УДК 519.233.22

Казакова А.

Минимальная дисперсия для экспоненциального распределения

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. Целью работы является исследование точности оценивания параметра экспоненциального однопараметрического распределения при использовании метода максимального правдоподобия. Исследуются две формы записи распределения. Например, в [1, 2] описаны две формы записи:

$$\text{Тип 1.}\quad F(t,\lambda)=1-e^{-\lambda t},\quad f(t,\lambda)=\lambda e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,\ \lambda>0,$$

$$\text{Тип 2.}\quad F(t,\eta)=1-e^{-\frac{t}{\eta}},\quad f(t,\eta)=\frac{1}{\eta}e^{-\frac{t}{\eta}},\quad t\geqslant 0,\ \eta>0.$$

Оба распределения связаны с двухпараметрическим распределением Вейбулла с параметром $\beta=1$ (коэффициент формы). Распределение имеет функцию плотности и функцию распределения:

$$f(t,\eta,\beta)=\beta\frac{t^{\beta-1}}{\eta^{\beta}}\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right],\quad F(t,\eta,\beta)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right],$$

$$t\geqslant 0,\quad \eta>0,\quad \beta>0.$$

Одним из важных моментов рассмотрения приведенных распределений является применение схемы мгновенных отказов с постоянной интенсивностью отказов.

2. Оценивание параметра. Применим метод максимального правдоподобия [3] для получения оценок параметров для полных данных $t_1,\ldots,t_n$.

Тип 1. Определим функцию правдоподобия

$$L_{\lambda}=\prod_{i=1}^{n}f(t_i,\lambda)=\lambda^{n}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i},$$

Казакова Анастасия – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st092045@student.spbu.ru, тел.: +7(921)799-07-12

а также

$$(\ln L)_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \ln f(t_i) = n \ln \lambda - \lambda n\bar{t}, \quad \bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i,$$

$$(\ln L)'_\lambda = \frac{\partial \ln L(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\bar{t} = -n\left\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\right\}, \quad \bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Решение уравнение правдоподобия S_λ дает оценку $\widehat{\lambda}$. Контролируем перемену знака второй производной $(\ln L)''_\lambda$:

$$S_\lambda = (\ln L)'_\lambda = \frac{\partial \ln L(t,\lambda)}{\partial \lambda} = -n\left\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\right\} = 0, \quad (\ln L)''_\lambda < 0.$$

Тип 2. Аналогично получим решение для параметра η второго типа экспоненциального распределения:

$$L_\eta = L(t,\eta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\eta) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n} t_i},$$

$$(\ln L)_\eta = \sum_{i=1}^{n} \ln f(t_i) = n \ln \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n} t_i = -n \ln \eta - \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n} t_i,$$

$$(\ln L)'_\eta = \frac{n}{\eta^2}\left\{\bar{t} - \eta\right\},$$

$$S_\eta = (\ln L)'_\eta = \frac{n}{\eta^2}\left\{\bar{t} - \eta\right\} = 0.$$

Тогда $\widehat{\eta} = \bar{t}$. Также получаем $(\ln L)''_\eta < 0$.

Можно видеть, что оценками параметров являются статистики T от выборочного среднего $\bar{t}$ наблюдений $t_1, \ldots, t_n$.

3. Точность оценивания скалярного параметра θ. Для определения дисперсии оценок параметров λ, η воспользуемся подходом, изложенным в [3,4]. Сначала решим задачу в общем виде для скалярного параметра θ, имеющего в качестве оценки $\widehat{\theta}$ некоторую функцию $\tau(\theta)$, где $\theta = \lambda$ или $\theta = \eta$. Обозначим производные функции правдоподобия для параметра θ:

$$L' = \frac{\partial L(t,\theta)}{\partial \theta}, \quad L'' = \frac{\partial^2 L(t,\theta)}{\partial \theta^2},$$

$$(\ln L)' = \frac{\partial \ln L(t,\theta)}{\partial\theta}, \quad (\ln L)'' = \frac{\partial^2 \ln L(t,\theta)}{\partial\theta^2}.$$

Для обоих распределений выполняются условия регулярности для функции правдоподобия:

1. Вероятность совместного наблюдения n событий

$$\int_R Ldt = 1, \quad L = L(t,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t,\theta), \quad L > 0, \quad \theta \in \Theta \subset R.$$

2. Дифференцируемость функции правдоподобия и ее логарифма по θ:

   - можно изменять порядок дифференцирования и интегрирования, когда пределы интегрирования не зависят от θ;

   - есть связь математического ожидания двух производных и самих производных.

Приведем связи в подинтегральных функциях:

$$\int_R Ldt = 1, \implies \int_R L'dt = 0;$$

или для $\ln L$

$$\int_R \left(\frac{1}{L}L'\right) Ldt = M\Big\{(\ln L)'\Big\} = 0.$$

Продифференцируем последнее выражение и определим математические ожидания:

$$\int_R \left\{\left(\frac{1}{L}L'\right)L' + L\left(\frac{1}{L}L'\right)'_\theta\right\}dt = 0,$$

$$\int_R \left\{\Big((\ln L)'\Big)^2 + (\ln L)''\right\}Ldt = 0,$$

$$M\left\{\Big((\ln L)'\Big)^2\right\} + M\Big\{(\ln L)''\Big\} = 0,$$

$$M\left\{\Big((\ln L)'\Big)^2\right\} = -M\Big\{(\ln L)''\Big\}.$$

3. Решение ищется для несмещенной оценки T функции $\tau(\theta)$ от параметра θ. Потребуем равенства математического ожидания статистики (оценки) T и функции от параметра $\tau(\theta)$, а также чтобы математическое ожидание расхождения величин $\{T - \tau(\theta)\}$ было минимальным:

$$M(T) = M\big\{\tau(\theta)\big\} = \tau(\theta),$$

$$M\big\{T - \tau(\theta)\big\} = \int_R \Big(T - \tau(\theta)\Big) L dt = 0. \tag{1}$$

3.1. Неравенство Рао – Шварца – Крамера. Условия регулярности для функции правдоподобия L приводят к неравенству Рао – Шварца – Крамера для дисперсии оценки функции. Дифференцируя левую и правую части (1) с учетом условий регулярности и возведения в квадрат обеих частей, а также применив неравенство Коши – Шварца – Буняковского для математического ожидания случайных величин η_1, η_2, $\Big[M\{\eta_1\eta_2\}\Big]^2 \leqslant M\eta_1^2 M\eta_2^2$, получаем неравенство Рао – Шварца – Крамера относительно дисперсии статистики:

$$D(T) = M\bigg\{\Big(T - \tau(\theta)\Big)^2\bigg\} \geqslant \frac{\big\{-\tau'(\theta)\big\}^2}{M\bigg\{\Big((\ln L)'\Big)^2\bigg\}},$$

$$\Longrightarrow \quad D(T) \geqslant \frac{\big\{-\tau'(\theta)\big\}^2}{M\bigg\{\Big((\ln L)'\Big)^2\bigg\}} = -\frac{\big\{\tau'(\theta)\big\}^2}{M\Big\{(\ln L)''\Big\}}. \tag{2}$$

3.2. Условие достижения нижней границы неравенства. В [4] определяется необходимое и достаточное условие для достижения нижней границы неравенства Рао – Шварца – Крамера как пропорциональность $(T - \tau(\theta))$ и $(\ln L)'_\theta$ на всем пространстве определения параметра:

$$(\ln L)' = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = A(\theta)\big\{T - \tau(\theta)\big\}, \tag{3}$$

где A не зависит от наблюдений, но может быть функцией от θ, T – статистика для θ, $\tau(\theta)$ – некоторая функция только от θ. Выпишем дисперсию

$$D\Big((\ln L)'\Big) = M\bigg\{\Big((\ln L)'\Big)^2\bigg\} = \big\{A(\theta)\big\}^2 D(T).$$

Достижение нижней границы неравенства (2):

$$D(T) = \frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{\{A(\theta)\}^2 D(T)}, \implies D(T) = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right|.$$

3.3. Информация Фишера. Определяется количество информации, которое может дать выборка данных о неизвестном параметре. При оценивании самого параметра θ для несмещенной оценки будем иметь $\tau'(\theta) = 1$ и дисперсия

$$D(T) = \frac{\{\tau'(\theta) = 1\}^2}{M\left\{\left((\ln L)'\right)^2\right\}} = \frac{1}{M\left\{\left((\ln L)'\right)^2\right\}}.$$

Информационное количество Фишера

$$I_n(\widehat{\theta}) = M\left\{\left((\ln L)'\right)^2\right\} = \{A(\theta)\}^2 D(T).$$

Также получаем эквивалентные функции для второй производной:

$$M\left\{(\ln L)''\right\} = -|A(\theta)|\tau'(\theta) = \{A(\theta)\}^2 D(T) = (\ln L)''.$$

Следовательно, статистика T будет оценкой функции $\tau(\theta)$ с минимально достижимой границей дисперсии неравенства Рао – Шварца – Крамера (Minimum Variance Unbiased Estimator MVUE). В силу достижения нижней границы эта статистика по [4] будет иметь свойство достаточной статистики для $\tau(\theta)$. Свойства оценки максимального правдоподобия для $\tau(\theta)$:

- статистика T является:
  - несмещенной оценкой для параметра θ,
  - достаточной статистикой, так как является оценкой для параметра θ с минимально достижимой дисперсией;
- оценка $\widehat{\theta}$ является:
  - эффективной оценкой, так как является несмещенной оценкой и достигается нижняя граница ее дисперсии в неравенстве Рао – Шварца – Крамера,
  - асимптотически состоятельной оценкой, так как увеличение точности обеспечивается с увеличением объема выборки.

4. Точность оценивания для параметра λ, тип 1. Представим $(\ln L)'_\lambda$ в виде (3), где выполнены условия достижения нижней границы неравенства для функции $\tau(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$:

$$(\ln L)'_\lambda = A(\theta)\big\{T - \tau(\theta)\big\} = -n\bigg\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\bigg\},$$

$$A(\theta) = -n, \quad T_{(\frac{1}{\lambda})} = \bar{t}, \quad \tau(\theta) = \tau(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{\partial\tau(\lambda)}{\partial\lambda} = \tau'_\lambda(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Оценка параметра $\frac{1}{\lambda}$, ее дисперсия и информационное количество Фишера будут следующие:

$$(\ln L)'_{(\frac{1}{\lambda})} = -n\bigg\{\bar{t} - \frac{1}{\lambda}\bigg\} = 0, \quad \widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \bar{t},$$

$$D(T) = D(\bar{t})_{(\frac{1}{\lambda})} = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \left| -\frac{1}{n}\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{n\lambda^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

$$D\widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{n}(\bar{t})^2,$$

$$I_n\left(\frac{1}{\lambda}\right) = M\Big\{\big((\ln L)'_{(\frac{1}{\lambda})}\big)^2\Big\} = \Big\{\big\{A(\theta)\big\}^2 D(T)\Big\} = n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

$$M\Big\{(\ln L)''_{(\frac{1}{\lambda})}\Big\} = (\ln L)''_{(\frac{1}{\lambda})} = -n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Следовательно, дисперсия

$$D(\widehat{\lambda}) > D\widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{(\bar{t})^2}{n}. \tag{4}$$

5. Точность оценивания параметра η, тип 2. Представим $(\ln L)'_\eta$ в виде (3) и решение уравнения правдоподобия:

$$(\ln L)'_\eta = \frac{n}{\eta^2}\big\{\bar{t} - \eta\big\} = 0, \quad A(\theta) = \frac{n}{\eta^2}, \quad T_\eta = \bar{t},$$

$$\tau(\theta) = \tau(\eta) = \eta, \quad \tau'_\eta(\eta) = 1.$$

$$S_\eta = (\ln L)'_\eta = -\frac{n}{\eta^2}\{\eta - \bar{t}\} = 0, \quad \widehat{\eta} = \bar{t}.$$

Тогда $T_\eta = \bar{t}$ есть достаточная статистика для η и является оценкой с минимально достижимой дисперсией. Дисперсия $D(T_\eta)$ определена для η:

$$D(\bar{t}) = \left|\frac{\tau'(\eta)}{A(\eta)}\right| = \frac{\eta^2}{n},$$

$$D(\widehat{\eta}) = \frac{(\bar{t})^2}{n}. \tag{5}$$

Определена информация Фишера $I_n(\widehat{\eta})$, содержащаяся в выборке размером n, стандартное отклонение s_η и коэффициент вариации $\widehat{\upsilon}_\eta$, которые характеризуют точность оценивания:

$$I_n(\widehat{\eta}) = M\Big\{\big((\ln L)'\big)^2\Big\} = \big\{A(\eta)\big\}^2 D(T) = \frac{n}{\eta^2},$$

$$M\big((\ln L)''\big) = M\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta^2}\right) = M\left(-\frac{n}{\eta^3}\big\{2\bar{t} - \eta\big\}\right) =$$

$$= -\frac{n}{\eta^3}\big\{2M(\bar{t}) - \eta\big\} = -\frac{n}{\eta^3}\{2\eta - \eta\} = -\frac{n}{\eta^2},$$

$$M\Big\{\big((\ln L)'\big)^2\Big\} = -M\big((\ln L)''\big) = \frac{n}{\eta^2},$$

$$s_\eta = \sqrt{D(\widehat{\eta})}, \quad \upsilon_\eta = \frac{s_\eta}{\widehat{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, для второго типа выполнено необходимое и достаточное условие (3) для достижения нижней границы неравенства Рао – Шварца – Крамера. Выполнены требования по основным свойствам, которые предъявляются к оценкам параметра – состоятельность, несмещенность, эффективность. Второй тип распределения более предпочтителен.

6. Сравнение результатов для рассмотренных двух типов распределений. Имеем результаты (4) для функции $\tau(\lambda)$ от параметра λ и (5) для параметра η. Очевидна функциональная связь:

$$\widehat{\eta} = \widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \bar{t}, \quad D(\widehat{\eta}) = D\widehat{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{(\bar{t})^2}{n}.$$

Пример. Рассмотрена полная выборка из работы [5], приведенная в виде данных эксперимента по времени пробоя изолирующей жидкости (жидкий конденсатор) между электродами при напряжении 30 кВт. По теории распределение определяется как экспоненциальное. Выборка объема $n = 11$ содержит элементы: 7,74; 17,05; 20,46; 21,02; 22,66; 43,4; 47,3; 139,07; 144,12; 175,88; 194,9. Значения оценки, дисперсии, коэффициента вариации, и информации Фишера по выборке представлены в таблице.

Таблица. Результаты оценивания по выборке $n = 11$

$\widehat{\eta}$	$D(\widehat{\eta})$	υ_η	$I_n(\widehat{\eta})$
75,782	522,0804	0,3085	0,00191

7. Заключение. Из двух рассмотренных типов экспоненциального распределения установлено, что второй тип распределения с параметром масштаба η предпочтителен для использования. Достаточной статистикой является выборочное среднее, а $\widehat{\eta}$ – несмещенной оценкой с минимально достижимой дисперсией. Для первого типа распределения с параметром λ не существует минимальной достижимой дисперсии оценки параметра, соответственно, $\widehat{\lambda}$ – смещенная оценка. Параметры η и $\frac{1}{\lambda}$ двух типов распределений связаны функционально.

Литература

1. Kececioglu D. B. Reliability Engineering Handbook. Lancaster, Pennsyslvania, Pa: DEStech Publications, 2002. 679 p.

2. McCool J. Using the Weibull Distribution: Reliability, Modeling, and Inference. Hoboken, New Jersey, Pa: John Wiley & Sons, 2012. 336 p.

3. Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.

4. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 900 с.

5. Nelson W. Applied Life Data Analysis. New York, Pa: John Wiley & Sons, 1982. 634 p.