Πατώματα και Ταβάνια - Ασκήσεις

Αναστάσης Κολιόπουλος

Άσκηση 1. Για κάθε μία από τις παρακάτω εξειδικεύσεις της εντολής for, υπολογίστε την τελική τιμή της μεταβλητής iterationCount, θεωρώντας ότι $n, m, a \in \mathbb{N}_+$ και ότι $m < n$.

```
int iterationCount = 0;
for (int i = M; i < N; ++i)
    ++iterationCount;
```

```
int iterationCount = 0;
for (int i = M; i < N; i += a)
    ++iterationCount;
```

```
int iterationCount = 0;
for (int i = 1; i < N; i *= a)
    ++iterationCount;
```

Λύση. Ξεκινώντας από το πρώτο τμήμα κώδικα, έχουμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ίσος με

$$\sum_{i=m}^{n-1} 1 = n - 1 - m + 1 = n - m.$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα, είναι να καταγράψουμε της τιμές του i σε κάθε μία από τις καταστάσεις της μεταβλητής iterationCount, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

iterationCount	i
1	$m+1$
2	$m+2$
.	.
.	.
.	.
k	$m+k$

Όταν εκτελεστεί η πρώτη επανάληψη του βρόχου, δηλαδή όταν iterationCount = 1, η τιμή του i θα είναι ίση με $m + 1$. Στη δεύτερη, η ίδια θα είναι είσαι με $m + 2$ κ.ο.κ. Επομένως, ψάχνουμε την επανάληψη, κατά την οποία η τιμή του i θα είναι ίση με το n. Ισοδύναμα, ψάχνουμε τον θετικό ακέραιο k, για τον οποίο ισχύει ότι

$$m + k = n \Rightarrow k = n - m,$$

που είναι και η τιμή της μεταβλητής iterationCount, μετά την περαίωση του for.

Στο δεύτερο παράδειγμα, καταγράφουμε και πάλι τις τιμές του i κατά την εκτέλεση των επαναλήψεων του βρόχου.

iterationCount	i
1	$m+a$
2	$m+2a$
.	.
.	.
.	.
k	$m+ka$

Στην προκειμένη, η τιμή της iterationCount είναι ίση με τον μικρότερο θετικό ακέραιο k, που επαληθεύει την ανισότητα

$$m+ka \geq n \Rightarrow ka \geq n-m \Rightarrow k \geq \frac{n-m}{a} \Rightarrow k = \left\lceil \frac{n-m}{a} \right\rceil .$$

Στην τρίτη και τελευταία εξειδίκευση του for, κατασκευάζουμε το πινακάκι, σύμφωνα με το παραπάνω τρόπο.

iterationCount	i
1	a
2	a^2
.	.
.	.
.	.
k	a^k

Ψάχνουμε τον μικρότερο θετικό ακέραιο k, τέτοιον ώστε

$$a^k \geq n \Rightarrow \log_a a^k \geq \log_a n \Rightarrow k \log_a a \geq \log_a n \Rightarrow k \geq \log_a n \Rightarrow k = \lceil \log_a n \rceil .$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε την τιμή της μεταβλητής iterationCount μετά την περαίωση του βρόχου while, θεωρώντας ότι $x, y \in \{a \in \mathbb{N}_+ : a < n\}$.

```
int iterationCount = 0;
int i = x;
int k = y;
while (k < N) {
    ++iterationCount;
    k += i;
    ++i;
}
```

Λύση. Καταγράφουμε στον παρακάτω πίνακα, τις τιμές των μεταβλητών iterationCount,

k και i κατά την εκτέλεση του κώδικα.

iterationCount	k	i
1	$y+x$	$x+1$
2	$y+x+x+1$	$x+2$
3	$y+\underline{x}+\underline{x+1}+\underline{x+2}$	$x+3$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
a	$y+\sum_{j=0}^{a-1}(x+j)$	$x+a$

Η ζητούμενη ποσότητα είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος a, τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} y+\sum_{j=0}^{a-1}(x+j) &\geq n \\ \Rightarrow y+\sum_{j=0}^{a-1}x+\sum_{j=0}^{a-1}j &\geq n \\ \Rightarrow y+xa+\frac{a(a-1)}{2} &\geq n \\ \Rightarrow xa+\frac{a(a-1)}{2} &\geq n-y \\ \Rightarrow 2xa+a(a-1) &\geq 2(n-y) \\ \Rightarrow 2xa+a^2-a &\geq 2(n-y) \\ \Rightarrow a^2+(2x-1)a-2(n-y) &\geq 0. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα, η οποία είναι ίση με

$$\Delta=(2x-1)^2+8(n-y)>0,$$

που σημαίνει ότι έχουμε δύο ρίζες, εκ των οποίων η μία είναι αρνητική και την απορρίπτουμε. Παίρνουμε τελικά, ότι ο ζητούμενος αριθμός a, ισούται με

$$\left\lceil \frac{-(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2+8(n-y)}}{2} \right\rceil.$$

Άσκηση 3. Μία εταιρία παράγει αποκλειστικά το αγαθό Α. Είναι γνωστό ότι για να παραχθεί ένα κομμάτι του αγαθού αυτού, χρειάζονται t λεπτά. Πόσα είναι τα **περισσότερα** κομμάτια μπορεί να παράξει η εταιρία, εάν παραμείνει ανοικτή για

$T \in \mathbb{N}$ λεπτά;

κομμάτια	απαιτούμενα λεπτά
0	0
1	t
2	$2t$
.	.
.	.
.	.
k	kt

Η απάντηση στο πρόβλημα είναι ο μεγαλύτερος φυσικός k, τέτοιος ώστε

$$kt \leq T \Rightarrow k \leq \frac{T}{t} \Rightarrow k = \left\lfloor \frac{T}{t} \right\rfloor .$$

Έστω ότι τα μηχανήματα που απαιτούνται για την παραγωγή του αγαθού Α, χάλασαν και έτσι κάθε φορά που παράγεται ένα κομμάτι, η παραγωγή του επόμενου επιβραδύνεται. Γνωρίζουμε, λοιπόν, ότι η παραγωγή του πρώτου κομματιού απαιτεί χρόνο t, του δεύτερου, χρόνο $2t$ κ.ο.κ. Το ζητούμενο έγκειται, ξανά, στον μέγιστο αριθμό κομματιών που είναι εφικτό να παραχθούν.

Λύση.

κομμάτια	απαιτούμενα λεπτά
0	0
1	t
2	$t + 2t$
3	$t + 2t + 3t$
.	.
.	.
.	.
k	$\sum_{j=1}^{k} jt$

Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος φυσικός k, ο οποίος επαληθεύει την ανισότητα

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} jt &\leq T \\
\Rightarrow t \sum_{j=1}^{k} j &\leq T \\
\Rightarrow \frac{tk(k+1)}{2} &\leq T \\
\Rightarrow tk(k+1) &\leq 2T \\
\Rightarrow tk^2 + tk &\leq 2T \\
\Rightarrow tk^2 + tk - 2T &\leq 0.
\end{aligned}$$

Η διακρίνουσα είναι ίση με

$$\Delta = t^2 + 8tT > 0,$$

που σημαίνει ότι έχουμε τις ρίζες

$$k_1, k_2 = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 + 8tT}}{2t}.$$

Δεδομένου ότι ψάχνουμε τον **μεγαλύτερο φυσικό** k που επαληθεύει την παραπάνω ανισότητα η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και «ντύνουμε» με πάτωμα τη θετική ρίζα. Έτσι, παίρνουμε τελικά ότι

$$k = \lfloor k_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{-t + \sqrt{t^2 + 8tT}}{2t} \right\rfloor.$$

Άσκηση 4 (Summer School 2023 - Jumps). Βρίσκεσαι σε ένα πεζοδρόμιο και μπορείς να κάνεις άλματα από το πλακάκι που στέκεσαι σε πλακάκια μπροστά σου. Στην αρχή είσαι στη θέση 1 και θες να φτάσεις στη θέση n με όσο το δυνατόν λιγότερα άλματα γίνεται. Αν βρίσκεσαι στη θέση i, με ένα άλμα μπορείς να πας στη θέση $i+j$, όπου $1 \leq j \leq m$. Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος αλμάτων που χρειάζεσαι για να φτάσεις από την αρχική θέση στον προορισμό σου. Θεωρήστε ότι $n, m \in \mathbb{N}_+$.

Άσκηση 5. Γνωρίζουμε τις θέσεις $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_+$, με $x_1 < x_2$, δύο γειτονικών στάσεων κατά μήκος της εθνικής οδού. Απαγορεύεται από τον νόμο δύο γειτονικές στάσεις να απέχουν μεταξύ τους περισσότερο από D. Ποιος είναι ο **ελάχιστος** αριθμός στάσεων που πρέπει να χτίσουμε μεταξύ των τοποθεσιών x_1, x_2, λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό αυτόν;

Άσκηση 6. Παίζετε ένα παιχνίδι, στο οποίο πολεμάτε ένα τέρας χρησιμοποιώντας την εξής στρατηγική. Αρχικά επιτίθεστε στο τέρας το πρώτο λεπτό της μάχης, περιμένετε C λεπτά, ξαναεπιτίθεστε και επαναλαμβάνετε. Δεδομένου ότι σε κάθε επίθεση προκαλείτε στο τέρας ζημιά D, ποια είναι η συνολική ζημιά που θα προκληθεί στο τέρας, αν μπορείτε να πολεμήσετε για T λεπτά;

Λύση.

επίθεση	λεπτό
1	1
2	$1 + C$
3	$1 + 2C$
.	.
.	.
.	.
k	$1 + (k-1)C$

Ψάχνουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο k, τέτοιον ώστε

$$\begin{aligned} 1 + (k-1)C &\leq T \\ \Rightarrow (k-1)C &\leq T - 1 \\ \Rightarrow kC - C &\leq T - 1 \\ \Rightarrow kC &\leq T + C - 1 \\ \Rightarrow k \leq \frac{T + C - 1}{C} = \left\lfloor \frac{T + C - 1}{C} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{T}{C} \right\rceil. \end{aligned}$$

Επομένως, θα προκαλέσουμε στο τέρας συνολική ζημιά ίση με $D \left\lceil \frac{T}{C} \right\rceil$.