

Практична робота 6. Синтаксис-семантика

№ 3

- 3^x
- Вхідні дані: $X=3$
- Програма:

```
begin
  R := 1;
  while X > 0 do
    begin
      R := R * 3;
      X := X - 1
    end
  end
end
```

6. Довести семантичну правильність програми (верифікація).

Нехай вхідні дані $st=[X \rightarrow x]$.

За k ітерацій циклу отримуємо стан $st_k=[X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k]$.

База індукції

$$st_0=[X \rightarrow x, R \rightarrow 1]$$

$$AS^R(\bar{1})(st) = [X \rightarrow x] \nabla [R \rightarrow \bar{1}([X \rightarrow x])] = [X \rightarrow x] \nabla [R \rightarrow 1] \\ = [X \rightarrow x, R \rightarrow 1] - \text{виконується.}$$

Крок індукції

Припустимо, що для k виконується. Доведемо для $k+1$.

Для цього застосовуємо тіло циклу до стану $st_k=[X \rightarrow x - k,$

$R \rightarrow 3^k]$.

$$st_{k+1} = AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) (st_k) =$$

$$= AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) ([X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k]) = \text{Послідовне виконання AF_SEQ} =$$

$$= AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) (AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))([X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k]))$$

$$\bullet AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))([X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k]) =$$

$$\begin{aligned} & \text{Присвоювання AF_AS} = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k] \nabla [R \rightarrow S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})(st_k)] = \text{Суперпозиція AF_S} = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k] \nabla [R \rightarrow \text{mult}(R \Rightarrow(st_k), \bar{3}(st_k))] = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k] \nabla [R \rightarrow \text{mult}(3^k, 3)] = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k] \nabla [R \rightarrow 3^{k*3}] = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}] = st'_k \end{aligned}$$

$$st'_k = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}]$$

$$\begin{aligned} \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))(st'_k) &= AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))([X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}]) = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}] \nabla [X \rightarrow S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})] \\ &= [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}] \nabla [X \rightarrow \text{sub}(X \Rightarrow(st'_k), \bar{1}(st'_k))] = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}] \nabla [X \rightarrow \text{sub}(x-k, 1)] = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^{k*3}] \nabla [X \rightarrow x-k-1] = [X \rightarrow x-k-1, R \rightarrow 3^{k*3}] = st_{k+1} \end{aligned}$$

$$st_{k+1} = [X \rightarrow x-(k+1), R \rightarrow 3^{k+1}] - \text{твердження}$$

ВИКОНУЄТЬСЯ.

Твердження індукції виконується.

З доведеного твердження маємо, що якщо цикл завершився після k ітерацій, то результуючий стан буде $st_k = [X \rightarrow x - k, R \rightarrow 3^k]$.

Умова виходу з циклу: $S^2(gr, X \Rightarrow, \bar{0})(st_k) = gr(X \Rightarrow(st_k), \bar{0}(st_k)) = gr(x - k, 0) = \text{false}$. Звідси маємо, що $x - k < 0$.

Цикл на $k-1$ кроці виконувався: $S^2(gr, X \Rightarrow, \bar{0})(st_{k-1}) = gr(X \Rightarrow(st_{k-1}), \bar{0}(st_{k-1})) = gr(x - (k-1), 0) = \text{true}$. Звідси маємо $x - (k-1) > 0$.

Що доводить $3^x = 3^k$. Отже, дійсно якщо цикл після k ітерацій завершується, для деякого k , результат операції 3^x буде записано в змінній R , що й треба було довести.

4. Побудувати семантичний терм програми

```
sem_P(begin  
    R := 1;  
    while X > 0 do  
    begin  
        R := R * 3;  
        X := X - 1  
    end  
end) =
```

$sem_P(begin\ S\ end) = sem_S(S)$

```
= sem_S(R := 1;  
    while X > 0 do  
    begin  
        R := R * 3;  
        X := X - 1  
    end) =
```

$sem_S(S1 ; S2) = sem_S(S1) \bullet sem_S(S2)$

```
= sem_S(R := 1) • sem_S(while X > 0 do  
    begin  
        R := R * 3;  
        X := X - 1  
    end) =
```

$sem_S(x := a) = AS^x(sem_A(a))$

```
=  $AS^R(sem\_A(1))$  • sem_S(while X > 0 do  
    begin
```

```

R := R * 3;
X := X - 1
end) =

```

$sem_S(while\ b\ do\ S) = WH(sem_B(b), sem_S(S))$

$= AS^R(sem_A(1)) \bullet WH(sem_B(X > 0), sem_S(begin$
 $R := R * 3;$
 $X := X - 1$
 $end)) =$

$sem_B(a1 > a2) = S^2(gr, sem_A(a1), sem_A(a2))$

$= AS^R(sem_A(1)) \bullet WH(S^2(gr, sem_A(X), sem_A(0)),$
 $sem_S(begin$
 $R := R * 3;$
 $X := X - 1$
 $end)) =$

$sem_A(x) = x \Rightarrow, sem_A(n) = \bar{n}$

$= AS^R(\bar{1}) \bullet WH(S^2(gr, X \Rightarrow, \bar{0}), sem_S(begin$
 $R := R * 3;$
 $X := X - 1$
 $end)) =$

$sem_S(begin\ S\ end) = (sem_S(S))$

$= AS^R(\bar{1}) \bullet WH(S^2(gr, X \Rightarrow, \bar{0}), sem_S(R := R * 3;$
 $X := X - 1)) =$

$sem_S(S1 ; S2) = sem_S(S1) \bullet sem_S(S2)$

$$= AS^R(\bar{1}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), \text{sem_S}(R := R * 3) \cdot \text{sem_S}(X := X - 1)) =$$

$$\text{sem_S}(x := a) = AS^x(\text{sem_A}(a))$$

$$= AS^R(\bar{1}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(\text{sem_A}(R * 3)) \cdot AS^x(\text{sem_A}(X - 1))) =$$

$$\text{sem_A}(a1 * a2) = S^2(\text{mult}, \text{sem_A}(a1), \text{sem_A}(a2)),$$

$$\text{sem_A}(a1 - a2) = S^2(\text{sub}, \text{sem_A}(a1), \text{sem_A}(a2))$$

$$= AS^R(\bar{1}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{mult}, \text{sem_A}(R), \text{sem_A}(3))) \cdot AS^x(S^2(\text{sub}, \text{sem_A}(X), \text{sem_A}(1)))) =$$

$$\text{sem_A}(x) = x \Rightarrow, \text{sem_A}(n) = \bar{n}$$

$$= AS^R(\bar{1}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \cdot AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))))$$

Відповідь:

$$AS^R(\bar{1}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \cdot AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))))$$

5. Перевірити синтаксичну правильність програми

st = [X -> 3]

$AS^R(\bar{1}) \bullet WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))) (st) = \text{Послідовне виконання} = WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))) (AS^R(\bar{1})(st))$

$AS^R(\bar{1})(st) = \text{Присвоювання} = st \nabla [R \rightarrow \bar{1}(st)] = st \nabla [R \rightarrow 1] = [X \rightarrow 3, R \rightarrow 1] = \underline{st'}$

$st' = [X \rightarrow 3, R \rightarrow 1]$

Обчислимо $WH(S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))) (st')$

Умова: $S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0})(st') = \text{Суперпозиція} = \text{gr}(X \Rightarrow (st'), \bar{0}(st')) = \text{gr}(3, 0) = \text{true}$ - звідси робимо висновок, що цикл виконується принаймні один раз.

- $st1 = AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \bullet AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))(st') =$
Послідовне виконання = $AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))(AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))(st'))$

$AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))(st') = \text{Присвоювання} = st' \nabla [R \rightarrow S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})(st')] = \text{Суперпозиція} = st' \nabla [R \rightarrow \text{mult}(R \Rightarrow (st'), \bar{3}(st'))] = st' \nabla [R \rightarrow \text{mult}(1, 3)] = st' \nabla [R \rightarrow 3] = [X \rightarrow 3, R \rightarrow 3] = \underline{st''}$

$st'' = [X \rightarrow 3, R \rightarrow 3]$

$AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) (st'') = \text{Присвоювання} = st'' \nabla [X \rightarrow$
 $S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})(st'')] = \text{Суперпозиція} = st'' \nabla [X \rightarrow \text{sub}(X \Rightarrow$
 $(st''), \bar{1}(st''))] = st'' \nabla [X \rightarrow \text{sub}(3, 1)] = st'' \nabla [X \rightarrow 2] = [X \rightarrow 2, R$
 $\rightarrow 3] = \text{st1}$

st1 = [X -> 2, R -> 3]

Перевіряємо умову:

$S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0})(st1) = \text{Суперпозиція} = \text{gr}(X \Rightarrow(st1), \bar{0}(st1))$
 $= \text{gr}(2, 0) = \text{true}$

- $st2 = AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \cdot AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) (st1) =$
Послідовне виконання = $AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) (AS^R(S^2$
 $(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))(st1))$

$AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))(st1) = \text{Присвоювання} = st1 \nabla [R \rightarrow$
 $S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})(st1)] = \text{Суперпозиція} = st1 \nabla [R \rightarrow \text{mult}(R \Rightarrow$
 $(st1), \bar{3}(st1))] = st1 \nabla [R \rightarrow \text{mult}(3, 3)] = st1 \nabla [R \rightarrow 9] = [X \rightarrow 2,$
 $R \rightarrow 9] = \text{st1'}$

st1' = [X -> 2, R -> 9]

$AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})) (st1') = \text{Присвоювання} = st1' \nabla [X \rightarrow$
 $S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})(st1')] = \text{Суперпозиція} = st1' \nabla [X \rightarrow \text{sub}(X \Rightarrow$
 $(st1'), \bar{1}(st1'))] = st1' \nabla [X \rightarrow \text{sub}(2, 1)] = st1' \nabla [X \rightarrow 1] = [X \rightarrow 1,$
 $R \rightarrow 9] = \text{st2}$

st2 = [X -> 1, R -> 9]

Перевіряємо умову:

$$S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0})(\text{st2}) = \text{Суперпозиція} = \text{gr}(X \Rightarrow (\text{st2}), \bar{0}(\text{st2})) \\ = \text{gr}(1, 0) = \text{true}$$

- $\text{st3} = AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})) \cdot AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))(\text{st2}) =$
Послідовне виконання = $AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))(AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))(\text{st2}))$

$$AS^R(S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3}))(\text{st2}) = \text{Присвоювання} = \text{st2} \nabla [R \rightarrow S^2(\text{mult}, R \Rightarrow, \bar{3})(\text{st2})] = \text{Суперпозиція} = \text{st2} \nabla [R \rightarrow \text{mult}(R \Rightarrow (\text{st2}), \bar{3}(\text{st2}))] = \text{st2} \nabla [R \rightarrow \text{mult}(9, 3)] = \text{st2} \nabla [R \rightarrow 27] = [X \rightarrow 1, R \rightarrow 27] = \text{st2'}$$

$$\text{st2'} = [X \rightarrow 1, R \rightarrow 27]$$

$$AS^x(S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1}))(\text{st2'}) = \text{Присвоювання} = \text{st2'} \nabla [X \rightarrow S^2(\text{sub}, X \Rightarrow, \bar{1})(\text{st2'})] = \text{Суперпозиція} = \text{st2'} \nabla [X \rightarrow \text{sub}(X \Rightarrow (\text{st2'}), \bar{1}(\text{st2'}))] = \text{st2'} \nabla [X \rightarrow \text{sub}(1, 1)] = \text{st2'} \nabla [X \rightarrow 0] = [X \rightarrow 0, R \rightarrow 27] = \text{st3}$$

$$\text{st3} = [X \rightarrow 0, R \rightarrow 27]$$

Перевіряємо умову:

$$S^2(\text{gr}, X \Rightarrow, \bar{0})(\text{st3}) = \text{Суперпозиція} = \text{gr}(X \Rightarrow (\text{st3}), \bar{0}(\text{st3})) \\ = \text{gr}(0, 0) = \text{false}$$

Результат: $\text{st3} = [X \rightarrow 0, R \rightarrow 27]$.

У змінній R записано результат виконання програми 3^x для значення $x=3$, отже протестована функція вірна на вхідних даних.

```

sem_P (begin
    A := 0;
    B := 1;
    R := 0;
    while N > 0 do
    begin
        R := A + B;
        A := B;
        B := R;
        N := N-1
    end
end) =

```

```

= sem_S(A := 0;
    B := 1;
    R := 0;
    while N > 0 do
    begin
        R := A+B;
        A := B;
        B := R;
        N := N-1
    end) =

```

```

= sem_S(A := 0; B := 1; R := 0) • sem_S(while N > 0 do
    begin
        R := A+B;
        A := B;
        B := R;
        N := N-1
    end) =

```

$$\begin{aligned}
&= \text{sem_S}(A := 0) \cdot \text{sem_S}(B := 1; R := 0) \cdot \text{WH}(\text{sem_B}(N > 0), \\
&\quad \text{sem_S}(\text{begin} \\
&\quad \quad R := A+B; \\
&\quad \quad A := B; \\
&\quad \quad B := R; \\
&\quad \quad N := N-1 \\
&\quad \text{end})) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sem_S}(A := 0) \cdot \text{sem_S}(B := 1) \cdot \text{sem_S}(R := 0) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, \\
&\text{sem_A}(N), \text{sem_A}(0)), \text{sem_S}(R := A+B; \\
&\quad A := B; \\
&\quad B := R; \\
&\quad N := N-1)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AS^A(\text{sem_A}(0)) \cdot AS^B(\text{sem_A}(1)) \cdot AS^R(\text{sem_A}(0)) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, \\
&N \Rightarrow, \bar{0}), \text{sem_S}(R := A+B; A := B) \cdot B := R; N := N-1)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AS^A(\bar{0}) \cdot AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), \text{sem_S}(R := A+B) \\
&\cdot \text{sem_S}(A := B) \cdot \text{sem_S}(B := R) \cdot \text{sem_S}(N := N-1)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AS^A(\bar{0}) \cdot AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(\text{sem_A}(A+B)) \\
&\cdot AS^A(\text{sem_A}(B)) \cdot AS^B(\text{sem_A}(R)) \cdot AS^N(\text{sem_A}(N-1))) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AS^A(\bar{0}) \cdot AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, \\
&\text{sem_A}(A), \text{sem_A}(B)))) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, \\
&\text{sem_A}(N), \text{sem_A}(1)))) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AS^A(\bar{0}) \cdot AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot \text{WH}(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \\
&\Rightarrow)) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1})))
\end{aligned}$$

Відповідь: $AS^A(\bar{0}) \cdot AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1})))$

5. Застосувати отриманий семантичний терм до вказаних вхідних даних (тестування)

$$st = [N \rightarrow 3]$$

- $$AS^A(\bar{0}) \cdot AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))) (st) =$$

$$\underline{\mathbf{AF_SEQ}} = AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))) (AS^A(\bar{0})(st))$$

$$AS^A(\bar{0})(st) = \underline{\mathbf{AF_AS}} = st \nabla [A \rightarrow \bar{0}(st)] = st \nabla [A \rightarrow 0] = [N \rightarrow 3, A \rightarrow 0] = \underline{\mathbf{st'}}$$

$$\underline{\mathbf{st'}} = [N \rightarrow 3, A \rightarrow 0]$$

- $$AS^B(\bar{1}) \cdot AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))) (st') =$$

$$= AS^R(\bar{0}) \cdot WH(S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))) (AS^B(\bar{1})(st'))$$

$$AS^B(\bar{1})(st') = \underline{\mathbf{AF_AS}} = st \nabla [B \rightarrow \bar{1}(st')] = st \nabla [B \rightarrow 1] = [N \rightarrow 3, A \rightarrow 0, B \rightarrow 1] = \underline{\mathbf{st''}}$$

$$\underline{\mathbf{st''}} = [N \rightarrow 3, A \rightarrow 0, B \rightarrow 1]$$

- За таким самим процесом отримуємо стан $st''' = [N \rightarrow 3, A \rightarrow 0, B \rightarrow 1, R \rightarrow 0]$

Обчислимо $WH(S^2(gr, N \Rightarrow, \bar{0}), AS^R(S^2(add, A \Rightarrow, B \Rightarrow)) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})))$

Умова: $S^2(gr, N \Rightarrow, \bar{0})(st''') = \underline{AF_S} = gr(N \Rightarrow(st'''), \bar{0}(st''')) = gr(3, 0) = \text{true}$ - звідси робимо висновок, що цикл виконується принаймні один раз.

- $st1 = AS^R(S^2(add, A \Rightarrow, B \Rightarrow)) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))(st''')$ - через формулу AF_SEQ :

$AS^R(S^2(add, A \Rightarrow, B \Rightarrow))(st''') = \underline{AF_AS} = st''' \nabla [R \rightarrow S^2(add, A \Rightarrow, B \Rightarrow)(st''')] = \underline{AF_S} = st''' \nabla [R \rightarrow add(A \Rightarrow(st'''), B \Rightarrow(st'''))] = st''' \nabla [R \rightarrow add(0, 1)] = st''' \nabla [R \rightarrow 1] = \underline{[N \rightarrow 3, A \rightarrow 0, B \rightarrow 1, R \rightarrow 1]} = \underline{st1'}$

$AS^A(B \Rightarrow)(st1') = st1' \nabla [A \rightarrow B \Rightarrow(st1')] = st1' \nabla [A \rightarrow B] = st1' \nabla [R \rightarrow 1] = \underline{[N \rightarrow 3, A \rightarrow 1, B \rightarrow 1, R \rightarrow 1]} = \underline{st1''}$

$AS^B(R \Rightarrow)(st1'') = st1'' \nabla [B \rightarrow R \Rightarrow(st1'')] = st1'' \nabla [B \rightarrow R] = st1'' \nabla [B \rightarrow 1] = \underline{[N \rightarrow 3, A \rightarrow 1, B \rightarrow 1, R \rightarrow 1]} = \underline{st1''}$

$AS^N(S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))(st1'') = \underline{AF_AS} = st1'' \nabla [N \rightarrow S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})(st1'')] = \underline{AF_S} = st1'' \nabla [N \rightarrow sub(N \Rightarrow(st1''), \bar{1}(st1''))] = st1'' \nabla [N \rightarrow SUB(3, 1)] = st1'' \nabla [N \rightarrow 2] = \underline{[N \rightarrow 2, A \rightarrow 1, B \rightarrow 1, R \rightarrow 1]} = \underline{st1}$

Перевіряємо умову: $S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0})(st1) = \underline{\mathbf{AF_S}} = \text{gr}(N \Rightarrow(st1), \bar{0}(st1)) = \text{gr}(2, 0) = \text{true}$

- Знайдемо st2 таким самим чином, як і st1:

$$st2 = AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow)) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))(st1)$$

$$AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))(st1) = \dots = [N \rightarrow 2, A \rightarrow 1, B \rightarrow 1, R \rightarrow 2] = st2'$$

$$AS^A(B \Rightarrow)(st2') = \dots = [N \rightarrow 2, A \rightarrow 1, B \rightarrow 1, R \rightarrow 2] = st2'$$

$$AS^B(R \Rightarrow)(st2') = \dots = [N \rightarrow 2, A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, R \rightarrow 2] = st2'$$

$$AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))(st2') = \dots = [N \rightarrow 1, A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, R \rightarrow 2] = st2$$

Перевіряємо умову: $S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0})(st2) = \underline{\mathbf{AF_S}} = \text{gr}(N \Rightarrow(st2), \bar{0}(st2)) = \text{gr}(1, 0) = \text{true}$

- Знайдемо st3 таким самим чином, як і st1:

$$st3 = AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow)) \cdot AS^A(B \Rightarrow) \cdot AS^B(R \Rightarrow) \cdot AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))(st2)$$

$$AS^R(S^2(\text{add}, A \Rightarrow, B \Rightarrow))(st2) = \dots = [N \rightarrow 1, A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, R \rightarrow 3] = st3'$$

$$AS^A(B \Rightarrow)(st3') = \dots = [N \rightarrow 1, A \rightarrow 2, B \rightarrow 2, R \rightarrow 3] = st3''$$

$$AS^B(R \Rightarrow)(st3'') = \dots = [N \rightarrow 1, A \rightarrow 2, B \rightarrow 3, R \rightarrow 3] = st3'''$$

$$AS^N(S^2(\text{sub}, N \Rightarrow, \bar{1}))(st3''') = \dots = [N \rightarrow 0, A \rightarrow 2, B \rightarrow 3, R \rightarrow 3] = st3$$

Перевіряємо умову: $S^2(\text{gr}, N \Rightarrow, \bar{0})(st3) = \underline{\mathbf{AF_S}} = \text{gr}(N \Rightarrow(st3), \bar{0}(st3)) = \text{gr}(0, 0) = \text{false}$

Результат: $st3 = [N \rightarrow 0, A \rightarrow 2, B \rightarrow 3, R \rightarrow 3]$.

У змінній A записано результат виконання програми для значення N=3, отже протестована функція вірна на вхідних даних.