Metody numeryczne

Laboratorium 10

Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

Anastasiya Hradouskaya

23.05.2021

Cel ćwiczenia

Celem laboratorium było zapoznanie się z minimalizacją wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella.

1. Opis problemu

Zadaniem do wykonania było zaprogramowanie metody interpolacji Powella do znalezienia minimum wartości funkcji.

- Dla funkcji

$$f_1(x) = \ln(x^5 + 3x^2 + x + 9)$$

Sporządzić wykres funkcji w zakresie $x \epsilon [-1.5, 1]$.

Przyjąć jako punkty startowe: $x_1 = -0.5, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, h = 0.01$ i znaleźć kolejne 10 przybliżeń położenia minimum. W każdej iteracji zapisać: $x_1, x_2, x_3, x_m,\ F[x_1, x_2],\ F[x_1, x_2, x_3]$.

Powtórzyć rachunki z poprzedniego podpunktu dla: $x_1 = -0.9,\ x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_2 + h,\ h = 0.01.$

- Dla funkcji

$$f_2(x) = x^6$$

Przyjąć jako punkty startowe: $x_1 = 1.5,\ x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_2 + h,\ h = 0.01$ i znaleźć kolejne 100 przybliżeń położenia minimum. W każdej iteracji zapisać: $x_1, x_2, x_3, x_m, F[x_1, x_2], F[x_1, x_2, x_3]$.

2. Opis metody

Zadaniem optymalizacji jest poszukiwanie minimum lub maksimum funkcji (wielu zmiennych).

W praktyce problem sprowadza się do poszukiwania minimum czyli takiego punktu dla którego zachodzi

$$f: R^n \to R$$

$$\min f(x) = f(x^*) \iff \bigwedge_{x \epsilon R^n} f(x^*) < f(x)$$

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

z warunkami

$$g_j(x) \leq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

$$h_j(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, r$$

Funkcje: $f(x), g(x), h(x)$ są funkcjami skalarnymi.

$f(x)$ – funkcja celu, celem jest znalezienie jej minimum (optymalizacja).

$f(x)$ i $h(x)$ – funkcje określające warunki jakie musi spełniać rozwiązanie (więzy) – ograniczają przestrzeń dopuszczalnych rozwiązań.

Metoda interpolacji kwadratowej Powell'a

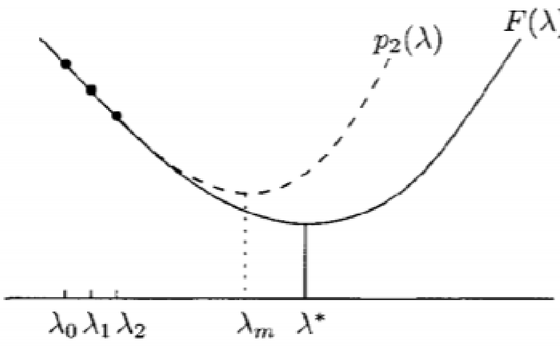
Przez trzy punkty: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ prowadzimy wielomian *2* stopnia

$$p_2(\lambda) = F(\lambda) + F[\lambda_0, \lambda_1](\lambda - \lambda_0) + F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2](\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)$$

gdzie: $F(\lambda_0)$ – wartość funkcji,

$F[\lambda_0, \lambda_1]$ – iloraz różnicowy *1* rzędu,

$F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$ – iloraz różnicowy *2* rzędu.



Rys.1 Wyznaczanie przybliżonego rozwiązania w metodzie Powell'a

Narzucamy warunek zerowania się pochodnej (spodziewamy się minimum)

$$\frac{dp_2}{d\lambda} = F[\lambda_0, \lambda_1] + 2\lambda F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] - F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2](\lambda_0 + \lambda_1) = 0$$

rozwiązując to równanie ze względu na λ otrzymamy:

$$\lambda_m = \frac{F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2](\lambda_0 + \lambda_1) - F[\lambda_0, \lambda_1]}{2F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]} \approx \lambda^*$$

Aby znaleziony punkt był rzeczywistym minimum, iloraz ($F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$) musi spełniać warunek

$$F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] > 0.$$

Algorytm interpolacji Powell'a

1) Wybrać λ_0 i obliczyć

$$F[\lambda_0 + h] < F[\lambda_0], \qquad F[\lambda_0 + 2h] < F[\lambda_0 + h]$$

(ewentualnie zmienić znak: -h, jeśli nierówności nie są spełnione)

2) Wyznaczyć λ_m i sprawdzić, czy jest minimum
3) Jeśli

$$|\lambda_m - \lambda_n| > h$$

odrzucić najdalej położony od λ_m punkt i ponownie wykonać obliczenia z pkt. 2.

Punkt λ_m akceptujemy jako minimum, jeśli

$$|\lambda_m - \lambda_n| < \varepsilon.$$

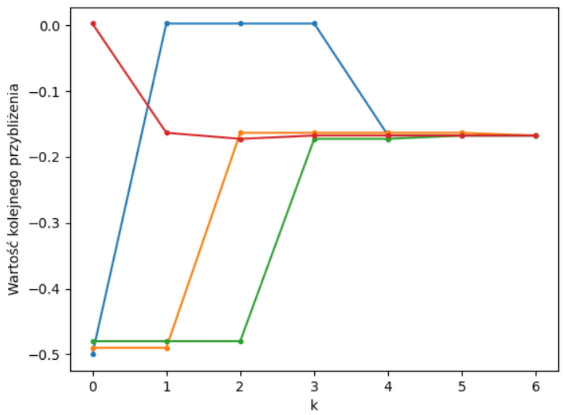
3. Wykresy i wyniki

W Pythonie za pomocą biblioteki matplotlib narysowaliśmy potrzebne wykresy.

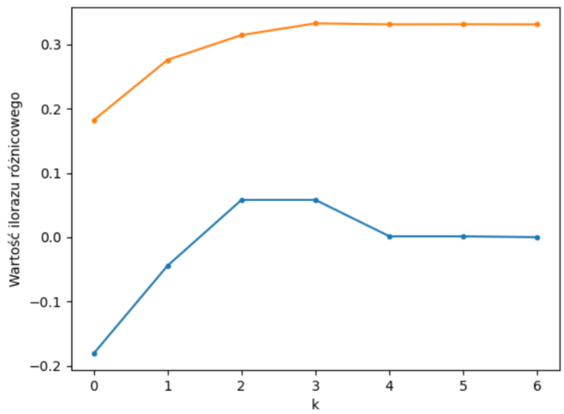
- Dla funkcji

$$f_1(x) = \ln(x^5 + 3x^2 + x + 9)$$

w zakresie *[-1.5, 1]* wykres położenia kolejnych przybliżeń oraz wykres zmiany ilorazów różnicowych wyglądają następująco:



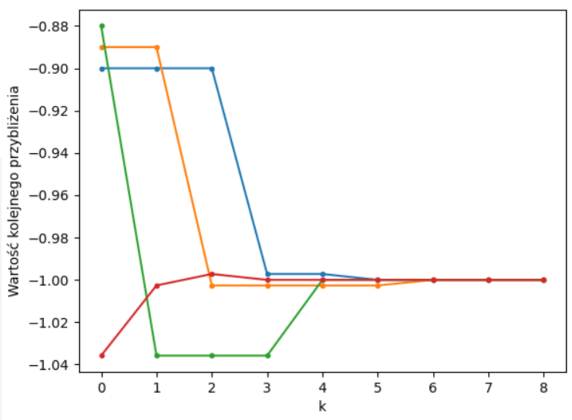
Rys.2 Położenia kolejnych przybliżeń w funkcji iteracji dla x_1 = *-0.5*



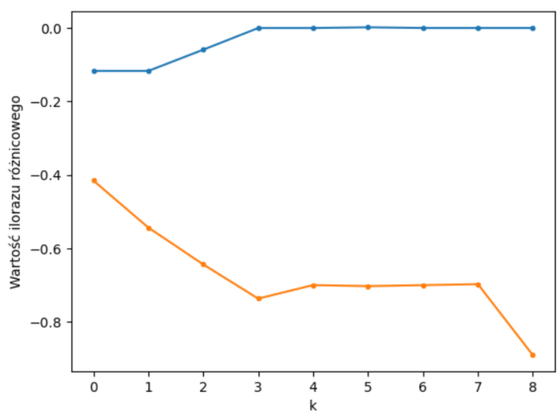
Rys.3 Zmiana ilorazów różnicowych w funkcji iteracji dla x_1 = *-0.9*

---- $x_1(k)$
---- $x_2(k)$
---- $x_3(k)$
---- $x_m(k)$
k – numer iteracji

---- $F[x_1, x_2](k)$
---- $F[x_1, x_2, x_3](k)$
k – numer iteracji



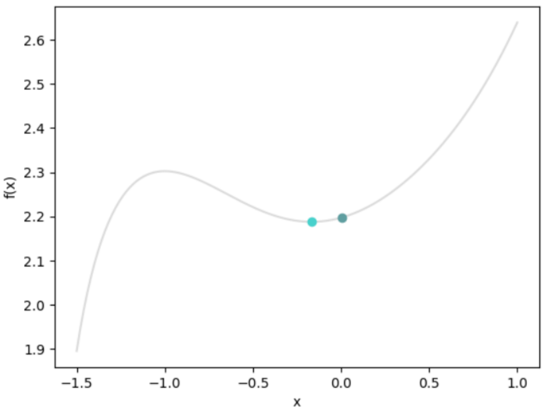
Rys.4 Położenia kolejnych przybliżeń w funkcji iteracji dla x_1 = *-0.5*



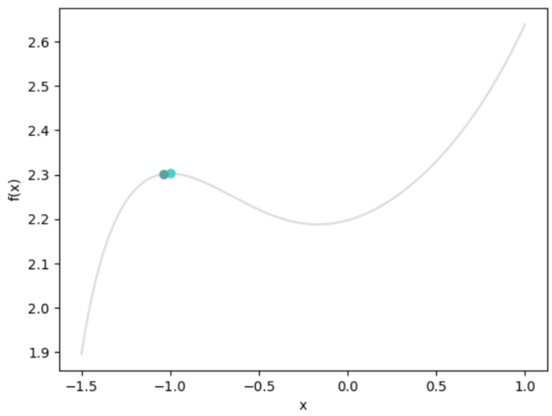
Rys.5 Zmiana ilorazów różnicowych w funkcji iteracji dla x_1 = *-0.9*

---- $x_1(k)$
---- $x_2(k)$
---- $x_3(k)$
---- $x_m(k)$
k – numer iteracji

---- $F[x_1, x_2](k)$
---- $F[x_1, x_2, x_3](k)$
k – numer iteracji



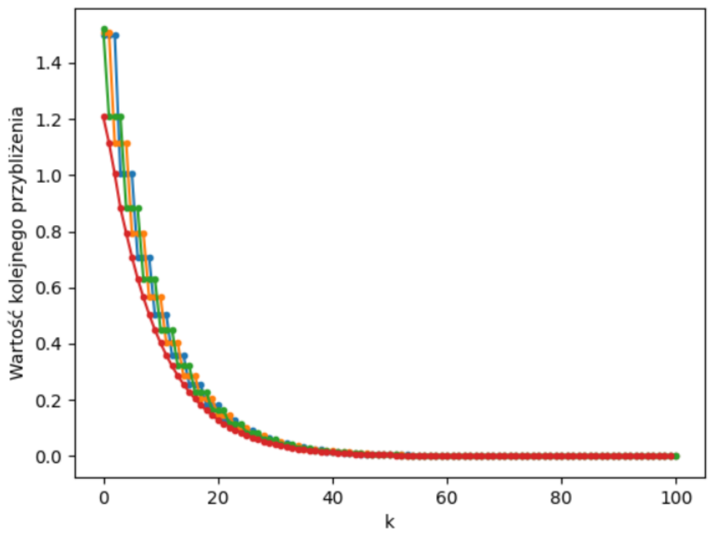
Rys.6 Ekstrema lokalne funkcji dla $x_1 = -0.5$
Ciemno niebieski kolor – x_m w pierwszej iteracji
Jasno niebieski kolor - x_m w ostatniej iteracji



Rys.7 Ekstrema lokalne funkcji dla $x_1 = -0.9$
Ciemno niebieski kolor – x_m w pierwszej iteracji
Jasno niebieski kolor - x_m w ostatniej iteracji

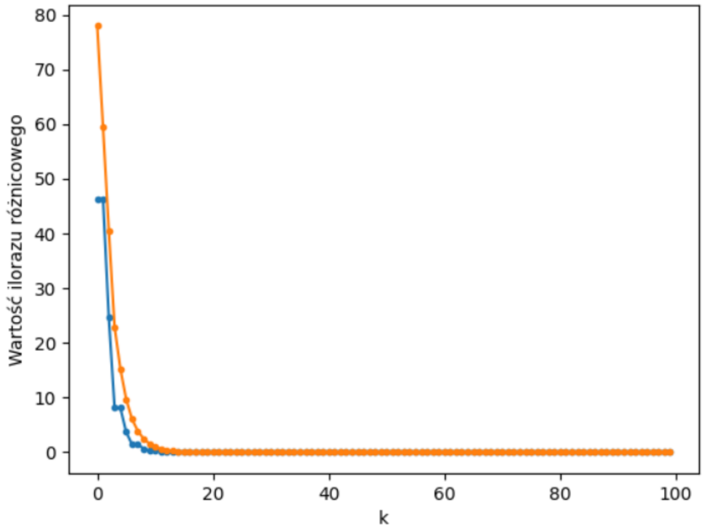
- Dla funkcji

$$f_2(x) = x^6$$



Rys.8 Położenia kolejnych przybliżeń w funkcji iteracji dla $x_1 = 1.5$

---- $x_1(k)$
---- $x_2(k)$
---- $x_3(k)$
---- $x_m(k)$
k – numer iteracji



Rys.9 Zmiana ilorazów różnicowych w funkcji iteracji dla $x_1 = 1.5$

---- $F[x_1, x_2](k)$
---- $F[x_1, x_2, x_3](k)$
k – numer iteracji

Porównując rys.6 i rys.7 możemy zauważyć, że na rys.6 dla $x_1 = -0.5$ znaleźliśmy minimum funkcji, natomiast na rys.7 widzimy, że dla $x_1 = -0.9$ znaleźliśmy maksimum funkcji. Warunkiem do znalezienia minimum jest warunek ilorazu różnicowego drugiego stopnia: $F[x_1, x_2, x_3] > 0$. Dla $x_1 = -0.5$ warunek ten jest spełniony, natomiast dla $x_1 = -0.9$ mamy ujemne wartości ilorazu róznicowego drugiego stopnia, zatem otrzymaliśmy maksimum.

Analizując rys.8 i rys.9 widzimy, że $F[x_1, x_2]$ i $F[x_1, x_2, x_3]$ przyjmują wartości bliskie zera. Dla $f_2(x)$ nie możemy znaleźć minimum/maksimum funkcji, dlatego iż dąży ona do zera.

4. Wnioski

Metoda interpolacji kwadratowej Powella pozwala znaleźć minimum/maksimum wartości funkcji. Szybkość znalezienia rozwiązania zależy od wybranych punktów startowych. Ilość iteracji potrzebnych do osiągnięcia rezultatów jest bardzo mała.

Bibliografia

http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/minimalizacja_2021.pdf