Sprawozdanie

Laboratorium 1

Rozwiązanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Anastasiya Hradouskaya, 06.03.2021

1. **Cel ćwiczenia:**
   Celem laboratorium jest problem rozwiązania dużych układów równań liniowych. Do rozwiązania wykorzystujemy metody bezpośrednie.
2. **Opis problemu:**

2.1

Równanie dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona ma postać:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t).$$

Przybliżając lewą stronę równania za pomocą drugiej pochodnej otrzymujemy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

i wprowadzając oznaczenia$\Delta t=h$, $x_i=x(ih)$ otrzymujemy z równania (1) iteracyjny przepis pozwalający nawyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0$$

Dane równanie można rozpisać według danego schematu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozwiązujemy ten układ metodą Gaussa-Jordana, a następnie narysujemy zależność wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań.

Do wykonania ćwiczenia przyjęliśmy: $\frac{k}{m} = 1$, warunki początkowe $v_0 = 0, A = 1$ oraz, że krok całkowania $h = 0.1$.

2.2

Rozwiązujemy układ równań, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2q \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \text{ oraz } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gdy q = 1 układ równań jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.

Gdy q jest bliskie jedynki równanie ma rozwiązanie jednoznaczne, lecz numerycznie jest źle uwarunkowany, gdyż macierz A jest bliska osobliwości.

Obliczamy iloczyn c = A * x, odchylenie standardowe o(q) w zakresie od 1/5 do 5.

Rozwiązujemy tyn problem metodą Gaussa, a następnie narysujemy wykres zależności o(q) od q.

3. Opis metody:

Metoda Gaussa:

Przekształcamy do macierzy górnotrójkątnej.

Odejmujemy od i-tego wiersza (i = 2, 3, ... , n) pierwszy wiersz przemnożony przez $l_{ij}= a_{ij}/a_{11}$.

Dostajemy układ:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

........................=......

$$a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.$$

Od i-tego wiersza (i = 3, 4, ..., n) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez $l_{i1}= a_{i2}/a_{22}$.

Kontynuując te operacje otrzymujemy ostatecznie:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

........................=... ...

$$a_{nn}x_n=b_n$$

Rozwiązania x_i wyrażają się równianiami:

$X_n = b_n/ a_{nn}$

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}}$$

Metoda Gaussa-Jordana:

Zgodnie z metodą Gaussa-Jordana macierz odwzorowującą układ równań należy sprowadzić do macierzy jednostkowej w kroku n-tym.

Dla pierwszej iteracji: pierwszy wiersz dzielimy przez wy przez $w_1 = a_{11}$ i od i-tego wiersza (i = 2, 3, ..., n) odejmujemy pierwszy wiersz przemnożony przez $w_{i1} = a_{i1}$.

$$x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots$$

$$a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.$$

Dla drugiej iteracji: drugi wiersz dzielimy przez $w_2 = a_{22}$ i od i-tego wiersza (i = 1, 3, ..., n) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez $w_{i1} = a_{i1}$.

$$x_1+0x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots$$

$$a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.$$

Ostatecznie dostajemy:

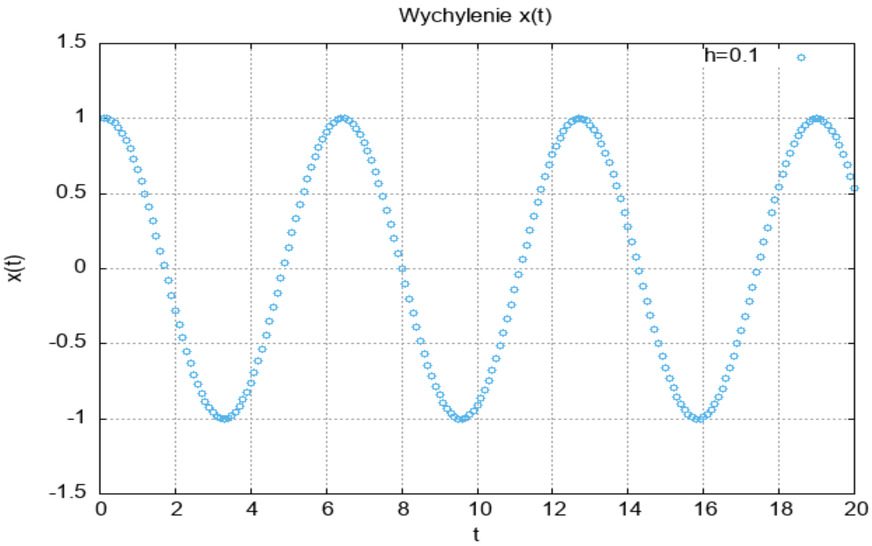
$$x_1=b_1$$
$$x_2=b_2$$
$$\ldots$$
$$x_n=b_n$$

Wiersz współczynników b_i jest równy wektorowi niewiadomych x_i.

4. Wyniki

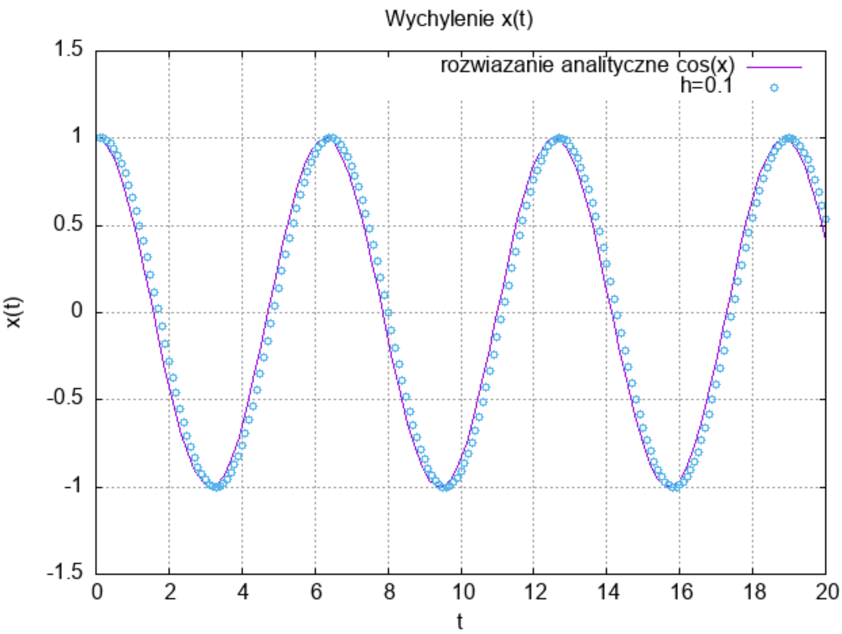
4.1

Wygenerowaliśmy wykresy w programie GnuPlot.



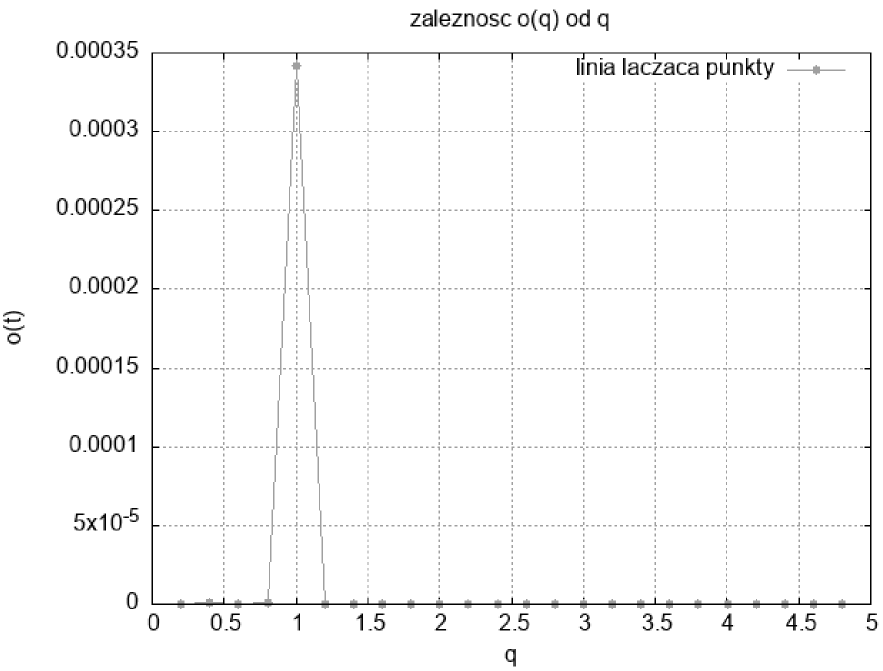
Wykres 1. Wychylenie $x(\ t\ )$ uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana.

$$x(\ t\ ) = Acos(\ \omega \mathrm{t}).$$



Wykres 2. Niebieskie kółeczka pokazują wychylenie x(t)uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana, natomiast fioletowa linia ciągła ukazuje rozwiązanie analityczne $cos(\ t\ )$.

4.2



Wykres 3. Zależność o(q) od q

5. Podsumowanie

Rozwiązaliśmy układy liniowe za pomocą metody Gaussa i Gaussa-Jordana.

Na prykładzie pierwszego zadania widzimy, że możemy rozwiązywać równania różniczkowe w sposób numeryczny metodą Gaussa-Jordana. Wyniki mają rozłożenie jak cosinus. Rozwiązanie potwierdza poprawność algorytmu i obliczeń.

Drugie zadanie rozwiązywaliśmy za pomocą metody Gaussa-Jordana. Na wykresie widzimy, że wartość średniego odchylenia standardowego rośnie, gdy q jest bliskie jedynki(problem ma rozwiązanie jednoznaczne, lecz jest numerycznie źle uwarunkowany, ponieważ macierz A jest bliska osobowości). Otrzymujemy bardzo bliski i dokładny wynik w przypadku, gdy macierz nie jest osobliwa.