

где  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{E}_k$  – энергия сигналов  $s_i(t)$  и  $s_k(t)$ , а  $\mathcal{E}_{ik}$  – взаимная энергия двух сигналов.

Сравнивая полученное выражение с формулой (2.1), можно записать выражение для скалярного произведения двух сигналов и косинуса угла между ними:

$$(s_1(t), s_2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt; \quad \cos \varphi = \frac{(s_1(t), s_2(t))}{\|s_1(t)\| \|s_2(t)\|}.$$

Если угол  $\varphi = \pi/2$ , то  $\cos \varphi = 0$ . Это значит, что скалярное произведение сигналов с таким углом между ними, а значит, и их взаимная энергия равны 0. Такие сигналы называются ортогональными.

Таким образом, геометрические методы в теории сигналов основаны на представлении сигнала как вектора в пространстве векторов, удовлетворяющих определенным условиям (линейности, ортогональности). При этом возможно использование понятия линейного пространства действительных или комплексных сигналов со свойствами линейного пространства векторов.

Причиной объединения сигналов в множество, образующее пространство сигналов, является наличие общих свойств, удовлетворяющих принципам линейности. При этом имеется возможность одни элементы множества выразить через другие. Исследование свойств сигналов в рамках векторного представления оказывается полезным для синтеза устройств, удовлетворяющих принципу суперпозиции.

Для передачи сигналов по каналам связи с помехами, а также для разрешения сигналов основное значение имеет не положение их в пространстве сигналов, а расстояние между ними. Для этого можно воспользоваться свойствами скалярного произведения векторов.

### 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

#### 3.1. Обобщенный ряд Фурье

##### 3.1.1. Система ортогональных функций и ряд Фурье

Сигналы, используемые в радиотехнике, имеют достаточно сложную структуру. Математическое описание таких сигналов является трудной задачей. Поэтому для упрощения процедуры анализа сигналов и прохождения их через радиотехнические цепи используют прием, предусматривающий разложение сложных сигналов на совокупность идеализированных математических моделей, описываемых элементарными функциями.

Французский физик и математик Жанн Б. Фурье (1768 – 1830) доказал теорему, в соответствии с которой любое изменение во времени определенной функции можно представить в виде конечного или бесконечного ряда некоторых элементарных функций времени, совокупность которых образует так называемую базисную систему функций, или систему базисных функций. Такое представление значительно упрощается, если функции данной системы обладают свойством ортогональности. Рассмотрим это более подробно.

*Определение:*

*Бесконечная система комплексных функций*

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t), \dots$$

*называется ортогональной на отрезке  $[a, b]$ , если выполняется следующее условие:*

$$\int_a^b \varphi_k(t) \varphi_n^*(t) dt = \begin{cases} \|\varphi_k(t)\|^2 & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n, \end{cases}$$

где  $\|\varphi_k(t)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt} = \sqrt{\int_a^b |\varphi_k(t)|^2 dt}$  – норма функции  $\varphi_k(t)$ .

Предполагается, что  $\|\varphi_k(t)\| \neq 0$ , т.е. ни одна из функций рассматриваемой системы не равна нулю. Система ортогональных функций будет называться ортонормированной, если  $\|\varphi_k(t)\| = 1$ .

В математике доказано, что любая однозначная, конечная и кусочно-непрерывная, в общем случае комплексная функция  $f(t)$ , удовлетворяющая условию интегрируемости в интервале  $[a, b]$  вида  $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ , может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \dot{c}_0 \varphi_0(t) + \dot{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \dot{c}_k \varphi_k(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \varphi_k(t), \quad (3.1)$$

где  $\dot{c}_k$  – некоторые постоянные комплексные коэффициенты.

Для определения коэффициентов  $\dot{c}_k$  умножим обе части уравнения (3.1) на одну комплексно-сопряженную базисную функцию  $\varphi_n^*(t)$  и проинтегрируем в заданном интервале:

$$\int_a^b f(t) \varphi_n^*(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \varphi_k(t) \varphi_n^*(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \dot{c}_k \int_a^b \varphi_k(t) \varphi_n^*(t) dt \right).$$

В силу ортогональности выбранной системы базисных функций только одно слагаемое суммы при  $n = k$  будет не равно нулю, т.е.

$$\int_a^b f(t)\varphi_k^*(t)dt = \dot{c}_k \int_a^b \varphi_k(t)\varphi_k^*(t)dt = \dot{c}_k \|\varphi_k(t)\|^2.$$

Следовательно,

$$\dot{c}_k = \frac{1}{\|\varphi_k(t)\|^2} \int_a^b f(t)\varphi_k^*(t)dt. \quad (3.2)$$

*Определение:*

Ряд  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \varphi_k(t)$ , в котором коэффициенты  $\dot{c}_k$  определяются по формуле (3.2), называется обобщенным рядом Фурье.

Ряд называется обобщенным, так как не определен конкретный вид ортогональной системы базисных функций.

Для ортогональной системы действительных функций также справедливы приведенные определения. При этом основные математические выражения приобретают следующий вид:

условие ортогональности

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_n(t)dt = \begin{cases} \|\varphi_k(t)\|^2 & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n; \end{cases}$$

норма функции

$$\|\varphi_k(t)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_k(t)dt} = \sqrt{\int_a^b \varphi_k^2(t)dt};$$

коэффициенты ряда Фурье

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k(t)\|^2} \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt.$$

Широкое использование в теории сигналов обобщенного ряда Фурье связано с важными свойствами, выделяющими его из множества других рядов, встречающихся в математике.

### 3.1.2. Свойства обобщенного ряда Фурье

#### а. Погрешность аппроксимации

Аппроксимация функции  $f(t)$  любым из известных рядов при фиксированном числе слагаемых (что, как правило, бывает на практике) осуществляется с некоторой погрешностью. Погрешность оценивается величиной средней квадратической ошибки, равной

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[ f(t) - \sum_{k=0}^N \dot{a}_k \varphi_k(t) \right]^2 dt.$$

Обобщенный ряд Фурье при заданной системе ортогональных функций и фиксированном числе слагаемых ряда обеспечивает наилучшую аппроксимацию в смысле минимума средней квадратической ошибки, т.е. при  $\dot{a}_k = \dot{c}_k$

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[ f(t) - \sum_{k=0}^N \dot{c}_k \varphi_k(t) \right]^2 dt = \min.$$

Доказательство этого свойства ряда Фурье приведено в [1].

При  $N \rightarrow \infty$  средняя квадратическая ошибка  $\varepsilon = 0$ , т.е. ряд Фурье сходится к  $f(t)$  в среднеквадратическом смысле. Это не исключает отсутствия сходимости в некоторых точках  $f(t)$ , например, вблизи точки разрыва. Данный эффект в математике получил название *явление Гиббса*.

## б. Энергетические соотношения

Полагаем, что аппроксимируемая функция времени  $f(t)$  является математической моделью сигнала, что позволяет использовать в дальнейшем обозначение  $s(t)$ . Временной интервал, в котором рассматривается сигнал, обозначим  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Этот промежуток времени и будет интервалом ортогональности системы базисных функций. При таком обозначении функции и соответствующем ее физическом смысле ряд Фурье является по существу разложением сигнала на составляющие. Он имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \varphi_k(t).$$

Коэффициенты ряда равны 
$$\dot{c}_k = \frac{1}{\|\varphi_k(t)\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_k^*(t) dt.$$

Совокупность коэффициентов ряда Фурье называют *спектром* сигнала. *Спектр* (от лат. spectrum – представление, образ) – совокупность всех значений какой-либо физической величины, характеризующей систему или процесс.

Произведение  $\dot{c}_k \varphi_k(t)$  является  $k$ -й *спектральной составляющей* сигнала. В этом случае можно сказать, что обобщенный ряд Фурье представляет сигнал  $s(t)$  в виде бесконечной суммы спектральных составляющих.

Квадрат нормы функции  $s(t)$  имеет смысл энергии сигнала, т.е.

$$\|s(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \mathcal{E}.$$

Учитывая ортогональность системы базисных функций, в подынтегральном выражении будут только слагаемые суммы, представляющие собой квадраты функций  $\varphi_k(t)$ , что приводит к следующему:

$$\mathcal{E} = \|s(t)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\dot{c}_k|^2 \|\varphi_k(t)\|^2.$$

Средняя мощность сигнала за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  равна

$$P_{cp} = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} |\dot{c}_k|^2 \|\varphi_k(t)\|^2.$$

Таким образом, энергия (средняя мощность) сигнала в интервале  $\Delta t$  равна сумме энергий (средних мощностей) всех компонент, из которых образуется ряд. Данное равенство получило название *равенство Парсеваля*.

В свою очередь при конечном числе слагаемых ряда Фурье, когда  $N < \infty$ , можно записать такое очевидное неравенство:

$$\mathcal{E} = \|s(t)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\dot{c}_k|^2 \|\varphi_k(t)\|^2 \geq \sum_{k=0}^N |\dot{c}_k|^2 \|\varphi_k(t)\|^2.$$

Это неравенство, справедливое для любой ортогональной системы функций, называется *неравенством Бесселя*.

Ортогональная система, содержащая  $N$  функций  $\varphi_k(t)$ , называется полной, если при  $N \rightarrow \infty$  средняя квадратическая ошибка аппроксимации  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### в. Системы базисных функций

Выбор системы базисных функций осуществляется с учетом вида анализируемых сигналов, задач и методов анализа и синтеза сигналов, способов их преобразований. В настоящее время используется небольшое число систем ортогональных функций. Классический спектральный анализ строится на основе тригонометрических ( $\sin k\omega t$ ,  $\cos k\omega t$ ) и комплексных ( $e^{-jk\omega t}$ ,  $e^{jk\omega t}$ ) функций. При дискретизации непрерывных сигналов по теореме отсчетов используют функции вида  $\sin x/x$ . Для приближенного разложения функций, когда требуется получить аппроксимацию рядом Фурье с минимальным числом членов, применяются ортогональные системы полиномов: Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита [1,2]. При цифровой обработке сигналов эффективно использовать разложение сигналов по системам кусочно-непрерывных функций Уолша, Радемахера [1].

## 3.2. Гармонический спектральный анализ периодических сигналов

### 3.2.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

Гармонический спектральный анализ периодических сигналов предполагает разложение сигналов в ряд Фурье по тригонометрическим функциям – синусам и косинусам. Эти функции описывают гармонические колебания, которые сохраняют свою форму в процессе преобразований линейными устройствами (изменяются только амплитуда и фаза), что позволяет использовать теорию колебательных систем для анализа свойств радиотехнических цепей.

Для получения математического выражения ряда Фурье воспользуемся результатами, полученными при рассмотрении обобщенного ряда Фурье, и системой ортогональных функций  $\varphi_k(t)$ , в качестве которой возьмем тригонометрические функции вида

$$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \sin k\omega_1 t, \dots \quad (3.3)$$

Докажем ортогональность этой системы функций в интервале  $T = 2\pi/\omega_1$ , совпадающем с периодом сигнала  $s(t)$ . Для этого достаточно показать, что:

$$1. \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_1 t \cos k\omega_1 t dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-T/2}^{T/2} \sin n\omega_1 t \sin k\omega_1 t dt = 0 \quad \text{при} \quad n \neq k; \quad (3.4)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_1 t \sin k\omega_1 t dt = 0 \quad \text{при всех значениях } n \text{ и } k. \quad (3.5)$$

$$2. \quad \|\varphi_k(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_k^2(t) dt \neq 0 \quad \text{при всех } k.$$

Для вычисления интегралов (3.4) и (3.5) воспользуемся известными тригонометрическими формулами

$$\cos n\omega_1 t \cos k\omega_1 t = 1/2 [\cos(n+k)\omega_1 t + \cos(n-k)\omega_1 t];$$

$$\sin n\omega_1 t \sin k\omega_1 t = 1/2 [\cos(n-k)\omega_1 t - \cos(n+k)\omega_1 t];$$

$$\cos n\omega_1 t \sin k\omega_1 t = 1/2 [\sin(n+k)\omega_1 t - \sin(n-k)\omega_1 t].$$

Тогда получим интегралы вида  $\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega_1 t dt$  и  $\int_{-T/2}^{T/2} \sin l\omega_1 t dt$ , где  $m$  и  $l$  – целые числа, причем  $m \neq 0$ . Эти интегралы равны:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega_1 t dt = \frac{1}{m\omega_1} \sin m\omega_1 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{m\omega_1} \sin m \frac{2\pi}{T} t \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0;$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin l\omega_1 t dt = -\frac{1}{l\omega_1} \cos l\omega_1 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = -\frac{1}{l\omega_1} \cos l \frac{2\pi}{T} t \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0.$$

Вычислим квадрат нормы функций рассматриваемой системы.

$$\text{При } k = 0 \quad \|\varphi_0(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T.$$

$$\text{При } k \neq 0 \quad \|\varphi_k(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 k\omega_1 t dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2k\omega_1 t \right) dt = \frac{T}{2}.$$

$$\|\varphi_k(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 k\omega_1 t dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k\omega_1 t \right) dt = \frac{T}{2}.$$

Ортогональность системы тригонометрических функций (3.3) доказана.

Представление периодического сигнала в виде ряда Фурье предполагает нахождение коэффициентов  $c_k$ . Коэффициенты не являются комплексными, так как используется система ортогональных тригонометрических функций. Как видно из полученной ранее формулы (3.2), для нахождения  $c_k$  необходимо знать  $\|\varphi_k(t)\|^2$  для каждой функции системы (3.3).

Запишем выражения для коэффициентов ряда, обозначив их как  $a_k$  и  $b_k$ , в зависимости от вида функции (1,  $\cos$  или  $\sin$ ) ортогональной системы

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt.$$

Таким образом, ряд Фурье можно представить так

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t).$$

Для того чтобы коэффициенты  $a_k$  определялись по одной и той же формуле для  $k = 0$  и  $k \neq 0$ , ряд Фурье принято записывать следующим образом:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (3.6)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt. \quad (3.7)$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Периодический сигнал можно представить в виде суммы бесконечного числа гармонических составляющих (синусоидальных и косинусоидальных), каждая из которых характеризуется своей амплитудой и частотой. Совокуп-

ность этих составляющих будем называть *спектром* сигнала, а совокупность их амплитуд – *амплитудным спектром* сигнала.

2. Составляющая  $a_0/2$  – это "нулевая" (постоянная) составляющая с частотой, равной 0.

3. Амплитуды составляющих определяются по формулам (3.7).

4. Частоты составляющих дискретны, т.е. имеют значения, кратные основной частоте – частоте сигнала:  $0, \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ . Таким образом, спектр периодического сигнала является *дискретным*.

Практическое применение имеет другая форма записи тригонометрического ряда Фурье. Известно, что

$$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t = A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k),$$

где 
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Тогда ряд (3.6) можно записать так:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Таким образом, периодический сигнал любой формы представляется постоянной составляющей  $A_0/2$  и бесконечной совокупностью гармонических составляющих с амплитудами  $A_k$  и начальными фазами  $\varphi_k$ .

Совокупность составляющей  $A_0/2$  и амплитуд  $A_k$  называют *амплитудным спектром*, а совокупность фаз  $\varphi_k$  – *фазовым спектром* сигнала.

### 3.2.2. Спектры четных и нечетных сигналов

Определение спектров периодических сигналов сводится по существу к нахождению коэффициентов ряда Фурье. Решение этой задачи иногда значительно упрощается, если учитываются особенности сигналов.

#### **Спектр четных сигналов**

Если сигнал  $s(t)$  четный, то коэффициенты  $b_k$  равны 0, так как подынтегральная функция  $s(t) \sin k\omega_1 t$  является нечетной (интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен 0). При этом ряд Фурье содержит только косинусы и постоянную составляющую, т.е.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t,$$

где коэффициенты  $a_k$  равны:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt.$$



Таким образом, для определения коэффициентов ряда Фурье четных сигналов достаточно иметь сигнал, заданный на половине периода.

### **Спектр нечетных сигналов**

Если сигнал  $s(t)$  нечетный, то коэффициенты  $a_k$  равны 0, так как подынтегральная функция  $s(t)\cos k\omega_1 t$  является нечетной. При этом ряд Фурье содержит только синусы

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_1 t ,$$

где коэффициенты  $b_k$  равны

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt .$$

И в этом случае для определения коэффициентов ряда Фурье достаточно иметь сигнал, заданный на половине периода.

### **3.2.3. Комплексная форма ряда Фурье**

Наиболее часто пользуются другой, более компактной формой записи ряда Фурье, называемой *комплексной формой*. Для получения ряда Фурье в комплексной форме воспользуемся известными формулами Эйлера:

$$\cos k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}, \quad \sin k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} .$$

Подставив эти выражения в формулу (3.6), получим

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_1 t} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{C}_{-k} e^{-jk\omega_1 t} , \end{aligned}$$

где 
$$\dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad \dot{C}_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} .$$

Окончательно можно записать

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} .$$

Определим комплексный коэффициент  $\dot{C}_k$ . Для этого воспользуемся формулами (3.7):

$$\begin{aligned}\dot{C}_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.\end{aligned}$$

Таким образом, комплексная форма ряда Фурье имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad \text{где} \quad \dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (3.8)$$

Как видно из полученной формулы, спектр сигнала содержит компоненты в области положительных и отрицательных частот. Следует иметь в виду, что отрицательная частота – понятие, не имеющее физической интерпретации. Это математическая модель, связанная с мнимостью комплексного числа как такового. Появление отрицательных частот является следствием формальных математических преобразований. Однако отрицательные значения частоты  $k\omega_1$  при  $k < 0$  получают ясное геометрическое толкование (рис.3.1).

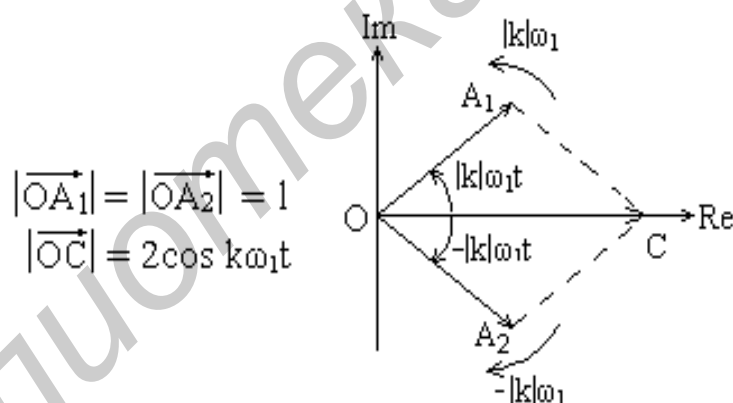


Рис. 3.1. Геометрическое представление тригонометрической и комплексных функций

На векторной диаграмме комплексная величина  $e^{jk\omega_1 t}$  представляется в виде вектора, модуль которого равен единице (единичный вектор). Этот вектор вращается с угловой скоростью  $k\omega_1$  против часовой стрелки, если  $k\omega_1 > 0$ , и по часовой стрелке, если  $k\omega_1 < 0$ . Геометрическая сумма единичных векторов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями, есть функция  $2 \cos k\omega_1 t$ .

Коэффициент  $\dot{C}_k$  является комплексной величиной. Его можно представить так:

$$\dot{C}_k = |\dot{C}_k| e^{j\varphi_k}, \quad \text{где} \quad |\dot{C}_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Анализ полученных форм представления ряда Фурье позволяет установить следующую зависимость между коэффициентами.

Для тригонометрического ряда  $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$ :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt;$$

$$a_k = A_k \cos \varphi_k; \quad b_k = -A_k \sin \varphi_k; \quad a_k = \dot{C}_k + \dot{C}_{-k}; \quad b_k = j(\dot{C}_k - \dot{C}_{-k}).$$

Для тригонометрического ряда  $s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$ :

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}; \quad A_k = 2|\dot{C}_k|.$$

Для комплексного ряда  $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}$ :

$$\dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2}; \quad \dot{C}_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}; \quad |\dot{C}_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}; \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k};$$

$$|\dot{C}_k| = \frac{A_k}{2}.$$

Эти результаты представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

## Коэффициенты рядов Фурье

| Тригонометрический ряд Фурье  |  | Комплексный ряд Фурье   |
|---|--|---|
| $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$                                    | $s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$ | $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}$   |
| $a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt$ $b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt$ | $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}$             | $\dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$ $\dot{C}_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$                                      |
| $a_k = A_k \cos \varphi_k$ $b_k = -A_k \sin \varphi_k$  |  | $ \dot{C}_k  = \frac{1}{2} A_k$ $\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}$ $\varphi_{-k} = \arctg \frac{b_k}{a_k}$ |
| $a_k = \dot{C}_k + \dot{C}_{-k}$ $b_k = j(\dot{C}_k - \dot{C}_{-k})$  | $A_k = 2 \dot{C}_k $   |   |

Таким образом, тригонометрические и комплексная формы ряда Фурье – это различные способы представления одного и того же ряда. Если период  $T = 2\pi/\omega_1$  сигнала равен периоду базисных функций (выше был рассмотрен именно этот случай), то разложение сигнала на составляющие  $a_k \cos k\omega_1 t$  и  $b_k \sin k\omega_1 t$ , или  $A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$ , или  $\dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}$  справедливо на каждом периоде  $T$  при произвольном значении  $t_0$ , т.е. фактически на всей оси времени. Следовательно, можно сделать такой важный вывод, подводящий итог всему сказанному: периодический сигнал, заданный на интервале времени  $[-\infty, \infty]$ , может быть представлен рядом Фурье в тригонометрической или комплексной формах при условии, что период сигнала совпадает с периодом базисных функций.

#### 3.2.4. Графическое представление спектра периодического сигнала

Наиболее наглядно о спектре периодического сигнала можно судить по его графическому изображению, которое называют спектральной диаграммой. Раз-

личают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы. Строятся они в системе координат "частота – амплитуда" и "частота – фаза".

При построении диаграмм (рис. 3.2) на оси абсцисс откладывают значения частот  $k\omega_1$ , а по направлению оси ординат – отрезки прямых, длины которых соответствуют в некотором масштабе величинам амплитуд или фаз гармонических составляющих с частотами  $k\omega_1$ .

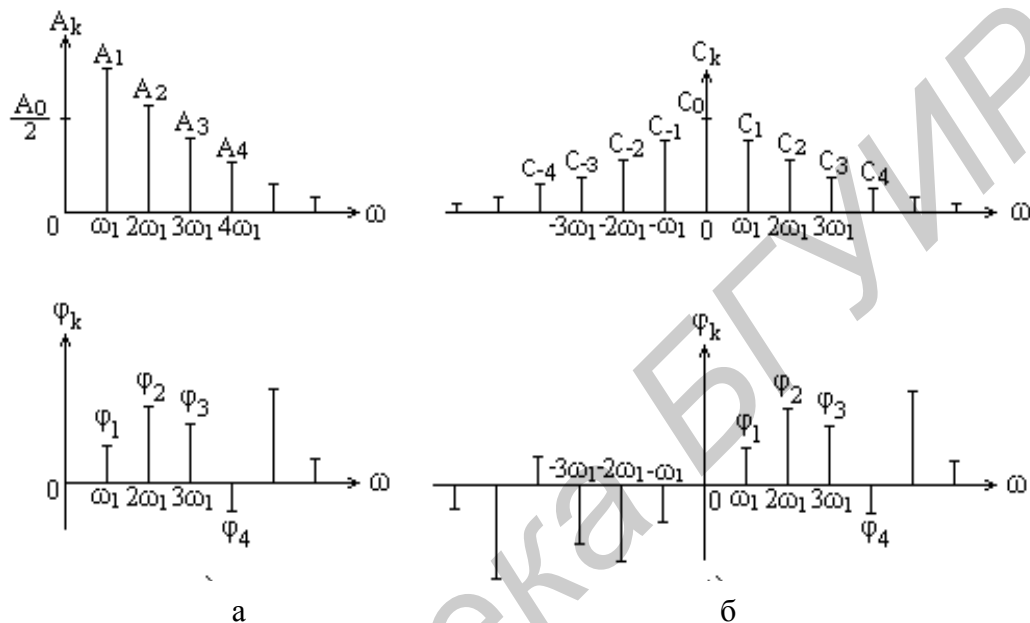


Рис. 3.2. Спектральные диаграммы

Каждой форме ряда Фурье соответствуют две спектральные диаграммы. Для тригонометрических форм – спектр амплитуд  $a_k$  и  $b_k$ , или спектр амплитуд  $A_k$  и спектр фаз  $\varphi_k$  (см. рис. 3.2,а). Для комплексной формы – спектр амплитуд  $C_k = |\dot{C}_k|$  и спектр фаз  $\varphi_k$  (см. рис. 3.2,б).

Таким образом, спектр периодического сигнала представляется в виде совокупности линий, которые характеризуют амплитуды, начальные фазы и изменяющиеся дискретно частоты гармонических составляющих. Поэтому спектр периодического сигнала называют *линейчатым*, или *дискретным*.

Заметим, что отдельная линия спектра – это не гармоническая составляющая спектра как таковая, это геометрическое представление ее параметров.

### 3.3. Гармонический спектральный анализ непериодических сигналов

#### 3.3.1. Спектральная характеристика непериодических сигналов

В радиотехнике в качестве непериодических сигналов рассматривают обычно одиночные импульсные сигналы. Для спектрального анализа таких сигналов используется прием, при котором непериодический процесс условно считается периодическим, но с периодом  $T$ , стремящимся к бесконечности. При этом имеется возможность воспользоваться рассмотренными ранее методами гармонического спектрального анализа периодических сигналов.

Пусть  $s(t)$  – периодический сигнал, имеющий дискретный спектр вида

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t},$$

где

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad \text{или} \quad \dot{C}_k = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (3.9)$$

Воспользуемся данными формулами для получения математического выражения спектра одиночного импульсного сигнала.

При  $T \rightarrow \infty$  периодический сигнал вырождается в непериодический (одиночный) сигнал. Изменяются также и формулы (3.9), которые будут характеризовать уже спектр одиночного сигнала. Рассмотрим сущность изменений.

1. При  $T \rightarrow \infty$  основная частота спектра  $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow d\omega$ . Это означает, что гармонические составляющие, на которые разлагается сигнал с периодом  $T$ , будут отстоять друг от друга на бесконечно малую величину  $d\omega$ , т.е. частоты отдельных составляющих будут изменяться не дискретно, а непрерывно. При графическом представлении линии спектра такого сигнала будут плотно располагаться на оси частот. Отсюда и название спектра – *сплошной*.

2. Величина  $k\omega_1$  при  $\omega_1 \rightarrow d\omega$  превращается в текущую частоту  $\omega$ .

Тогда выражение для коэффициента  $\dot{C}_k$  можно записать таким образом:

$$\dot{C}_k = C(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.10)$$

Получено выражение для комплексных амплитуд составляющих спектра непериодического сигнала. Наличие в формуле бесконечно малой величины  $d\omega$  как одного из сомножителей свидетельствует о том, что амплитуды составляющих спектра также бесконечно малы.

Таким образом, при  $T \rightarrow \infty$  получаем бесконечно большое число бесконечно малых по амплитуде гармонических составляющих, частоты которых располагаются "бесконечно" близко друг к другу и заполняют в общем случае всю шкалу частот. Это значит, что такое понятие, как амплитудный спектр, к

непериодическому сигналу применять нельзя. Возникла необходимость ввести понятие *спектральная плотность амплитуд*.

Воспользовавшись формулами (3.9), (3.10) и заменив операцию суммирования операцией интегрирования, можно записать

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (3.11)$$

Сравнение этой формулы с формулой (3.10) позволяет выделить функцию

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.12)$$

и использовать ее в качестве спектральной характеристики сигнала, называемой *спектральной плотностью*. Она равна отношению комплексной амплитуды  $C(j\omega)$  к частотному интервалу  $d\omega$  (без коэффициента  $1/2\pi$ ).

После подстановки (3.12) в (3.11) получаем

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.13)$$

Выражения (3.12) и (3.13) называются прямым и обратным преобразованиями Фурье соответственно. Это основные соотношения для получения спектральных характеристик непериодических сигналов.

### 3.3.2. Амплитудный и фазовый спектры непериодического сигнала

Для спектральной плотности сигнала справедливы все свойства комплексных чисел. Выполним некоторые преобразования:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt,$$

$$S(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = S(\omega) \cos \varphi(\omega) + jS(\omega) \sin \varphi(\omega),$$

где  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt$  – действительная часть спектра;

$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$  – мнимая часть спектра;

$S(\omega) = |S(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$  – амплитудный спектр сигнала;

$\varphi(\omega) = -\arctg \left[ \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right]$  – фазовый спектр сигнала.

Полагая, что сигнал описывается действительной функцией, из полученных выражений видно, что

$$A(\omega) = A(-\omega) \quad \text{и} \quad S(\omega) = S(-\omega),$$

т.е. действительная часть спектра и амплитудный спектр – функции четные;

$$B(\omega) = -B(-\omega) \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega),$$

т.е. мнимая часть спектра и фазовый спектр – функции нечетные.

При  $\omega = 0$  выражение (3.12) приобретает вид

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt.$$

Отсюда можно сделать вывод, что спектральная плотность любого сигнала на нулевой частоте равна площади под кривой графика сигнала.

В тригонометрической форме можно представить также формулу (3.13):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega,$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega.$$

Учитывая, что амплитудный спектр  $S(\omega)$  – функция четная, можно записать

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega.$$

### 3.3.3. Спектральная плотность четного и нечетного сигналов

Пусть  $s(t)$  – четный сигнал, т.е.  $s(t) = s(-t)$ , тогда

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos \omega t dt.$$

Следовательно, спектральная плотность четного сигнала содержит только действительную часть, подынтегральная функция которой также четная. Другими словами, спектральная плотность четного сигнала является действительной функцией.

Пусть  $s(t)$  – нечетный сигнал, т.е.  $s(t) = -s(-t)$ , тогда

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = -2j \int_0^{\infty} s(t) \sin \omega t dt.$$

Следовательно, спектральная плотность нечетного сигнала содержит только мнимую часть, подынтегральная функция которой четная, т.е. спектральная плотность четного сигнала является мнимой функцией.



### 3.3.4. Отличия спектра периодического сигнала от спектра непериодического сигнала

1. Для определения спектра периодического сигнала используется математический аппарат рядов Фурье, для определения спектра непериодического сигнала – преобразования Фурье (интеграла Фурье).

2. Спектром периодического сигнала является *спектр амплитуд* и *спектр фаз* гармонических составляющих. Размерность спектра амплитуд – это размерность сигнала (напряжения или тока). Спектром непериодического сигнала является *спектральная плотность*. Модуль спектральной плотности называют *амплитудным* спектром, размерность –  $B/Гц$  ( $B/Рад/с$ ) или  $A/Гц$  ( $A/Рад/с$ ). Аргумент спектральной плотности – это *фазовый* спектр.

3. Спектр периодического сигнала дискретный (линейчатый). Это означает, что спектральные составляющие спектра с номерами  $\dots, k-1, k, k+1, \dots$  отличаются по частоте друг от друга на величину, равную частоте сигнала, т.е. частоты составляющих равны  $\dots, (k-1)\omega_1, k\omega_1, (k+1)\omega_1, \dots$ . Спектр непериодического сигнала – сплошной, т.е. спектральная плотность имеет определенное значение на всех частотах (в пределах эффективной полосы частот спектра сигнала).

### 3.3.5. Свойства преобразования Фурье

Формулы прямого и обратного преобразований Фурье позволяют по сигналу  $s(t)$  определить его спектральную плотность  $S(j\omega)$  и, если в этом есть необходимость, по известной спектральной плотности  $S(j\omega)$  определить сигнал  $s(t)$ . Другими словами, существует однозначное соответствие между сигналом и его спектром. Для обозначения этого соответствия будем применять символ  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$ .

Вполне очевидно, что любое преобразование сигнала приведет к определенному изменению спектра. Вид и характер таких изменений определяются свойствами преобразования Фурье. Знание этих свойств значительно облегчает определение спектральных характеристик различных сигналов.

Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье.

#### а. Линейность

Дано  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega), s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega), \dots, s_n(t) \leftrightarrow S_n(j\omega)$ .

Определить  $S_\Sigma(j\omega)$  такое, что  $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(t) \leftrightarrow S_\Sigma(j\omega)$ , где  $\alpha_i$  – постоянные коэффициенты.

Воспользуемся прямым преобразованием Фурье:

$$S_{\Sigma}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(j\omega).$$

Окончательно запишем 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(j\omega).$$

**Вывод.** Прямое преобразование Фурье, являясь линейной операцией, обладает свойствами однородности и аддитивности. Поэтому спектр суммы сигналов равен сумме их спектров.

#### б. Спектр сигнала, сдвинутого во времени

Дано  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$ .

Определить  $S_c(j\omega)$  такое, что  $s(t \pm t_0) \leftrightarrow S_c(j\omega)$ .

$$S_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t \pm t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Замена переменных:  $t \pm t_0 = x$ ;  $t = x \mp t_0$ ;  $dt = dx$ .

Тогда

$$S_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega(x \mp t_0)} dx = e^{\pm j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega x} dx = S(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}.$$

Окончательно запишем  $s(t \pm t_0) \leftrightarrow S(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$ .

**Вывод.** Сдвиг сигнала во времени на величину  $\pm t_0$  приводит к изменению фазовой характеристики спектра на величину  $\pm \omega t_0$ . Амплитудный спектр не изменяется.

#### в. Изменение масштаба времени

Пусть сигнал  $s(t)$  подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что сигнал зависит от *переменной*  $\alpha t$ , т.е. превращается в сигнал  $s(\alpha t)$ , где  $\alpha$  - коэффициент, значение которого обеспечивает сжатие ( $\alpha > 1$ ) или расширение ( $0 < \alpha < 1$ ) исходного сигнала (рис. 3.3).

Дано:  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$ .

Определить  $S_M(j\omega)$  такое, что  $s(\alpha t) \leftrightarrow S_M(j\omega)$ .

$$S_M(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha t) e^{-j\omega t} dt.$$

Замена переменных:  $\alpha t = x$ ;  $t = \frac{x}{\alpha}$ ;  $dt = \frac{1}{\alpha} dx$ .

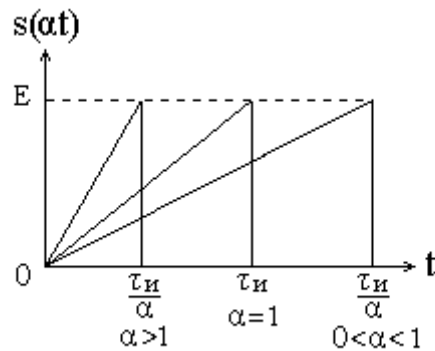


Рис. 3.3. Сжатие и расширение сигнала при различных коэффициентах  $\alpha$

Тогда

$$S_M(j\omega) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j(\omega/\alpha)x} dt = \frac{1}{\alpha} S\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Окончательно запишем  $s(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} S\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right).$

*Вывод.* При сжатии (расширении) сигнала во времени в определенное число раз во столько же раз расширяется (сжимается) его спектр по оси частот при пропорциональном уменьшении (увеличении) амплитуд его составляющих.

г. Спектр производной  $\frac{ds(t)}{dt}$

Дано:  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega).$

Определить  $S_n(j\omega)$  такое, что  $\frac{ds(t)}{dt} \leftrightarrow S_n(j\omega).$

Обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Возьмем производную от левой и правой частей этого равенства:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая полученное выражение с обратным преобразованием Фурье, можно сделать вывод, что  $S_n(j\omega) = j\omega S(j\omega).$

Окончательно запишем  $\frac{ds(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega S(j\omega).$

*Вывод.* Спектр производной сигнала равен спектру исходного сигнала, умноженному на  $j\omega$ . При этом амплитудный спектр изменяется пропорционально изменению частоты, а к фазовой характеристике исходного сигнала добавляется постоянная составляющая, равная  $\pi/2$  при  $\omega > 0$  и равная  $-\pi/2$  при  $\omega < 0$ .

д. Спектр интеграла  $\int_{-\infty}^t s(t)dt$

Дано:  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$ .

Определить  $S_u(j\omega)$  такое, что  $\int_{-\infty}^t s(t)dt \leftrightarrow S_u(j\omega)$ .

Возьмем интеграл от левой и правой частей обратного преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^t s(t)dt = \int_{-\infty}^t \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^t e^{j\omega t} dt \right] d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^t s(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая полученное выражение с обратным преобразованием Фурье, можно сделать вывод, что

$$S_u(j\omega) = \frac{1}{j\omega} S(j\omega).$$

Окончательно запишем  $\int_{-\infty}^t s(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} S(j\omega)$ .

*Вывод.* Спектр сигнала, равного интегралу от исходного сигнала, равен спектру исходного сигнала, деленному на  $j\omega$ . При этом амплитудный спектр изменяется обратно пропорционально изменению частоты, а к фазовой характеристике исходного сигнала добавляется постоянная составляющая, равная  $\pi/2$  при  $\omega < 0$  и равная  $-\pi/2$  при  $\omega > 0$ .

е. Спектр произведения двух сигналов

Дано:  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)$ ,  $s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega)$ .

Определить  $S_{np}(j\omega)$  такое, что  $s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow S_{np}(j\omega)$ .

$$S_{np}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \right] s_2(t)e^{-j\omega t} dt.$$

$$S_{np}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\Omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)e^{-(\omega-\Omega)t} dt \right] d\Omega.$$

Интеграл в квадратных скобках – это спектральная плотность  $S_2[j(\omega - \Omega)]$  сигнала  $s_2(t)$ .

Следовательно,

$$S_{np}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\Omega)S_2[j(\omega - \Omega)] d\Omega = \frac{1}{2\pi} S_1(j\omega) \otimes S_2(j\omega).$$

Окончательно запишем  $s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} S_1(j\omega) \otimes S_2(j\omega)$ .

*Вывод.* Спектр произведения двух сигналов равен свертке их спектров, умноженной на коэффициент  $1/2\pi$ .

Аналогично можно показать, что

$$s_1(t) \otimes s_2(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)S_2(j\omega),$$

т.е. произведению двух спектров  $S_1(j\omega)$  и  $S_2(j\omega)$  соответствует сигнал, образованный сверткой двух таких сигналов, что  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)$ ,  $s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega)$ .

*Следствия* из полученных результатов.

1. Пусть  $\omega = 0$ . Тогда

$$S_{np}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\Omega)S_2(-j\Omega)d\Omega = \mathcal{E}_{12}, \quad (3.14)$$

где  $\mathcal{E}_{12}$  – взаимная энергия двух сигналов.

2. Если в выражении (3.14) положить  $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ , то получим равенство Парсеваля

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega.$$

Т.е. величина  $|S(j\omega)|^2$  может рассматриваться как плотность распределения энергии сигнала по частотам.

ж. Взаимная заменяемость  $\omega$  и  $t$  в преобразованиях Фурье  
(свойство дуальности)

1. Сигналу  $s(t)$  соответствует спектральная плотность  $S(j\omega)$ , причем

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Выполним взаимную замену переменных  $\omega$  и  $t$ . Получаем

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(jt) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(-jt) e^{-j\omega t} dt.$$

Получено выражение для спектра  $s(\omega)$  функции  $\frac{1}{2\pi} S(-jt)$ .

Наличие мнимой единицы  $j$  в обозначении аргумента имеет только символический смысл. Поэтому в функции, описывающей сигнал, можно убрать  $j$ , а в функции, описывающей спектр, поставить. Тогда можно записать окончательный результат:

$$\text{если } s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad \text{то} \quad \frac{1}{2\pi} S(-t) \leftrightarrow s(j\omega). \quad (3.15)$$

2. Спектральной плотности  $S(j\omega)$  соответствует сигнал  $s(t)$ , причем

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Выполним взаимную замену переменных  $\omega$  и  $t$ . Получаем

$$S(jt) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi s(-\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Получено выражение для сигнала  $S(jt)$ , имеющего спектр  $2\pi s(-\omega)$ . Окончательно можно записать:

$$\text{если } s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad \text{то} \quad S(t) \leftrightarrow 2\pi s(-j\omega). \quad (3.16)$$

Физический смысл формул (3.15) и (3.16): если сигналу  $s(t)$  соответствует амплитудный спектр  $S(\omega)$ , то сигналу, имеющему форму такую же, как форма амплитудного спектра  $S(\omega)$ , соответствует спектр, имеющий форму сигнала  $s(t)$ .

Если сигнал четный, т.е.  $s(t) = s(-t)$ , то спектральная плотность также четная и вещественная. В этом случае результаты (3.15) и (3.16) можно переписать следующим образом:

$$\text{если } s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad \text{то} \quad S(t) \leftrightarrow 2\pi s(j\omega).$$

Таким образом, переменные  $\omega$  и  $t$  в преобразованиях Фурье взаимно заменяемы.

Полученные результаты поясняются рис. 3.4.

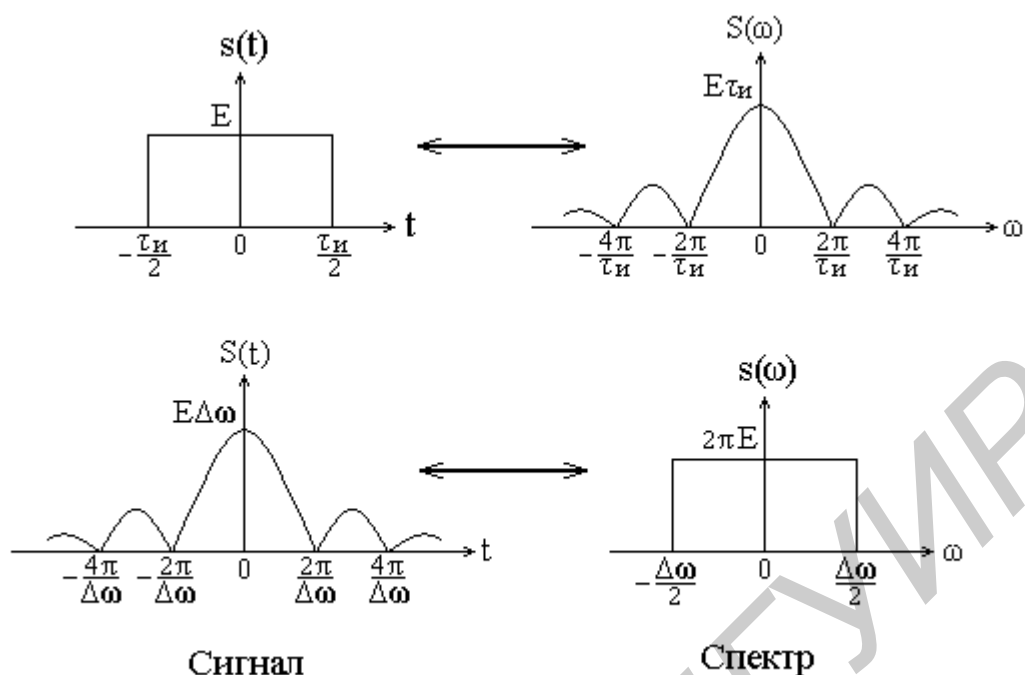


Рис. 3.4. Взаимозаменяемость переменных  $\omega$  и  $t$  в преобразованиях Фурье

### 3. Смещение спектра сигнала

Произведение двух сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$  образует гармонический сигнал  $s(t) = s_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , в котором  $s_1(t)$  при соблюдении некоторых условий (п. 4.5) может быть огибающей. Так, если  $s_1(t)$  – импульсный сигнал (видеоимпульс), то  $s(t)$  – это радиоимпульс с несущей частотой  $\omega_0$ .

Определим спектральную плотность сигнала  $s(t)$ :

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi)} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega_0 t + \varphi)} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt.
 \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная плотность сигнала  $s(t)$  равна

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi} S_1[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} S_1[j(\omega + \omega_0)].$$

**Вывод.** При умножении сигнала на гармоническую функцию образуется сигнал, спектр которого представляет собой преобразованный спектр сигнала

$s_1(t)$ . Суть преобразования заключается в переносе спектра на  $\pm \omega_0$  с уменьшением вдвое его величины.

Рассмотренные свойства преобразования Фурье значительно облегчают вычисление спектров различных сигналов.

### 3.4. Определение спектров некоторых сигналов

#### 3.4.1. Спектр колоколообразного (гауссова) импульса

Сигнал, описываемый функцией вида  $s(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\pi(t/\tau)^2}$ , представляет собой колоколообразный (гауссов) импульс, совпадающий по форме с графиком нормального закона распределения вероятностей (рис. 3.5,а). Некоторые характеристики сигнала (площадь под графиком сигнала, значение параметра  $\tau$ ) рассмотрены ранее (п. 2.2.3). Убедимся в том, что амплитудный спектр этого сигнала по форме совпадает с самим сигналом.

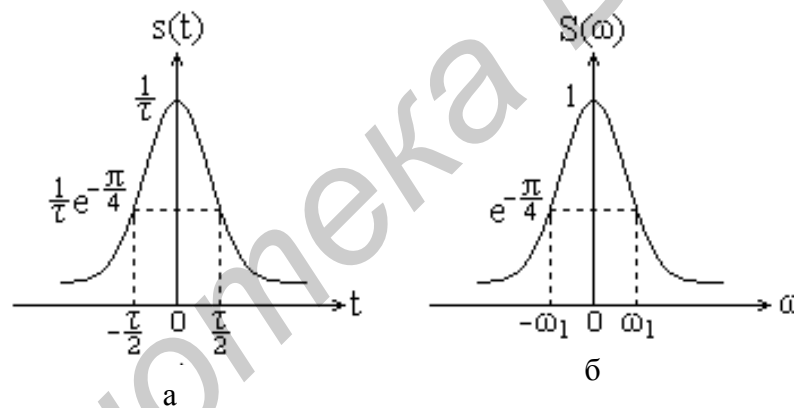


Рис. 3.5. Колоколообразный (гауссов) импульс (а) и его спектр (б)

Спектральную плотность сигнала будем определять, вычисляя прямое преобразование Фурье:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-j\omega t} dt.$$

Применим формулу Эйлера:

$$S(j\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos \omega t dt - j \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \sin \omega t dt.$$

Второй интеграл полученного выражения равен 0 как интеграл в симметричных пределах от нечетной функции. Для вычисления первого интеграла



воспользуемся справочником по математике [1]. В таблице неопределенных интегралов справочника приведена формула

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/4a^2} \quad \text{при } a > 0.$$

Применительно к рассматриваемой задаче  
 $a = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau}$ ;  $b = \omega$ . Следовательно,

$$S(\omega) = \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\pi(t/\tau)^2} \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\tau} \frac{\sqrt{\pi} \tau}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}} = e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}}.$$

Обозначим  $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$ . Тогда  $-\frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi} = -\pi \left( \frac{\omega}{\Omega} \right)^2$ , что позволяет записать

$$S(\omega) = e^{-\pi(\omega/\Omega)^2}.$$

Таким образом, колоколообразный импульс и его спектр описываются по существу одинаковыми функциями (отличаются только масштабом и, разумеется, аргументами). Спектр сигнала изображен на рис. 3.5,б.

Полоса спектра на уровне  $e^{-(\pi/4)}$  от максимального значения равна

$$-\pi \left( \frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \omega_1 = \frac{\Omega}{2} = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau}, \quad \Delta\omega = 2\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau} = \Omega.$$

По значению  $\Delta\omega$  можно оценить эффективную полосу частот, занимаемую спектром сигнала. Полученное соотношение позволяет сделать вывод, что чем меньше параметр  $\tau$  колоколообразного сигнала, тем шире полоса частот, занимаемая его спектром.

### 3.4.2. Спектральная плотность $\delta$ -функции

Спектральную плотность  $\delta$ -функции определим с помощью прямого преобразования Фурье, используя ее селектирующее свойство:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega 0} = 1.$$

Таким образом,  $\delta$ -функция имеет равномерный и сплошной амплитудный спектр, равный единице на всех частотах. Вещественность спектральной плотности обуславливает отсутствие фазового спектра (рис. 3.6,а).

Обратное преобразование Фурье от спектра  $\delta$ -функции даст следующие формулы для ее представления:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega, \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega.$$

Учитывая взаимозаменяемость частоты и времени в преобразовании Фурье, можно записать:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt, \quad \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt.$$

Сдвиг  $\delta$ -функции вдоль временной оси на интервал  $t_0$  приведет к изменению спектра. Он будет равен

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-i\omega t_0}.$$

При сдвиге  $\delta$ -функции амплитудный спектр не изменяется. Появляется фазовый спектр в виде линейной зависимости фазы от частоты (рис. 3.6,б).

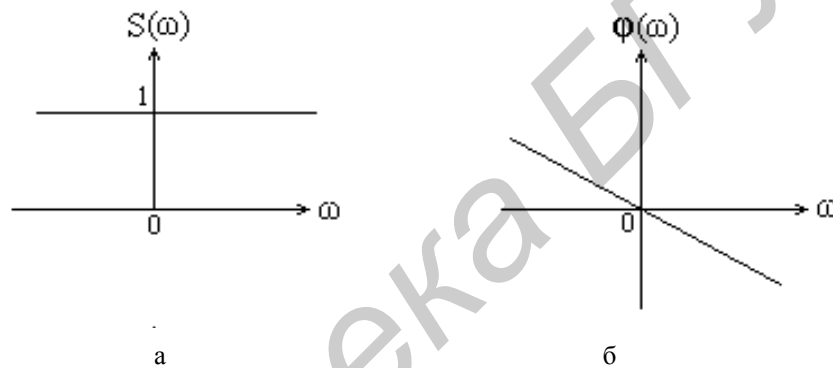


Рис. 3.6. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры  $\delta$ -функции

### 3.4.3. Спектр функции единичного скачка

Определение спектра функции единичного скачка путем непосредственного вычисления преобразования Фурье сопровождается затруднениями, связанными с тем, что эта функция не является абсолютно интегрируемой. Поэтому пользуются косвенным методом, предусматривающим предельный переход к данной функции от другой функции, спектр которой определяется без затруднений.

Функцию единичного скачка можно получить из экспоненциального импульса путем предельного перехода, т.е.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Следовательно, спектральную характеристику функции единичного скачка можно определить, выполнив предельный переход от спектра экспоненциального импульса при  $\alpha \rightarrow 0$ . Определим спектр экспоненциального импульса:

$$S_9(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Тогда искомый спектр равен

$$S(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_9(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

При  $\alpha = 0$  первое слагаемое в правой части этой формулы равно нулю на всех частотах, кроме  $\omega = 0$ . На частоте  $\omega = 0$  это слагаемое обращается в бесконечность. Площадь под графиком функции  $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$  равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 2\alpha \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\alpha\pi}{2\alpha} = \pi.$$

Таким образом, пределом первого слагаемого при  $\alpha \rightarrow 0$  является взвешенная  $\delta$ -функция, т.е.  $\pi\delta(\omega)$ . Пределом второго слагаемого – величина  $1/(j\omega)$ . В результате можно записать выражение для спектральной плотности функции единичного скачка:

$$S(j\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/(j\omega).$$

Графики амплитудного и фазового спектров приведены на рис. 3.7.

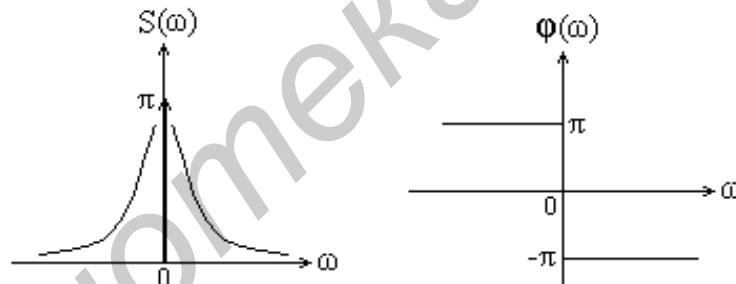


Рис. 3.7. Амплитудный и фазовый спектры функции единичного скачка

#### 3.4.4. Спектр постоянного во времени сигнала

Поскольку мы знаем, что спектром  $\delta$ -функции является константа, то благодаря дуальности преобразования Фурье можно ожидать, что спектр постоянного во времени сигнала (константы) будет иметь вид  $\delta$ -функции.

Пусть  $s(t) = A$ . Спектр этого сигнала равен

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \delta(\omega).$$

Предположение подтвердилось (рис. 3.8,а). Здесь хорошо прослеживается обратная пропорциональность между длительностью сигнала и шириной его спектра: бесконечно протяженный сигнал имеет бесконечно узкий спектр.

### 3.4.5. Спектр комплексной экспоненты

Рассмотрим комплексный сигнал вида  $s(t) = Ee^{j\omega_0 t}$ . Спектр такого сигнала равен

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ee^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi E \delta(\omega - \omega_0).$$

Спектр комплексного сигнала представляет собой одиночную взвешенную  $\delta$ -функцию (рис. 3.8,б). Сигнал не является вещественным, поэтому амплитудный спектр теряет свойство четности.

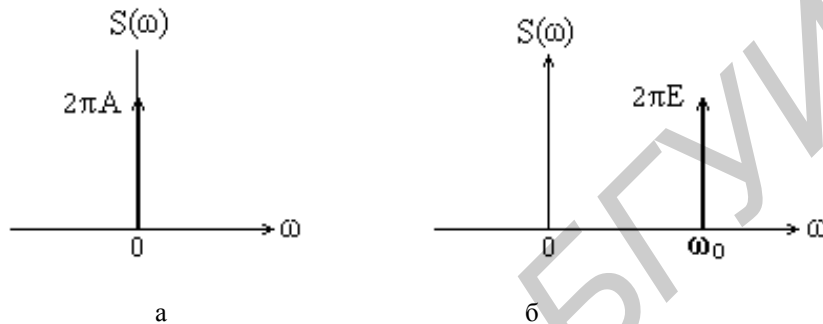


Рис. 3.8. Амплитудные спектры постоянного во времени сигнала (а) и комплексной экспоненты (б)

Заметим, что модель комплексного сигнала является удобным средством анализа модулированных сигналов, особенно при сложных видах модуляции, предусматривающих одновременное изменение амплитуды и фазы. Такая модель сигнала анализируется в следующем разделе 4.

### 3.4.6. Спектр гармонического сигнала

Определим спектральную плотность гармонического сигнала

$$s(t) = E \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{E}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{E}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt. \end{aligned}$$

Окончательно

$$S(j\omega) = A\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0).$$

Спектральная плотность гармонического сигнала представляет собой пару взвешенных  $\delta$ -функций, расположенных на частотах  $\pm \omega_0$ . Веса  $\delta$ -функций отражают комплексную амплитуду гармонического сигнала.

### 3.4.7. Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса

Спектральную плотность прямоугольного видеоимпульса (рис. 3.9) определим двумя способами:

- 1) непосредственным вычислением прямого преобразования Фурье;
- 2) использованием свойств преобразования Фурье.

*Первый способ.*

Вычисляем прямое преобразование Фурье, учитывая ограниченную длительность сигнала и постоянство амплитуды в пределах длительности:

$$S(j\omega) = \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} = E \frac{e^{j\omega\tau_u/2} - e^{-j\omega\tau_u/2}}{j\omega},$$

$$S(\omega) = E\tau_u \frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega\tau_u/2}.$$

Рассматривался четный сигнал, поэтому его спектральная плотность содержит только действительную часть (см. рис. 3.9,б).

Амплитудный спектр представляет собой функцию типа  $\sin x/x$ . Он имеет лепестковый характер, причем ширина лепестков равна  $2\pi/\tau_u$ , т.е. обратно пропорциональна длительности импульса. Нули спектра определяются из уравнения  $\sin(\omega\tau_u/2) = 0$ :

$$\omega\tau_u/2 = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \omega_k = \pm k \frac{2\pi}{\tau_u}.$$

Значение спектральной плотности импульса при  $\omega = 0$  равно произведению  $E\tau_u$ , т.е.  $S(0)$  равно площади импульса.

При увеличении длительности импульса ширина лепестков спектра уменьшается, при этом увеличивается значение  $S(0)$ . При уменьшении длительности импульса ширина лепестков увеличивается, значение  $S(0)$  уменьшается.

При  $\tau_u \rightarrow 0$  точки спектра  $\omega_k = \pm k \frac{2\pi}{\tau_u}$  удаляются в бесконечность и бес-

конечно малая спектральная плотность становится равномерной в бесконечной полосе частот. При  $\tau_u \rightarrow \infty$  точки спектра  $\omega_k$  приближаются к нулю и бесконечно большая спектральная плотность приобретает вид  $\delta$ -функции (с полосой частот, равной нулю).

Фазовый спектр (см. рис. 3.9,б) принимает лишь два значения: 0 и  $\pi$  в зависимости от знака функции  $\sin x/x$ . Значения фазы  $\pi$  и  $-\pi$  неразличимы, разные знаки для фазового спектра при  $\omega > 0$  и  $\omega < 0$  использованы лишь с целью представления его в виде нечетной функции.

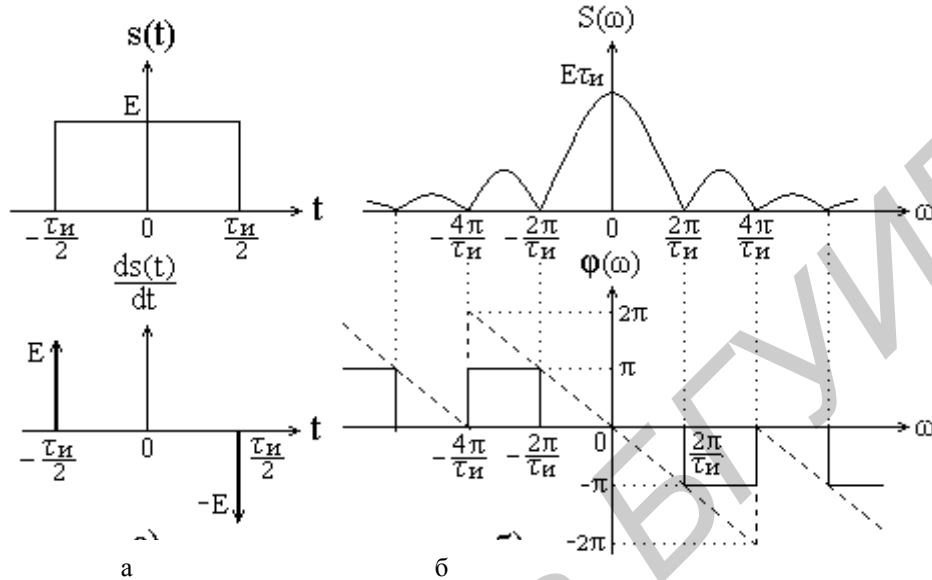


Рис. 3.9. Прямоугольный импульс и его производная (а), спектр прямоугольного импульса (б)

При сдвиге импульса по оси времени на величину  $\Delta t = \pm t_0$  спектральная плотность в соответствии со свойствами преобразования Фурье приобретает вид

$$S(\omega) = E\tau_u \frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega\tau_u/2} e^{j\omega\Delta t} = E\tau_u \frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega\tau_u/2} e^{\pm j\omega t_0}.$$

Как видно из этого выражения, амплитудный спектр не изменяется, а фазовый спектр свидетельствует о линейной зависимости фазы от частоты со скачками на  $\pi$  в точках  $\omega_k$  (штриховая линия на рис. 3.9,б).

*Второй способ.*

Определяем сигнал  $s_1(t)$ , равный производной от рассматриваемого прямоугольного видеоимпульса, т.е.  $s_1(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ . Этот сигнал представляет собой две взвешенные  $\delta$ -функции (см. рис.3.9,а). Спектральная плотность сигнала  $s_1(t)$  будет равна сумме спектральных плотностей  $\delta$ -функций, а именно:

$$\begin{aligned} S_1(j\omega) &= E \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{\tau_u}{2}\right) e^{-j\omega t} dt - E \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{\tau_u}{2}\right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= E \left( e^{j\omega\tau_u/2} - e^{-j\omega\tau_u/2} \right). \end{aligned}$$

Спектральная плотность прямоугольного импульса, являющегося интегралом от сигнала  $s_1(t)$ , получается делением спектра  $S_1(j\omega)$  на  $j\omega$  (см. свойства преобразования Фурье):

$$S(j\omega) = \frac{S_1(j\omega)}{j\omega} = \frac{E \left( e^{j\omega\tau_u/2} - e^{-j\omega\tau_u/2} \right)}{j\omega} = E\tau_u \frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega\tau_u/2}.$$

Второй способ вычисления спектральной плотности является более простым.

#### 3.4.8. Спектральная плотность произвольного периодического сигнала

Периодический сигнал может быть представлен рядом Фурье в комплексной форме

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t},$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  – частота первой гармоники, равная частоте сигнала.

Учитывая результаты, полученные при вычислении спектра комплексного сигнала, можно сделать вывод, что спектральная плотность произвольного периодического сигнала представляет собой набор  $\delta$ -функций, расположенных на частотах гармоник ряда Фурье. Веса  $\delta$ -функций равны соответствующим коэффициентам ряда Фурье, умноженным на  $2\pi$ .

#### 3.4.9. Спектральная плотность сигнала вида $\sin x/x$

При рассмотрении вопросов дискретизации непрерывных сигналов возникает необходимость знать спектр сигнала, описываемого функцией  $\sin x/x$ . Вычисление спектра будем производить по формуле прямого преобразования Фурье. Итак, пусть задан сигнал

$$s(t) = A \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t},$$

где  $\omega_m = 2\pi f_m = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  – период функции  $\sin \omega_m t$ .

Нули сигнала определяются так:

$$\omega_m t = \pm k\pi \text{ при } k = 1, 2, \dots; \quad t = \pm \frac{k\pi}{\omega_m}.$$

Тогда

$$S(j\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} e^{-j\omega t} dt = 2A \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega_m t \cos \omega t}{\omega_m t} dt =$$

$$= \frac{A}{\omega_m} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega + \omega_m)t}{t} dt - \frac{A}{\omega_m} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega - \omega_m)t}{t} dt.$$

Из таблицы определенных интегралов [10]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Тогда при  $|\omega| > \omega_m$   $S(j\omega) = 0$ , а при  $|\omega| < \omega_m$   $S(j\omega) = A\pi/\omega_m$ . Таким образом, спектральная плотность сигнала типа  $\sin x/x$  вещественная (сигнал четный), амплитудный спектр имеет форму прямоугольного импульса. Конкретно для рассматриваемого сигнала  $s(t) = A \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$  амплитудный спектр ограничен полосой частот  $2\omega_m$ , в пределах которой уровень спектра равномерен и равен (рис. 3.10)

$$\frac{A\pi}{\omega_m} = \frac{A\pi}{2\pi f_m} = \frac{A}{2f_m}.$$

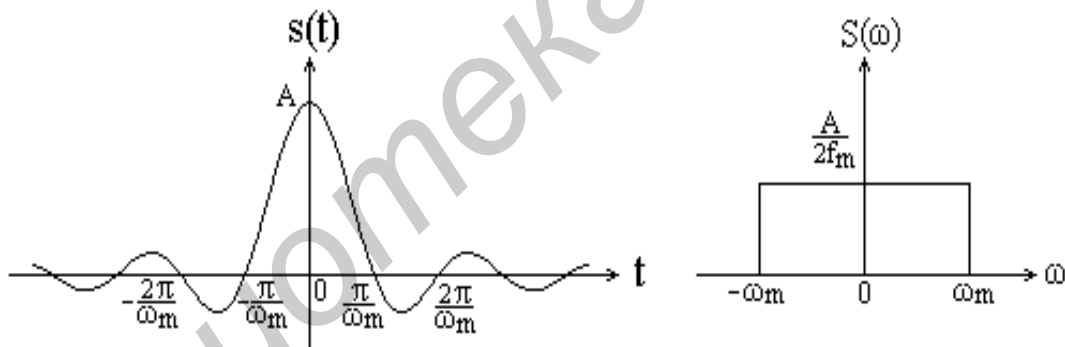


Рис. 3.10. Сигнал  $s(t) = A \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$  и его спектр

Аналогичный результат может быть получен из свойства дуальности преобразования Фурье. В соответствии с этим свойством, если четному сигналу  $s(t)$  соответствует спектральная плотность  $S(j\omega)$ , то сигналу  $S(t)$  будет соответствовать спектральная плотность  $2\pi s(j\omega)$ .

Известно, что прямоугольному импульсу длительностью  $\tau_u$  и амплитудой  $E$  соответствует спектральная плотность  $E\tau_u \frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{(\omega\tau_u/2)}$ . Это значит, что сигналу типа  $\sin x/x$  соответствует амплитудный спектр, имеющий прямоугольную



форму. Необходимо только определить длительность и уровень амплитудного спектра рассматриваемого сигнала  $s(t)$ .

Заменив  $\omega$  на  $t$ , а также  $\omega_m$  на  $\tau_u/2$  и  $E\tau_u$  на  $A$ , из формулы спектральной плотности получим сигнал  $s(t) = A \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$ .

Заменив  $t$  на  $\omega$ , а также  $\tau_u/2$  на  $\omega_m$  и  $E$  на  $A/2\omega_m$ , из формулы прямоугольного импульса получим спектральную плотность  $s(j\omega)$  в частотном диапазоне  $2\omega_m$ . Уровень амплитудного спектра равен  $2\pi A/2\omega_m = A/2f_m$ .

Итак, окончательно можно записать выражение для спектра рассматриваемого сигнала

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{A}{2f_m} & \text{при } |\omega| \leq \omega_m, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

Полученные результаты будут использованы при рассмотрении вопросов дискретизации непрерывных сигналов на основании теоремы Котельникова.

### 3.5. Корреляционный анализ сигналов

#### 3.5.1. Общие положения

При решении многих задач оптимальной обработки сигналов возникает потребность определять степень подобия различных сигналов или сигнала и его копии, сдвинутой на определенное время. Такая проблема возникает, например, в радиолокации при решении задачи обнаружения полезных сигналов (сигналов, отраженных от цели) на фоне шумов. В результате решения этой задачи в рамках линейных систем синтезирован оптимальный обнаружитель сигналов, структура которого содержит согласованный фильтр или корреляционный приемник. Алгоритм работы подобного обнаружителя предполагает вычисление функции [11]

$$q(T, \tau) = \frac{2}{W_0} \int_0^T s(t) \varepsilon(t, \tau) dt,$$

где  $W_0$  – энергетический спектр шума;

$T$  – интервал времени, в пределах которого осуществляется обработка смеси сигнала и шума;

$s(t)$  – полезный сигнал;

$\varepsilon(t, \tau)$  – отраженный от цели сигнал, представляющий собой сумму задержанного на  $\tau$  полезного сигнала и шума  $n(t)$ , т.е.

$$\varepsilon(t, \tau) = \Theta * s(t - \tau) + n(t).$$

Здесь  $\Theta$  – случайная величина, причем  $\Theta = 0$ , если полезный сигнал отсутствует, и  $\Theta = 1$ , если сигнал присутствует.

Задача обнаружителя – определить значение  $\Theta$ . Для этого результат вычисления функции  $q(T, \tau)$  сравнивается с порогом  $h$ . Если  $q(T, \tau) > h$ , то  $\Theta = 1$  (цель присутствует), если  $q(T, \tau) < h$ , то  $\Theta = 0$  (цели нет).

Как видно из рассмотренного алгоритма, оптимальный обнаружитель сигналов при  $n(t) = 0$  предусматривает расчет функции

$$R(T, \tau) = \int_0^T s(t)s(t - \tau)dt.$$

Эта функция в общем случае имеет вид

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt \quad (3.17)$$

и называется *автокорреляционной функцией* (АКФ) сигнала  $s(t)$ . Как видно из формулы, АКФ – это свертка сигнала  $s(t)$  и его зеркального отображения  $s(-t)$ , т.е.  $R(\tau) = s(\tau) \otimes s(-\tau)$ . Если сигнал – напряжение (размерность  $B$ ), то размерность АКФ –  $B^2 c$ .

Если в формуле (3.17) фигурируют различные сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , то такая функция называется *взаимокорреляционной*. Она обозначается как  $R_{12}(\tau)$  или  $R_{21}(\tau)$  и имеет вид

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t - \tau)dt; \quad R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \tau)s_2(t)dt. \quad (3.18)$$

Автокорреляционную и взаимокорреляционную функции иногда называют просто *корреляционной функцией*, различая их по содержанию рассматриваемого вопроса.

Для сигналов, представленных в комплексной форме, автокорреляционная и взаимокорреляционная функции определяются следующим образом:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t - \tau)dt;$$

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t - \tau)dt; \quad R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t - \tau)s_2(t)dt.$$

### 3.5.2. Свойства автокорреляционной функции

Будем полагать, что исследуемый сигнал является импульсным с конечной длительностью, так что интеграл вида (3.17) существует.

Для фиксированного момента времени  $\tau$  (фиксированного сдвига копии относительно оригинала) АКФ равна площади функции, описывающей произ-

ведение  $s(t)s(t - \tau)$ , то есть общей (совпадающей по оси  $t$ ) площади двух сигналов. При этом АКФ характеризует степень подобия сигнала  $s(t)$  и его смещенной во времени копии  $s(t - \tau)$ , а также положение сигналов на оси времени.

Кроме того, автокорреляционная функция обладает следующими свойствами.

1. При  $\tau = 0$  автокорреляционная функция равна энергии сигнала, т.е.

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \mathcal{E}.$$

2. Осуществив замену переменной  $x = t - \tau$  в выражении для  $R(\tau)$ , можно легко убедиться, что

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau) dt = R(-\tau).$$

Таким образом, автокорреляционная функция относится к классу четных функций.

3. При любом значении  $\tau$  модуль АКФ не превосходит энергии сигнала, т.е.  $|R(\tau)| \leq R(0) = \mathcal{E}$ , что непосредственно следует из известного неравенства Коши–Буняковского:

$$\|s(t)s(t - \tau)\| \leq \|s(t)\| \cdot \|s(t - \tau)\|,$$

где  $\|s(t)\|$  – норма вектора, соответствующего сигналу  $s(t)$ .

4. С ростом абсолютного значения  $\tau$  АКФ сигнала с конечной энергией затухает, т.е.  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$ .

В результате можно сделать вывод, что график АКФ – это симметричная относительно оси ординат кривая в верхней полуплоскости с центральным максимумом при  $\tau = 0$ . Это также следует из физической интерпретации корреляционной функции – сигнал и его копия при отсутствии временного сдвига, то есть при  $\tau = 0$ , имеют наибольшую степень подобия.

#### *Пример 1.*

Определить математически и графически корреляционную функцию прямоугольного видеоимпульса.

На рис. 3.11,а,б показано взаимное расположение сигнала и его копии, сдвинутой на время  $\tau$  при  $\tau < 0$  и  $\tau > 0$ . Заштрихованная область – это область, используемая для определения произведения  $s(t)s(t - \tau)$ . При этом значения корреляционной функции при различных  $\tau$  определяются выражениями:

$$\text{При } -\tau_u \leq \tau \leq 0 \quad R(\tau) = \int_0^{\tau_u + \tau} E^2 dt = E^2(\tau_u + \tau).$$

$$\begin{aligned} \text{При } 0 \leq \tau \leq \tau_u \quad R(\tau) &= \int_{\tau}^{\tau_u} E^2 dt = E^2 (\tau_u - \tau). \\ \text{При } |\tau| > \tau_u \quad R(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Полученные результаты можно объединить и записать

$$R(\tau) = E^2 (\tau_u - |\tau|) \quad \text{при} \quad -\tau_u \leq \tau \leq \tau_u. \quad (3.19)$$

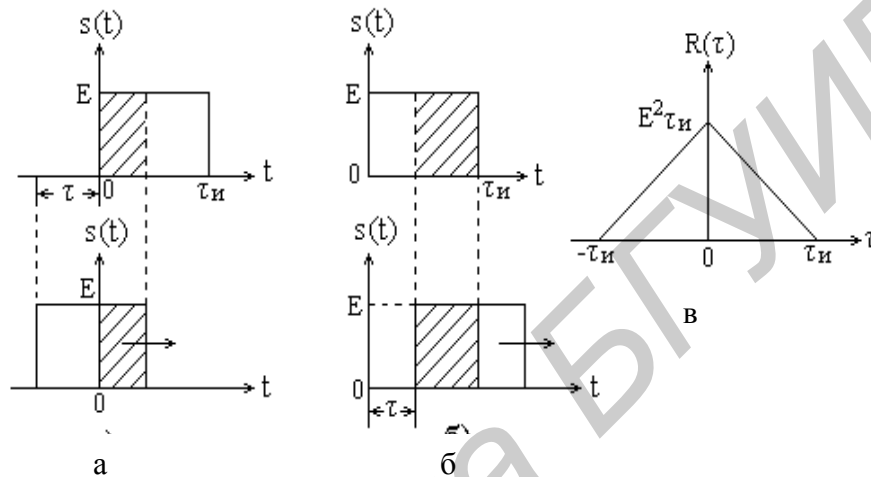


Рис. 3.11. Определение  $R(\tau)$  прямоугольного видеоимпульса

Как видно из (3.19), корреляционная функция сигнала не зависит от положения  $s(t)$  на временной оси. График  $R(\tau)$  представлен на рис. 3.11, в.

### 3.5.3. Автокорреляционная функция периодического сигнала

Периодические сигналы являются бесконечно протяженными во времени. Следовательно, эти сигналы, обладая конечной мощностью, имеют бесконечно большую энергию. Для таких сигналов АКФ, являющаяся энергетической характеристикой сигнала, должна определяться в пределах одного периода в единицах средней мощности, то есть

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t-\tau)dt,$$

где  $T$  – период сигнала.

Так как периодический сигнал – это сигнал, удовлетворяющий условию

$$s(t) = s(t + nT), \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,$$

то можно записать

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t+nT-\tau)dt = R(\tau-nT).$$

Таким образом, автокорреляционная функция периодического сигнала является периодической функцией с периодом, равным периоду сигнала. Если сигнал-напряжение (размерность  $B$ ), то размерность АКФ периодического сигнала –  $B^2$ .

*Пример 2.*

Определить автокорреляционную функцию сигнала  $s(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$ .

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T E^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos[\omega(t-\tau) + \varphi] dt = \\ &= \frac{E^2}{2T} \int_0^T \cos[\omega(2t-\tau) + 2\varphi] dt + \frac{E^2}{2T} \int_0^T \cos \omega \tau dt = \frac{E^2}{2} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

Автокорреляционная функция гармонического колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega$  также является гармонической с таким же периодом. Заметим, что АКФ гармонического колебания не зависит от его начальной фазы.

#### 3.5.4. Автокорреляционная функция сигналов с дискретной структурой

Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется *дискретизацией*, а результат такого преобразования – *дискретным* сигналом. При обработке сигналов в вычислительных устройствах его отсчеты представляются в виде двоичных чисел, имеющих ограниченное число разрядов. Вследствие этого отсчеты могут принимать лишь конечное множество значений. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется квантованием по уровню. Сигнал, дискретный во времени и квантованный по уровню, называется цифровым сигналом. Дискретные и цифровые сигналы – это сигналы с *дискретной структурой*. Такую структуру может иметь каждый импульс периодической последовательности.

Сигналы с дискретной структурой широко используются для кодирования информации при построении средств связи и средств вычислительной техники. Некоторые модели сложных сигналов при этом создаются следующим образом.

Интервал времени, соответствующий длительности сигнала, разбивается на целое число  $m > 1$  промежутков, равных  $\Delta t$ . На этих промежутках сигнал принимает фиксированные значения, например  $U_0$  и  $-U_0$ . Эти значения кодируются числами 1 и -1. Так, сигнал, изображенный на рис. 3.12, может быть закодирован в виде  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ , где  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ,  $a_4 = a_5 = -1$ ,  $a_6 = 1$ ,  $a_7 = -1$ .

Автокорреляционная функция такого сигнала также определяется по формуле (3.17). Однако при этом необходимо иметь в виду, что операции интегрирования соответствует в дискретном случае операция суммирования, а переменная  $\tau$  изменяется дискретно на величину интервала дискретизации сигнала. При этом АКФ будет соответствовать формула

$$R(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot a_{k-n},$$

где  $n$  – целочисленный аргумент, указывающий, на сколько позиций сдвинута копия сигнала относительно оригинала.

Автокорреляционная функция, являясь в данном случае функцией целочисленного аргумента, обладает всеми свойствами обычной автокорреляционной функции. Так,  $R(n)$  – это четная функция, т.е.  $R(n) = R(-n)$ . При нулевом сдвиге дискретная АКФ равна энергии сигнала, т.е.

$$R(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = \mathcal{E}.$$

*Пример 3.*

Для иллюстрации сказанного вычислим АКФ сигнала, соответствующего коду Баркера при  $m = 7$ .

Таблица 3.2

Расчет АКФ сигнала, соответствующего коду Баркера

| Сигнал             | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |    |    |    |    |    |    |    | $R(\tau)$   |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|----|----|----|----|----|----|-------------|
| $s(t)$             | 1     | 1     | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |             |
| $s(t - 0)$         | 1     | 1     | 1     | -1    | -1    | 1     | -1    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $R(0) = 7$  |
| $s(t - \Delta t)$  | 0     | 1     | 1     | 1     | -1    | -1    | 1     | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $R(1) = 0$  |
| $s(t - 2\Delta t)$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | -1    | -1    | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $R(2) = -1$ |
| $s(t - 3\Delta t)$ | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | -1    | -1 | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | $R(3) = 0$  |
| $s(t - 4\Delta t)$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | -1 | -1 | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | $R(4) = -1$ |
| $s(t - 5\Delta t)$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 | 0  | 0  | $R(5) = 0$  |
| $s(t - 6\Delta t)$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 | 0  | $R(6) = -1$ |
| $s(t - 7\Delta t)$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 | $R(7) = 0$  |

На рис. 3.12 приведен график АКФ этого сигнала с учетом ее четности.

Заметим, что сигналы (коды) Баркера обладают совершенными свойствами с позиций теоретической радиотехники и прикладной математики: значения их АКФ при  $n \neq 0$  не превышают 1, а при  $n = 0$  энергия этих сигналов равна  $m$ .

### 3.5.5. Взаимокорреляционная функция сигналов

Для количественной оценки степени подобия двух различных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  служит взаимокорреляционная функция (ВКФ), которая определяется выражениями:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt; \quad R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau)s_2(t)dt. \quad (3.20)$$

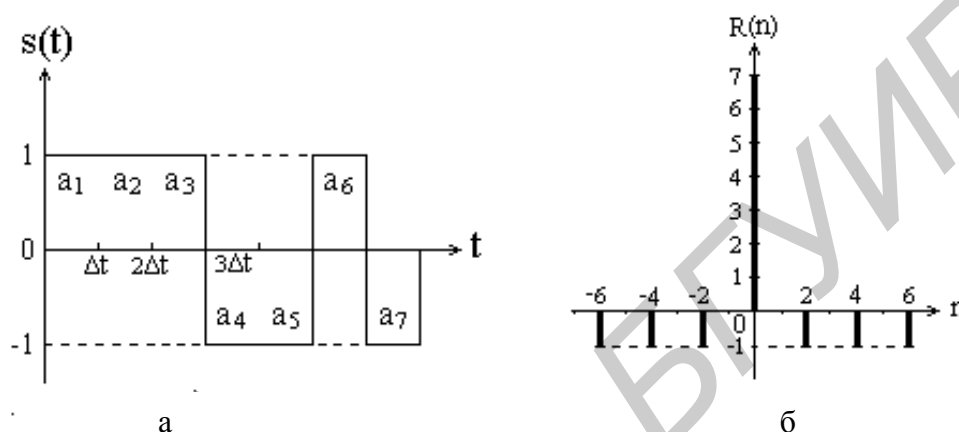


Рис. 3.12. Код Баркера (а) и его корреляционная функция (б)

## Свойства взаимокорреляционной функции

1. Значения  $R_{12}(\tau)$  и  $R_{21}(\tau)$  не изменятся, если вместо задержки сигнала  $s_2(t)$  или  $s_1(t)$  рассматривать опережение  $s_1(t)$  или  $s_2(t)$ , т.е. можно записать

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau)s_2(t)dt; \quad R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+\tau)dt. \quad (3.21)$$

В этом можно убедиться, осуществив замену переменной  $x = t - \tau$ .

2. Сравнивая выражения (3.20) и (3.21), можно отметить следующее свойство взаимокорреляционной функции:

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau), \quad R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau).$$

3. Взаимокорреляционная функция в общем случае не является четной функцией и необязательно достигает максимума при  $\tau = 0$ .

4. При  $\tau = 0$ :

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \mathfrak{I}_{12} \text{ ,}$$

где  $\mathcal{E}_{12}$  – взаимная энергия сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

5. С ростом абсолютного значения  $\tau$  ВКФ сигналов с конечной энергией затухает, т.е.  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{12}(\tau) = 0$  и  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{21}(\tau) = 0$ .

*Пример 4.*

Определим взаимокорреляционные функции  $R_{12}(\tau)$  и  $R_{21}(\tau)$  прямоугольного  $s_1(t)$  и треугольного  $s_2(t)$  видеоимпульсов (рис. 3.13).

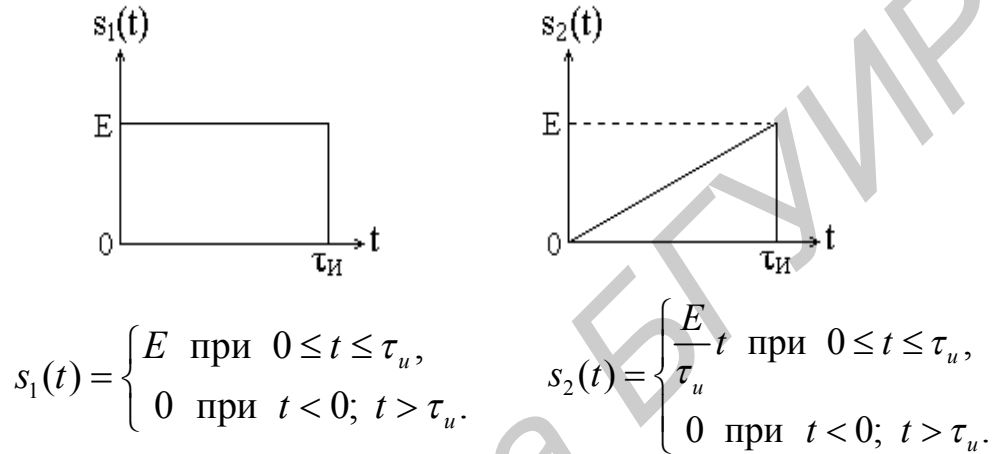


Рис. 3.13. Прямоугольный и треугольный видеоимпульсы

На рис. 3.14 и 3.15 показано взаимное расположение сигналов при сдвиге одного из них на время  $\tau$  при  $\tau < 0$  (а) и  $\tau > 0$  (б). Заштрихованная область – это область, используемая для определения произведений  $s_1(t) \cdot s_2(t - \tau)$  и  $s_1(t - \tau) \cdot s_2(t)$ .

Определение  $R_{12}(\tau)$ :

При  $-\tau_u \leq \tau \leq 0$  
$$R_{12}(\tau) = \int_0^{\tau_u + \tau} E^2 \frac{t - \tau}{\tau_u} dt = \frac{E^2}{2\tau_u} (\tau_u^2 - \tau^2);$$

При  $0 \leq \tau \leq \tau_u$  
$$R_{12}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_u} E^2 \frac{t - \tau}{\tau_u} dt = \frac{E^2}{2\tau_u} (\tau_u - \tau)^2;$$

При  $|\tau| > \tau_u$  
$$R_{12}(\tau) = 0.$$

Определение  $R_{21}(\tau)$ :

При  $-\tau_u \leq \tau \leq 0$  
$$R_{21}(\tau) = \int_0^{\tau_u + \tau} E^2 \frac{t}{\tau_u} dt = \frac{E^2}{2\tau_u} (\tau_u + \tau)^2;$$



$$\begin{aligned} \text{При } 0 \leq \tau \leq \tau_u \quad R_{21}(\tau) &= \int_{\tau}^{\tau_u} E^2 \frac{t}{\tau_u} dt = \frac{E^2}{2\tau_u} (\tau_u^2 - \tau^2); \\ \text{При } |\tau| > \tau_u \quad R_{21}(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Пределы интегрирования определяются из рис. 3.14,а,б и 3.15,а,б с учетом знака времени сдвига  $\tau$ .

Графики  $R_{12}(\tau)$  и  $R_{21}(\tau)$  представлены на рис. 3.14,в и 3.15,в соответственно.

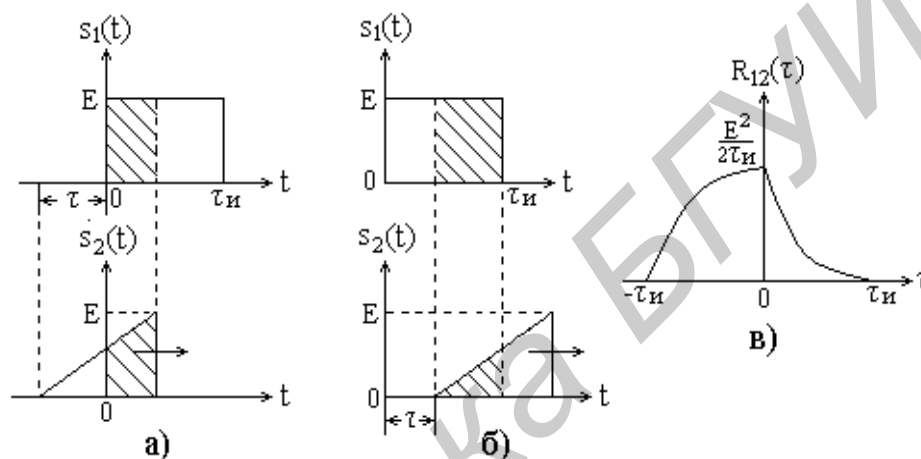


Рис. 3.14. Формирование  $R_{12}(\tau)$

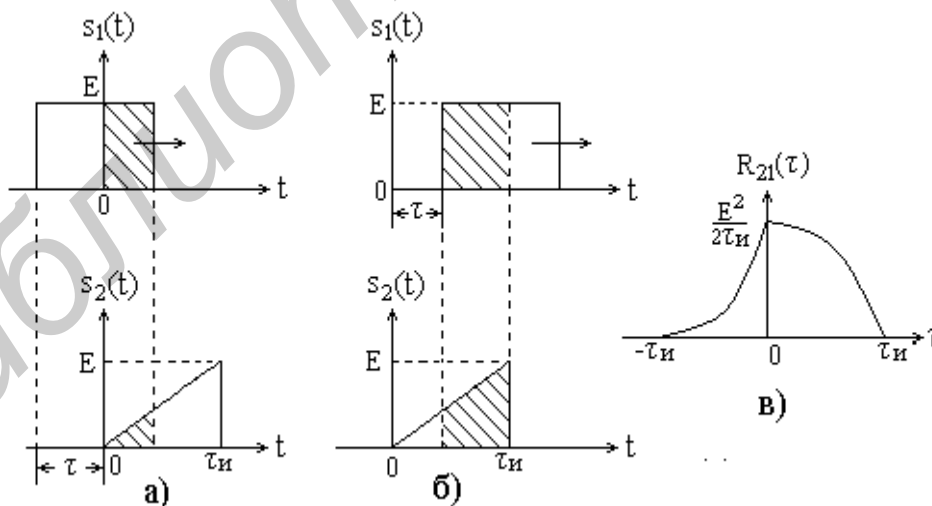


Рис. 3.15. Формирование  $R_{21}(\tau)$

*Пример 5.*

Определить взаимокорреляционные функции  $R_{12}(\tau)$  и  $R_{21}(\tau)$  треугольного импульса  $s_1(t)$  и  $\delta$ -функции.

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\delta(t-\tau)dt;$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau)s_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau)\delta(t)dt.$$

Учитывая селектирующее свойство  $\delta$ -функции, можно записать

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\delta(t-\tau)dt = s_1(\tau); \quad R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau)\delta(t)dt = s_1(-\tau).$$

Графики сигналов  $s_1(t)$  и  $\delta$ -функции, а также их взаимокорреляционных функций  $R_{12}(\tau)$  и  $R_{21}(\tau)$  приведены на рис. 3.16.

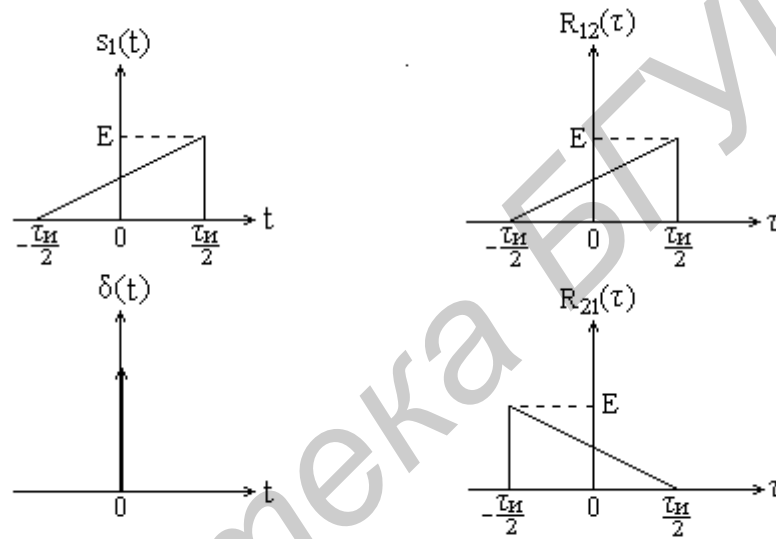


Рис. 3.16. Формирование ВКФ для треугольного импульса и  $\delta$ -функции

### 3.5.6. Представление периодического сигнала

Определим корреляционную функцию одиночного импульсного сигнала  $s_1(t)$  и сигнала  $s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT)$ , являющегося периодической последовательностью  $\delta$ -функций:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT-\tau)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\delta[t-(\tau-nT)]dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(\tau-nT).$$

Получена корреляционная функция, которая соответствует периодической последовательности сигналов  $s_1(t)$ , т.е. получен периодический сигнал

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(t - nT).$$

Таким образом, можно сделать вывод, что любой периодический сигнал можно представить в виде корреляционной функции одиночного импульсного сигнала  $s_1(t)$  и сигнала  $s_2(t)$ , являющегося периодической последовательностью  $\delta$ -функций.

Полученный результат поясняется рис. 3.17.

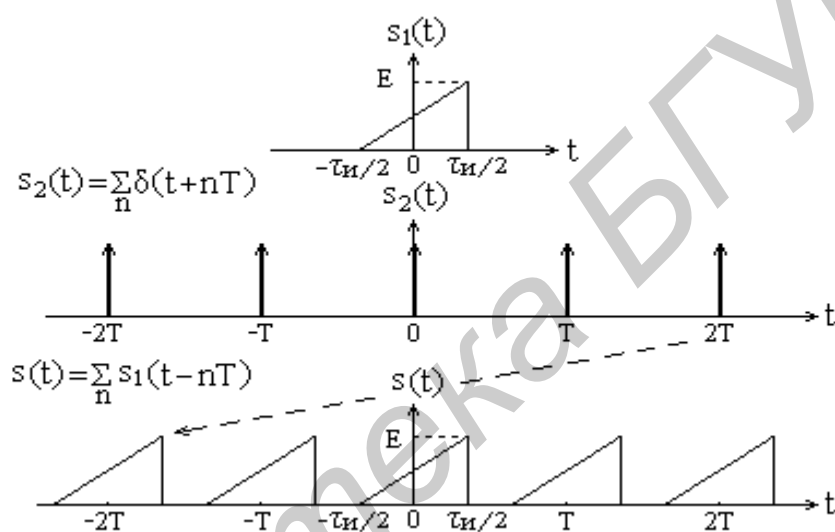


Рис. 3.17. Получение периодической последовательности импульсов

### 3.5.7. Энергетический спектр и автокорреляционная функция сигнала

При изучении детерминированных сигналов и процессов их преобразований широко используется спектральный метод анализа. Корреляционная функция – это характеристика сигнала во временной области, спектр – в частотной области. Обе характеристики являются интегральными преобразованиями анализируемых сигналов, поэтому логично предположить существование связи между АКФ сигнала и его спектральным представлением, в частности энергетическим спектром. Эта связь достаточно просто устанавливается при следующих преобразованиях:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)e^{j\omega t}dt \right] d\omega. \end{aligned}$$

Замена переменных:  $t - \tau = x$ ;  $t = x + \tau$ ;  $dt = dx$ .

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{j\omega(x+\tau)} dx \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Окончательно получаем

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.22)$$

Это обратное преобразование Фурье. Следовательно, справедливо и его прямое преобразование:

$$|S(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.23)$$

Таким образом, автокорреляционная функция сигнала  $s(t)$  и его энергетический спектр  $|S(j\omega)|^2$  связаны между собой преобразованиями Фурье.

Учитывая четность функций  $R(\tau)$  и  $|S(j\omega)|^2$ , выражения (3.22, 3.23) можно записать так:

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 \cos \omega\tau d\omega \quad \text{и} \quad |S(j\omega)|^2 = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Применим полученные результаты для взаимокорреляционной функции.

Определим прямое преобразование Фурье от  $R_{12}(\tau)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau.$$

Замена переменных:  $t - \tau = x$ ;  $\tau = t - x$ ;  $d\tau = -dx$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_2(x) e^{j\omega x} dx \right] dt = S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) = S_{12}(j\omega).$$

Таким образом, взаимокорреляционная функция связана преобразованием Фурье с так называемым взаимным спектром сигналов. Взаимный спектр  $S_{12}(j\omega)$  для сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  представляет собой произведение их спектров, один из которых является комплексно-сопряженным.

Таким образом, если спектры сигналов не перекрываются, то их взаимный спектр равен нулю на всех частотах. Поэтому и их взаимокорреляционная функция равна нулю при любых временных сдвигах.

Полученные результаты имеют важное значение.

1. Корреляционная функция  $R(\tau)$  зависит от модуля спектральной плотности и не зависит от фазовой характеристики сигнала. Это значит, что различным по форме сигналам, имеющим одинаковые амплитудные спектры, соответствуют одинаковые корреляционные функции.

2. *Оценка взаимной связи между корреляционными свойствами сигнала и его энергетическим спектром:* чем больше эффективная ширина энергетического спектра, тем меньше интервал корреляции. И наоборот, чем больше интервал корреляции, тем меньше эффективная ширина энергетического спектра.

3. *Определение энергетического спектра и корреляционной функции.* С помощью коррелометра или ЭВМ можно определить АКФ сигнала, а затем, вычислив прямое преобразование Фурье, найти энергетический спектр. И наоборот, с помощью спектрометра или ЭВМ можно определить энергетический спектр сигнала и, вычислив обратное преобразование Фурье, найти его АКФ.

### **3.6. Дискретизация и восстановление сигналов по теореме отсчетов (теореме Котельникова)**

#### *3.6.1. Теорема Котельникова*

В настоящее время широко применяются цифровые методы обработки радиотехнических сигналов. При этом аналоговые сигналы преобразуются в цифровые путем *дискретизации* их по времени с последующим квантованием по уровню. В свою очередь использование дискретизации при передаче непрерывных сообщений позволяет сократить время, в течение которого канал связи занят передачей одного сообщения, что позволяет осуществить временное уплотнение канала связи с целью передачи по нему нескольких сообщений в течение определенного промежутка времени.

*Дискретизация* – это процесс, при котором сигнал  $s(t)$  представляется последовательностью коротких импульсов (отсчетов). Амплитуды этих импульсов равны значениям дискретизируемого сигнала в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину  $\Delta t$ . Другими словами, величина  $k$ -го отсчета равна  $s(k\Delta t)$ . Очевидно, что точность представления аналогового сигнала последовательностью отсчетов зависит от величины  $\Delta t$ , причем чем она меньше, тем более точно можно восстановить исходный сигнал. Однако в этом случае количество отсчетов в единицу времени будет больше, что вызывает усложнение процесса обработки сигнала и большую занятость канала связи.

Возможность определения оптимальной величины интервала дискретизации с целью точного восстановления непрерывного сигнала с ограниченным спектром предоставляет метод дискретизации, который был предложен советским ученым в области радиотехники В.А.Котельниковым. Этот метод основан на известной в математике теореме отсчетов, получившей название теоремы Котельникова:

***Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше  $f_m$ , полностью определяется последовательностью своих значений, взятых через равные промежутки времени  $\Delta t \leq 1/2f_m$ .***