Πολυπλοκότητα Επαναληπτικών Αλγορίθμων - Ασκήσεις

Αναστάσης Κολιόπουλος

Άσκηση 1. Θεωρώντας ότι $n \in \mathbb{N}_+$ υπολογίστε τον **ακριβή** αριθμό σταθερών πράξεων που εκτελεί το τμήμα κώδικα που ακολουθεί.

```
int iterationCount = 0;
for (int i = 0; i < N; ++i)
    for (int j = 0; j < N; ++j)
        for (int k = 0; k < N; ++k)
            ++iterationCount;
```

Λύση. Στο πρώτο τμήμα κώδικα, έχουμε αρχικά ότι οι σταθερές πράξεις, του τρίτου κατά σειρά των εμφωλευμένων βρόχων, είναι ίσες με

$$\begin{aligned} C_3 &= 1 + n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 4 \\ &= 2 + n + 4n \\ &= 5n + 2. \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον αμέσως εξωτερικό, δεδομένου ότι οι βρόχοι είναι φωλιασμένοι, θα πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των στοιχειωδών πράξεών του, με τον αντίστοιχο του εσωτερικού του. Δηλαδή, θα έχουμε

$$\begin{aligned} C_2 &= 1 + n + 1 + \sum_{j=0}^{n-1} (2 + C_3) \\ &= 2 + n + \sum_{j=0}^{n-1} (5n + 4) \\ &= 2 + n + (5n + 4) \sum_{j=0}^{n-1} 1 \\ &= 2 + n + (5n + 4)n \\ &= 2 + n + 5n^2 + 4n \\ &= 5n^2 + 5n + 2. \end{aligned}$$

Οι συνολικές πράξεις του τμήματος αυτού είναι ίσες με

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 1 + 1 + n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1}(2 + C_2) \\
&= 3 + n + \sum_{i=0}^{n-1}(5n^2 + 5n + 4) \\
&= 3 + n + (5n^2 + 5n + 4)\sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= 2 + n + (5n^2 + 5n + 4)n \\
&= 3 + n + 5n^3 + 5n^2 + 4n \\
&= 5n^3 + 5n^2 + 5n + 3 \\
&= O(n^3).
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2. Θεωρώντας ότι n, m δύο δοσμένοι φυσικοί αριθμοί, υπολογίστε την τιμή της μεταβλητής iterationCount στα τμήματα κώδικα που ακολουθούν.

```
int iterationCount = 0;
for (int i = 0; i < N; ++i)
    for (int j = M - 1; j >= 0; --j)
        for (int k = N - 1; k >= 0; --k)
            ++iterationCount;
```

```
int iterationCount = 0;
for (int i = 0; i < N - 1; ++i)
    for (int j = i + 1; j < N; ++j)
        ++iterationCount;
```

```
int iterationCount = 0;
for (int i = 0; i > N; ++i)
    for (int j = 0; j < M; ++j)
        for (int k = 0; k < N; ++k)
            ++iterationCount;
```

Λύση. Σε όλες τις περιπτώσεις, η τιμή της μεταβλητής iterationCount είναι ίση με τον αριθμό των επαναλήψεων του συγκεκριμένου τμήματος κώδικα.

Θα αρχίσουμε από την πρώτη περίπτωση. Ο αριθμός επαναλήψεων του τρίτου κατά σειρά βρόχου, είναι ίσος με

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= n - 1 - 0 + 1 \\
&= n.
\end{aligned}
$$

Οι επαναλήψεις του αμέσως εξωτερικού, περιγράφονται από την ποσότητα

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=0}^{m-1} I_3 \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} n \\
&= n \sum_{j=0}^{m-1} 1 \\
&= n(m-1-0+1) \\
&= nm.
\end{aligned}$$

Τέλος, οι συνολικές επαναλήψεις είναι ίσες με

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} I_2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} nm \\
&= nm \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= nm(n-1-0+1) \\
&= n^2 m.
\end{aligned}$$

Προχωρώντας στο δεύτερο τμήμα κώδικα, υπολογίζουμε τον αριθμό επαναλήψεων του εσωτερικού βρόχου, ο οποίος είναι ίσος με

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 \\
&= n-1-(i+1)+1 \\
&= n-1-i-1+1 \\
&= n-i-1.
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον εξωτερικό βρόχο, έχουμε ότι οι συνολικές επαναλήψεις του τμήματος αυτού ισούνται με

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=0}^{n-2} I_2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} (n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i \\
&= (n-2-0+1)(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\
&= (n-1)^2 - \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\
&= \frac{2(n-1)^2 - (n-2)(n-1)}{2} \\
&= \frac{(n-1)(2(n-1)-(n-2))}{2} \\
&= \frac{(n-1)(2n-2-n+2)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Στην τελευταία περίπτωση, παρατηρούμε ότι ο τελεστής σύγκρισης της συνθήκης τερματισμού του πρώτο κατά σειρά βρόχου, είναι $>$. Για τον λόγο του ότι ο αριθμός n είναι φυσικός, δε θα ισχύσει ποτέ η συνθήκη $0 > n$. Έτσι, έχουμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων του τρίτου τμήματος είναι 0.