Metody numeryczne

Laboratorium 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

03.05.2021

Anastasiya Hradouskaya

Cel ćwiczenia

Celem laboratorium było napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych bedących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

1. Opis problemu

Rozwiązać układ równań liniowych

$$Am = d$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i + m_{i+1} = d_i,$$

gdzie: m_i to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach (indeksowanych i = 1, 2, ..., n).

Pozostałe oznaczenia to:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i$$

elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_1}\right)$$

oraz położenia węzłów: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Warunki narzucone na drugie pochodne na brzegach:

$$m_1 = \alpha, \quad m_n = \beta$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Po jego rozwiązaniu wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ wyznaczany według przepisu:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

gdzie stałe całkowania mają postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1})$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

Zadania do wykonania:

1)Napisać procedurę do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach. Do procedury przekazać: a) wektor z położeniami węzłów *xw*, b) wektor z wartościami funkcji *yw*, c) liczbę węzłów *n*, d) wektor do którego procedura zapisze wartości drugich pochodnych *m*, e) wartości drugich w skrajnych węzłach (*alfa* i *beta*).

2) Napisać procedurę do wyznaczenia wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym.

3) Napisać program do interpolacji funkcjami sklejanymi, które będzie korzystał z dwóch powyższych procedur. Przeprowadzić interpolację funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ oraz } f_2(x) = \cos(2x)$$

Przyjąć warunki z drugą pochodną równą *0* na obu krańcach przedziału interpolacji ($\alpha = \beta = 0$).

4) Dla funkcji $f_1(x)$ oraz *n = 10* węzłów w przedziale *x* ∈ *[-5, 5]* wyznaczyć wartości drugich pochodnych i porównać je z „dokładniejszymi" wartościami liczonymi zgodnie ze wzorem:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Przyjąć $\Delta x = 0.01$.

5) Wykonać interpolację dla $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$ w przedziale *x* ∈ *[-5, 5]*, dla liczby węzłów: *n = 5, 8, 21.*

2. Opis metody

2.1 Interpolacja

Interpolacja sprowadza się do wyznaczenia w danym przedziale funkcji interpolacyjnej. Funkcja ta wukorzystuje początkowo zadane punkty, zwane węzłami i pozwala na wyznaczenie przybliżonych wartości dla punktów nie będących jej węzłami.

2.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi polega na przybliżeniu takich funkcji interpolacyjnych, które na przedziałach pomiędzy kolejnymi węzłami dają najmniejszą wartość tzw. krzywizny całkowitej. Przedział interpolacji *[a, b]* dzielimy za pomocą *n + 1* punktów:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

na przedziały $[x_i, x_{i+1}]$.

Funkcją sklejaną stopnia m nazywamy taką funkcję *s(x)* ∈ C^m, która jest wielomianem stopnia co najwyżej m w każdym poprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

$$s_i(x) = c_{im} \cdot x^m + c_{im-1} \cdot x^{m-1} + \dots + c_{i1} \cdot x + c_{i0}.$$

Finalnie funkcję interpolującą możemy przedstawić jako kombinację liniową elementów bazy składającej się z funkcji sklejanych $s_i(x)$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \text{ x} \in \text{[a, b]}.$$

Funkcja sklejana stopnia 0 jest schodkową (przedziałami stałą), a stopnia 1 – łamaną.

Najczęściej stosuje się 3 stopień funkcji sklejanych, zwanych kubicznymi (sześciennymi). Do określania funkcji *s(x)* takiego stopnia niezbędne jest wyznaczenie *n + 3* parametrów. Pozostają dwa stopnie swobody, ponieważ ilość węzłów jest równa *n + 1*. Należy zatem złożyć dwa dodatkowe warunki, których rodzaj zależy od funkcji *f(x)* lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału *[a, b]*. Warunki są następujące:

1 rodzaj warunków (1 pochodna): $s^{(1)}$ (a + 0) = $\propto_1$, $s^{(1)}$ (b - 0) = β_1,

2 rodzaj warunków (2 pochodna): $s^{(2)}$ (a + 0) = $\propto_2$, $s^{(2)}$ (b - 0) = β_2,

3 rodzaj warunków stosuje się dla funkcji okresowych (warunek na 1 i 2 pochodną):

$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), i = 1, 2.$$

2.3 Wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach jest alternatywnym sposobem wyznaczania funkcji sklejanej w oparciu o założenia: ciągłość i liniowość drugiej pochodnej oraz warunek interpolacji w węzłach. Efektem końcowym wykorzystania tych informacji jest układ *n – 1* równań:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

gdzie:

$m_i = s^{(2)}(x_i)$,

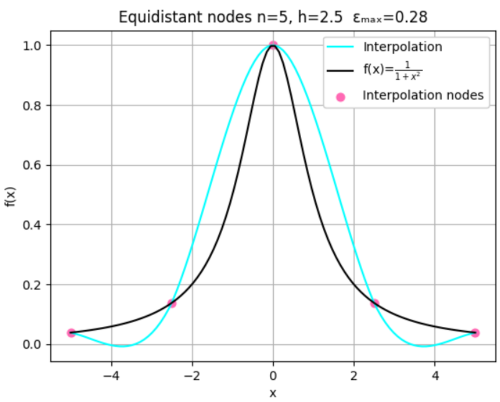
$\lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$,

$\mu_i = 1 - \lambda_i$,

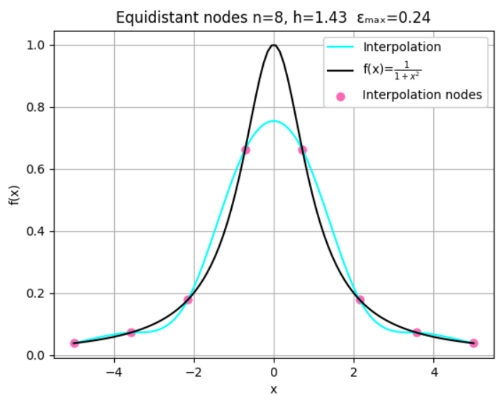
$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$.

3. Wykresy i wyniki

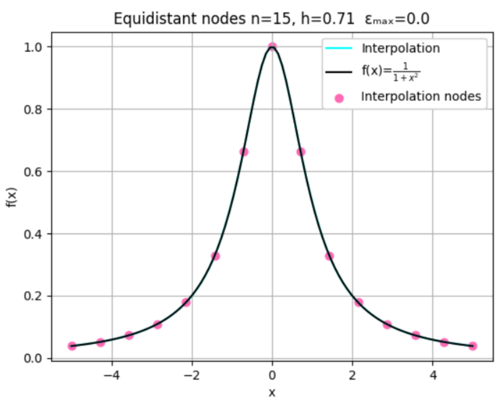
Za pomocą biblioteki matplotlib w Pythonie narysowaliśmy wykresy.
Poniżej przedstawione zostały otrzymane wyniki interpolacji zestawione z dokładnymi wykresami funkcji rozważanych podczas ćwiczenia.



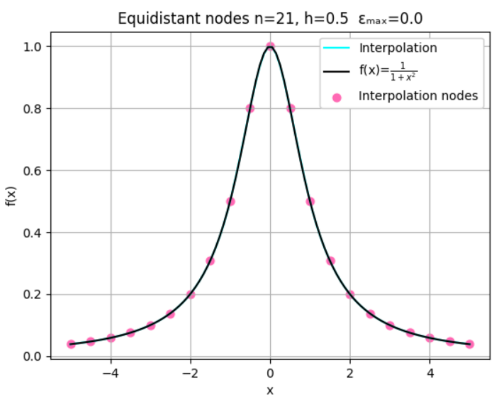
Wykres 1. Interpolacja funkcji *$f_1(x)$* dla *5* węzłów



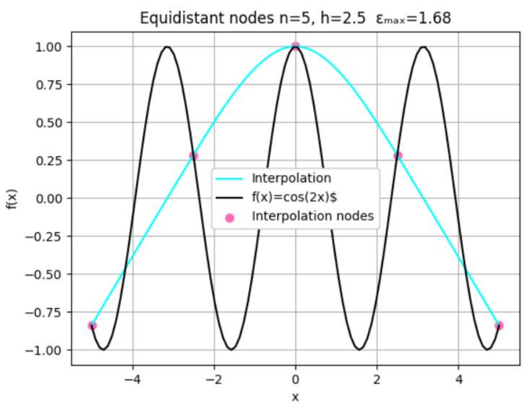
Wykres 2. Interpolacja funkcji *$f_1(x)$* dla *8* wezłów



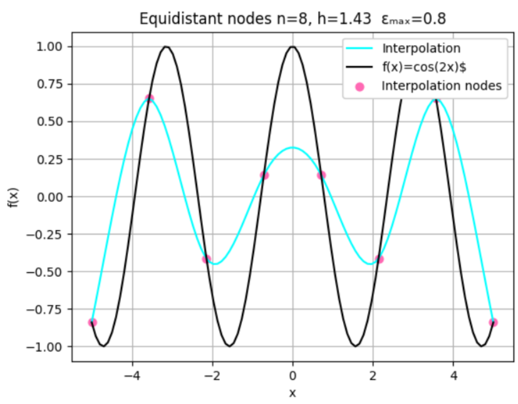
Wykres 3. Interpolacja funkcji *$f_1(x)$* dla *15* węzłów



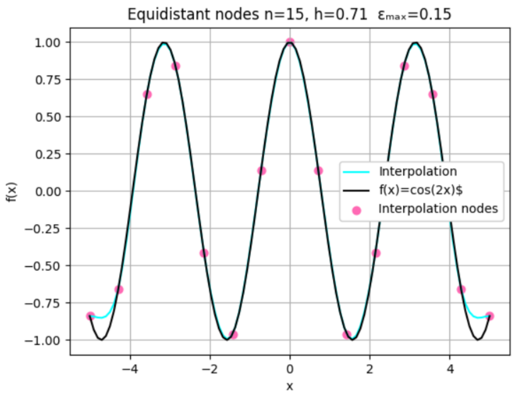
Wykres 4. Interpolacja funkcji *$f_1(x)$* dla *21* wezłów



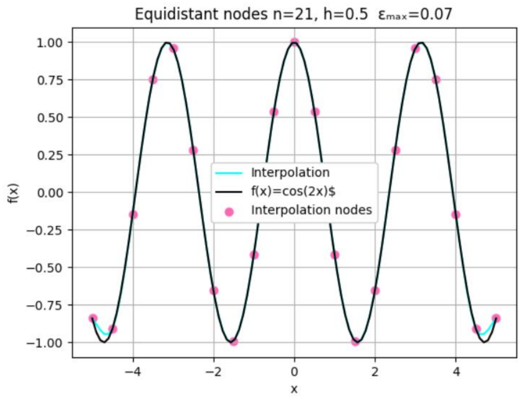
Wykres 5. Interpolacja funkcji *$f_2(x)$* dla *5* węzłów



Wykres 6. Interpolacja funkcji *$f_2(x)$* dla *8* wezłów

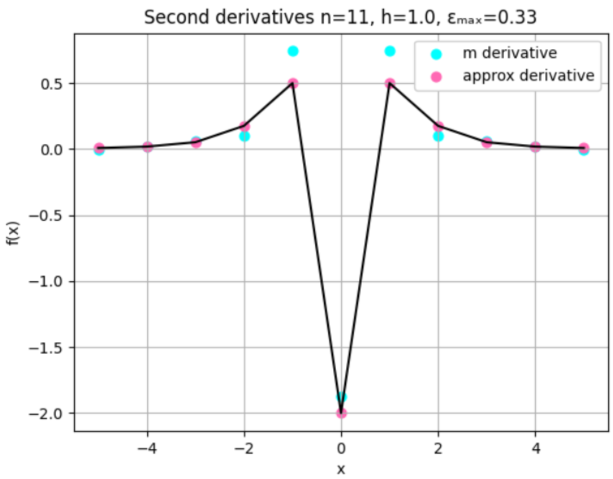


Wykres 7. Interpolacja funkcji $f_2(x)$ dla *15* węzłów



Wykres 8. Interpolacja funkcji $f_2(x)$ dla *21* wezłów

Na powyższych wykresach widać, że wraz ze zwiększeniem ilości węzłów interpolacji(zmniejszeniem długości przedziałów, w których wyznaczamy funckje sklejane) poprawia się dokładność interpolacji.



Wykres 9. Zestawione wartości drugich pochodnych funkcji $f_1(x)$ wyznaczone funckjami sklejanymi ($n = 10$) z wartościami wyliczonymi z ilorazu róznicowego

Metoda wyznaczania drugiej pochodnej różni się od jej „dokładniejszej wersji" dla argumentów bliskich *0*. Dla argumentów oddalonych od *0* wartości coraz bardziej się pokrywają.

4. Wnioski

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach pozwala na uzyskanie zaskakująco zadowolających wyników dopasowania funkcji interpolacyjnej nawet dla niewielkiej liczby węzłów ($n = 5$), pod warunkiem niewielkiej liczby „przegięć" na wykresie interpolowanej funkcji.

Znaczącą poprawą względem metody interpolacji Newtona jest wyeliminowanie efektu Rungego, bez konieczności optymalizacji położeń węzłów.

Interpolacja funkcjami sklejanymi jest efektywnym narzędziem interpolacyjnym i daje satysfacjonujące przybliżenie funkcji interpolowanej, którego dokładność możemy poprawić poprzez zwiększenie liczby węzłów.

Wykorzystanie wartości drugich pochodnych w węzłach jest alternatywnym sposobem przeprowadzania obliczeń, wykorzystującym założenia o ciągłości i liniowości drugiej pochodnej. Pozwala in w prostszy sposób uzyskać pożądane rezultaty.

Bibliografia

http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_2021.pdf