Metody numeryczne

Laboratorium 14

Generowanie ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym i trójkątnym

Anastasiya Hradouskaya

14.06.2021

Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z generatorem ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym i trójkątnym.

1. Opis problemu

Rozkład jednorodny

Startując od $x_0 = 10$ należy wygenerować $n = 10^4$ liczb pseudolosowych przy użyciu generatora mieszanego

$$x_{n+1} = (ax_n + c)\ mod\ m$$

o parametrach
a) a = 123, c = 1, m = 2^{15}

b) *a = 69069, c = 1, m =* 2^{32}

Rozkład trójkątny

Wygenerować n = 10^3 liczb o rozkładzie trójkątnym o parametrach $\mu = 4$ i $\Delta = 3$.
Podzielić przedział $[\mu - \Delta, \mu + \Delta]$ na *K = 10* podprzedziałów i zliczyć ile liczb wpada do każdego z nich.
Dla rozkładu trójkątnego przeprowadzić test χ^2 tj. określić wartość statystyki testowej

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

gdzie: n_i to ilość liczb znajdujących się w podprzedziale o indeksie i, p_i to prawdopodobieństwo teoretyczne, że zmienna losowa X znajdzie się w *i*-tym przedziale

$$p_i = F(x_{i,max}) - F(x_{i,min}).$$

Testujemy hipotezę H_0: wygenerowany rozkład jest rozkładem $T(\mu, \Delta)$ wobec H_1, że nie jest to prawdą. Korzystając z odpowiednich tabel statystycznych sprawdzić, czy nasza hipoteza jest prawdziwa na poziomie istotności $\propto = 0.05$. W tym celu definiujemy obszar krytyczny testu:

$$\Phi = \{X: \chi^2(X) > \varepsilon\}$$

gdzie: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest ciągiem liczb pseudolosowych, $\chi^2(X)$ wartością statystyki dla danego ciągu X, ε jest poziomem krytycznym dla danego rozkładu dla określonej liczby stopni swobody i założonego poziomu istotności.

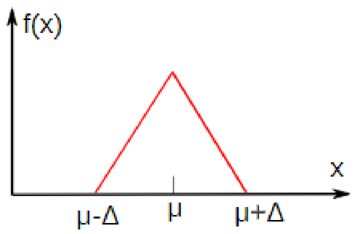
Liczbę stopni swobody określamy jako $v = K - r - 1$, gdzie: K jest liczbą podprzedziałów, a $r = 2$ jest liczbą parametrów testowanego rozkładu. Jeśli $\chi^2 < \varepsilon$, to stwierdzamy, że dla zadanego poziomu istotności nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

2. Opis metody

Funckję gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu trójkątnego $T(\mu, \Delta)$ (rys.1) definiujemy następująco:

$$f(x; \mu, \Delta) = -\frac{|x - \mu|}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta}$$

gdzie: μ to środek rozkładu, a Δ to jego szerokość.



Rys.1 Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu trójkątnego

Dystrybuanta tego rozkładu jest następująca:

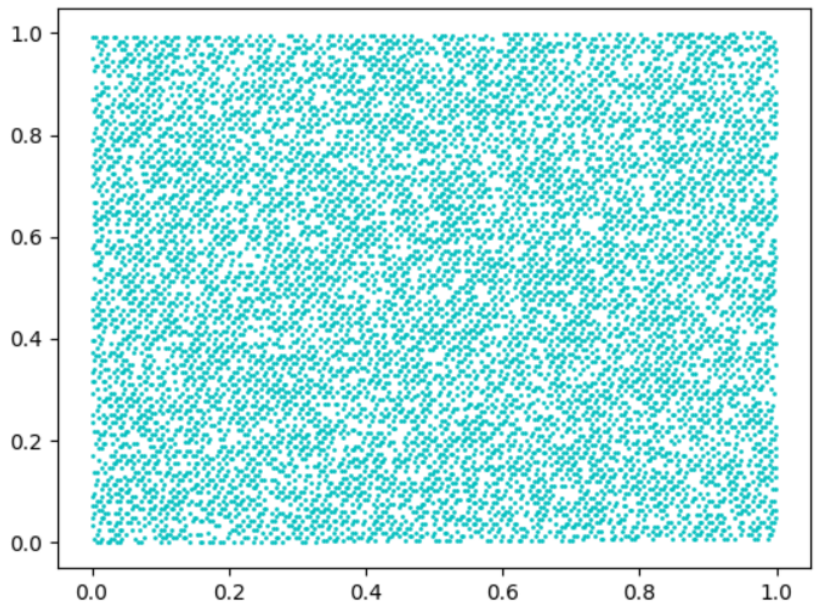
$$F(a) = P(x < a) = \int_{\mu-\Delta}^{a} f(x : \mu, \Delta)dx = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta^2}\left(-\frac{x^2}{2} + \mu x\right) + \frac{x}{\Delta}, & x \leqslant \mu \\ -\frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{x^2}{2} - \mu x + \mu^2\right) + \frac{x}{\Delta}, & x > \mu \end{cases}$$

Jeśli $\xi_1 \in U(0,1)$ i $\xi_2 \in U(0,1)$ to zmienną o rozkładzie trójkątnym oraz parametrach μ i Δ generujemy formułę

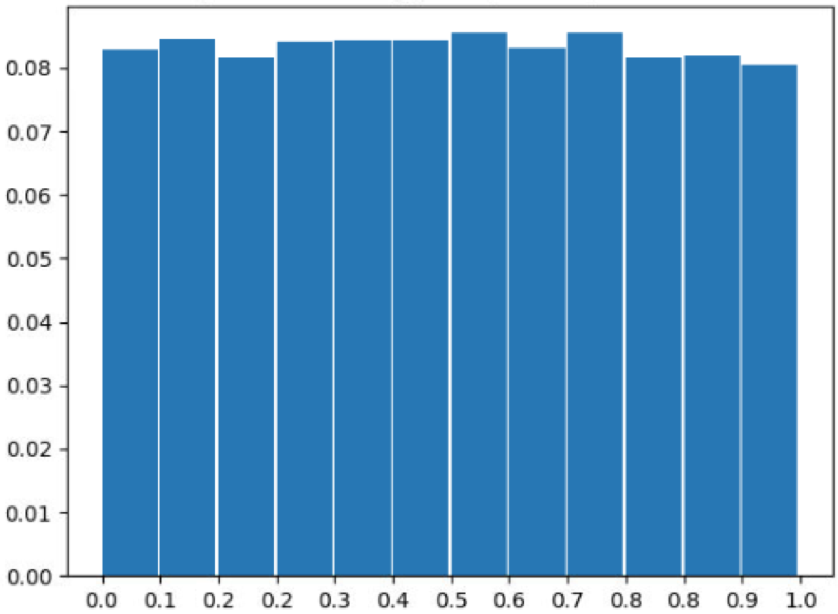
$$x = \mu + (\xi_1 + \xi_2 - 1) \cdot \Delta$$

3. Wykresy i wyniki

Wyniki rozkładu jednorodnego dla $x_0 = 10$ i $n = 10^4$ dla parametrów $a = 123$, $c = 1$, $m = 2^{15}$:

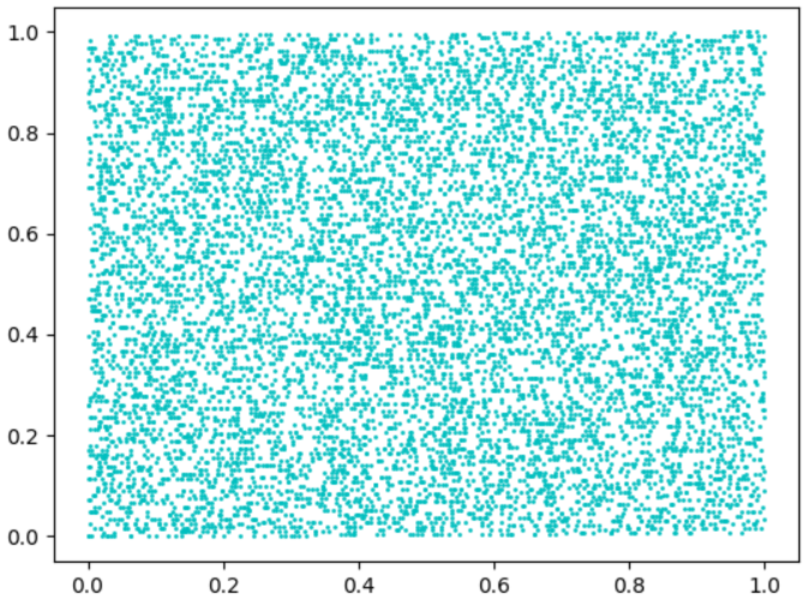


Rys.2 Wykres $X_{i+1} = f(X_i)$

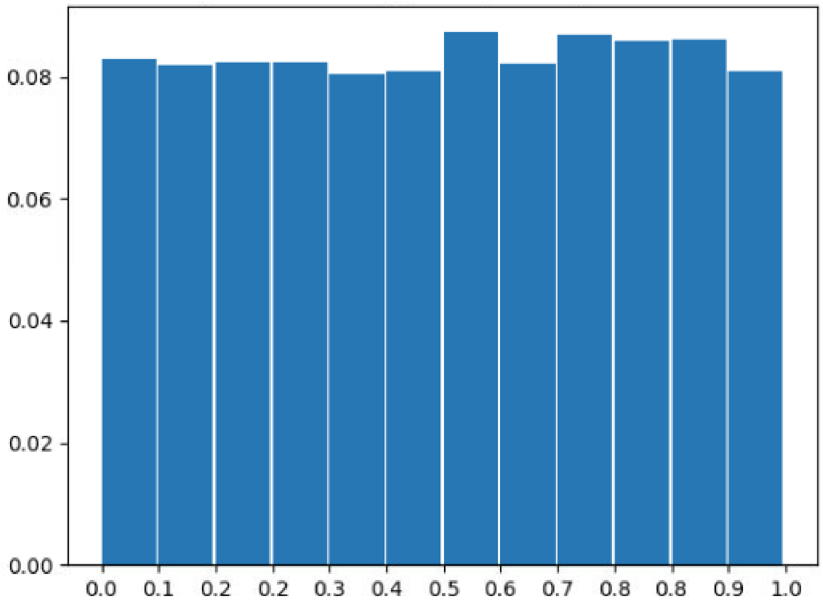


Rys.3 Histogram rozkładu gęstości prawdopodobieństwa

Wyniki dla $a = 69069, c = 1, m = 2^{32}$:

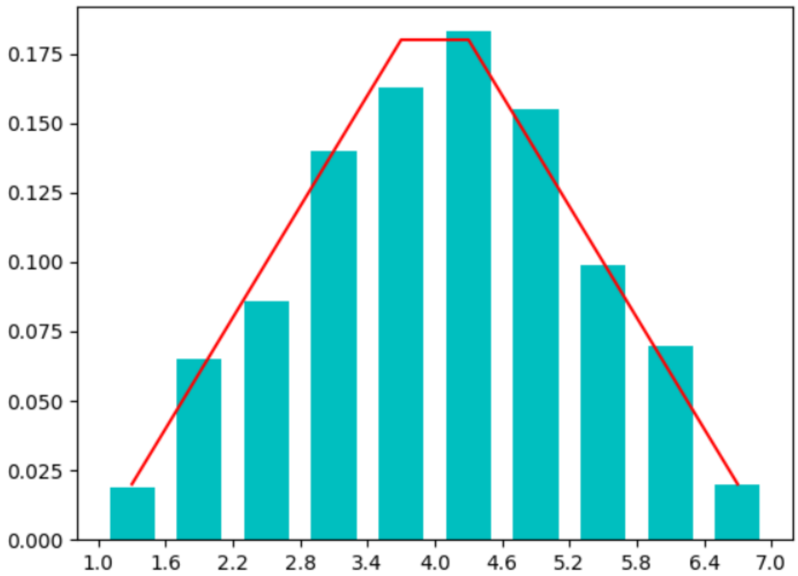


Rys.4 Wykres $X_{i+1} = f(X_i)$



Rys.5 Histogram rozkładu gęstości prawdopodobieństwa

wyniki rozkładu trójkątnego dla $n = 10^3$ liczb o parametrach $\mu = 4,\ \Delta = 3$ oraz przedziale $[\mu - \Delta, \mu + \Delta]$.



Rys.6 Histogram wartości $\frac{ni}{N}$ dla *K=10*

4. Podsumowanie

Dla wygenerowanych ciągów liczb możemy zauważyć, że generator mieszany dał lepsze rezultaty dla parametrów $a = 123$, $c = 1$, $m = 2^{15}$. Na rys.3 i rys.5 widzimy, że pierwszy wykres jest bardziej wypełniony punktami, co oznacza, że generowanie jest bardziej losowe dla tego zestawu parametrów. Porównując wygenerowane histogramy zauważyliśmy, że dla pierwszego zestawu prawdopodobieństwo jest lepiej rozłożone.

Na rys.6 widzimy, że histogram dla liczb o rozkładzie trójkątnym ma kształt trójkątny, co świadczy o poprawności działania i potwierdza spodziewany wynik. Widać pewne odchylenia, ale są one nieuniknione.