Metody numeryczne

Laboratorium 13

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa

Anastasiya Hradouskaya

10.06.2021

Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z całkowaniem numerycznym przy użyciu kwadratur Gaussa.

1. Opis problemu

Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legandre'a wartość całki

$$c_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2+1} dx$$

Wartość dokładną można obliczyć korzytając z rozwiązania analitycznego

$$c_{1,a} = \int \frac{x}{a^2x^2 \pm c^2} dx = \frac{1}{2a^2} ln|a^2x^2 \pm c^2|$$

Wykonać wykres $|c_1 - c_{1,a}| = f(n)$, dla liczby węzłów *n = 2, 3, ..., 20.*

Następnie należało obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a wartość całki

$$c_2 = \int_0^\infty x^k \exp(-x)\, dx = k!$$

Wykonać wykresy $|c_2 - c_{2,a}| = f(n)$ dla k = 5, k = 10 oraz dla liczby węzłów *n = 2, 3, ..., 20.*

Obliczyć wartość podwójnej całki przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a

$$c_3 = \iint\limits_{-\infty\,-\infty}^{\infty\,\infty} sin^2(x) sin^4(y) \exp(-x^2 - y^2)\, dxdy$$

Za dokładną wartość całki przyjmujemy $c_{dok} = 0.1919832644$

Narysować wykres $|c_3 - c_{dok}|$ dla liczby węzłów *n = 2, 3, ..., 15.*

2. Opis metody

Kwadratury Gaussa – metody całkowania numerycznego polegające na takim wyborze wag $w_1, w_2, \dots, w_3$ i węzłów interpolacji $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ aby wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

najlepiej przybliżało całkę

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx,$$

gdzie *f* jest dowolną funkcją określoną na odcinku *[a, b]* , a *w* – funckją wagową.

Kwadratury z przedziału *[-1, 1]* z wagą $w \equiv 1$ nazywamy kwadraturami Gaussa-Legendre'a

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i),$$

gdzie t_i to pierwiastki *i*-tego wielomianu Legendre'a.

Kwadratury z wagą $w(x) = e^{-x^2}$ nazywamy nazywamy kwadraturami Gaussa-Hermite'a

$$I(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i),$$

gdzie t_i to pierwiastki *n*-tego wielomianu Hermite'a.

Kwadratury z wagą $w(x) = e^{-x}$ nazywamy kwadraturami Gaussa-Laguerre'a

$$I(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i),$$

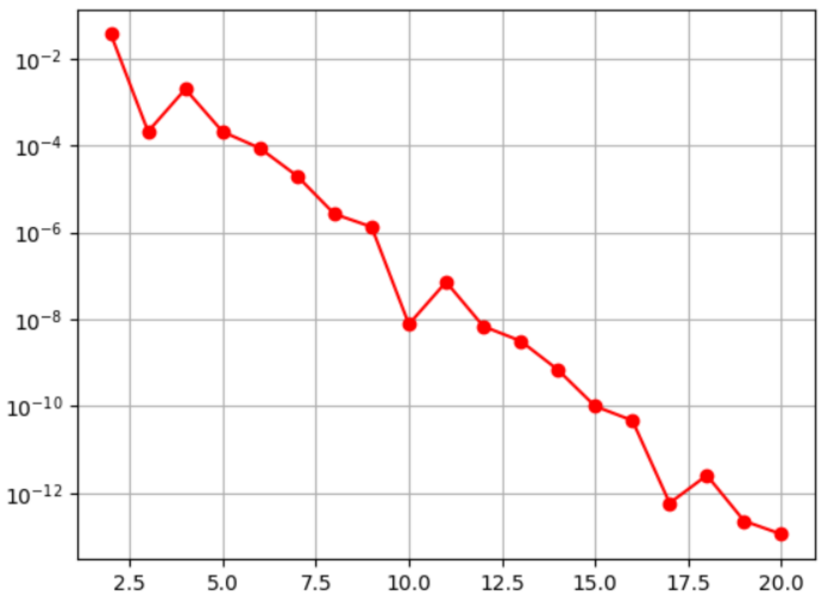
gdzie t_i to pierwiastki *n*-tego wielomianu Laguerre'a.

3. Wykresy i wyniki

W Pythonie narysowaliśmy wykresy przy pomocy biblioteki matplotlib.

Wyniki kwadratury Gaussa-Legendre'a dla

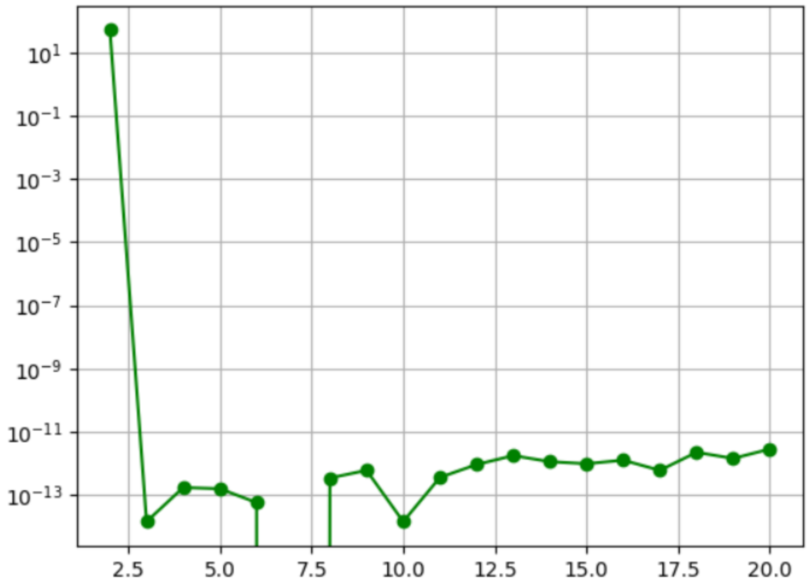
$$c_1 = \int_{0}^{2} \frac{x}{4x^2+1} dx$$



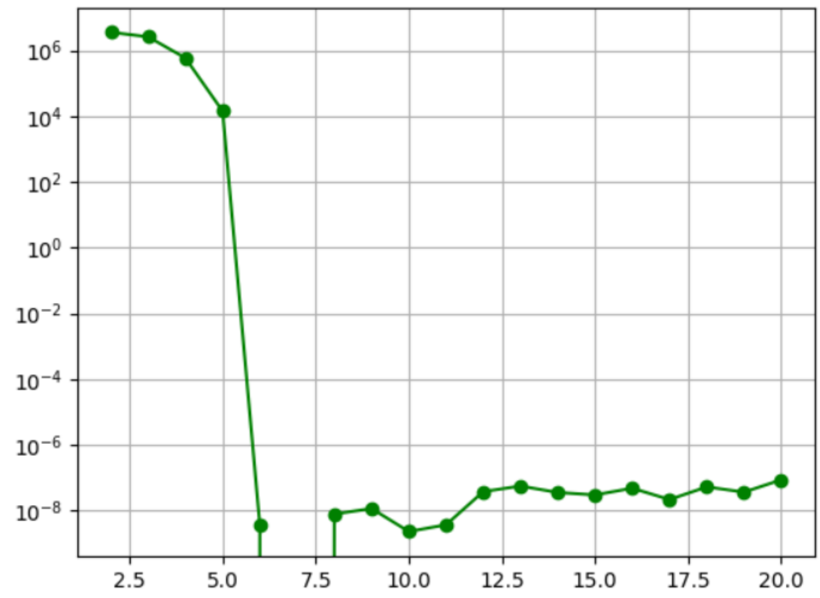
Rys.1 Dokładność wyznaczenia całki metodą Gaussa-Legendre'a

Wynik kwadratury Gaussa-Laguerre'a dla

$$c_2 = \int_0^\infty x^k \exp(-x)\,dx = k!$$



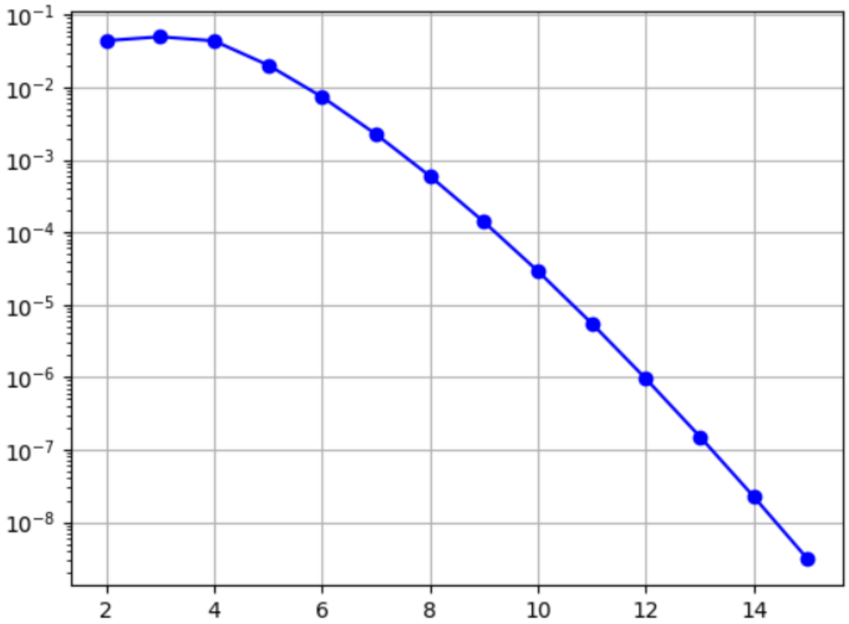
Rys.2 Dokładność wyznaczenia całki metodą kwadratur Gaussa Lagrange'a, k = 5



Rys.3 Dokładność wyznaczenia całki metodą kwadratur Gaussa Lagrange'a, k = 10

Wyniki kwadratury Gaussa-Hermite'a dla

$$c_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} sin^2(x)sin^4(y)\exp(-x^2 - y^2)\,dxdy$$



Rys.4 Dokładność wyznaczenia całki metodą kwadratur Gaussa-Hermite'a

4. Podsumowanie

Całkowanie metodą kwadratur Gaussa jest jedną z najbardziej dokładnych metod całkowania numerycznego.

Za pomocą kwadratury Gaussa-Lagendre'a obliczylismy wartość całki oznaczonej z dużą dokładnością. Zauważyliśmy, że dokładność wzrasta wraz ze zwiększeniem ilości węzłów.

Przy rozwiązywaniu drugiego zadania kwadraturą Gaussa-Laguerre'a zauważyliśmy, że wzraz ze wzrostem stopnia wielomianu zmniejsza się dokładność otrzymanych wyników, co widać na rysunkach 2, 3.

Przy rozwiązywaniu trzeciego zadania kwadraturą Gaussa-Hermite'a na rysunku 4 zauważyliśmy, że błąd całkowania maleje wraz ze zwiększeniem ilości węzłów.

Bibliografia

https://pl.wikipedia.org/wiki/Kwadratury_Gaussa