Санкт–Петербургский государственный университет

Казакова Анастасия

Выпускная квалификационная работа

Оценивание параметров по полным и цензурированным выборкам

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2020 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Кафедра «Информационные системы»

Научный руководитель:
профессор, кафедра математической теории игр и статистических решений,
д.т.н. Буре Владимир Мансурович

Рецензент:
доцент, кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем,
к.ф.-м.н. Антонов Андрей Юрьевич

Санкт-Петербург
2024 г.

Saint Petersburg State University

Kazakova Anastasija

Final qualification paper

Estimation of parameters from complete and censored samples

Education level: bachelor
Course 01.03.02 «Applied mathematics and informatics»
Study program CB.5005.2020 «Applied Mathematics, Fundamental Informatics and Programming»
Department «Information systems»

Scientific supervisor:
Doctor of Engineering, Professor Bure V. M.

Reviewer:
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor Antonov. A. Y.

Saint Petersburg
2024

Содержание

Введение

Оценка параметров закона распределения генеральной совокупности играет крайне важную роль в статистической обработке данных. Именно точность оценивания позволяет качественно интерпретировать полученные результаты оценивания и впоследствии осуществить проверку гипотезы о согласованности данных с законом распределения. Данная работа сфокусирована на экспоненциальном распределении, изучении точности оценивания его параметра и проверках гипотез согласия на экспоненциальность для различных типов выборок.

Для исследования было выбрано экспоненциальное распределение, так как оно является одним из базовых и широко применяемых распределений в различных прикладных сферах деятельности, сопряженных со статистическим анализом. Функция экспоненциального распределения и функция плотности могут быть описаны с параметром интенсивности как в справочнике Kececioglu D. [1] и в пакетах прикладных программ The R Stats Package [2], Reliability Python library [3]:

$$F(t,\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad f(t,\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0,\ \lambda > 0, \tag{1}$$

и с параметром масштаба, как, например, в работе John I. McCool [4]:

$$F(t,\eta) = 1 - e^{-\frac{t}{\eta}}, \quad f(t,\eta) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}}, \quad t \geqslant 0,\ \eta > 0. \tag{2}$$

Интересно это распределение тем, что оно связано с возможным анализом статистических выборок на предмет установления ситуации мгновенных отказов с постоянной интенсивностью отказов $\lambda(t)$, рассматривающейся в работах И.В. Герцбах, Х.Б. Кордонский [5], International Electrotechnical Commission [6]:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = const; \quad t \geqslant 0,$$

где $f(t)$ — функция плотности экспоненциального распределения в точке t, $F(t)$ — функция распределения и $R(t)$ — функция надежности. Функция распределения описывает вероятность отказа за время t, а функция надежности — вероятность безотказной работы объекта за время t. Функция интенсивности отказов характеризует выживаемость объекта, т. е. определяет среднее время между двумя последовательными событиями (отказами).

Под наблюдением понимается либо непрерывная оценка состояния объекта, либо контроль состояния посредством периодических проверок. Результатом наблюдения будет фиксированное состояние объекта, который будет либо исправным, либо неисправным, и результатом наблюдения будет отказ объекта в виде невозможности дальнейшего функционирования. Мгновенные отказы или по-другому внезапные отказы, которые описываются экспоненциальным законом распределения, происходят в случаях внезапной перегрузки объекта на которую этот объект не был рассчитан изначально. Наблюдение и результат наблюдения могут относиться как к техническим объектам, так и к человеку, например, в медицинских обследованиях, в экономических и общественных процессах. Под случайными величинами выборки будут пониматься полученные в ходе наблюдения значения времени до возникновения отказа.

В работе исследуются не только полные выборки, когда в данных содержится вся возможная информация, но и цензурированные, когда часть выборки не имеет точных значений отказов. Цензурирование определяется как мешающее событие, которое не позволяет получить результат наблюдения исследуемого события. В работе Hejtan D. F., Rubin D. B. [7], показывается необходимость работы с такими данными.

В области теории надежности характерными случаями экспоненциального распределения на практике являются отказы сложных систем, то есть состоящих из большого числа элементов, макротрещины конструкций ввиду внезапных нагрузок, не связанных с усталостными повреждениями, а также отказы различных технических объектов, например, радиоэлектронные и электрические аппараты.

Данная работа посвящена исследованию свойств экспоненциального однопараметрического распределения по различным типам статистических выборок. Решается задача параметрического оценивания для полных и цензурированных выборок I и II типов, а также множественно цензурированных выборок в условиях I и II типов цензурирования. Проводится исследование точности оценивания параметра по критерию минимальной дисперсии для случая полных данных. Для параметрического оценивания выбран метод максимального правдоподобия. Использовались теоретические основы параметрического оценивания из книг Буре В. М., Парилина Е. М. [8], Г. Крамер [9], Кендалл М., Стьюарт А. [10]. При оценивании рассматриваются выборки независимых случайных величин, каждая из которых подчиняется экспоненциальному распределению на вероятностном пространстве событий $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра с вероятностной мерой $P(\Omega) = 1$.

Естественным продолжением исследования оценки параметра экспоненциального распределения является проверка гипотез согласия для выборок на их согласованность с экспоненциальным распределением. Соответственно, возникает вопрос о доступных методах проверок гипотезы согласия с учетом вариабельности выборки и ситуаций известного и неизвестного параметра экспоненциального распределения. Основы проведения проверок гипотезы согласия были получены из книг Буре В. М., Парилина Е. М. [8], Буре В. М., Парилина Е. М., Седаков А. А. [11], Дерр В. Я. [12].

В данной бакалаврской работе рассматриваются существующие статистические тесты в пакетах для языка R, а также предлагается собственная реализация тестов на R. Таким образом, имеется возможность подтвердить или опровергнуть принадлежность выборки экспоненциальному закону распределения, а также повысить достоверность результатов параметрического оценивания.

В первой главе проведено оценивание параметра экспоненциального распределения методом максимального правдоподобия и исследование точности оценки для полных выборок для двух типов записи функции экспоненциального распределения: с параметром интенсивности 1 и с параметром масштаба 2. Во второй главе была получена оценка параметра для случаев цензурированных выборок I и II типа, а также множественного цензурирования в условиях цензурирования I и II типов, приведены примеры. В третьей главе были рассмотрены способы проверки гипотезы согласия на экспоненциальность в условиях полных данных и цензурированных II типа справа, так как этот тип является одним из наиболее часто встречающихся видов цензурирования. Все методы были протестированы на смоделированных данных, а также рассмотрен пример с экспериментальными данными.

Постановка задачи

Целью данной работы является оценить параметр экспоненциального распределения для различных типов выборки, найти оценку с минимальной дисперсией, изучить методы проверки гипотез согласия на экспоненциальность для практического применения в R и предложить свои программы для некоторых случаев, не имеющих реализации в пакетах R. Для выполнения поставленных целей необходимо:

- оценить параметр экспоненциального распределения методом максимального правдоподобия для двух типов записи функции экспоненциального распределения в условиях полной выборки;
- установить точность оценивания параметра по критерию минимальной дисперсии для каждого из типов отдельно: для параметра интенсивности λ и для параметра масштаба η;
- оценить параметр экспоненциального распределения методом максимального правдоподобия для случаев цензурированных данных I, II типа и множественного цензурирования и сделать выводы о свойствах оценки;
- для полученных оценок параметра привести примеры на реальных выборках;
- изучить методы проверки гипотез согласия на согласованность выборочных данных с законом экспоненциального распределения в условиях известного и неизвестного параметра экспоненциального распределения для случая полных и цензурированных II типа справа выборок;
- смоделировать выборки различных размеров, значений параметра и степени цензурирования;
- протестировать проверку гипотезы критериями согласия, имеющими реализацию в R;
- написать программный код для ситуаций, не имеющих реализации в R.

Обзор литературы

Для выполнения этой работы была изучена научная, учебно-методическая литература, а также научные публикации из журналов по теме. Во введении уже упоминались книги, изученные для подготовки общей теоретической базы для параметрического оценивания и проверки гипотез о выборках.

Использование экспоненциального распределения в теории надежности описано в книге Барлоу Р., Прошан Ф. [13] и в методическом пособии Акулинин С.А., Минаков С.А., Проскурина И.С. [14].

Дополнительная информация о цензурированных данных была получена из работ Kaplan E.L., Meier, P. [15], где авторы из области страхования впервые изучили цензурированные выборки I типа, В.М. Скрыпник, А.Е. Назин, Ю.Г. Приходько, Ю.Н. Благовещенский [16], где описано большое число схем цензурирования с указанием определенных планов при испытаниях технических устройств. Другие типы цензурирования, не используемые в этой работе, но приведенные во 2-й главе, описаны в работах Debasis Kundu , Avijit Joarder [17], J. C. Lindsey and L. M. Ryan [18], Zhigang Zhang, Jianguo Sun [19], Орлов А.И. [20], Лемешко Б.Ю. [21] и Артамоновский В.П., Кордонский Х.Б. [22]. Примеры экспериментальных данных взяты из монографии Nelson W. [23], в которой рассмотрены полные и цензурированные выборки, полученные посредством эксперимента по времени пробоя изолирующей жидкости (жидкий конденсатор) между электродами при разных уровнях напряжения. По теории время разряда подчиняется экспоненциальному распределению.

Различные методы проверки гипотез согласия описаны у Marsaglia J., Marsaglia G. [24], Fleming T. R. et al. [25], Pettitt A. N., M. A. Stephens [26], Michael J. R., Schucany W. R. [27], Stephens M. A. [28], Braun H. [29]. Для детального изучения конкретных критериев согласия были использованы работы Greenwood P. E., Nikulin M. S. [30], Большев Л. Н., Смирнов Н. В. [31], Anderson T. W., Darling D. A. [32]. Особенности выбора уровня значимости описаны в Kim Jae H. [33]. Возможные проблемы непараметрических критериев согласия, возникающих в условиях неизвестного параметра, поднимаются в статье Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б. [34].

Для проверки статистических гипотез в R использовались пакеты ‘goftest’ [35], ‘dgof’ [36], ‘GofCens’ [37]. Для создания своей программы для проверки гипотезы согласия использовались алгоритмы из Буре В. М., Парилина Е. М., Седаков [11] и D’Agostino Ralph B., Stephens Michael A. [38].

Глава 1. Минимальная дисперсия для экспоненциального распределения

1.1 Оценивание параметра методом максимального правдоподобия

Рассматривается выборка $t_1, \ldots, t_n$ из генеральной совокупности ξ с экспоненциальным распределением $F_\xi(t, \theta)$. Соответственно, известна функциональная форма F_ξ, но неизвестен параметр θ. Используя имеющуюся выборку можно оценить этот параметр. Тогда под *оценкой* понимается статистика $\hat{\theta}$ (функция от элементов выборки), значение которой предположительно близко к оцениваемому параметру θ.

Перечислим основные свойства оценок параметра, которые обуславливают точность оценки [8]:

- (асимптотическая) *несмещенность*;
- (сильная) *состоятельность*;
- (асимптотическая) *эффективность*.

Чем больше свойств соблюдается, тем точнее оценка и тем предпочтительней она будет.

Метод максимального правдоподобия был выбран, так как он обуславливает более точную оценку в отличие от метода моментов. Этот метод построения точечных оценок заключается в поиске максимума функции совместного появления событий (результатов наблюдений) в виде произведения вероятностей.

Во введении приводились два типа экспоненциального распределения с параметром λ и с параметром η. Применим метод максимального правдоподобия [8] для получения оценок параметров для полных данных $t_1, \ldots, t_n$. За величины t_i, $i = \overline{1:n}$ будем принимать независимые случайные величины — моменты времени отказов.

Тип 1. Определим функцию правдоподобия

$$L_\lambda = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i},$$

а также

$$(\ln L)_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \ln f(t_i) = n \ln \lambda - \lambda n \bar{t}, \quad \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

$$(\ln L)'_\lambda = \frac{\partial \ln L(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\bar{t} = -n\left\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\right\}.$$

Решение уравнение правдоподобия S_λ дает оценку $\widehat{\lambda}$. Контролируем перемену знака второй производной $(\ln L)''_\lambda$:

$$S_\lambda = (\ln L)'_\lambda = \frac{\partial \ln L(t, \lambda)}{\partial \lambda} = -n\left\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\right\} = 0, \quad (\ln L)''_\lambda < 0.$$

Тип 2. Аналогично получим решение для параметра η второго типа экспоненциального распределения:

$$L_\eta = L(t, \eta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \eta) = \left(\frac{1}{\eta}\right)^n e^{-\frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} t_i},$$

$$(\ln L)_\eta = \sum_{i=1}^{n} \ln f(t_i) = n \ln \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} t_i = -n \ln \eta - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

$$(\ln L)'_\eta = \frac{n}{\eta^2}\{\bar{t} - \eta\},$$

$$S_\eta = (\ln L)'_\eta = \frac{n}{\eta^2}\{\bar{t} - \eta\} = 0.$$

Тогда $\widehat{\eta} = \bar{t}$. Также получаем $(\ln L)''_\eta < 0$.

Можно видеть, что оценками параметров являются статистики от выборочного среднего $\bar{t}$ наблюдений $t_1, \ldots, t_n$.

1.2 Точность оценивания скалярного параметра θ

Для определения дисперсии оценок параметров λ, η воспользуемся подходом, изложенным в [8, 10]. Сначала решим задачу в общем виде для скалярного параметра θ, имеющего в качестве оценки $\widehat{\theta}$ некоторую функцию $\tau(\theta)$, где $\theta = \lambda$ или $\theta = \eta$. Обозначим производные функции правдоподобия для параметра θ:

$$L' = \frac{\partial L(t,\theta)}{\partial \theta}, \quad L'' = \frac{\partial^2 L(t,\theta)}{\partial \theta^2},$$

$$(\ln L)' = \frac{\partial \ln L(t,\theta)}{\partial \theta}, \quad (\ln L)'' = \frac{\partial^2 \ln L(t,\theta)}{\partial \theta^2}.$$

Для обоих распределений выполняются условия регулярности для функции правдоподобия:

1. Вероятность совместного наблюдения n событий

$$\int_R L dt = 1, \quad L = L(t,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta), \quad L > 0, \quad \theta \in \Theta \subset R.$$

2. Дифференцируемость функции правдоподобия и ее логарифма по θ:

   - можно изменять порядок дифференцирования и интегрирования, когда пределы интегрирования не зависят от θ;
   - есть связь математического ожидания двух производных и самих производных.

Приведем связи в подинтегральных функциях:

$$\int_R L dt = 1, \implies \int_R L' dt = 0;$$

или для $\ln L$

$$\int_R \left(\frac{1}{L} L'\right) L dt = M\Big\{(\ln L)'\Big\} = 0.$$

Продифференцируем последнее выражение и определим математические ожидания:

$$\int_R \left\{ \left(\frac{1}{L} L' \right) L' + L \left(\frac{1}{L} L' \right)'_\theta \right\} dt = 0,$$

$$\int_R \left\{ \Big((\ln L)' \Big)^2 + (\ln L)'' \right\} L dt = 0,$$

$$M \left\{ \Big((\ln L)' \Big)^2 \right\} + M \Big\{ (\ln L)'' \Big\} = 0,$$

$$M \left\{ \Big((\ln L)' \Big)^2 \right\} = -M \Big\{ (\ln L)'' \Big\}.$$

3. Решение ищется для несмещенной оценки T функции $\tau(\theta)$ от параметра θ. Потребуем равенства математического ожидания статистики (оценки) T и функции от параметра $\tau(\theta)$, а также чтобы математическое ожидание расхождения величин $\{T - \tau(\theta)\}$ было минимальным:

$$M(T) = M\big\{\tau(\theta)\big\} = \tau(\theta),$$

$$M\big\{T - \tau(\theta)\big\} = \int_R \Big(T - \tau(\theta) \Big) L dt = 0. \tag{3}$$

1.2.1 Неравенство Рао – Шварца – Крамера

Условия регулярности для функции правдоподобия L приводят к неравенству Рао – Шварца – Крамера для дисперсии оценки функции. Дифференцируя левую и правую части (3) с учетом условий регулярности и возведения в квадрат обеих частей, а также применив неравенство Коши – Шварца – Буняковского для математического ожидания случайных величин η_1, η_2, $\Big[M\{\eta_1 \eta_2\} \Big]^2 \leqslant M\eta_1^2 M\eta_2^2$, получаем неравенство Рао – Шварца – Крамера относительно дисперсии статистики:

$$D(T) = M \left\{ \Big(T - \tau(\theta) \Big)^2 \right\} \geqslant \frac{\big\{ -\tau'(\theta) \big\}^2}{M \left\{ \Big((\ln L)' \Big)^2 \right\}},$$

$$\Longrightarrow \quad D(T) \geqslant \frac{\big\{-\tau'(\theta)\big\}^2}{M\Big\{\Big((\ln L)'\Big)^2\Big\}} = -\frac{\big\{\tau'(\theta)\big\}^2}{M\Big\{(\ln L)''\Big\}}. \tag{4}$$

1.2.2 Условие достижения нижней границы неравенства

В [10] определяется необходимое и достаточное условие для достижения нижней границы неравенства Рао – Шварца – Крамера как пропорциональность $(T - \tau(\theta))$ и $(\ln L)'_\theta$ на всем пространстве определения параметра:

$$(\ln L)' = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = A(\theta)\big\{T - \tau(\theta)\big\}, \tag{5}$$

где A не зависит от значений элементов выборки, но может быть функцией от θ, T — статистика для θ, $\tau(\theta)$ — некоторая функция только от θ. Выпишем дисперсию

$$D\Big((\ln L)'\Big) = M\Big\{\Big((\ln L)'\Big)^2\Big\} = \big\{A(\theta)\big\}^2 D(T).$$

Достижение нижней границы неравенства (4):

$$D(T) = \frac{\big\{\tau'(\theta)\big\}^2}{\big\{A(\theta)\big\}^2 D(T)}, \quad \Longrightarrow \quad D(T) = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right|.$$

1.2.3 Информация Фишера

Определяется количество информации, которое может дать выборка данных о неизвестном параметре. При оценивании самого параметра θ для несмещенной оценки будем иметь $\tau'(\theta) = 1$ и дисперсия

$$D(T) = \frac{\big\{\tau'(\theta) = 1\big\}^2}{M\Big\{\Big((\ln L)'\Big)^2\Big\}} = \frac{1}{M\Big\{\Big((\ln L)'\Big)^2\Big\}}.$$

Информационное количество Фишера

$$I_n(\widehat{\theta}) = M\Big\{\big((\ln L)'\big)^2\Big\} = \big\{A(\theta)\big\}^2 D(T).$$

Также получаем эквивалентные функции для второй производной:

$$M\Big\{(\ln L)''\Big\} = -|A(\theta)|\tau'(\theta) = -\big\{A(\theta)\big\}^2 D(T) = (\ln L)''.$$

1.2.4 Свойства оценки

Следовательно, статистика T будет оценкой функции $\tau(\theta)$ с минимально достижимой границей дисперсии неравенства Рао – Шварца – Крамера (Minimum Variance Unbiased Estimator MVUE). В силу достижения нижней границы эта статистика по [10] будет иметь свойство достаточной статистики для $\tau(\theta)$. Свойства оценки максимального правдоподобия для $\tau(\theta)$:

- статистика T является:
  - несмещенной оценкой для параметра θ,
  - достаточной статистикой, так как является оценкой для параметра θ с минимально достижимой дисперсией;
- оценка $\widehat{\theta}$ является:
  - эффективной оценкой, так как является несмещенной оценкой и достигается нижняя граница ее дисперсии в неравенстве Рао – Шварца – Крамера,
  - асимптотически состоятельной оценкой, так как увеличение точности обеспечивается с увеличением объема выборки.

1.3 Точность оценивания для параметра λ, тип 1

Представим $(\ln L)'_\lambda$ в виде (5), где выполнены условия достижения нижней границы неравенства для функции $\tau(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$:

$$(\ln L)'_\lambda = A(\theta)\big\{T - \tau(\theta)\big\} = -n\Big\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\Big\},$$

$$A(\theta) = -n, \quad T_{(\frac{1}{\lambda})} = \bar{t}, \quad \tau(\theta) = \tau(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{\partial \tau(\lambda)}{\partial \lambda} = \tau'_\lambda(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Оценка параметра $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, ее дисперсия и информационное количество Фишера будут следующие:

$$(\ln L)' = -n\left\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\right\} = 0, \quad \widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \bar{t},$$

$$D(T) = D(\bar{t}) = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \left| -\frac{1}{n}\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{n\lambda^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

$$D\widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{n}(\bar{t})^2,$$

$$I_n\left(\frac{1}{\lambda}\right) = M\left\{\left((\ln L)'\right)^2\right\} = \left\{\left\{A(\theta)\right\}^2 D(T)\right\} = n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

$$M\left\{(\ln L)''\right\} = (\ln L)'' = -n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Следовательно, дисперсия

$$D(\widehat{\lambda}) > D\widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{(\bar{t})^2}{n}. \tag{6}$$

1.4 Точность оценивания параметра η, тип 2

Представим $(\ln L)'_\eta$ в виде (5) и решение уравнения правдоподобия:

$$(\ln L)'_\eta = \frac{n}{\eta^2}\left\{\bar{t} - \eta\right\} = 0, \quad A(\theta) = \frac{n}{\eta^2}, \quad T_\eta = \bar{t},$$

$$\tau(\theta) = \tau(\eta) = \eta, \quad \tau'_\eta(\eta) = 1,$$

$$S_\eta = (\ln L)'_\eta = -\frac{n}{\eta^2}\left\{\eta - \bar{t}\right\} = 0, \quad \widehat{\eta} = \bar{t}.$$

Тогда $T_\eta = \bar{t}$ есть достаточная статистика для η и является оценкой с минимально достижимой дисперсией. Дисперсия $D(T_\eta)$ определена для η:

$$D(\bar{t}) = \left|\frac{\tau'(\eta)}{A(\eta)}\right| = \frac{\eta^2}{n},$$

$$D(\widehat{\eta}) = \frac{(\bar{t})^2}{n}. \tag{7}$$

Определена информация Фишера $I_n(\widehat{\eta})$, содержащаяся в выборке размером n, стандартное отклонение s_η и коэффициент вариации υ_η, которые характеризуют точность оценивания:

$$I_n(\widehat{\eta}) = M\Big\{\big((\ln L)'\big)^2\Big\} = \big\{A(\eta)\big\}^2 D(T) = \frac{n}{\eta^2},$$

$$M\big((\ln L)''\big) = M\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta^2}\right) = M\left(-\frac{n}{\eta^3}\big\{2\bar{t} - \eta\big\}\right) =$$

$$= -\frac{n}{\eta^3}\big\{2M(\bar{t}) - \eta\big\} = -\frac{n}{\eta^3}\{2\eta - \eta\} = -\frac{n}{\eta^2},$$

$$M\Big\{\big((\ln L)'\big)^2\Big\} = -M\big((\ln L)''\big) = \frac{n}{\eta^2},$$

$$s_\eta = \sqrt{D(\widehat{\eta})}, \quad \upsilon_\eta = \frac{s_\eta}{\widehat{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, для второго типа выполнено необходимое и достаточное условие (5) для достижения нижней границы неравенства Рао – Шварца – Крамера. Выполнены требования по основным свойствам, которые предъявляются к оценкам параметра — состоятельность, несмещенность, эффективность. Можно сделать вывод, что второй тип распределения более предпочтителен.

Сравнением результатов для рассмотренных двух типов распределений. Имеем результаты (6) для функции $\tau(\lambda)$ от параметра λ и (7) для параметра η. Очевидна функциональная связь:

$$\widehat{\eta} = \widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \bar{t}, \quad D(\widehat{\eta}) = D\widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{(\bar{t})^2}{n}.$$

Рассмотрим пример. Возьмем полную выборку из работы [23], приведенную в виде данных эксперимента по времени пробоя изолирующей жидкости (жидкий конденсатор) между электродами при напряжении 30 кВ. По теории распределение определяется как экспоненциальное [23]. Выборка объема $n = 11$ содержит элементы: 7.74; 1.05; 20.46; 21.02; 22.66; 43.4; 47.3; 139.07; 144.12; 175.88; 194.9. Значения оценки, дисперсии, коэфициента вариации, и информации Фишера по выборке представлены в таблице 1.

Таблица 1: Результаты оценивания по выборке $n = 11$.

$\widehat{\eta}$	$D(\widehat{\eta})$	υ_η	$I_n(\widehat{\eta})$
75.7820	522.0804	0.3015	0.0019

1.5 Краткие итоги

Из двух рассмотренных типов экспоненциального распределения установлено, что второй тип распределения с параметром масштаба η предпочтителен для использования. Достаточной статистикой является выборочное среднее, а $\widehat{\eta}$ — несмещенной оценкой с минимально достижимой дисперсией. Для первого типа распределения с параметром λ не существует минимальной достижимой дисперсии оценки параметра, соответственно, $\widehat{\lambda}$ — смещенная оценка. Параметры η и $\frac{1}{\lambda}$ двух типов распределений связаны функционально.

Глава 2. Оценивание параметра при цензурировании

2.1 Виды цензурирования

Цензурирование бывает различных типов. Опишем основные виды цензурированных выборок:

- *цензурированные I типа* — выборка содержит часть полных данных до определенного времени t, после которого наблюдения прекращены;
- *цензурированные II типа* — выборка содержит часть полных данных в ранее заданном количестве, остальные наблюдения прекращены;
- *множественно-цензурированные в условиях цензурирования I и II типов* — выборка содержит как полные так и цензурированные данные, которые возникают при досрочной остановке наблюдений для некоторых объектов (изделий) для дополнительного исследования;
- *прогрессивно-гибридно цензурированные I и II типов* — выборка как гибрид цензурирования I и II типов, цель — обеспечить заданное общее время испытания и конкретное количество отказов;
- *интервально цензурированные* — выборки, которые цензурируются интервалами, то есть наблюдения проводились в моменты $t_1 < t_2$, отказ обнаружен в момент t_2, соответственно, точное время этого отказа цензурировано, и оно находится в интервале $(t_1;\ t_2]$. Еще одна категория цензурированных выборок с использованием интервалов наблюдения — группированные выборки.

Цензурирование I и II типа может быть *слева* и *справа*. Если это цензурирование слева, то отказ произошел в левостороннем интервале, например, $(0;\ t)$. Цензурирование справа ограничено интервалом $(t;\ \infty)$. Оно является наиболее часто встречаемым, и может произойти, например, когда наблюдения проводятся долго, и отказы всех устройств ждать не экономично. Тогда не отказавшие изделия имеют цензурированный момент отказа.

Как заявлялось во введении, в данной главе рассматриваются цензурированные выборки I и II типа справа и множественно цензурированные выборки в условиях I и II типа справа.

2.2 Цензурированные выборки I, II типа

Цензурированная выборка I типа определяется, когда наблюдения прекращаются по времени, например, в момент времени T', когда известны n полных результатов наблюдений $t_1, \dots, t_n$, и r изделий сняты с испытаний в исправном состоянии $T_1, \dots, T_r, T_i = T'$, $i = \overline{1:r}$. Цензурированная выборка II типа ограничена заранее задаваемым числом отказов n. Тогда последнее отказавшее изделие будет иметь в качестве момента отказа t_n. Оставшиеся в исправном состоянии r изделий снимаются с испытаний при наработке t_n, равной последнему отказавшему изделию. Определим индикатор d_i, $i = \overline{1:N}$, характеризующий событие как полное (d_i = 1) или как цензурированное (d_i = 0).

Для цензурированных выборок I и II типов не должно быть приостановленных и снятых с испытания изделий до наработки t_n. Прекращение наблюдений в условиях I и II типов позволяет иметь все наблюдения из n и r как случайные и независимые между собой величины. Произведение правдоподобия L_N для выборки размером N, содержащей n полных данных и r цензурированных I или II типа, будет иметь вид

$$L_N = L(t, \eta) = \prod_{i=1}^{N} (f(t_i, \eta))^{d_i} (1 - F(t_i, \eta))^{1-d_i}, \quad N = n + r.$$

Здесь функцией правдоподобия для полных данных является произведение функций плотностей, как в главе 1 с полными выборками. Функцией правдоподобия для цензурированных данных является произведение вероятностей [4] попадания отказа изделия (цензурированного) в область $(t_j; \infty)$, $j = \overline{n+1:N}$

$$1 - F(t_j, \eta) = \int_{t_j}^{\infty} f(t_j, \eta) dt.$$

Далее будем обозначать $F(t_j, \eta)$ как F_j. Для полных данных выборки n выпишем производные логарифмической функции правдоподобия

$$(\ln L_n)'_\eta = -\frac{n}{\eta^2}\{\eta - (\bar{t})_n\}, \quad (\bar{t})_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad (\ln L_n)''_\eta = -\frac{n}{\eta^2}.$$

Для j-го наблюдения, принадлежащего цензурированным данным, то есть $j = \overline{n+1 : N}$:

$$(\ln(1-F_j))'_\eta = \frac{(1-F_j)'_\eta}{1-F_j} = \frac{1}{\eta^2}t_j,$$

$$(\ln(1-F_j))''_\eta = \left(\frac{t_j}{\eta^2}\right)'_\eta = -\frac{2t_j}{\eta^3}.$$

Для всей группы цензурированных наблюдений производная функции правдоподобия

$$(\ln L_r)'_\eta = \frac{1}{\eta^2}\sum_{j=n+1}^{N} t_j = \frac{1}{\eta^2}\sum_{i=1}^{N}(1-d_i)t_i.$$

Соответственно, уравнение правдоподобия будет в виде суммы двух слагаемых

$$S_N = S_n + S_r = 0, \quad S_n = (\ln L_n)'_\eta, \quad S_r = (\ln L_r)'_\eta,$$

$$S_N = -\frac{n}{\eta^2}\{\eta - (\bar{t})_n\} + \frac{1}{\eta^2}\sum_{i=1}^{N}(1-d_i)t_i = \frac{1}{\eta^2}\left\{-n\eta + \sum_{i=1}^{N} d_i t_i + \sum_{i=1}^{N}(1-d_i)t_i\right\} =$$

$$= -\frac{n}{\eta^2}\left\{\eta - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i t_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{N}(1-d_i)t_i}{n}\right)\right\} = -\frac{n}{\eta^2}\left\{\eta - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{n}\right)\right\}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) дает оценку параметра η и статистику в точном виде:

$$\hat{\eta} = T_\eta = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i t_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{N}(1-d_i)t_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{n}. \quad (9)$$

Формула (9) справедлива для выборок I и II типов. Безусловно можно конкретизировать эту формулу для каждого из типов, но это не изменит ее сути. Рассмотрим пример. В работе Nelson W. [23] приведены результаты наблюдений испытания по времени пробоя изолирующей жидкости (жидкий конденсатор) между электродами при напряжении 30 кВ с прекращением наблюдений по времени с цензурой I типа. По теории распределение должно быть экспоненциальным. Число наблюдений $N = 10$, отказов $n = 10$, данные представлены в таблице 2, результаты расчетов — в таблице 3.

Таблица 2: Цензурированная выборка I типа.

Отказы, мин.		Цензурирование
i	t	Индикатор d_i
1	50	1
2	134	1
3	187	1
4	882	1
5	1450	1
6	1470	1
7	2290	1
8	2930	1
9	4180	1
10	15800	1
11	29200	0
12	86100	0

Решение приведем для трех вариантов.

Вариант 1. Выборка по условиям испытания является цензурированной I типа, расчеты проведем по формуле (9).

Вариант 2. Автор [23] в данном примере для оценки параметра по II типу цензурирования приводит расчет заменой оценки (9) на оценку, при которой все цензурированные наблюдения, превышающие наработку t_n, принимаются равными самому t_n. Выборка становится цензурированной II типа. В этом случае из расчетов исключаются наработки не отказавших изделий под номерами 11, 12, и принимаются равными наработке $t_n = t_{10} = 15800$.

Вариант 3. Используем рассуждения из [23] о переводе выборки из I типа на II тип в точке $t_{10} = 15800$, как описано в варианте 2. Все равно бросается в глаза резкое различие значений 10–12 наблюдений по отношению к 1–9 наблюдениям. Поэтому можно представить данную выборку как имеющую 9 полных данных, и 10–12 наблюдения посчитать цензурированными II типа, соответственно принять их равными $t_9 = 4180$. Такая коррекция данных возможна при проверке гипотезы о принадлежности выборки экспоненциальному распределению и будет рассмотрена в третьей главе.

Таблица 3: Результаты расчета цензурированной выборки I типа, $N = 12$.

	n
Вариант 1. I тип, формула (9), $n = 10$	14467.3
Вариант 2. Замена I типа на II тип, $n = 10$	6097.3
Вариант 3. Замена I типа на II тип, $n = 9$	2901.4

В качестве вывода можно отметить, что отсутствие полной выборки не дает возможности сравнения полученных результатов расчетов, поэтому нельзя справедливо интерпретировать оценки. Также наблюдается резкое различие в оценках параметра при замене данных I типа на II тип.

2.3 Множественное цензурирование

Множественное цензурирование появляется в случае приостановки наблюдения части изделий при наработке меньшей, чем t_n. Если такие есть, то они регистрируются как цензурированные. Подобные примеры приведены также из [23] в таблицах 4, 5.

В таблице 4, начиная с отказа $t_9 = 84000$, последующие цензурированные результаты наблюдений имеют I тип цензуры, а в таблице 5, начиная с t_9, последующие отказы имеют II тип цензуры.

В случае множественного цензурирования, элементы с цензурой, так же как в случае просто I или II цензурирования, учитываются во втором слагаемом уравнения правдоподобия из (8), и оценка просто вычисляется по формуле (9).

Проведем вычисления с примерами из таблиц 4, 5. В [23] приведен пример испытания аналогичный примеру из таблицы 2, но при 25 кВ с прекращением наблюдений по времени (цензура I типа). По теории распределение экспоненциально. Число наблюдений $N = 12$, отказов $n = 6$. Данные представлены в таблице 4.

Таблица 4: Примеры множественной цензуры в условиях цензурирования I типа при $N = 12$.

Таблица 5: Примеры множественной цензуры в условиях цензурирования I и II типов при $N = 12$.

Отказы, мин.		Цензурирование
i	t	Индикатор d_i
1	521	1
2	2520	1
3	4060	1
4	12600	1
5	40300	1
6	50600	0
7	52900	0
8	67300	0
9	84000	1
10	85500	0
11	85700	0
12	86400	0

Отказы, мин.		Цензурирование
i	t	Индикатор d_i
1	521	1
2	2520	1
3	4060	1
4	12600	1
5	40300	1
6	50600	0
7	52900	0
8	67300	0
9	84000	1
10	84000	0
11	84000	0
12	84000	0

Решения приведем в двух вариантах. Результаты расчетов продемонстрированы в таблице 6.

Вариант 1. Берется вышеописанный случай, то есть, данные из таблицы 4, где цензурирование только I типа.

Вариант 2. Проводится замена I типа цензурирования справа на II тип. Полученная выборка представлена в таблице 5.

Таблица 6: Результаты анализа цензурированной выборки.

	$\hat{\eta}$
Вариант 1. I тип	95400.17
Вариант 2. Замена I типа на II тип	74466.69

В данном случае мы не имеем возможности сравнить результаты, и полученная оценка при замене I типа на II тип значительно отличается от “оригинальной”.

2.4 Замечания к оцениванию параметра в условиях цензурирования

Оценка параметра в (9) является точной оценкой метода максимального правдоподобия для цензурированных выборок I или II типа. Соответственно, возникает вопрос о свойствах этой оценки и точности оценивания параметра.

Сделать выводы аналогичные первой главе не представляется возможным, так как статистическая база, использованная для получения свойств оценки и достижения минимальной границы дисперсии неравенства Рао – Шварца – Крамера, рассчитана именно на полные данные и не подразумевает цензурирования. Следовательно, эффективность, несмещенность и асимптотическая состоятельность оценки достигается при отсутствии точек цензурирования, то есть при полных данных, тогда оценка параметра получается в виде первого слагаемого из (8).

При появлении второго слагаемого (S_r) в уравнении правдоподобии ситуация меняется. При постановке задачи оценивания подразумевается, что моменты отказов и моменты цензур независимы друг от друга. Тогда в силу этой независимости цензурирующие точки должны иметь отдельное решение: $S_N = S_n + S_r = 0 \implies S_n = 0, S_r = 0$. Но исходя из полученных вычислений решение отсутствует для любого отдельного наблюдения из S_r. Таким образом оценка становится смещенной (появляется смещение) и статистика (9) дает смещенную оценку параметра.

Можно предложить два варианта улучшения точности оценивания параметра для случая цензурированных выборок.

1. Анализировать обрабатываемую выборку с последующим преобразованием выборки. Например, если испытываемые изделия имеют неоднородное качество изготовления, можно присоединить данные из других выборок для аналогичных изделий. Для случая возможных усталостных повреждений — выборки могут быть дополнены данными, относящимся к другим вероятностным распределениям и взяты из другой выборки из числа не отказавших к определенному времени t. Как пример можно привести выборки из таблицы 2, где данные t_{10}, t_{11}, t_{12} резко отличаются от первых 9 данных и могут представлять другую совокупность с

другим распределением.

2. Вводить интервальное цензурирование. В природе не существует изделий и биологических систем (человек), с бесконечным ресурсом по времени эксплуатации. Соответственно, можно рассматривать ограниченные интервалы наблюдений и в этом случае возможно рассмотреть отдельно случай S_r и пытаться устранить смещение. Период внезапных отказов, связанных с экспоненциальным распределением, отвечает только некоторому периоду нормальной эксплуатации. Практически всегда за этим этапом следует период старения вплоть до снятия с эксплуатации.

2.5 Краткие итоги

Во второй главе было проведено исследование точности оценивания параметра η (параметра масштаба) экспоненциального распределения по различным типам цензурированных выборок.

Были изучены цензурированные выборки I, II типов, а также множественное цензурирование в условиях цензур I и II типов. В данной главе были исследован каждый вид изучаемых выборок для оценки параметров. Получена формула (9) для вычисления оценки параметров для цензурированных выборок I и II типов, а также множественного цензурирования. В рассмотренных видах выборок статистикой является выборочное среднее T_η, равное отношению суммарного времени испытания к числу полученных отказов.

Также в этой главе были приведены численные примеры оценивания по реальным данным для всех изученных цензурированных выборок.

Глава 3. Проверка гипотез согласия об экспоненциальности

3.1 Основные понятия теории проверки гипотез

Одним из важных аспектов в теории надежности является определение закона распределения случайной величины. При оценке показателей надежности изделия необходим статистический аппарат для проверки выборки на принадлежность тому или иному распределению и принятия решения. Каждый из законов распределения имеет свои особенности и описывает конкретные случаи и причины отказа, поэтому крайне важно установить какому распределению случайной величины соответствует выборка. Как было отмечено ранее, экспоненциальное распределение, имеющее постоянную интенсивность отказов, описывает внезапные отказы устройств и конструкций. Распределение Вейбулла характеризует усталостные отказы, когда интенсивность отказов возрастает с течением времени, например, в [13] оно описывает отказы вакуумных приборов:

$$F(t, \eta, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]; \quad t \geqslant 0; \quad \beta > 1.$$

Нормальное распределение также описывает усталостные отказы, когда появление отказа зависит от большого числа случайных факторов, близких по силе влияния [14]:

$$F(t, \alpha, \sigma) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right); \quad t \geqslant 0; \quad \mu, \sigma > 0; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа аргумента $\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.

Логарифмически-нормальное распределение в работе [5] описывает появление усталостных повреждений в конструкциях под воздействием повторяющихся нагрузок, в том числе и знакопеременных:

$$F(\ln t, \alpha, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right); \quad t \geqslant 0; \quad \mu, \sigma > 0,$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа аргумента $\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)$.

В этой главе будет рассмотрено именно экспоненциальное распределение и проверка на принадлежность экспоненциальному закону распределения выборки с учетом имеющейся вариабельности в R.

Во введении к работе определено вероятностное пространство рассматриваемых событий наблюдений независимых и одинаково распределенных случайных величин. Это относится к результатам наблюдений и моментам осмотров, если они имеют место быть. Предполагается, что неизвестное распределение является непрерывным.

Пусть имеется выборка $t_1, t_2, \ldots, t_n$, мы предполагаем, что элементы выборки распределены экспоненциально.. Следовательно, выдвигается *статистическая гипотеза*, что генеральная совокупность ξ, из которой извлечена эта выборка, имеет функцию распределения $F_\xi = 1 - e^{\frac{t}{\eta}}$, $\eta > 0$. Статистическая гипотеза называется *простой*, если закон распределения генеральной совокупности определен однозначно с точностью до значения параметров. В обратном случае гипотеза называется *сложной*. Выдвинутую гипотезу (нулевую) обозначим H_0. Альтернативную гипотезу обозначим H_1.

В результате проверки гипотезы мы хотим либо принять нулевую гипотезу H_0, либо ее отклонить в пользу альтернативной гипотезы H_1. Для получения количественной оценки достоверности вывода применяется статистический критерий, который определяет правило проверки гипотезы. То есть *статистический критерий* сопоставляет нулевую гипотезу с исследуемой выборкой. Решение о принятии или отклонении нулевой гипотезы принимается на основании статистики критерия S, являющейся функцией от выборки. Нет оснований для отклонения нулевой гипотезы, если статистика попадает в *доверительную область гипотезы* (не попадает в *критическую область*). Точки, разделяющие доверительную и критическую области, называются критическими. В случае, если значение статистики всё-таки попадает в критическую область, нулевая гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная H_1.

Решение о принятии или отклонении статистической гипотезы также может основываться на значении *p-value*. Величина p-value — это условная вероятность, отражающая жизнеспособность нулевой гипотезы. То есть, это конвертированная статистика критерия согласия в равномерно распределенную случайную величину на $[0, 1)$ [24]. P-value сравнивается с установленным нами уровнем значимости α. При p-value < α гипотеза H_0 отвергается, а если p-value > α нет оснований отклонить нулевую гипотезу. Чем больше p-value, тем лучше и меньше оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Результат проверки гипотезы не может быть абсолютно точным, так как проверяется непротиворечивость гипотезы и имеющихся наблюдений. Соответственно, под понятием “принятие нулевой гипотезы” подразумевается хорошая согласованность выборки с гипотезой H_0, но не доказанное утверждение, что выборочные данные принадлежат определённому (экспоненциальному) закону распределения.

При проверке могут возникнуть ошибки двух типов:

- *ошибка первого рода* возникает при отклонении нулевой гипотезы H_0, хотя она верна;
- *ошибка второго рода* возникает при принятии нулевой гипотезы H_0, хотя она неверна.

Вероятность ошибки первого рода является уровнем значимости статистического критерия. Уровень значимости α выбирается самостоятельно, учитывая специфику анализируемых выборочных данных [33], и обычно очень малым значением, например 0.02; 0.05; 0.1. Вероятность ошибки второго рода обозначается β. Тогда $1 - \beta$ будет мощностью критерия. Избежать ошибки первого рода представляет собой более важную задачу, чем избежать ошибки второго рода, так как результаты в первом случае могут иметь более негативные последствия [12].

В работе рассматривается один из типов статистических гипотез — гипотеза согласия, методами проверки которых являются критерии согласия. Тесты согласия (Goodness-of-fit tests) позволяют ответить на вопрос принадлежности исследуемых выборок экспоненциальному распределению. Используя критерии согласия, будет получен вывод о подчинении выборки из генеральной совокупности ξ закону экспоненциального распределения.

Тогда $H_0 : F_\xi(\cdot) = F_0(\cdot)$; $H_1 : F_\xi(\cdot) \neq F_0(\cdot)$; в условиях простой гипотезы, и $H_0 : F_\xi(\cdot) = F_0(\cdot, \theta)$; $H_1 : F_\xi(\cdot) \neq F_0(\cdot, \theta)$; в условиях сложной [8]. $F_0(\cdot)$ — полностью известная функция экспоненциального распределения, $F_0(\cdot, \theta) = 1 - e^{\frac{t}{\theta}}$, $\theta > 0$ — функция экспоненциального распределения с неизвестным параметром масштаба. Также следует отметить, что существуют параметрические критерии согласия и непараметрические (по-другому их называют "свободные от распределения"). Мы будем использовать именно непараметрические критерии на базе критерия согласия Колмогорова – Смирнова [24], так как они используются чаще в статистических исследованиях. Также одним из популярнейших критериев согласия является критерий согласия Пирсона χ^2, но в его основе лежит группирование данных, что создает трудности в проверке выборок маленьких размеров [30]. Потому было принято решение не рассматривать в данной работе этот критерий. Целью работы не является подробно сравнить критерии согласия по мощности проверки гипотезы, так как полученные выводы от разных критериев являются дополнением друг для друга.

В условиях проверки гипотезы согласия на экспоненциальное распределение могут возникнуть 4 ситуации:

- параметр известен, полные данные;
- параметр известен, цензурированные данные;
- параметр неизвестен, полные данные;
- параметр неизвестен, цензурированные данные.

Далее в этой главе рассматриваются отдельно полные данные и цензурированные II типа справа, и доступные для проверки гипотез согласия критерии в R.

3.2 Известный параметр экспоненциального распределения

3.2.1 Ситуация известного параметра

Параметр может быть известен в следующих случаях:

- значение параметра указывалось для конкретного сценария, например, при моделировании данных;
- значение параметра получено из оценки предыдущих выборок для идентичного случая отказов.

Способ проверки гипотезы согласия, если параметр известен, осуществляется проверкой простой гипотезы, алгоритм которой таков: для выбранного критерия согласия вычисляется статистика S, далее отслеживается, попадает ли значение статистики в критическую область. Для этого существуют таблицы квантилей (критических точек) для различных уровней значимости α, сравнив значение статистики с которыми, принимается решение об отвержении или принятии гипотезы H_0. Для критериев согласия рассмотренных далее критическая область правосторонняя. То есть критическая область представляет собой интервал $(z_{1-\alpha}; \infty)$, где $z_{1-\alpha}$ — квантиль уровня α.

Другим вариантом, для вывода о согласованности гипотезы согласия с законом распределения генеральной совокупности, будет вычислить статистику S, вычислить p-value и сравнить с уровнем значимости.

Подход проверки простой гипотезы хорошо изучен и прост в использовании. Рассмотрим отдельно случай полных данных и цензурированных II типа справа в R и доступные критерии согласия для проверки.

3.2.2 Полные данные

Для проверки на согласованность выборки с законом экспоненциального распределения для полных данных существуют пакеты R — ‘goftest’ [35] и ‘dgof’ [36].

Пакет ‘dgof’ содержит функцию ‘ks.test’, с помощью которой проводится проверка гипотезы критерием согласия Колмогорова – Смирнова. Критерий осуществляет проверку гипотезы согласия посредством вычисления “расстояния” (разность функций) между эмпирической выборочной функцией распределения $F_n(t)$ и кумулятивной функцией теоретического распределения $F_0(t)$ [31].

Статистика определяется следующим образом [31]:

$$D_n = \sup_{|t|<\infty} |F_n(t) - F_0(t)|.$$

Также можно использовать эквивалентную формулу:

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$

$$D_n^+ = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{ \frac{i}{n} - F_0(t_i) \right\}, \quad D_n^- = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{ F_0(t_i) - \frac{i-1}{n} \right\},$$

где $t_1, \ldots, t_n$ — выборка, упорядоченная по возрастанию, n — объем выборки.

Используя пакет ‘goftest’ можно проверить гипотезу согласия критериями Крамера – фон – Мизеса (критерий ω^2) и Андерсона – Дарлинга (критерий Ω^2) функциями ‘cvm.test’ и ‘ad.test’ соответственно.

Критерий Крамера – фон – Мизеса представляет собой критерий согласия, статистика которого имеет вид [31]

$$S_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \big[F_n(t) - F_0(t)\big]^2 dF_0(t)$$

или для практического вычисления

$$S_\omega = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F_0(t_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2.$$

Критерий Андерсона-Дарлинга имеет статистику вида [32]

$$S_\Omega = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\big[F_n(t) - F_0(t)\big]^2}{F_0(t)(1 - F_0(t))},$$

или

$$S_\Omega = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \Big[\ln(F_0(t_i)) + \ln(1 - F_0(t_{n-i+1})) \Big].$$

Оба эти критерии основаны на квадратичной метрике, в отличие от критерия Колмогорова – Смирнова, где “расстояние” между гипотетическим и теоретическим распределением выражалось в равномерной метрике [31].

P-value получается методом, описанном в [24].

Тестирование данных критериев в R проводилось по выборкам размеров $n = 10, 20, 30, 50, 100, 500$. Выборки моделировались из экспоненциально распределенной генеральной совокупности с параметром масштаба $\eta = 2/3; 1; 2$. Значения параметра были выбраны случайным образом для разнообразия эксперимента.

Результаты проверок гипотез критериями согласия Колмогорова – Смирнова, Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга для выборок размера $10, 30, 100$ для параметра $\eta = 2$ представлены в таблице 7. Для другого значения параметра и объема выборки результат аналогичный.

Таблица 7: Результаты проверок гипотез согласия для полных данных для параметра $\eta = 2$ критериями согласия Колмогорова – Смирнова, Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга.

Размер выборки n	Значение параметра η		Колмогоров – Смирнов	Крамер – фон – Мизес	Андерсон – Дарлинг
10	2	S	0.1619	0.0486	0.3222
		p-value	0.9196	0.8952	0.9191
30		S	0.1252	0.0709	0.4998
		p-value	0.6887	0.7498	0.7457
100		S	0.0600	0.0405	0.2878
		p-value	0.8642	0.9316	0.9469

В таблице представлены значения статистик и p-value. По значению p-value при уровне значимости $\alpha = 0.5$ можно утверждать, что критерии согласия подтвердили теоретическое предположение об экспоненциальном законе распределения выборок с параметром масштаба равным 2. Все три критерия показали похожие результаты.

3.2.3 Цензурированные данные II типа справа

Проверку гипотез об экспоненциальном распределении для цензурированных выборок II типа справа можно провести при помощи пакета ‘GofCens’ [37]. Доступные критерии для проверки гипотез согласия идентичны критериям для полных данных: критерий Колмогорова – Смирнова, критерий Крамера – фон – Мизеса, критерий Андерсона – Дарлинга. Функции для проведения проверки, соответственно, ‘KScens’, ‘CMcens’, ‘ADcens’. Статистики критериев Колмогорова – Смирнова и Крамера – фон – Мизеса модифицированы с учетом цензурирования II типа справа [25, 26]. Статистика критерия Андерсона – Дарлинга и p-value вычисляются методом “бутстреп” [24].

Тестирование проводилось для тех же объемов выборок и значений параметра масштаба, что и для случая полных данных, но вводилось цензурирование II типа справа на $10\%, 20\%, \ldots, 80\%$ от объема выборки.

Результаты тестирования гипотез согласия на принадлежность цензурированных выборок II типа справа экспоненциальному распределению представлены в таблице 8 для размеров выборки $n = 10, 20, 50, 100$ со степенью цензурирования $10\%, 30\%, 50\%$ для параметра $\eta = 2/3$.

Таблица 8: Результаты проверки гипотезы согласия для уровней цензурирования II типа справа $10\%, 30\%, 50\%$ для параметра $\eta = 2/3$ критериями согласия Колмогорова – Смирнова, Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга.

			Колмогоров – Смирнов			Крамер – фон – Мизес			Андерсон – Дарлинг		
n	η		10%	30%	50%	10%	30%	50%	10%	30%	50%
10	2/3	S	0.668	0.420	0.512	0.111	0.103	0.215	1.351	0.401	1.344
		p-value	0.759	0.982	0.812	0.339	0.491	0.234	0.451	0.653	0.356
20		S	0.880	0.883	0.787	0.119	0.209	0.472	1.035	1.907	2.553
		p-value	0.418	0.365	0.381	0.151	0.211	0.220	0.136	0.156	0.222
50		S	0.977	0.977	0.792	0.169	0.405	1.076	0.973	1.582	4.087
		p-value	0.296	0.273	0.405	0.133	0.094	0.125	0.186	0.273	0.349
100		S	1.032	0.908	0.946	0.115	0.684	2.119	0.851	4.429	9.114
		p-value	0.237	0.349	0.228	0.118	0.174	0.165	0.131	0.286	0.312

По полученным значениям p-value можно сказать, что критерии Колмогорова – Смирнова, Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга подтверждают согласованность выборочных значений с законом экспоненциального распределения при уровне значимости 0.05. Критерий Колмогорова – Смирнова продемонстрировал более высокие значения p-value, чем другие критерии, в особенности для малых значений выборки $(n = 10)$. В остальном критерии показали схожие результаты.

3.3 Неизвестный параметр экспоненциального распределения

3.3.1 Ситуации неизвестного параметра

Ситуация, когда параметр распределения неизвестен может возникнуть в нескольких случаях:

- нет информации ни о законе распределения выборочных данных, ни о параметре, соответственно;
- данные проверяются впервые и есть основания предположить их закон распределения в общем виде $F_0(\cdot, \theta)$;
- в случае двухпараметрического или трехпараметрического распределения, например распределение Вейбулла, когда известно значение только одного параметра.

Существует несколько способов проверки гипотез согласия при неизвестном параметре.

1. Оценивается параметр по выборке, например, методом максимального правдоподобия, и проверяется простая гипотеза согласия о согласованности выборки с законом распределения [27]. Этот метод значительно увеличивает вероятность ошибки второго рода [34]. Поэтому предпочтительней выбрать другой способ проверки.

2. Оценивается параметр по части выборки, например, по половине, и проверяется простая гипотеза согласия по оставшейся части [28]. Чем больше выборка, тем, соответственно, эффективнее такой метод.

3. Оценивается параметр по выборке, вычисляется модифицированная статистика. Вывод о справедливости нулевой гипотезы принимается с учетом модифицированных таблиц квантилей [11]. Именно такой метод в русскоязычной литературе [8, 11, 34] называется проверкой сложной гипотезы согласия.

Далее рассмотрим детально случаи полной и цензурированной выборки II типа справа при неизвестном параметре функции экспоненциального распределения.

3.3.2 Полные данные

Для проверки согласованности выборки с экспоненциальным распределением для полных данных при неизвестном параметре η подходит пакет R 'goftest' [35], который был описан в пункте 3.2.2. для случая известного параметра. Принадлежность функции распределения генеральной совокупности к семейству функций экспоненциального распределения можно проверить по критериям согласия Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга идентичными функциями, что и для случая простой гипотезы, но необходимо указать в аргументах функций, что параметр экспоненциального распределения неизвестен. Оценка параметра проводится предварительно пользователем.

Функции 'cvm.test', 'ad.test' вычисляют модифицированные статистики и p-value по алгоритмам, описанным в [29].

Проведено тестирование критериев согласия по данным, идентичным случаю с известным параметром η. Результаты проверок сложных гипотез согласия критериями Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга на закон экспоненциального распределения для объемов выборки размера $n = 10, 20, 50, 500$ приведены в таблице 9. Указанный параметр при моделировании: $\eta = 1$. Также в таблице приведены оценки параметра масштаба по формуле 9 из второй главы.

Таблица 9: Результаты проверок сложной гипотезы согласия на экспоненциальность критериями согласия Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга (выборка с экспоненциальным распределением).

Размер выборки n	Значение параметра η	Оценка $\hat{\eta}$		Крамер – вон – Мизес	Андерсон – Дарлинг
10	1	0.9892	S	0.3072	1.4873
			p-value	0.3346	0.4495
20		0.8374	S	0.1101	0.9082
			p-value	0.9605	0.8933
50		0.9553	S	0.1917	2.3087
			p-value	0.9067	0.3723
500		1.0107	S	0.3591	3.6525
			p-value	0.8810	0.253

Результаты для других значений n и η аналогичны. Нет оснований отвергать нулевую гипотезу об экспоненциальном распределении при уровне значимости 0.05 при полученных значениях p-value. Оба критерия согласия подтвердили согласованность гипотезы о распределении выборочных данных.

Так как мы рассматриваем проверку гипотезы о согласованности распределения выборочных значений с экспоненциальным законом распределения в общем, для полноты эксперимента с тестированием критериев согласия можно проверить выборки изначально не являющиеся экспоненциальными. Таким образом будет получено представление о вероятности ошибки второго рода. Протестируем смоделированные выборки с законом распределения Вейбулла с параметрами $\eta = 3$ и $\beta = 4$ для выборок того же объема. Результаты представим в таблице 10.

Таблица 10: Результаты проверок сложной гипотезы согласия на экспоненциальность критериями согласия Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга (выборка с распределением Вейбулла).

Размер выборки n		Крамер – фон – Мизес	Андерсон – Дарлинг
10	S	0.3174	1.4625
	p-value	0.3147	0.4609
20	S	0.3628	1.6814
	p-value	0.3072	0.4534
50	S	0.5021	2.6833
	p-value	0.2263	0.2561
500	S	1.5694	6.5337
	p-value	0.0016	0.0127

По полученным значениям видно, что для выборок маленьких и средних размеров ($n < 500$) при уровне значимости $\alpha = 0.05$ нулевая гипотеза H_0 об экспоненциальности принимается, хотя она неверна. Это свидетельствует о том, что мощность критериев Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга для таких объемов выборок низкая. При $n > 500$ гипотеза справедливо отклоняется.

В R нет доступного пакета для случая неизвестного параметра экспоненциального распределения с проверкой гипотезы критерием Колмогорова – Смирнова для полных выборок. Поэтому предлагается для использования мною разработанный код с функцией ‘KS.test.my’ в R для полных выборок, см. Приложение 1, основанный на алгоритме, описанном в [11]. Эта программа осуществляет проверку сложной гипотезы согласия на экспоненциальное распределение для уровня значимости $\alpha = 0.05$. В аргументы функции ‘KS.test.my’ вводится вектор значений элементов выборки. Вывод функции для экспоненциально распределенной смоделированной выборки с параметром масштаба $\eta = 4$ объема $n = 20$ представлен ниже:

```
Критерий Колмогорова-Смирнова: гипотеза H0 принимается. Статистика D 0.102 < 1.094
```

Результаты тестирования проверок гипотез согласия с использованием данной программы приведены в таблице 11 для идентичных данных таблицы 9.

Таблица 11: Результаты проверки сложной гипотезы согласия на экспоненциальность с использованием программы ‘KS.test.my’ (выборка с экспоненциальным распределением).

Размер выборки n	Значение параметра η	Оценка $\hat{\eta}$		Колмогоров – Смирнов
10	1	0.9892	D	0.188
			H_0	принимается
20		0.8374	D	0.253
			H_0	принимается
50		0.9553	D	0.051
			H_0	принимается
500		1.0107	D	0.069
			H_0	принимается

Все выборки в результате проверки гипотезы подтвердили принадлежность экспоненциальному распределению, нулевая гипотеза H_0 принимается.

Аналогично проведем проверку гипотезы согласия критерием Колмогорова – Смирнова функцией ‘KS.test.my’ для выборок с распределением Вейбулла, использованных в таблице 10. Полученные статистики и результат принятия или отклонения гипотезы H_0 представлены в таблице 12.

Нулевая гипотеза об экспоненциальности отклоняется начиная с объема $n = 30$ (результат не был включен в таблицу). Только для маленьких объемов выборки возникает ошибка второго рода. Следовательно, мощность этого критерия выше, чем для критериев из пакета ‘goftest‘.

Таблица 12: Результаты проверки сложной гипотезы согласия на экспоненциальность с использованием программы “KS.test.my” (выборка с распределением Вейбулла).

Размер выборки n		Колмогоров – Смирнов
10	D	0.85
	H_0	принимается
20	D	0.852
	H_0	принимается
50	D	1.367
	H_0	отклоняется
500	D	3.571
	H_0	отклоняется

3.3.3 Цензурированные данные II типа справа

В R не существует пакетов для проверки гипотезы согласия на принадлежность цензурированной выборки II типа справа экспоненциальному распределению для случая неизвестного параметра η. Проверка такого рода сложной гипотезы описана в [38]. В рамках моей работы была создана программа в R, см. Приложение 2, осуществляющая проверку сложной гипотезы для описанного выше случая. Программа включает в себя проверку сложных гипотез согласия критериями Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга для уровня значимости $\alpha = 0.05$. Параметрами функции ‘CENS.test.my’ является вектор из элементов выборки, время отказов которых точно известно, и общее число наблюдений.

Вывод функции ‘CENS.test.my’ для смоделированной экспоненциальной выборки объема $n = 10$ со степенью цензурирования 20% и параметром $\eta = 3$ следующий:

```
Критерий Крамера-фон-Мизеса: гипотеза H0 принимается. Статистика W2 0.1422 < 0.156
Критерий Андерсона-Дарлинга: гипотеза H0 принимается. Статистика A2 0.7454 < 0.929
Оценка параметра eta = 3.8751
```

Вывод функции ‘CENS.test.my’ для смоделированной выборки с распределением Вейбулла объема $n = 10$ со степенью цензурирования 20% и параметрами $\eta = 2$ и $\beta = 2$:

```
Критерий Крамера-фон-Мизеса: гипотеза H0 отклоняется. Статистика W2 0.202 > 0.156
Критерий Андерсона-Дарлинга: гипотеза H0 отклоняется. Статистика A2 1.0455 > 0.929
Оценка параметра eta = 0.5209
```

Первые результаты тестирования проверок гипотез согласия с использованием данной программы приведены в таблице 13 для выборок объема $n = 10, 30, 100$ со степенью цензурирования $10\%, 30\%, 60\%$ и заданным при моделировании параметром распределения $\eta = 2$.

Таблица 13: Результаты проверки сложной гипотезы согласия на экспоненциальность с использованием программы 'CENS.test.my' для цензурированной выборки II типа справа (выборка с экспоненциальным распределением).

			Крамер – фон – Мизес			Андерсон – Дарлинг		
Размер выборки n	Значение параметра η		10%	30%	60%	10%	30%	60%
10	2	S	0.0441	0.0568	0.0115	0.2517	0.2937	0.1034
		H_0	прин.	прин.	прин.	прин.	прин.	прин.
30		S	0.0767	0.0353	0.0137	0.4251	0.2395	0.1393
		H_0	прин.	прин.	прин.	прин.	прин.	прин.
100		S	0.026	0.0229	0.0113	0.1981	0.1461	0.0984
		H_0	прин.	прин.	прин.	прин.	прин.	прин.

Можно видеть, что во всех тестируемых случаях гипотеза принимается, так как полученная статистика больше квантиля.

Результаты проверки гипотезы согласия функцией 'CENS.test.my' на выборках с распределением Вейбулла (те же, что и для случая из пункта 3.3.2) представлены в таблице 14.

Таблица 14: Результаты проверки сложной гипотезы согласия на экспоненциальность с использованием программы 'CENS.test.my' для цензурированной выборки II типа справа (выборка с распределением Вейбулла).

		Крамер – фон – Мизес			Андерсон – Дарлинг		
Размер выборки		10%	30%	60%	10%	30%	60%
10	S	0.4552	0.2765	0.0598	2.0878	1.3572	0.4085
	H_0	откл.	откл.	откл.	откл.	откл.	прин.
30	S	1.1129	0.6425	0.171	5.2506	3.2921	1.1805
	H_0	откл.	откл.	откл.	откл.	откл.	откл.
100	S	3.7911	2.1268	0.5162	17.8176	10.8966	3.6418
	H_0	откл.	откл.	откл.	откл.	откл.	откл.

Нулевая гипотеза об экспоненциальности отклоняется. Только в единичных случаях происходит ошибка второго рода, что свидетельтсвует о высокой мощности критерия. Результат проверки совпадает с теоритически ожидаемым.

Приведём пример проверки гипотезы согласия с цензурированными данными, полученными экспериментальным путем в [23], на экспоненциальность функцией 'CENS.test.my'. Выборка идентична рассмотренной во второй главе в таблице 2. В выборке приведены данные по времени до пробоя изоляционной жидкости при напряжении 30 кВ. По теории данные распределены экспоненциально. Параметр масштаба неизвестен. Выборка объема $n = 12$. Исходная выборка принадлежала I типу цензурирования, но автор [23] при оценивании параметра переводил выборку в цензурированную II типа. В таком варианте точкой цензурирования является время $t_n = 15800$, последующие два значения цензурированы. Проверим выборку на согласованность с экспоненциальным распределением функцией 'CENS.test.my'. Результат работы функции:

```
Критерий Крамера-фон-Мизеса: гипотеза H0 отклоняется. Статистика W2 0.3376 > 0.156
Критерий Андерсона-Дарлинга: гипотеза H0 отклоняется. Статистика A2 2.3053 > 0.929
Оценка параметра масштаба = 6097.3
```

Однако, как было замечено во второй главе, изучив выборочные данные можно заметить, что значение $t_{10} = 15800$ с резко выбивается из полученных значений предыдущих отказов. Тогда, взяв за точку цензурирования предшествующее значение $t_9 = 4180$ результат проверки гипотезы функцией 'CENS.test.my' будет следующим:

```
Критерий Крамера-фон-Мизеса: гипотеза H0 принимается. Статистика W2 0.0415 < 0.156
Критерий Андерсона-Дарлинга: гипотеза H0 принимается. Статистика A2 0.4403 < 0.929
Оценка параметра eta = 2901.444
```

Получается, если доверять теории по экспоненциальности времени электрического разряда (пробоя в жидком диэлектрике), последние три значения в исследуемой выборке из [23] являются резко выпадающими, и результат проверки гипотезы согласия об экспоненциальности это подтверждает.

3.4 Краткие итоги

В данной главе была детально изучена тема проверки гипотез согласия об экспоненциальности распределения генеральной совокупности. Рассмотрены доступные для языка R способы проверки гипотез критериями согласия Колмогорова – Смирнова, Крамера – фон – Мизеса, Андерсона – Дарлинга с учетом вариабельности выборки.

Разработаны собственные алгоритмы, реализованные в виде программ на языке R:

- программа ‘KS.test.my’ (Приложение 1) проверки гипотезы согласия на экспоненциальность критерием Колмогорова – Смирнова для полных выборок с неизвестным параметром экспоненциального распределения;
- программа ‘CENS.test.my’ (Приложение 2) проверки гипотезы согласия на экспоненциальность критериями Крамера – фон – Мизеса и Андерсона – Дарлинга для цензурированных выборок II типа справа с неизвестным параметром экспоненциального распределения.

На смоделированных данных были протестированы при уровне значимости 0.05 существующие программы в R для проверки гипотез согласия и собственные программы. По результатам проверок можно утверждать, что проверки эффективны и полученные выводы соответствуют теоретически ожидаемым. Также рассмотрен пример проверки гипотезы для выборки с экспериментальными цензурированными данными II типа справа с неизвестным параметром экспоненциального распределения.

Заключение

В данной работе были выполнены все поставленные задачи. В первой главе проанализирована точность оценивания параметра однопараметрического экспоненциального распределения, получена несмещенная оценка параметра масштаба методом максимального правдоподобия с минимально достижимой границей дисперсии неравенства Рао – Шварца – Крамера. Сделаны выводы о предпочтительности использования 2 типа распределения с параметром η.

Во второй главе получена оценка параметра экспоненциального распределения с учетом цензурирования I, II типа и множественного цензурирования в условиях I, II типа. Представлены примеры и приведены рассуждения о свойствах оценки параметра.

В третьей главе были рассмотрены и систематизированы методы проверки гипотез согласия на экспоненциальность при вариабельности выборки. Смоделированы данные на которых были протестированы критерии согласия с помощью пакетов из R. Предложены свои программы на языке R для проверки гипотез согласия при неизвестном параметре экспоненциального распределения на согласованность выборки с законом экспоненциального распределения.

Список литературы

[1] Kececioglu D.B. Reliability Engineering Handbook. Lancaster, Pennsyslvania, Pa: DEStech Publications, 2002. 679 p.

[2] R Documentation. The R Stats Package // stat.ethz.ch URL: https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/Exponential.html (дата обращения: 10.02.2024).

[3] Reliability Python library // distributions.reliability.readthedocs.io URL: https://reliability.readthedocs.io/en/latest/Equations%20of%20supported %20distributions.html (дата обращения: 08.02.2024).

[4] McCool J. Using the Weibull Distribution // Reliability, Modeling, and Inference. Hoboken, New Jersey, Pa: John Wiley & Sons, 2012. 336 p.

[5] Герцбах И.В., Кордонский Х.Б. Модели отказов. М.: Советское радио, 1966. 167 с.

[6] International Electrotechnical Commission. (2008) International Standard. Weibull analysis. IEC 61649:2008. https://webstore.iec.ch/publication/5698.

[7] Heitjan, D.F. and Rubin, D.B. Ignorability and Coarse Data // Annals of Statistics. 1991. Vol. 19, №4. P. 2244–2253.

[8] Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб: Лань, 2013. 416 с.

[9] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир,1975. 625 с.

[10] Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 900 с.

[11] Буре В. М., Парилина Е.М., Седаков А.А. Методы прикладной статистики в R и Excel. 3-е изд. СПб.: Лань, 2019. 152 с.

[12] Дерр В. Я. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2021. 596 с.

[13] Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Советское радио, 1969. 488 с.

[14] Акулинин С.А., Минаков С.А., Проскурина И.С. Основы теории надежности: лабораторный практикум. Воронеж: ФГБОУ ВО “Воронежский государственный технический университет”, 2017. 79 с.

[15] Kaplan, E.L., and Meier, P. Nonparametric estimation from incomplete observations // Journal of American Statistics Association. 1958. Vol. 53, №282. P. 457–481.

[16] Скрыпник В.М., Назин А.Е., Приходько Ю.Г., Благовещенский Ю.Н. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам. М.: Радио и связь, 1988. 184 с.

[17] Kundu D., Joarder A. Analysis of Type-II progressively hybrid censored data // Computational Statistics & Data Analysis. 2006. Vol. 50, №10. P. 2509–2528.

[18] Lindsey J. C., Ryan L. M. Tutorial in Biostatistics: Methods for Interval-Censored Data // Statistics in Medicine. 1998. Vol. 17, №2. P. 219–238.

[19] Zhigang Zhang, Jianguo Sun. Interval censoring // Statistical Methods in Medical Research. 2010. Vol. 19, №1. P. 53–70.

[20] Орлов А.И. Статистическое оценивание для сгруппированных данных // Научный журнал КубГАУ. 2014. №98(4). С. 1–21.

[21] Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск: НГТУ, 2011. 888 с.

[22] Артамоновский В.П., Кордонский Х.Б. Оценка максимального правдоподобия при простейшей группировке данных // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Vol. 15, № 1. С. 132—136.

[23] Nelson W. Applied Life Data Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1982. 656 p.

[24] Marsaglia J., Marsaglia G. Evaluating the Anderson-Darling Distribution // Journal of Statistical Software. 2004. Vol. 9, №2. P. 1–5.

[25] Fleming T. R. et al. Modified Kolmogorov-Smirnov Test Procedures with Application to Arbitrarily Right-Censored Data // International Biometric Society. 1980. Vol. 36, №4. P. 607–625.

[26] Pettitt A. N., M. A. Stephens. Modified Cramer-von Mises Statistics for Censored Data // Oxford University Press. 1976. Vol. 63, №2. P. 291–298.

[27] Michael J. R., Schucany W. R. Analysis of Data from Censored Samples. Dallas, Texas: Department of Statistics Southern Methodist University, 1984. 55 p.

[28] Stephens M. A. On the Half-Sample Method for Goodness-Of-Fit // Journal of the Royal Statistical Society. 1978. Vol. 40, №1. P. 64–70.

[29] Braun H. A Simple Method for Testing Goodness of Fit in the Presence of Nuisance Parameters // Journal of the Royal Statistical Society. 1980. Vol. 42, №1. P. 53–63.

[30] Greenwood P. E., Nikulin M. S. A Guide to Chi-Squared Testing. New York: John Wiley & Sons, 1996. 304 p.

[31] Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. 3-е изд. М.: Наука, 1983. 416 с.

[32] Anderson T. W., Darling D. A. A Test of Goodness of Fit // Journal of the American Statistical Association. 1954. Vol. 49, №268. P. 765–769.

[33] Kim Jae H., Choi In. Choosing the Level of Significance: A Decision-theoretic Approach // ABACUS. 2021. Vol. 57, №1. P. 27–71.

[34] Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б. Проблемы применения непараметрических критериев согласия в задачах обработки результатов измерений // Системы анализа и обработки данных. 2021. №2. С. 47–66.

[35] Package 'goftest' // cran.r-project.org URL: https://cran.r project.org/web/packages/goftest/goftest.pdf (дата обращения: 30.03.2024).

[36] Package 'dgof' // cran.r-project.org URL: https://cran.r project.org/web/packages/dgof/dgof.pdf (дата обращения: 30.03.2024).

[37] Package 'GofCens' // cran.r-project.org URL: https://cran.r-project.org/web/packages/GofCens/GofCens.pdf (дата обращения: 30.03.2024).

[38] D'Agostino Ralph B., Stephens Michael A. Goodness-of-fit techniques. New York: Marcel Dekker, 1986. 560 p.

Приложение 1

Код для гипотезы согласия об экспоненциальном распределении для полных выборок при неизвестном параметре в R:

```
KS.test.my <- function(x) {
n <- length(x)
eta <- sum(x)/n
f0 <- 1:n
D_min <- 1:n
D_max <- 1:n
for (i in 1:n){ # получаем условные вероятности
f0[i] <- 1 - exp(-x[i]/eta)}
for (i in 1:n){ # вычисляем статистику
D_min <- (i/n) - f0[i]
D_max <- f0[i] - ((i-1)/n)}
D <- max(c(D_min,D_max))
D_mod <- (D-(0.2/n))*(sqrt(n)+0.26+(0.5/sqrt(n)))
D_mod_rounded <- round(D_mod,3)
if (D_mod <= 1.094){ Статистика D
cat('Критерий Колмогорова-Смирнова: гипотеза H0 принимается.
Статистика D',D_mod_rounded,'< 1.094. \n')}
else {
cat('Критерий Колмогорова-Смирнова: гипотеза H0 отклоняется.
Статистика D',D_mod_rounded,'> 1.094. \n')}
cat('Оценка параметра масштаба =', eta)}
```

Приложение 2

Код для гипотезы согласия об экспоненциальном распределении для выборок цензурированных II типа справа при неизвестном параметре в R:

```
CENS.test.my <- function(x, n) {
    r <- length(x)
    eta <- (sum(x) + (n-r)*x[r])/r
    z <- 1:r
    W2_table <- matrix(c(0.2160, 0.1820, 0.1560, 0.1300, 0.1040, 0.0795, 0.0550, 0, 0,
    0.2210, 0.1940, 0.1670, 0.1365, 0.1060, 0.0810, 0.0560, 0.0370, 0.0180,
    0.2195, 0.1935, 0.1670, 0.1377, 0.1070, 0.0820, 0.0560, 0.0368, 0.0175,
    0.2180, 0.1930, 0.1670, 0.1380, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2185, 0.1940, 0.1675, 0.1383, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2190, 0.1950, 0.1680, 0.1385, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2195, 0.1955, 0.1685, 0.1388, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2200, 0.1960, 0.1690, 0.1390, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2200, 0.1960, 0.1690, 0.1390, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2200, 0.1960, 0.1690, 0.1390, 0.1090, 0.0825, 0.0560, 0.0365, 0.0170,
    0.2220, 0.1990, 0.1700, 0.1400, 0.1100, 0.0830, 0.0560, 0.0360, 0.0160), nrow = 9, ncol =
11)
    A2_table <- matrix(c(1.2780, 1.0590, 0.9290, 0.8065, 0.6840, 0.5645, 0.4450, 0, 0,
    1.3150, 1.1170, 0.9790, 0.8500, 0.7210, 0.5990, 0.4770, 0.3545, 0.2320,
    1.3070, 1.1170, 0.9820, 0.8550, 0.7270, 0.6040, 0.4810, 0.3590, 0.2365,
    1.2990, 1.1170, 0.9850, 0.8590, 0.7330, 0.6090, 0.4850, 0.3630, 0.2410,
    1.3010, 1.1220, 0.9870, 0.8593, 0.7320, 0.6103, 0.4890, 0.3658, 0.2425,
    1.3030, 1.1270, 0.9890, 0.8595, 0.7300, 0.6115, 0.4930, 0.3685, 0.2440,
    1.3045, 1.1295, 0.9900, 0.8600, 0.7305, 0.6125, 0.4945, 0.3710, 0.2465,
    1.3060, 1.1320, 0.9910, 0.8610, 0.7310, 0.6135, 0.4960, 0.3725, 0.2490,
    1.3070, 1.1335, 0.9920, 0.8620, 0.7320, 0.6143, 0.4965, 0.3735, 0.2505,
    1.3080, 1.1350, 0.9930, 0.8630, 0.7330, 0.6150, 0.4970, 0.3745, 0.2520,
    1.3210, 1.1490, 1.0030, 0.8745, 0.7460, 0.6235, 0.5010, 0.3875, 0.2740 ), nrow = 9, ncol =
11)
    for (i in 1:r){ # получаем условные вероятности
    z[i] <- 1 - exp(-x[i]/eta) }
    z_av = sum(z)/r
    s_w <- 1:r
    s1_a <- 1:r
    s2_a <- 1:r
    for (i in 1:r){ # слагаемые для W и A
    s_w[i] <- (z[i] - ((2*i - 1)/(2*n)))^2 }
```

```
for (i in 1:r){ # слагаемые для A
s1_a[i] <- (2*i - 1)*(log(z[i]) - log(1 - z[i]))
s2_a[i] <- log(1 - z[i]) }
W <- sum(s_w) + r/(12*(n^2)) + (n/3)*((z[r] - r/n)^3)
A <- -(1/n)*sum(s1_a) - 2*sum(s2_a) - (1/n)*((r - n)^2*log(1 - z[r]) - (r^2)*log(z[r]) + (n^2)*z[r])
W_rounded = round(W, 4)
A_rounded = round(A, 4)
eta_rounded = round(eta, 4)
n_upd <- n
if (n_upd>100) {
n_upd <- 110}
kvant_W2 <- W2_table[round((n-r)*10/n, 0)+1,n_upd/10]
kvant_A2 <- A2_table[round((n-r)*10/n, 0)+1,n_upd/10]
if (kvant_W2 < W_rounded) {
if (kvant_W2 == 0) {
cat('Критерий Крамера-фон-Мизеса: ошибка при вычислении квантиля \n')
} else {
cat('Критерий Крамера-фон-Мизеса: гипотеза H0 отклоняется.
Статистика W2',W_rounded,'>',kvant_W2, "\n")}
} else if (kvant_W2 >= W_rounded) {
cat('Критерий Крамера-фон-Мизеса: гипотеза H0 принимается.
Статистика W2',W_rounded,'<',kvant_W2, "\n")}
if (kvant_A2 < A_rounded) {
if (kvant_A2 == 0) {
cat('Критерий Андерсона-Дарлинга: ошибка при вычислении квантиля \n')
} else {
cat('Критерий Андерсона-Дарлинга: гипотеза H0 отклоняется.
Статистика A2',A_rounded,'>',kvant_A2, "\n")}
} else if (kvant_A2 >= A_rounded) {
cat('Критерий Андерсона-Дарлинга: гипотеза H0 принимается.
Статистика A2',A_rounded,'<',kvant_A2, "\n")}
cat('Оценка параметра масштаба =', eta_rounded}
```