

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и
криптографии

Классификация бинарных отношений и системы замыканий

ОТЧЁТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ПРИКЛАДНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА»

студентки 3 курса 331 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Шуликиной Анастасии Александровны

Преподаватель

профессор, д.ф.-м.н.

подпись, дата

В. А. Молчанов

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Цель работы и порядок её выполнения	4
2 Теория	5
2.1 Бинарные отношения и их свойства	5
2.1.1 Свойства симметричности	5
2.1.2 Свойства антисимметричности	5
2.1.3 Свойства рефлексивности	6
2.1.4 Свойства транзитивности	6
2.2 Типы бинарных отношений	7
2.2.1 Отношение эквивалентности	7
2.2.2 Отношение квазипорядка	7
2.2.3 Отношение частичного порядка	8
2.3 Системы замыкания на множестве бинарных отношений	8
2.3.1 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства рефлексивности	9
2.3.2 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства симметричности	10
2.3.3 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства транзитивности	10
2.3.4 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства эквивалентности	10
3 Программная реализация рассмотренных алгоритмов	11
3.1 Результаты тестирования программы	11
3.2 Код программы, на основе рассмотренных алгоритмов, на языке C++	11

ВВЕДЕНИЕ

В данной лабораторной работе поставлена задача рассмотрения основных свойств бинарных отношений, их классификация и замыкание, а также написание алгоритмов для определения классификации и замыкания бинарного отношения.

1 Цель работы и порядок её выполнения

Цель работы – изучение основных свойств бинарных отношений и операций замыкания бинарных отношений.

Порядок выполнения работы:

1. Разобрать основные определения видов бинарных отношений и разработать алгоритмы классификации бинарных отношений.
2. Изучить свойства бинарных отношений и рассмотреть основные системы замыкания на множестве бинарных отношений.
3. Разработать алгоритмы построения основных замыканий бинарных отношений.

2 Теория

2.1 Бинарные отношения и их свойства

Бинарным отношением между элементами A и B называется любое подмножество ρ множества $A \times B$, то есть $\rho \subset A \times B$.

По определению, бинарным отношением называется множество пар. Если ρ – бинарное отношение (т.е. множество пар), то говорят, что параметры x и y связаны бинарным отношением ρ , если пара $\langle x, y \rangle$ является элементом ρ , т.е. $\langle x, y \rangle \in \rho$.

Бинарное отношение $\rho \subset A \times A$ называется:

- рефлексивным, если $(a, a) \in \rho \forall a \in A$;
- симметричным, если $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho \forall a, b \in A$;
- антисимметричным, если $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho \Rightarrow a = b \forall a, b \in A$;
- транзитивным, если $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho \forall a, b, c \in A$.

Матрица бинарного отношения ρ – это прямоугольная таблица, строки которой соответствуют первым координатам, а столбцы – вторым координатам. На пересечении i -й строки и j -ого столбца ставится 1, если выполняется соотношение $a_i R a_j$, и 0, если оно не выполняется.

2.1.1 Свойства симметричности

Симметричной называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали.

Алгоритм проверки бинарного отношения на симметричность:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение симметрично» или отношение не симметрично.

Шаг 1. $res := true$.

Шаг 2. Цикл по i от 1 до N , цикл по j от 1 до N .

Шаг 2.1. Если $M_{ij} \neq M_{ji}$, то $res := false$.

Шаг 3. Если $res = true$, то вернуть ответ «Отношение симметрично», иначе не симметрично.

Трудоемкость алгоритма $O(N^2)$

2.1.2 Свойства антисимметричности

Алгоритм проверки бинарного отношения на антисимметричность:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение антисимметрично» или отношение не антисимметрично.

Шаг 1. $\text{res} := \text{true}$.

Шаг 2. Цикл по i от 1 до N , цикл по j от 1 до N .

Шаг 2.1. Если $M_{ij} = 1 \ \& \ M_{ji} = 1 \ \& \ i \neq j$, то $\text{res} := \text{false}$.

Шаг 3. Если $\text{res} = \text{true}$, то вернуть ответ «Отношение симметрично», иначе отношение не антисимметрично.

Трудоемкость алгоритма $O(N^2)$

2.1.3 Свойства рефлексивности

Рефлексивной называют такую матрицу, у которой все диагональные элементы равняюся 1.

Алгоритм проверки бинарного отношения на рефлексивность:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение рефлексивно» или отношение не рефлексивно.

Шаг 1. $\text{res} := \text{true}$.

Шаг 2. Цикл по i от 1 до N .

Шаг 2.1. Если $M_{ii} = 0$, то $\text{res} := \text{false}$.

Шаг 3. Если $\text{res} = \text{true}$, то вернуть ответ «Отношение рефлексивно», иначе отношение не рефлексивно.

Трудоемкость алгоритма $O(N)$

2.1.4 Свойства транзитивности

Транзитивной называют матрицу, если для любого фиксированного элемента $M_{ki} = 1$ из матрицы отношения, и для любого элемента из матрицы отношения $M_{ij} = 1$, выполняется $M_{kj} = 1$.

Алгоритм проверки бинарного отношения на транзитивность:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение транзитивно» или отношение не транзитивно.

Шаг 1. $\text{res} := \text{true}$.

Шаг 2. Цикл по k от 1 до N , цикл по i от 1 до N , цикл по j от 1 до N .

Шаг 2.1. Проверяем все значение M_{ij} , если значение равно 1, то проверяем все значения M_{jk} , если значение равно 1, то проверяем значение M_{ik} , если оно равно 0, то $\text{res} := \text{false}$.

Шаг 3. Если $\text{res} = \text{true}$, то вернуть ответ «Отношение транзитивно», иначе отношение не транзитивно.

Трудоемкость алгоритма $O(N^3)$

2.2 Типы бинарных отношений

Существует три основных типа бинарных отношений:

- отношение эквивалентности
- отношение квазипорядка
- отношение частичного порядка

2.2.1 Отношение эквивалентности

Бинарное отношение ε на множестве A называют отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Алгоритм проверки отношения на эквивалентность:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение отношением эквивалентности» или отношение не является отношением эквивалентности.

Шаг 1. $\text{res} := \text{true}$.

Шаг 2. Результат = симметричность && рефлексивность && транзитивность, где симметричность - алгоритм 2.1.1, рефлексивность - 2.1.3, транзитивность - 2.1.4., если условия не выполняются $\text{res} := \text{false}$.

Шаг 3. Если $\text{res} = \text{true}$, то вернуть ответ «Отношение является отношением эквивалентности», иначе отношение отношением эквивалентности не является.

Трудоемкость алгоритма $O(N^3) = O(N + N^2 + N^3)$

2.2.2 Отношение квазипорядка

Бинарное отношение ε на множестве A называют отношением квазипорядка, если оно рефлексивно и транзитивно.

Алгоритм проверки отношения на отношение квазипорядка:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение отношением квазипорядка» или отношение не является отношением квазипорядка.

Шаг 1. $\text{res} := \text{true}$.

Шаг 2. Результат = рефлексивности && транзитивности, где рефлексивность - алгоритм 2.1.3. и транзитивность - 2.1.4., если условия не выполняются $res := false$.

Шаг 3. Если $res = true$, то вернуть ответ «Отношение является отношением квазипорядка», иначе отношение отношением квазипорядка не является.

Трудоемкость алгоритма $O(N^3) = O(N + N^3)$

2.2.3 Отношение частичного порядка

Бинарное отношение ε на множестве A называют отношением частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Алгоритм проверки отношения на отношение частичного порядка:

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. «Отношение отношением частичного порядка» или отношение не является отношением частичного порядка.

Шаг 1. $res := true$.

Шаг 2. Результат = рефлексивности && антисимметричности && транзитивности, где рефлексивность - алгоритм 2.1.3, антисимметричность - алгоритм 2.1.2, транзитивности - 2.1.4., если условия не выполняются $res := false$.

Шаг 3. Если $res = true$, то вернуть ответ «Отношение является отношением частичного порядка», иначе отношение отношением частичного порядка не является.

Трудоемкость алгоритма $O(N^3) = O(N + N^2 + N^3)$

2.3 Системы замыкания на множестве бинарных отношений

Замыканием отношения R относительно свойства P называется такое множество R^* , что:

1. $R \subset R^*$
2. R^* обладает свойством P .
3. R^* является подмножеством любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P .

То есть R^* является минимальным надмножеством множества R , выдерживается P .

Множество Z подмножеств множества A называется системой замыканий, если оно замкнуто относительно пересечений, т.е. выполняется $\cap B \in Z$ для любого подмножества $B \subset Z$.

В частности, для $\emptyset \subset Z$ выполняется $\cap \emptyset = A \in Z$

На множестве всех бинарных отношений между элементами множества A^2 следующие множества являются системами замыканий:

1. Z_r – множество всех рефлексивных бинарных отношений между элементами множества A ,
2. Z_s – множество всех симметричных бинарных отношений между элементами множества A ,
3. Z_t – множество всех транзитивных бинарных отношений между элементами множества A ,
4. $Z_{eq} = Eq(A)$ – множество всех отношений эквивалентности на множестве A .

Множество Z_{as} всех антисимметричных бинарных отношений между элементами множества A не является системой замыкания.

На множестве $P(A^2)$ всех бинарных отношений между элементами множества A следующие отображения являются операторами замыканий:

1. $f_r(\rho) = \rho \cup \Delta_A$ – наименьшее рефлексивное бинарное отношение, содержащее отношение $\rho \subset A^2$,
2. $f_s(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$ – наименьшее симметричное бинарное отношение, содержащее отношение $\rho \subset A^2$,
3. $f_t(\rho) = \cup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ – наименьшее транзитивное бинарное отношение, содержащее отношение $\rho \subset A^2$,
4. $f_{eq}(\rho) = f_t f_s f_r(\rho)$ – наименьшее отношение эквивалентности, содержащее отношение $\rho \subset A^2$.

2.3.1 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства рефлексивности

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. Замыкание относительно свойства рефлексивности.

Шаг 1. Создать копию ρ_1 отношения ρ .

Шаг 2. Пустить цикл по i от 1 до N .

Шаг 2.1. Присваиваем $M_{ii} = 1$, добавляем пару (i, i) в ρ_1 .

Шаг 3. return ρ_1 .

Трудоемкость алгоритма $O(N)$

2.3.2 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства симметричности

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. Замыкание относительно свойства симметричности.

Шаг 1. Создать копию ρ_1 отношения ρ .

Шаг 2. Пустить цикл по i от 1 до N и цикл по j от 1 до N .

Шаг 2.1. Если $M_{ij} = 1$, то присваиваем $M_{ji} = 1$, добавить пару (i, j) в ρ_1 .

Шаг 3. return ρ_1 .

Трудоемкость алгоритма $O(N^2)$

2.3.3 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства транзитивности

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. Замыкание относительно свойства симметричности.

Шаг 1. Создать копию ρ_1 отношения ρ .

Шаг 2. Пустить цикл по i от 1 до N , цикл по j от 1 до N , цикл по k от 1 до N и цикл по p от 1 до N .

Шаг 2.1. Проверяем все значение M_{ij} , если значение равно 1, то для j проверяем все значения M_{jk} , если значение какого-либо k равно 1, то присваиваем $M_{ik} = 1$, добавляем в ρ_1 .

Шаг 3. return ρ_1 .

Трудоемкость алгоритма $O(N^4)$

2.3.4 Алгоритм построения замыкания отношения относительно свойства эквивалентности

Вход. Матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ размерностью $N \times N$.

Выход. Замыкание относительно свойства эквивалентности.

Шаг 1. Создать копию ρ_1 отношения ρ .

Шаг 2. По очереди для ρ_1 вызвать алгоритмы построения замыкания рефлексивности, симметричности и транзитивности.

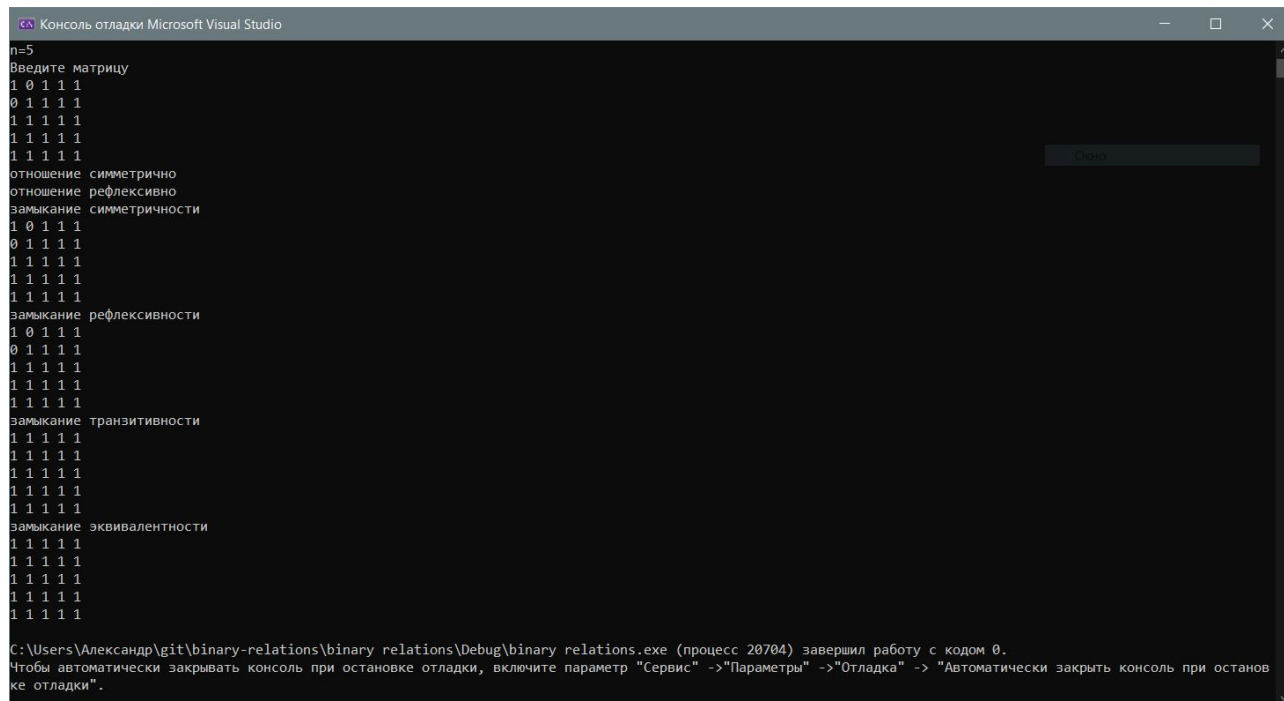
Шаг 3. return ρ_1 .

Трудоемкость алгоритма $O(N^4)$

3 Программная реализация рассмотренных алгоритмов

3.1 Результаты тестирования программы

На рисунке 1 можно увидеть работу, реализуемой программы, по рассмотренным алгоритмам.



```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
n=5
Введите матрицу
1 0 1 1 1
0 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
отношение симметрично
отношение рефлексивно
замыкание симметричности
1 0 1 1 1
0 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
замыкание рефлексивности
1 0 1 1 1
0 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
замыкание транзитивности
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
замыкание эквивалентности
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
C:\Users\Александр\git\binary-relations\binary relations\Debug\binary relations.exe (процесс 20704) завершил работу с кодом 0.
Чтобы автоматически закрывать консоль при остановке отладки, включите параметр "Сервис" -> "Параметры" -> "Отладка" -> "Автоматически закрыть консоль при остано
ке отладки".
```

Рисунок 1 – Тест программы

3.2 Код программы, на основе рассмотренных алгоритмов, на языке C++

```
#include <iostream>
```

```
using namespace std;
```

```
int symmetry1 = 0, reflexivity1 = 0, transitivity1 = 0, antisymm
```

```
void symmetry(int** a, int n)
{
```

```
    int not_symmetry1 = 0;
```

```
    for (int i = 0; i < n; i++)
```

```
    {
```

```
        for (int j = 0; j < n; j++)
```

```

        {
            if (a[i][j] != a[j][i])
                not_symmetry1++;
        }
    }
    if (not_symmetry1 == 0 )
        cout << "relation is symmetrical" << endl;
    symmetry1++;
}

void antisymmetry(int** a, int n)
{
    int not_antisymmetry1 = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            if (a[i][j] == 1 &&
                a[j][i] == 1 && i != j)
                not_antisymmetry1++;
        }
    }
    if (not_antisymmetry1 == 0) {
        cout << "relation is antisymmetric" << endl;
        antisymmetry1++;
    }
}

void reflexivity(int** a, int n)
{
    int chek = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)

```

```

    {
        if (a[i][i] == 1)
            chek++;
    }
    if (chek == n) {
        cout << "relation is reflexively" << endl;
        reflexivity1++;
    }
}

void transitivity(int** a, int n)
{
    int chek = 0;
    int not_transitivity1 = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            if (a[i][j])
            {
                for (int k = 0; k < n; k++)
                {
                    if (a[j][k] && !a[i][k])
                    {
                        not_transitivity1++;
                    }
                    else
                    {
                        chek++;
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        }

    }

    if (chek == 1) {
        cout << "relation is transitive" << endl;
        transitivity1++;
    }
}

void pr_symmetry(int** a, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++)
            if (a[i][j] == 1)
                a[j][i] = 1;
}

void pr_reflexivity(int** a, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
        a[i][i] = 1;
}

void pr_transitivity(int** a, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            for (int k = 0; k < n; k++)
            {
                if (a[j][k] == 1)
                {

```

```

        for (int p = 0; p < n; p++)
        {
            if (a[k][p] == 1)
                a[j][p] = 1;
        }
    }
}

void pr(int** a, int n, int number)
{
    int** a1;
    a1 = new int* [n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        a1[i] = new int[n];
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            a1[i][j] = a[i][j];
        }
    }
    if (number == 1)
    {
        pr_symmetry(a1, n);
        cout << "symmetry closure" << endl;
    }
    if (number == 2)
    {
        pr_reflexivity(a1, n);
        cout << "reflexivity closure" << endl;
    }
    if (number == 3)

```

```

    {
        pr_transitivity(a1, n);
        cout << "transitivity closure" << endl;
    }
    if (number == 4)
    {
        pr_symmetry(a1, n);
        pr_reflexivity(a1, n);
        pr_transitivity(a1, n);
        cout << "equivalence closure" << endl;
    }

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++)
            cout << a1[i][j] << ' ';
        cout << endl;
    }
}

```

```

int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "RUS");
    int n;
    cout << "n=";
    cin >> n;
    int** a;
    a = new int* [n];
    cout << "Enter matrix \n";
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        a[i] = new int[n];
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {

```



```

        cin >> a[i][j];
    }
}

symmetry(a, n);
reflexivity(a, n);
transitivity(a, n);
antisymmetry(a, n);

if (symmetry1 == 1 && reflexivity1 == 1 &&
    transitivity1 == 1)
    cout << "The relation is an
            equivalence relation" << endl;
if (reflexivity1 == 1 && transitivity1 == 1)
    cout << "The relation is a
            quasi-order relation" << endl;
if (symmetry1 == 0 && reflexivity1 == 1 &&
    transitivity1 == 1)
    cout << "The relation is a partial
            order relation" << endl;

pr(a, n, 1);
pr(a, n, 2);
pr(a, n, 3);
pr(a, n, 4);

return 0;
}

```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены основные свойства бинарных отношений, виды бинарных отношений, при определённых комбинациях свойств, а также изучена система замыканий на множестве бинарных отношений. Также были разработаны алгоритмы определения свойств отношений и их классификации.