Metody numeryczne

Laboratorium 6

Wyznaczanie pierwiastków układu równań nieliniowych

17.04.2021

Anastasiya Hradouskaya

Cel cwiczenia

Wyznaczyć pierwiastki układów równań nieliniowych metodą Newtona.

1. Opis problemu

Wyznaczyć pierwiastki równań nieliniowych metodą Newtoda

$$\begin{cases} 2xy^2 - 3x^2y - 2 = 0 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 = 0 \end{cases}$$

W k-tej iteracji metody Newtona dostajemy wektor rozwiązań $r_k = [x_k, y_k]$, zależny od rozwiązania w kroku k – 1:

$$r_k = r_{k-1} + \Delta r,$$

gdzie Δr można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta r = -\begin{bmatrix} 2y^2 - 6xy & 4xy - 3x^2 \\ 2xy^3 + 2y & 3x^2y^2 + 2x \end{bmatrix}_{r = r_{k-1}} \cdot \begin{bmatrix} 2xy^2 - 3x^2y - 2 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 \end{bmatrix}_{r = r_{k-1}}$$

Wykonać obliczenia dla $r_0 = [10, 10]$ oraz $r_0 = [10, -4]$. Przyjąć jako warunek zbieżności $||\Delta r|| = ||r_k - r_{k-1}|| < 10^{-6}$. W obu przypadkach algorytm zbiega się do rozwiązania, którym jest r = [1, 2].

2. Opis metody

Metoda Newtona jest ogólną procedurą, którą można zastosować w wielu różnych sytuacjach. Jej szczególny wariant odnoszący się do lokalizacji zer funkcji rzeczywistych jest też nazywany metodą Newtona-Raphsona (metoda stycznych).

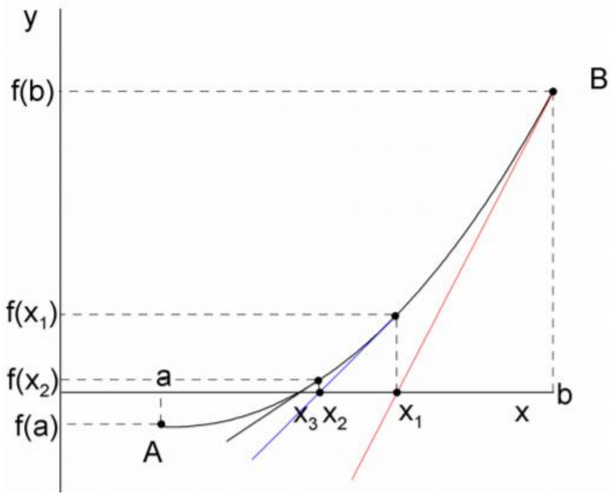
Idea metody Newtona opiera się na popularnym wśród inżynierów pomyśle linearyzacji: zamiast szukać miejsca zerowego skomplikowanej f, przybliżmy ją linią prostą, a dla niej już umiemy znaleźć miejsce zerowe.

Algorytm:

1) Z końca przedziału [a, b] w którym funkcja ma ten sam znak co druga pochodna należy poprowadzić styczną do wykresu funckji y = f(x).
(W ten sposób wykonujemy jedną iterację mniej, bo zbliżamy się od pierwiastka z jednej strony)
2) Styczna przecina oś Ox w punckie x_1, który stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania
3) Sprawdzamy czy $f(x_1) = 0$, jeśli nie to z tego punktu prowadzimy kolejną styczną

4) Druga styczna przecina oś Ox w punkcie x_2, który stanowi drugie przybliżenie
5) Kroki 3-4 powtarzamy iteracyjnie aż spełniony będzie warunek

$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon$



Rys.1 Interpretacja geometryczna metody Newtona

Równanie stycznej poprowadzonej z punktu B:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

i dla y = 0, otrzymujemy pierwsze przybliżenie:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Równanie stycznej w k-tym przybliżeniu:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

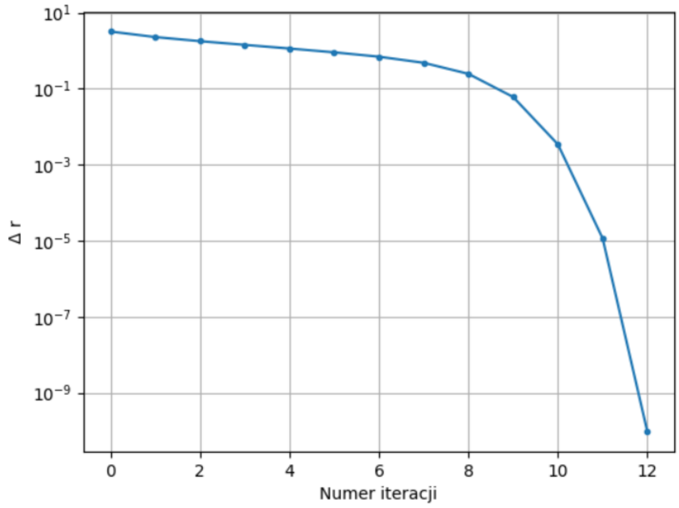
Wzór iteracyjny na położenie k-tego przybliżenia pierwiastka równania nieliniowego w metodzie Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ gdzie } k = 1, 2, \dots .$$

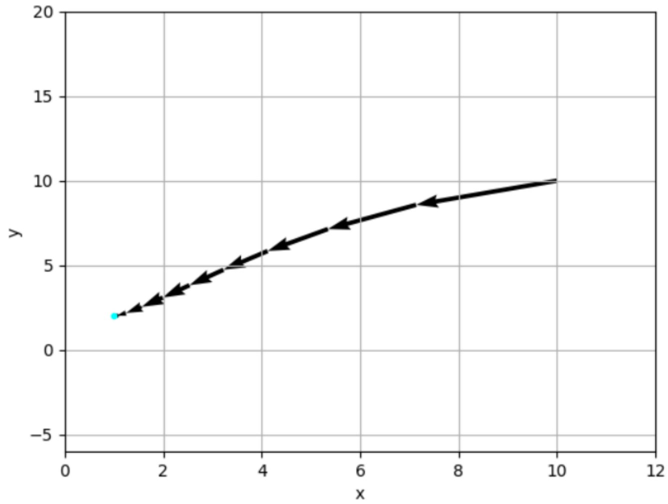
3. Wykresy i wyniki

W Pythonie został narysowany wykres $||\Delta r||$ w funkcji iteracji metody Newtona dla każdego z warunków początkowych oraz wykres pośrednich (x, y), przez które przechodzi algorytm w trakcie znajdowania miejsca zerowego układu równań.

Dla wartości początkowych r_0 = [10, 10]:



Rys.2 $||\Delta r||$ w funckji numeru iteracji



Rys.3 Wykres punktów pośrenich

Otrzymaliśmy poniższe wartości wektora rozwiązań w kolejnych iteracjach:

0 [[10 10]]

1 [[7.13784154 8.57136617]]

2 [[5.34595466 7.14347322]]

3 [[4.12014907 5.84675237]]

4 [[3.22177339 4.73823584]]

5 [[2.53250046 3.8258748]]

6 [[1.98976237 3.09882057]]

7 [[1.56181874 2.54969892]]

8 [[1.24390358 2.18843054]]

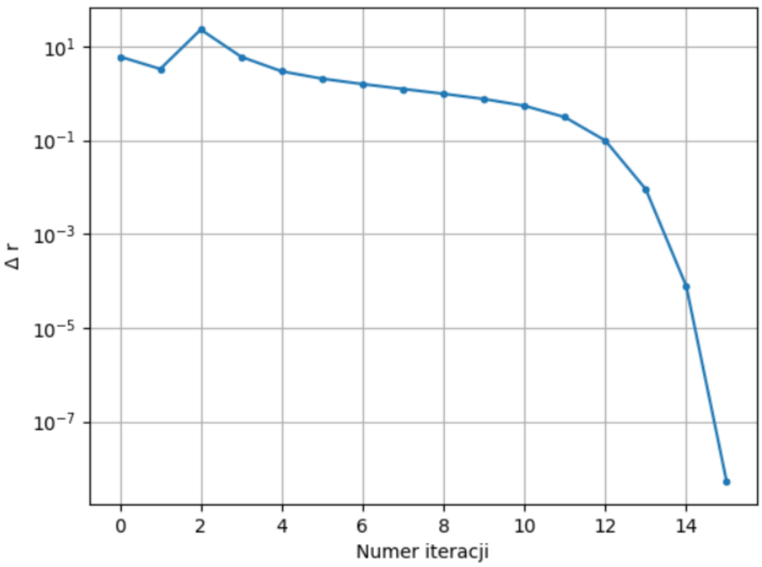
9 [[1.05806732 2.02651041]]

10 [[1.0034473 1.99998389]]

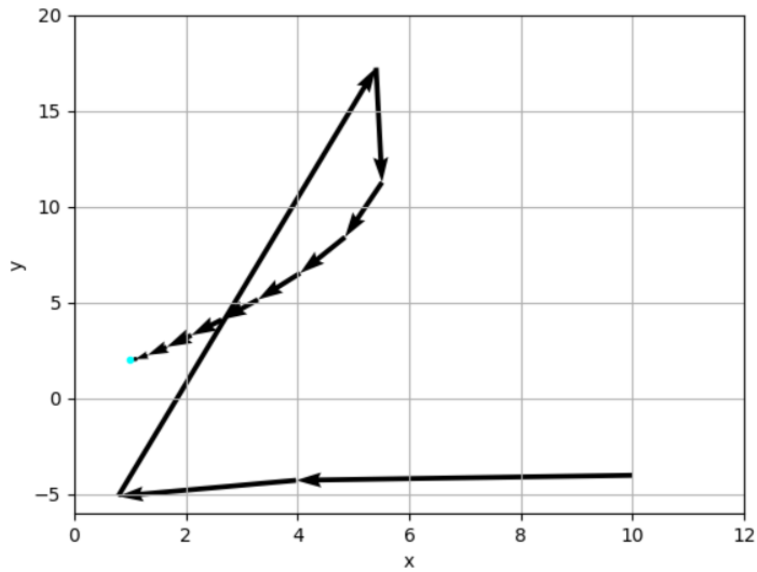
11 [[1.00000937 1.9999933]]

12 [[1. 2.]]

Dla wartości początkowych r_0 = [-4, 10]:



Rys.4 ||Δr|| w funckji numeru iteracji



Rys.5 Wykres punktów pośrenich

Otrzymaliśmy poniższe wartości wektora rozwiązań w kolejnych iteracjach:
0 [[10 -4]]
1 [[3.97344689 -4.26352705]]
2 [[0.78543522 -5.09347543]]
3 [[5.40722975 17.25171475]]
4 [[5.51363341 11.27047343]]
5 [[4.84975874 8.41265722]]
6 [[4.04352593 6.53322498]]
7 [[3.28963638 5.15804804]]
8 [[2.63981399 4.10832672]]

9 [[2.09772253 3.29859627]]
10 [[1.65551545 2.68797603]]
11 [[1.31330716 2.26890837]]
12 [[1.09232037 2.05284749]]
13 [[1.00894045 2.0013854]]
14 [[1.00007093 1.99996806]]
15 [[1. 2.]]

4. Podsumowanie

Metoda Newtona wyznaczania pierwiatków układu równań nieliniowych jest dokładną metodą iteracyjną: gdy tylko przybliżenia tworzone metodą Newtona są dostatecznie bliskie pierwiastka, staje się ona tak szybko zbieżna, że zaledwie kilka dodatkowych przybliżeń daje już maksymalną dokładność.

Metoda Newtona jest szybsza od innych metod rozwiązania równań nieliniowych (metody biseksji i metody siecznych), gdyż jej zbieżność jest kwadratowa.

W metodzie Newtona ilość iteracji zależy od dobrania odpowiednich wartości początkowych.

Bibliografia:

D.Kincaid, W.Cheney „Analiza numeryczna”, 3 ed.

http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/ukl_nieliniowe_2021.pdf