Metody numeryczne

Laboratorium 3

Metody iteracyjne.

Metoda największego spadku, metoda sprężonego gradientu

21.03.2021

Anastasiya Hradouskaya

1 Cel cwiczenia:

Rozwiązywanie algebraicznych układów równań liniowych metodami iteracyjnymi, tzn. metodą największego spadku oraz metodą sprężonego gradientu.

2 Opis problemu

Rozwiązać układ równań liniowych A·x = b korzystając z metody największego spadku oraz metody sprężonego gradientu.

Utworzyć macierz układu o wymiarze n = 1000 i wypełnić jej elementy zgodnie z formułą:

$$
\begin{aligned}
A[i][j] &= \frac{1}{1+|i-j|}, \quad gdy\ |i-j| \leqslant m, \quad i,j=0,\ldots,n-1 \\
A[i][j] &= 0, \quad gdy\ |i-j| > m
\end{aligned}
$$

gdzie m = 5.

Utworzyć wektor wyrazów wolnych b, wypełniony w następujący sposób:

b[i] = i, i = 0, ..., n-1.

Wektor startowy x uzupełniamy 0 albo 1.

W każdej iteracji zapisać do pliku: aktualny numer iteracji, wartość normy euklidesowej wektora reszt, wartość α, wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań.

Porównać te dwie metody iteracyjne ze sobą.

3 Opis metody

Metody iteracyjne rozwiązywania układów liniowych polegają na wyliczaniu kolejnych przybliżeń szukanego rozwiązania. W czasie obliczeń tworzy się ciąg kolejnych przybliżeń:

$x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$, gdzie za $x^{(0)}$ przyjmujemy dowolny wektor(wartości nie mają znaczenia). Jeżeli granica tego ciągu jest równa x:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x,$$

to zarówno ciąg jak i metoda są zbieżne, a wektor x jest rozwiązaniem układu rownań.

Do metod iteracyjnych należy metoda największego spadku oraz metoda sprzężonego gradientu.

3.1 Metoda największego spadku

Metoda największego spadku stanowi modyfikację metody gradientu prostego. Po określeniu kierunku poszukiwań wyznaczane jest minimum funkcji w tym kierunku.

$$\alpha_k = \arg\min f(x^{(k)} - \alpha\nabla f(x^{(k)})).$$

Pseudokod do rozwiązania układu równań za pomocą tej metody:

$$\begin{aligned}
inicjalizacja: & \quad \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \\
do\{ & \\
& \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k \\
& \alpha_k = \frac{\boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{r}_k}{\boldsymbol{r}_k^T A \boldsymbol{r}_k} \\
& \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{r}_k \\
& \}while(\|\boldsymbol{r}_k\|_2 > 10^{-6})
\end{aligned}$$

gdzie: k-numer iteracji, $\boldsymbol{x}_k$ to aktualne przybliżenie wektora rozwiązań a $\boldsymbol{r}_k$ jest wektorem reszt.

3.2 Metoda sprzężonego gradientu

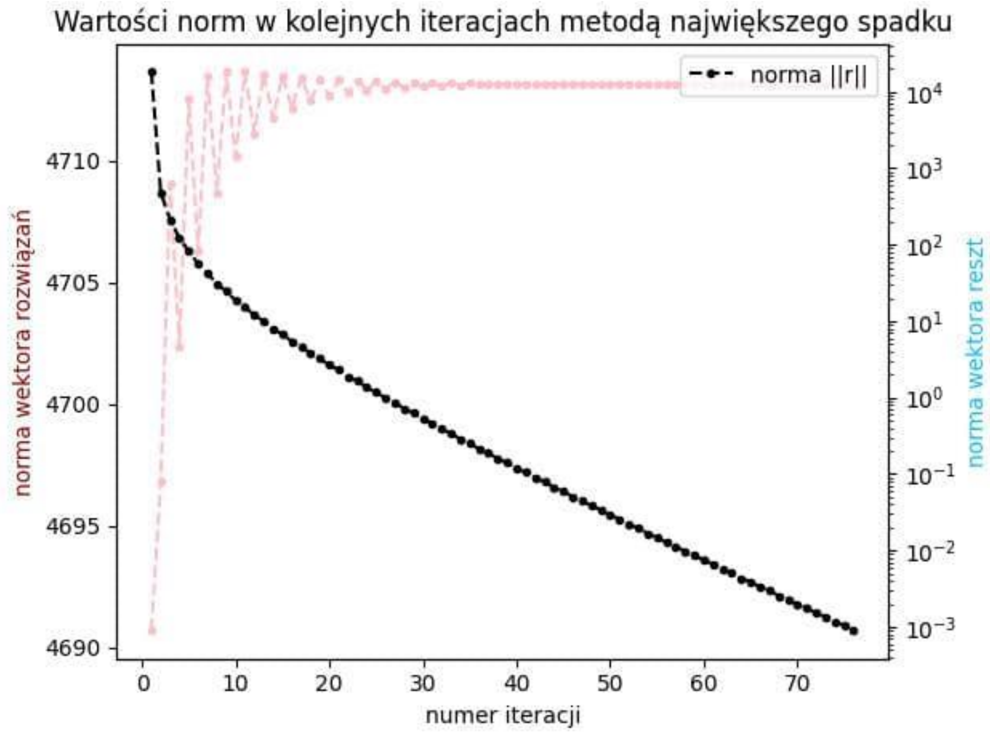
Metoda sprzężonego gradientu jest algorytmem numerycznym służącym do rozwiązywania niektórych układów równań liniowych. Pozwala rozwiązać te, których macierz jest symetryczna i dodatnio określona. Metoda gradientu sprzężonego jest metodą iteracyjną, więc może być zastosowana do układów o rzadkich macierzach, które mogą być zbyt duże dla algorytmów bezpośrednich.

Poniższy algorytm służy do rozwiązania Ax = b, gdzie macierz A jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona:

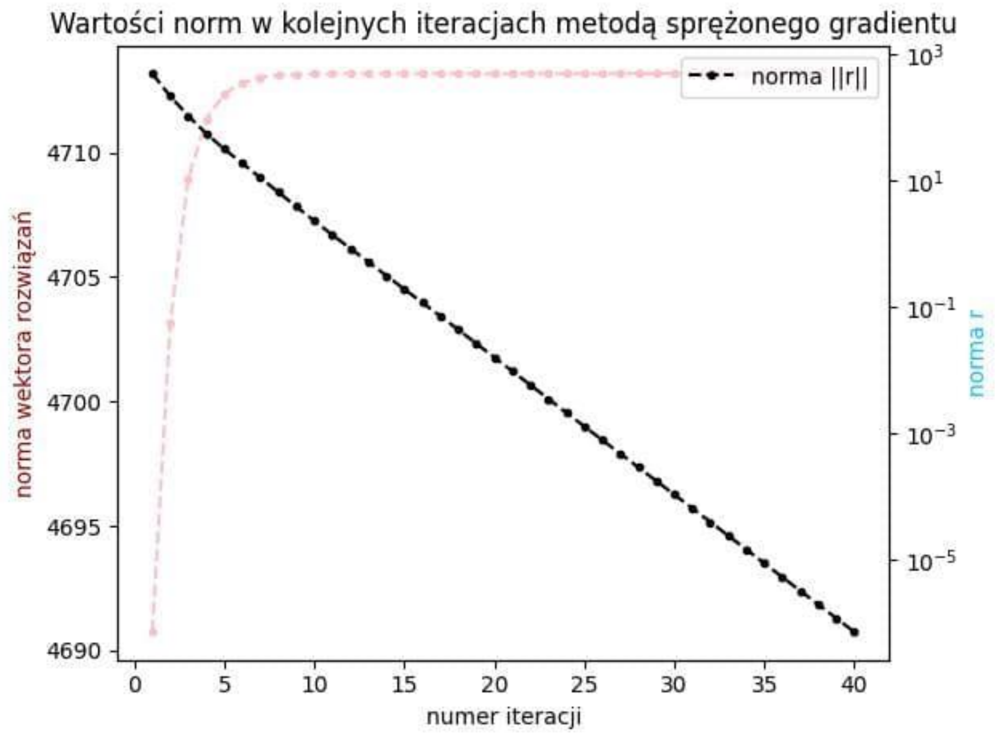
$$\begin{aligned}
& //inicjalizacja \\
& \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_1 \\
& - \quad - \quad - - - - - - - - \\
& //petla\ iteracyjna\ CG \\
& while(\boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{r}_k > 10^{-6})\{ \\
& \quad \alpha_k = \frac{\boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{r}_k}{\boldsymbol{v}_k A \boldsymbol{v}_k} \\
& \quad \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{v}_k \\
& \quad \boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}_k - \alpha_k A \boldsymbol{v}_k \\
& \quad \beta_k = \frac{\boldsymbol{r}_{k+1}^T \boldsymbol{r}_{k+1}}{\boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{r}_k} \\
& \quad \boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{v}_k \\
& \}
\end{aligned}$$

4 Wykresy

Narysowaliśmy wykres w Pythonie za pomocą biblioteki matplotlib.



Rys.1 Wykres wygenerowany przy wykorzystywaniu metody największego spadku



Rys.2 Wykres wygenerowany przy wykorzystywaniu metody sprzężonego gradientu

Widzimy, że norma wektora rozwiązań zbiega do ustalonego eps, a norma wektora reszt zbiega do wyniku końcowego.

Można zauważyć także, że metoda sprzężonego gradientu potrzebuje mniej iteracji niż metoda największego spadku, czyli jest szybsza.

5 Podsumowanie

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań są dobrym narzędziem do rozwiązywania problemów reprezentowanych przez macierze rzadkie. Ich zaletą jest oszczędzanie ilości pamięci i czasu – nie musimy przechowywać w pamięci całej macierzy.

Gdy macierz jest rozrzedzona, mnożenie takiej macierzy przez wektor jest bardzo tanie (koszt jest proporcjonalny do liczby niezerowych elementów macierzy). Dlatego, jeśli możemy zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym układu, a w zamian osiągnąć je tanim kosztem, warto rozważyć metody iteracyjne.

Porównując dwie metody iteracyjne, które wykorzystywaliśmy do rozwiązania układu równań na tym laboratotium, uznaliśmy, że metoda sprzężonego gradientu jest szybsza niż metoda największego spadku.

Metody iteracyjne warto stosować zamiast metod bezpośrednich w przypadku, gdy wymiar N układu równań liniowych jest „duży” oraz gdy macierz A układu ma stosunkowo niewielką liczbę elementów niezerowych, np. proporcjonalną do N.

Bibliografia:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_najszybszego_spadku#:~:text=Metoda%20najszybszego%20spadku%20%E2%80%93%20algorytm%20numeryczny,jest%20modyfikacj%C4%85%20metody%20gradientu%20prostego.

https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_gradientu_sprz%C4%99%C5%BConego#:~:text=Metoda%20gradientu%20sprz%C4%99%C5%BConego%20(ang.,rozwi%C4%85zywania%20niekt%C3%B3rych%20uk%C5%82ad%C3%B3w%20r%C3%B3wna%C5%84%20liniowych.&text=Takie%20uk%C5%82ady%20pojawiaj%C4%85%20si%C4%99%20cz%C4%99sto%20w%20trakcie%20numerycznego%20rozwi%C4%85zywania%20r%C3%B3wna%C5%84%20r%C3%B3%C5%BCniczkowych%20cz%C4%85stkowych.

http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=MN08