^{k-1} >$

9. Що доводить $[lg\ n]=k$. Отже, якщо цикл після k ітерацій завершується, для деякого k , результат операції $[lg\ n]$ буде записано в змінній R , що й треба було довести.

4. Побудувати семантичний терм програми

```
sem_P (begin
    R := 0;
    while N > 9 do
    begin
        R := R + 1;
        N := N div 10
    end
end) = NS_Prog =
```

```
= sem_S(R := 0;
    while N > 9 do
    begin
        R := R + 1;
        N := N div 10
    end) = NS_Stm_Seq =
```

```
= sem_S(R := 0) • sem_S(while N > 9 do
    begin
        R := R + 1;
        N := N div 10
    end) = NS_Stm_As =
```

```
=  $AS^R$  (sem_A(0)) • sem_S(while N > 9 do
    begin
        R := R + 1;
        N := N div 10
```

end) = **NS_A_Num** =

= $AS^R(\bar{0}) \cdot \text{sem_S}(\text{while } N > 9 \text{ do}$
begin
R := R + 1;
N := N div 10
end) = **NS_Stm_Wh** =

= $AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(\text{sem_B}(N > 9), \text{sem_S}(\text{begin}$
R := R + 1;
N := N div 10
end)) = **NS_B_gr**

= $AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, \text{sem_A}(N), \text{sem_A}(9)), \text{sem_S}(\text{begin}$
R := R + 1;
N := N div 10
end)) = **NS_A_Num, NS_A_Var** =

= $AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), \text{sem_S}(\text{begin}$
R := R + 1;
N := N div 10
end)) = **NS_Stm_BE** =

= $AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), \text{sem_S}(R := R + 1;$
N := N div 10)) =
NS_Stm_Seq =

= $AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), \text{sem_S}(R := R + 1) \cdot \text{sem_S}(N :=$
N div 10)) = **NS_Stm_As** =

$$= AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(\text{sem_A}(R + 1)) \cdot AS^N(\text{sem_A}(N \text{ div } 10))) = \mathbf{NS_A_Add} =$$

$$= AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(S^2(\text{add}, \text{sem_A}(R), \text{sem_A}(1)))) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, \text{sem_A}(N), \text{sem_A}(10)))) = \mathbf{NS_A_Num, NS_A_Var} =$$

$$= AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))))$$

Відповідь: $AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))))$

5. Застосувати отриманий семантичний терм до вказаних вхідних даних (тестування).

st = [N -> 17]

$$AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))))(st) = \mathbf{AF_SEQ} =$$

$$= WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))))(AS^R(\bar{0})(st))$$

$$(AS^R(\bar{0})(st)) = \mathbf{AF_AS} = st \nabla [R \rightarrow \bar{0}(st)] = st \nabla [R \rightarrow 0] = [N \rightarrow 17, R \rightarrow 0] = \mathbf{st}$$

st' = [N -> 17, R -> 0]

Обчислимо $WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9}), AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))) (st')$

Умова: $S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9})(st') = \mathbf{AF_S} = \text{gr}(N \Rightarrow (st'), \bar{9}(st')) = \text{gr}(17, 9) = \text{true}$ - звідси робимо висновок, що цикл виконується принаймні один раз.

- $st1 = (AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})) \cdot AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))) (st') = \mathbf{AF_SEQ} = AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10})) ((AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1}))) (st'))$

$(AS^R(S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1}))) (st') = \mathbf{AF_AS} = st' \nabla [R \rightarrow S^2(\text{add}, R \Rightarrow, \bar{1})(st')] = \mathbf{AF_S} = st' \nabla [R \rightarrow \text{add}(R \Rightarrow (st'), \bar{1}(st')) = st' \nabla [R \rightarrow \text{add}(0, 1)] = st' \nabla [R \rightarrow 1] = [N \rightarrow 17, R \rightarrow 1] = \mathbf{st''}$

st'' = [N -> 17, R -> 1]

$AS^N(S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10}))(st'') = \mathbf{AF_AS} = st'' \nabla [N \rightarrow S^2(\text{div}, N \Rightarrow, \bar{10})(st'')] = \mathbf{AF_S} = st'' \nabla [N \rightarrow \text{div}(N \Rightarrow (st''), \bar{10}(st''))] = st'' \nabla [N \rightarrow \text{div}(17, 10)] = st'' \nabla [N \rightarrow 1] = [N \rightarrow 1, R \rightarrow 1] = \mathbf{st1}$

st1 = [N -> 1, R -> 1]

Перевіряємо умову:

$S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{9})(st1) = \mathbf{AF_S} = \text{gr}(N \Rightarrow (st1), \bar{9}(st1)) = \text{gr}(1, 9) = \text{false}$

Результат: $st1 = [N \rightarrow 1, R \rightarrow 1]$.

У змінній R записано результат виконання програми $[lg n]$ для значення $N=17$, отже протестована функція вірна на вхідних даних.