PROJEKTNI ZADATAK IZ DINAMIKE MEHNANIČKIH SISTEMA
Elektrotehnički fakultet u Beogradu, školska 2023/2024

Elena Nešović 2022/0055,
Milica Gojak 2022/0061,
Anastasija Stojanović 2022/0081

5. februar 2024.

Korišćene oznake

g - gravitaciono polje zemlje, m - masa kuglice, ω - ugaona brzina parabole, ξ - koeficijent za prigušene oscilacije ograničenja, b - pozitivna konstanta

Uvod u problem

U ovom eksperimentu proučavali smo kretanje kuglice mase m postavljene na žici savijenoj kao parabola, izraženo jednačinom $z = br^2$. Žica rotira oko svoje ose simetrije konstantnom ugaonom brzinom ω. Cilj eksperimenta je izvesti jednačine kretanja koristeći Lagranžov pristup i predstaviti ih u formi sistema diferencijalnih jednačina pomoću *Constraint stabilization* metode, a zatim analizirati grafike relevantnih veličina.

Korišćene oznake

1 Jednačine sistema

Koordinate kuglice su opisane unutar cilindričnog koordinatnog sistema kao:

$$x = r\sin\theta$$

$$y = r\cos\theta$$

$$z = z$$

pri čemu je:

$$\dot{\theta} = \omega$$

opšta formula za kinetičku energiju je

$$T = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{1}$$

što se u datom slučaju svodi na:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + (r\omega)^2) \tag{2}$$

potencijalna energija sistema je data sa:

$$U = mgz \tag{3}$$

Odatle sledi da je Lagranžijan:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + (r\omega)^2) - mgz \tag{4}$$

Funkcija ograničenja je definisana kao:

$$f = z - br^2 \tag{5}$$

Postavljanjem modifikovanih Lagranž-Ojlerovih jednačina iz formule (4) dobijamo jednačine koje treba numerički da opisemo

$$\frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}) \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) \tag{7}$$

Rešenje dobijamo u obliku:

$$-mg + \lambda - mz = 0 \tag{8}$$

$$-2\lambda br + mr\omega^2 - m\ddot{r} = 0 \tag{9}$$

Sledeću jednačinu dobijamo pretvaranjem funkcije ograničenja u diferencijalnu jednačinu prigušenih oscilacija korišćenjem *Constraint stabilization method-a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\xi \frac{\partial f}{\partial t} + \xi^2 f \tag{10}$$

Zamenom (5) u (10) dobija se:

$$-2b\dot{r}^2 - 2br\ddot{r} + \ddot{z} + 2\xi(-2br\dot{r} + \dot{z}) + \xi^2(z - br^2) = 0 \tag{11}$$

Iz jednačine (8) možemo da izrazimo λ

$$\lambda = m(\ddot{z} + g) \tag{12}$$

Kada se ovako izračunato λ ubaci u jednačinu (9) i ona se podeli sa m dobija se

$$r\omega^2 - 2br(\ddot{z} + g) - \ddot{r} = 0 \tag{13}$$

Time se dobija diferencijalna jednačina drugog reda promenljive r

$$\ddot{r} = r\omega^2 - 2br(\ddot{z} + g) \tag{14}$$

Zamenom drugog izvoda r jednačinom (14) u jednačinu (11) dobija se diferencijalna jednačina drugog reda promenljive z

$$\ddot{z} = \frac{2b\dot{r}^2 + 2b^2r^2\omega^2 - 4b^2gr^2 - 2\xi\dot{z} + 4b\xi r\dot{r} - \xi^2 z + \xi^2 br^2}{1 + 4b^2r^2} \tag{15}$$

Jednačine (14) i (15) čine sistem od dve diferencijalne jednačine drugog reda koji se može rešiti korišćenjem nekog od numeričkih algoritama za rešavanje problema početnih vrednosti običnih diferencijalnih jednačina.

2 Simulacija

Za rešavanje problema i crtanje grafika korišćen je programski jezik Python, i u okviru njega NumPy i SciPy biblioteke. Korišćen je Runge-Kuta metod kao numericki metod za rešavanje diferencijalnih jednačina. Runge-Kuta metod je implementiran unutar funkcije solve_ivp koja se nalazi u okviru SciPy biblioteke. solve_ivp za prosleđeni sistem koji se sastoji vremena i promenljivih, vraća vrednosti tog sistema u svakom trenutku za zadati opseg vremena.

Sistem je opisan tako da prima r (r) , r_d ($\dot{r}$), z (z), z_d ($\dot{z}$), odnosno početne vrednosti ovih promenljivih a vraća drdt ($\dot{r}$), dzdt ($\dot{z}$), dr2dt ($\ddot{r}$), dz2dt ($\ddot{z}$) koje su definisane iz prošlih jednačina kao:

$$drdt = r\_d$$
$$dzdt = z\_d$$
$$dz2dt = \frac{2b * (drdt)^2 + 2b^2r^2\omega^2 - 4b^2gr^2 - 2\xi * dzdt + 4b\xi r * drdt - \xi^2 z + \xi^2 br^2}{1 + 4b^2r^2}$$
$$dr2dt = r\omega^2 - 2br(dz2dt + g)$$

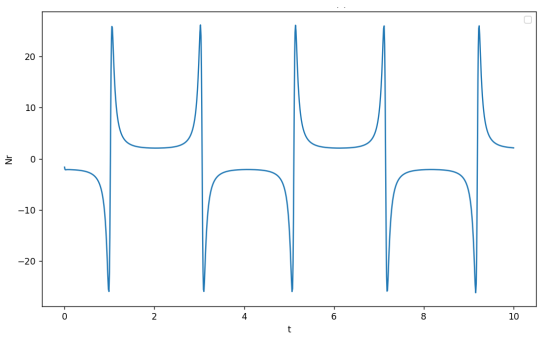
gde su g, ω, ξ i b globalne promenljive čije su vrednosti definisane na početku programa.

3 Rezultati

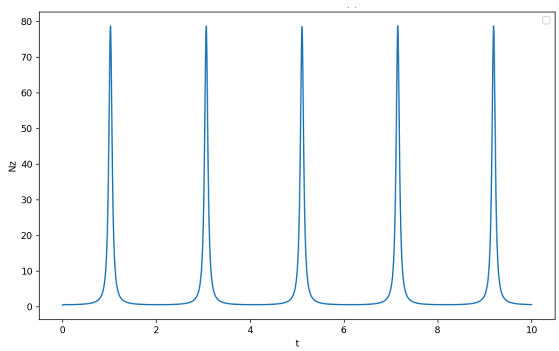
Dobijeni grafici su za vrednosti parametara $m = 1$, $g = 9.81$, $\omega = 1$, $\xi = 100$ i $b = 1$. Za ove vrednosti sistem je u stabilnoj ravnoteži.

Sile reakcije žice na kuglicu

Grafici na slici 1. zavisnosti sila reakcije žice na kuglicu u funkciji vremena pruža uvid u dinamiku sistema. Sile su periodične sa jasnim frekvencijama. R komponenta periodično menja svoj smer dok amplituda ostaje ista, nakon čega se brzo vraća na nulu. Z komponenta ima *peak*-ove na istim vremenskim intervalima ali intenzitet sile je uvek pozitivan za razliku od R komponente.



(a) Grafik zavisnosti r komponente sile reakcije žice od vremena

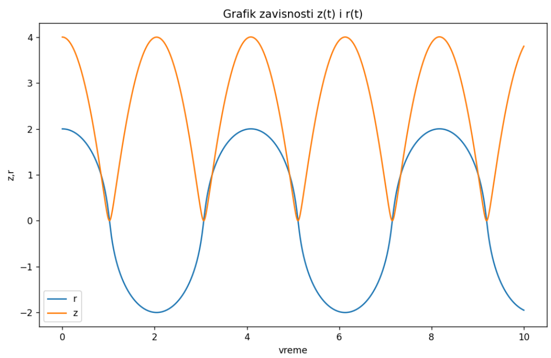


(b) Grafik zavisnosti z komponente sile reakcije žice od vremena

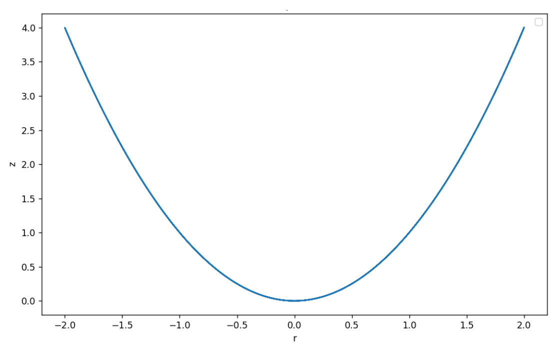
Slika 1: Zavisnost sila reakcije žice na kuglicu u funkciji vremena

Trajektorija

Prikaz trajektorije kuglice u cilindričnom koordinatnom sistemu pomaže u vizualizaciji njenog kretanja. Trajektorija prati oblik parabole, uz dodatne efekte rotacije. Koordinata r ima oblik sinusoide dok z ima oblik funkcije apsolutne vrednosti sinusoide.



(a) Grafik zavisnosti z i r od vremena

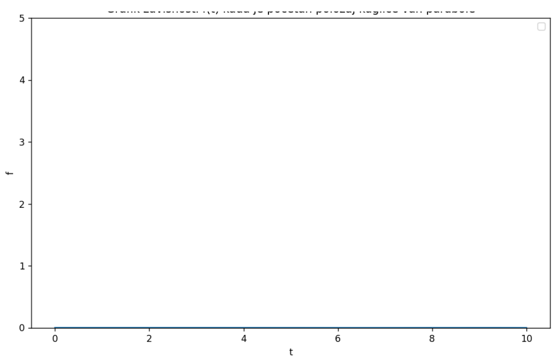


(b) Trajakotrija kuglice

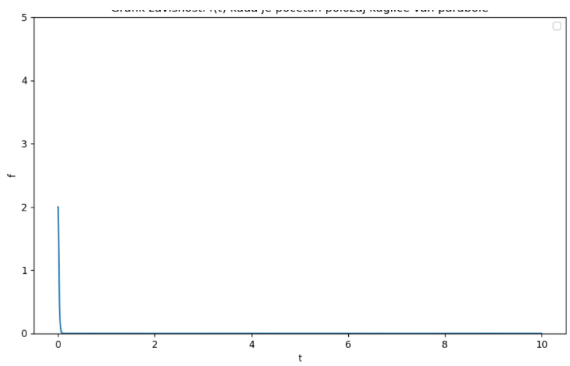
Slika 2

Funkcija ograničenja

Analiza zavisnosti jednačine ograničenja u funkciji vremena pruža informacije o očuvanju energije sistema. Jednačina je konstantna tokom vremena čak i kad je početan položaj kuglice van parabole funkcija brzo postaje konstanta odnosno ima vrednost nula.



(a) Grafik zavisnosti funkcije ograničenja: početan položaj kuglice u paraboli

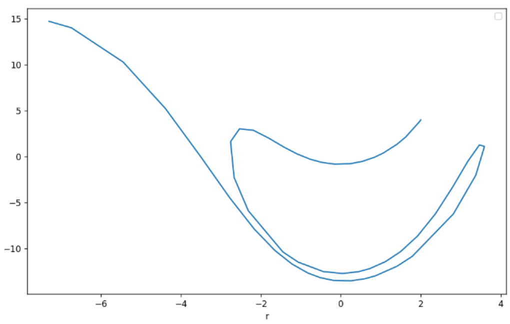


(b) Grafik zavisnosti funkcije ograničenja: početan položaj kuglice van parabole

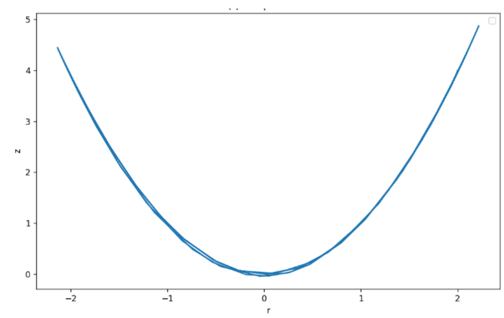
Slika 3

Analiza ponašanja

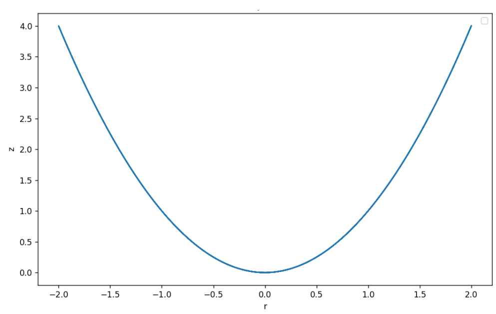
Pri promeni vrednosti koeficijenta za prigušene oscilacije ograničenja može se videti da za dovoljno malo prigušenje sistem neće ući u ravnotežni položaj (Slika 4. (a)). Primećuje se da za manje prigušenje sistemu će trebati više vremena da uđe u ravnotežni položaj ta razlika se vidi na slikama 4,(b) i 4.(c). Za prigušenje 100 sistem je u stanju da momentalno uđe u ravnotežu.



(a) Trajaktorija za $\xi = 1$



(b) Trajaktorija za $\xi = 10$



(c) Trajaktorija za $\xi = 100$

Slika 4