Metody numeryczne

Laboratorium 2

Odwracanie, obliczanie wyznacznika i wskaznika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

13.03.2020

Anastasiya Hradouskaya

Cel ćwiczenia

Wykonanie rozkładu LU macierzy współczynników i zastosowanie go do rozwiązania układu równań, znalezienie wyznacznika macierzy oraz wyznaczenia macierzy odwrotnej.

Opis problemu

Przez N punktów (x_i, y_i) dla i = 1, ..., N poprowadzić wielomian interpolacyjny w(x) tj. wielomian stopnia N-1 o tej wlasności, że $w(x_i) = y_i$.

Znaleźć współczynniki c_i wielomianu interpolacyjnego

$$w(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i.$$

Współczynniki te dane są układem N liniowych równań algebraicznych o N niewiadomych,

$$\begin{cases} c_0 & +c_1 x_1 & +c_2 x_1^2 & + \dots & +c_{N-2} x_1^{N-2} + & c_{N-1} x_1^{N-1} & = y_1 \\ c_0 & +c_1 x_2 & +c_2 x_2^2 & + \dots & +c_{N-2} x_2^{N-2} + & c_{N-1} x_2^{N-1} & = y_2 \\ & & & \vdots & & & \\ c_0 & +c_1 x_N & +c_2 x_N^2 & + \dots & +c_{N-2} x_N^{N-2} + & c_{N-1} x_N^{N-1} & = y_N \end{cases},$$

które można przedstawić w postaci macierzowej Ax = b jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-2} & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-2} & x_2^{N-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-2} & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Układ równań 1 rozwiązać poprzez rozkład LU.

Na wspólnym wykresie nanieść zarówno węzły interpolacyjne i wartości wielomianu na przedziale [x_i; x_N]. Wartości wielomianu wyznaczyć schematem Hornera

$$w(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i = \Big(\dots ((c_{N-1} x + c_{N-2}) x + c_{N-3}) x + \dots + c_1 \Big) x + c_0$$

Znaleźć macierz odwrotną i wyznacznik macierzy A, korzystając z obliczonego rozkładu LU.

Wyznaczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy, przyjmując, że norma macierzy jest równa największemu elementowi tej macierzy.

Opis metody

Wykorzystywaliśmy rozkład LU macierzy, który polega na odnalezieniu takich dwóch macierzy L i U, które spełniają poniższe założenia:

$$A = L \cdot U \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

gdzie:

A – zadana macierz kwadratowa,

L – macierz trójkątna wypełniona zerami powyżej przekątnej i jedynkami na jej przekątnej, U- macierz trójkątna.

Procedura wyznaczania elementów oraz sposób postępowania(wykorzystujemy metodę eliminacji Gaussa):
1) mnożymy pierwszy wiersz przez czynnik

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{1}}$$

i odejmujemy go od i-tego wiersza (i = 2, ..., N).

2) Zasjępujemy mnożeniem przez macierz:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Co można zapisać macierzowo:

$$L^{(1)} A^{(1)} = A^{(2)},$$

$$L^{(1)} b^{(1)} = b^{(2)},$$

3) Eliminacja zmiennej z równań (i = 3, 4, ..., n) wygląda podobnie. Mnożymy wiersze zmodyfikowanego układu równań o indeksach i = 3, 4, ..., N przez czynnik:

$$l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{2}}.$$

i odejmujemy od nich wiersz drugi.

Operację tę można przeprowadzić mnożąc uład równań obustronnie przez macierz

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -l_{n2} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Zapis macierzowy operacji

$$L^{(2)} A^{(2)} = A^{(3)},$$

$$L^{(2)} b^{(2)} = b^{(3)}.$$

4) Wykonujemy n – 1 analogicznych operacji i otrzymujemy:

$$L^{(n-1)} L^{(n-2)} \cdots L^{(1)} A^{(1)} = A^{(n)},$$

$$L^{(n-1)} L^{(n-2)} \cdots L^{(1)} b^{(1)} = b^{(n)}.$$

5) Każda z macierzy $L^{(i)}$ jest nieosobliwa, zatem możemy znaleźć dla każdej macierz odwrotną. Przemnażając obie strony powyższych równań przez $(L^{(n-1)})^{-1}$, $(L^{(n-2)})^{-1}$ ..., otrzymamy

$$A^{(1)} = (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} \cdots (L^{(n-1)})^{-1} A^{(n)},$$

$$b^{(1)} = (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} \cdots (L^{(n-1)})^{-1} b^{(n)}.$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$L = (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} \cdots (L^{(n-1)})^{-1},$$

$$U = A^{(n)} = (L^{(n-1)} L^{(n-2)} \cdots L^{(1)} A^{(1)}) \;\; A^{(1)},$$

$$A = L \cdot U.$$

Jak znaleźć macierze $(L^{(i)})^{-1}$?

$$\boxed{L^{(i)} \left(L^{(i)}\right)^{-1} = I}$$

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ -l_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dysponując macierzami **L** i **U** można rozwiązać układ równań

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

$$\boxed{LU\vec{x} = \vec{b}} \qquad \boxed{L\,\underbrace{(U\vec{x})}_{\vec{y}} = \vec{b}}$$

poprzez rozwiązanie 2 układów równań

$$\boxed{L\vec{y} = \vec{b}}$$

$$\boxed{U\vec{x} = \vec{y}}$$

Rozwiązanie każdego z równań wiąże się z nakładem obliczeń jak dla układu z macierzą trójkątną (~1n^2).

Rozkład LU (eliminacja Gaussa) to nakład rzędu ~$n^3/2$.

Wiedząc, że iloczyn wyrazów na przekątnej L=1, obliczamy wyznacznik macierzy A:
$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U)$.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy informuje nas o tym, w jakim stopniu błąd błąd zaokrąglania liczb przez komputer wpłynął na uzyskany wynik.
K(A) to liczba informyjąca z jaką dokładnością podajemy wynik(tzn. ilość liczb po przecinku).

$$K(A) = \left|\left|A^{-1}\right|\right| \cdot \left|\left|A\right|\right|,$$

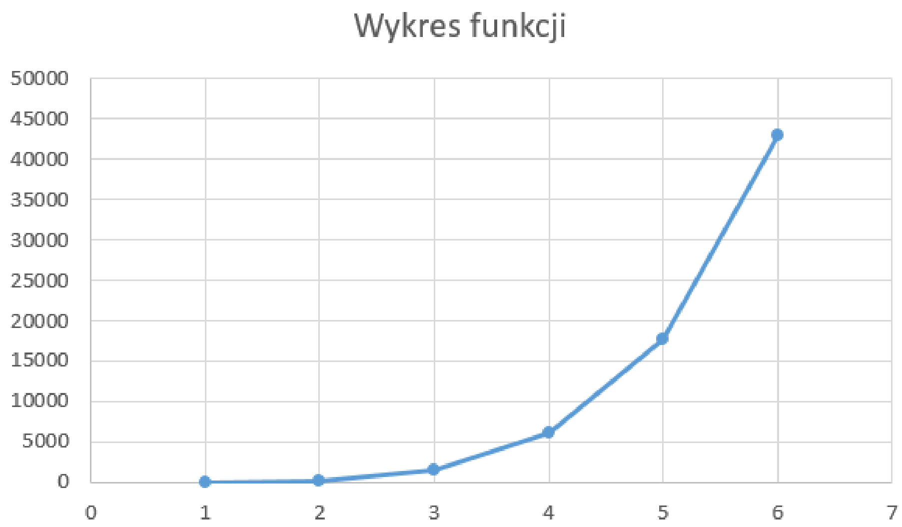
$$||A||_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|.$$

Wyniki

```
A:
1.00000 1.00000 1.00000 1.00000 1.00000 1.00000
1.00000 2.00000 4.00000 8.00000 16.00000 32.00000
1.00000 3.00000 9.00000 27.00000 81.00000 243.00000
1.00000 4.00000 16.00000 64.00000 256.00000 1024.00000
1.00000 5.00000 25.00000 125.00000 625.00000 3125.00000
1.00000 6.00000 36.00000 216.00000 1296.00000 7776.00000
Y:
17.00000 247.00000 1555.00000 6053.00000 17701.00000 42907.00000
      Lower Triangular                Upper Triangular
1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000         1.00000 1.00000 1.00000 1.00000 1.00000 1.00000
1.00000 1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000         0.00000 1.00000 3.00000 7.00000 15.00000        31.00000

1.00000 2.00000 1.00000 0.00000 0.00000 0.00000         0.00000 0.00000 2.00000 12.00000        50.00000        180.00000
1.00000 3.00000 3.00000 1.00000 0.00000 0.00000         0.00000 0.00000 0.00000 6.00000 60.00000        390.00000

1.00000 4.00000 6.00000 4.00000 1.00000 0.00000         0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 24.00000        360.00000

1.00000 5.00000 10.00000        10.00000        5.00000 1.00000         0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 120.00000
Determinant = 34560.00000
Inverse matrix:
   6.00000  -15.00000   20.00000  -15.00000    6.00000   -1.00000
  -8.70000   29.25000  -42.33333   33.00000  -13.50000    2.28333
   4.83333  -19.20833   31.00000  -25.58333   10.83333   -1.87500
  -1.29167    5.70833  -10.08333    8.91667   -3.95833    0.70833
   0.16667   -0.79167    1.50000   -1.41667    0.66667   -0.12500
  -0.00833    0.04167   -0.08333    0.08333   -0.04167    0.00833
Calculating LU for inversed matrix A...
      Lower Triangular                Upper Triangular
1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000         6.00000 -15.00000       20.00000        -15.00000       6.00000
-1.00000
-1.45000        1.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000         0.00000 8.25000 -14.33333       12.00000        -5.50000        1.28333
0.80556 -0.87374        1.00000 0.00000 0.00000 0.00000         0.00000 0.00000 3.00000 -3.58333        2.83333 -0.87500
-0.21528        0.32828 -0.69444        1.00000 0.00000 0.00000         0.00000 0.00000 0.00000 0.91667 -0.95833
0.70833
0.02778 -0.09596        0.16667 -0.45455        1.00000 0.00000         0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.66667 -0.12500
-0.00139        0.00505 -0.02778        0.09091 -0.06250        1.00000         0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.00833
Determinant = 0.75625
Condition number = 12870.00000
```

Dla współczynników x = {1, 2, 3, 4, 5, 6} i c = {1, 5, -3, 7, 2, 5} wyznaczyliśmy macierz A, macierz odwrotną do A oraz ich rozkłady LU. Wyliczyliśmy także wyznaczniki macierzy oraz uwarunkowanie macierzy, które jest równe iloczynowi norm macierzy i jej macierzy odwrotnej, czyli 12870.

Wykresy



Na wspólnym wykresie naniesiono węzły interpolacyjne i wartości wielomianu na przedziale [x_i; x_N].

Podsumowanie

Za pomocą LU możemy w prosty sposób rozwiązać układ równań liniowych, odwrócić macierz oraz ułatwić obliczenie wyznacznika macierzy.

Rozkład LU można stosować do równoczesnego rozwiązywania wielu układów równań różniących się jedynie wektorami wyrazów wolnych.

Wskaźnik uwarunkowania określa, w jakim stopniu błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych danego problemu wpływa na błąd wyniku.

Problemy o wysokim wskaźniku uwarunkowania są źle uwarunkowane, nie nadają się do numerycznego rozwiązywania, ponieważ już sam błąd wynikający z numerycznej reprezentacji liczb wprowadza nieproporcjonalnie duży błąd w odpowiedzi.

Bibliografia:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Wska%C5%BAnik_uwarunkowania#:~:text=Wska%C5%BAnik%20uwarunkowania%20okre%C5%9Bla%2C%20w%20jakim,rozwi%C4%85zania%20do%20b%C5%82%C4%99du%20wzgl%C4%99dnego%20danych.

http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/uarl_direct_1920.pdf