Metody numeryczne

Laboratorium 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

25.04.2021

Anastasiya Hradouskaya

Cel ćwiczenia

Na tym laboratorium dla funkcji przeprowadzaliśmy interpolację wielomianową Newtona.

1. Opis problemu

Głównym problemem do rozwiązania w trakcie trwania zajęć laboratoryjnych było przeprowadzenie interpolacji wielomianowej Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Skorzystaliśmy ze wzoru interpolacyjnego:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \Pi_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$$

gdzie: $f^{(j)}$ to iloraz rzędu *j* liczony dla węzła x_0, a x_i są położeniami węzłów.

Wartości ilorazów różnicowych wyznaczamy zgodnie z poniższą tabelką

$$\begin{pmatrix} f_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{1,0} & f_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix}$$

gdzie $f_{i,j}$ to ilorazy różńicowe rzędu *j* występujące we wzorze interpolacyjnym.

Do wyznaczenia tabelki użyjemy pseudokodu

```
for(j= 1; j <=n; j+ +){

        for(i=j; i <=n; i+ +){

                fi,j=(f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}) / (x_i - x_{i-j});

        }

}
```

Mając wartości różnicowych możemy zastosować wzór interpolacyjny do wyznaczenia przybliżonych wartości funkcji w przedziale [x_{min}, x_{max}].

Zadania do wykonania

1. Węzły indeksujemy *i = 0, 1, 2, ..., n.* Interpolację wykonujemy kokejno dla *n = 5, 10, 15, 20.*
2. Dla przedziału *x ∈ [-5, 5]*, określamy liczbę węzłów jako *n + 1*, ustalamy położenia węzłów (równoległe) i wyznaczamy wartości funckji w węzłach.
3. Wyznaczamy niezerowe elementy tabelki.
4. Dla każdego n sporządzamy wykresy funkcji *f(x)* i wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ na jednym rysunku.
5. Punkty 1-4 powtarzamy dla zoptymalizowanych położeń węzłów (podmieniamy tylko instrukcję określającą położenia węzłów)

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max}) \cos\left(\pi \frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \ i = 0, 1, ..., n$$

które są zerami wielomianów Czebyszewa.

2. Opis metody

2.1 Interpolacja

Interpolacja sprowadza się do wyznaczenia w danym przedziale **funkcji interpolacyjnej**. Funkcja ta wykorzystuje początkowo zadane punkty, zwane węzłami i pozwala na wyznaczenie przybliżonych wartość dla punktów nie będących jej węzłami.

2.2 Interpolacja Newtona

Interpolacja metodą Newtona przy założeniu, że odległości pomiędzy kolejnymi węzłami mogą być różne, umożliwia wyznaczenie wielomianu interpolacyjnego postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot(x_j-x_1)\cdot\dots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\dots\cdot(x_j-x_n)},$$

który w spełnia warunki w węzłach interpolacji:

$$W_n(x_i) = f(x_i)\text{, dla } i = 0, 1, 2, \cdots, n. \quad (2)$$

Wówczas szukany wielomian można zapisać w poniższej postaci:

$$W_n(x) = W_0(x) + [W_1(x) - W_0(x)] + [W_2(x) - W_1(x)] + \cdots + [W_n(x) - W_{n-1}(x)],$$

gdzie kolejne różnice są zdefiniowane w następujący sposób:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \qquad A_k = const. \quad (4)$$

Dokonując podstawienia $x = x_k$ oraz korzystając z warunku (2), po przekształceniu różnica (4) przyjmuje postać:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_k(x_i)}\right)\omega_{k-1}(x),$$

w którym wyrażenie w nawiasie jest ilorazem różnicowym n-rzędu. Iloraz ten wiedząc, że funkcja przyjmuje w punktach x_i , dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$ oraz $x_i \neq x_j$ kolejne wartości

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n),$$

definiujemy następująco:

a) 1-go rzędu:

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

b) 2-go rzędu:

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1};x_n) - f(x_{n-2};x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}},$$

c) n-tego rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; \cdots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1};x_{i+2};\cdots;x_{i+n}) - f(x_i;x_{i+1};\cdots;x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i},$$

co przy założeniu i=0 zapisujemy w zwięzłej postaci:

$$f(x_0; x_1; \cdots; x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdot(x_j - x_1)\cdot\cdots\cdot(x_j - x_{j-1})\cdot(x_j - x_{j+1})\cdot\cdots\cdot(x_j - x_n)},$$

$$f(x_0; x_1; \cdots; x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)}.$$

Tak więc ostatecznie wielomian interpolacyjny można zapisać przy użyciu formuły opisującej n-ty iloraz różnicowy następująco:

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0(x) + f(x_0; x_1; x_2)\omega_1(x) + \cdots + f(x_0; x_1; \cdots; x_n)\omega_{n-1}(x).$$

2.3 Wielomian Czebyszewa

W celu dokładniejszej estymacji funkcji interpolacyjnej można wykorzystać jako węzły zera wielomianów Czebyszewa. W ogólności wielomian ten definiujemy rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_k(x) = 2 \cdot x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x),$$

dla którego zera przyjmują postać:

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n,$$

a po przeskalowaniu:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right) + (b+a)\right], m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

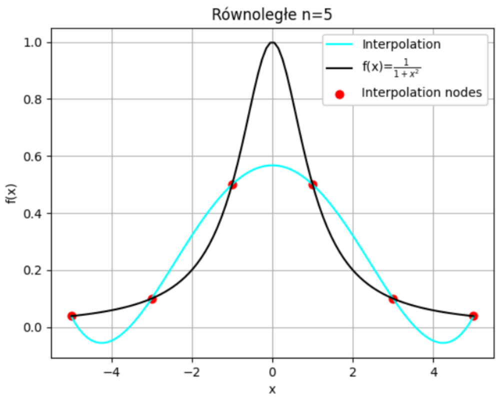
Węzły nie są rozmieszczone równomiernie, ale są zagęszczone na krańcach przedziału.

2.4 Efekt Rungego

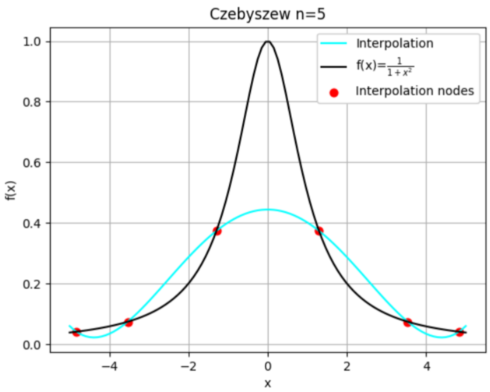
Efekt Rungego, czyli pogorszenie się dokładności funkcji interpolacyjnej wraz ze wzrostem liczby węzłów. Początkowo inkrementacja liczby punktów (na podstawie których szacujemy wielomian interpolacyjny) poprawia przybliżony wielomian. Jednakże od pewnego momentu wzrost ten powoduje znaczące odbieganie szukanej funkcji interpolacyjnej na krańcach przedziału.

3. Wykresy i wyniki

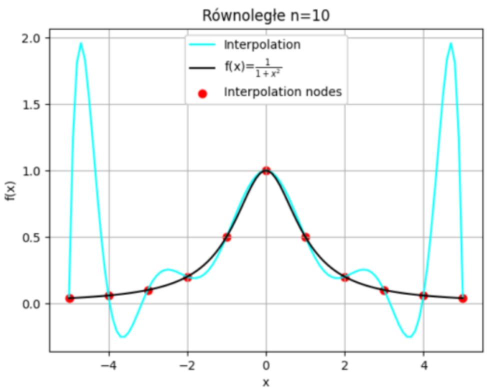
W Pythonie zostały wygenerowane wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kolejno dla n = 5, 10, 15, 20 i wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$.



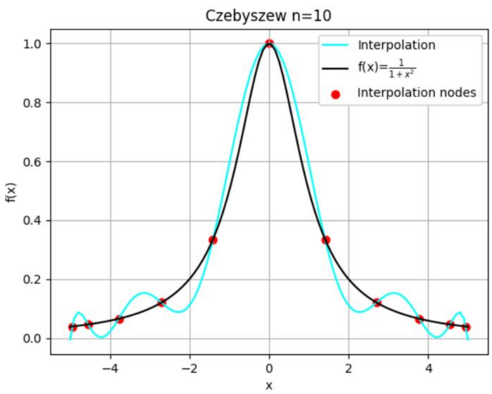
Wykres 1 Równoległe węzły (n = 5)



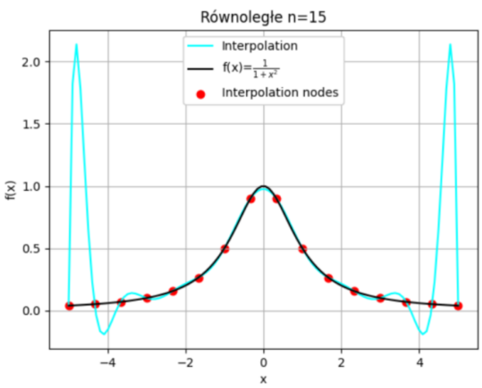
Wykres 2 Węzły będące zerami Czebyszewa (n = 5)



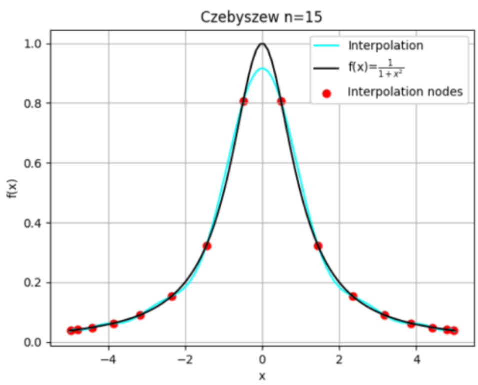
Wykres 3 Równoległe węzły (n = 10)



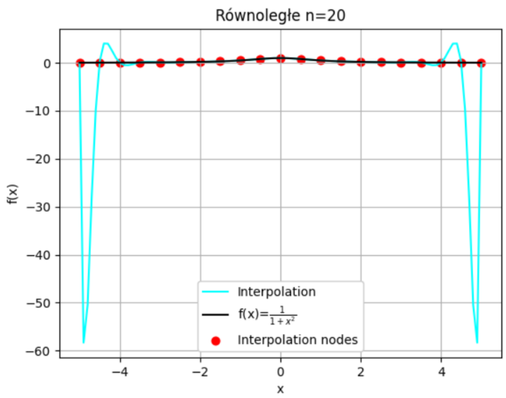
Wykres 4 Węzły będące zerami Czebyszewa (n = 10)

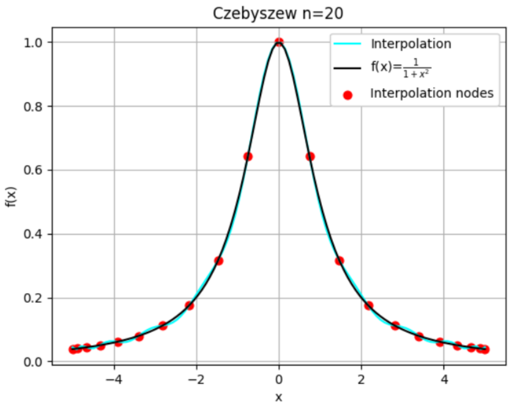


Wykres 5 Równoległe węzły (n = 15)



Wykres 6 Węzły będące zerami Czebyszewa (n = 15)





Wykres 7 Równoległe węzły (n = 20)

Wykres 8 Węzły będące zerami Czebyszewa (n = 20)

Dla 20 węzłów wartości wielomianu interpolacyjnego prawie idealnie pokrywają się z funkcją.
W przypadku węzłów równoległych sytuacja się poprawia na środku przedziału, na końcach jest coraz większa oscylacja, poniważ oszacowanie funkcji nie jest tak dokładne (efekt Rungego).

4. Podsumowanie

Interpolacja Newtona na podstawie kilku punktów pozwala na szybkie oszacowanie przybliżonego wykresu funkcji, na której leżą dane punkty. Już dla niewielkiej ilości równoodległych węzłów (Wykres 1 i 3) interpolowana funkcja przypomina oryginalną. Bazowanie na równych odległościach pomiędzy poszczególnymi węzłami powoduje występowanie efektu Runnego, co widoczne jest na Wykresie 5 i 7, gdzie szukany wielomian na krańcach przedziału jest zaburzony.

Rozwiązaniem powyższego problemu okazuje się zagęszczenie ilości węzłów na krańcach przedziału, na którym się poruszamy. Implementacja zer wielomianu Czebyszewa jako węzłów znacznie usprawnia narzędzie jakim jest interpolacja Newtona. Efekt Rungego w przypadku wykorzystania takich punktów został wyeliminowany.

Bibliografia:

http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_2021.pdf