24.03.2025 **Завдання колоквіума з курсу КОМ**

1. На відрізку $\Omega = (0,2\pi) \subset \mathbb{R}$ задано функції $u(x) = \sin(2x)$ та $v(x) = \cos(3x)$. Обчисліть їхні норми в просторах $L^2(\Omega)$ та $H^1(\Omega)$.

2. Задано симетричну додатно визначену матрицю $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, вектор $F = \{f_i\}_{i=1}^{N} \in \mathbb{R}^N$ та квадратичний функціонал
$$J(v) = (Av, v) - 2(f, v) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^N, \qquad (1)$$
де $(u, v) = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$. Покажіть, що задача мінімізації
$$\textit{знайти } u \in \mathbb{R}^N \textit{ такий, що } J(u) \le J(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N \qquad (2)$$
коректно сформульована.
3. На відрізку $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ побудовано сітку вузлів $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, $x_i = 2N^{-1}i - 1$, та відповідну їм систему кусково лінійних базисних функцій методу скінченних елементів $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N}$ з властивостями $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, \cdots, N$. Обчисліть
$$\sum_{i=0}^{N} \varphi_i(x) \quad \text{та} \quad \sum_{i=0}^{N} \frac{d}{dx}\varphi_i(x).$$
4. Покажіть, що білінійна форма
$$a(u, v) \coloneqq \int_{-1}^{+1} [u'v' + (u' + u)v]dx \quad \forall u, v \in V, \qquad (3)$$
визначена на просторі
$$V = \{v \in H^1(\Omega): v(+1) = 0, \Omega = (-1, +1)\}, \qquad (4)$$
є обмеженою і V-еліптичною.
5. Покажіть, що лінійний функціонал
$$< l, v > \coloneqq \int_{-1}^{+1} v dx \quad \forall v \in V, \qquad (5)$$
визначений на просторі
$$V = \{v \in H^1(\Omega): v(+1) = 0, \Omega = (-1, +1)\},$$
є неперервним.
6. Розгляньте варіаційну задачу:
знайти $u \in V = \{v \in H^1(\Omega): v(+1) = 0,\}$ *таку, що*
$$\int_{-1}^{+1} [u'v' + (u' + u)v]dx = \int_{-1}^{+1} v dx \quad \forall v \in V. \qquad (6)$$
Обчисліть кусково лінійну апроксимацію МСЕ її розв'язку з допустимою відносною похибкою його наближення в нормі простору $H^1(\Omega)$, яка не перевищує 10%.
7. Намалюйте графіки всіх кусково лінійних базисних функцій $\varphi_i(x)$ простору апроксимацій $V_h \subset V$ для задачі (6) у випадку використання сітки з $N = 4$.
8. Розглянемо варіаційну задачу:
задано $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}, A, B, f, g \in C(\Omega)$ та $\bar{N}, \bar{M} \in \mathbb{R}$;
знайти пару $\psi = \{w, \gamma\} \in \Phi$ *таку, що* $\Pi(\psi, \varphi) =< l, \varphi > \quad \forall \varphi = \{y, \xi\} \in \Phi$, (7)
де
$$\Phi \coloneqq \{\varphi = \{y, \xi\} \in [H^1(\Omega)]^2 : \varphi(0) = 0\},$$
$$\Pi(\psi, \varphi) := \int_0^L [A\gamma'\xi' + B(w' - \gamma)(y - \xi)]dx \quad \forall \psi = \{w, \gamma\}, \varphi = \{y, \xi\} \in \Phi,$$
$$< l, \varphi > \coloneqq \int_0^L (fy + g\xi)dx + \bar{N}y(L) + \bar{M}\xi(L) \quad \forall \varphi = \{y, \xi\} \in \Phi.$$

Покажіть, що лінійний функціонал $l: \Phi \to \mathbb{R}$ неперервний на просторі Φ, а також, що білінійна форма $\Pi(\; . \; , \; . \;): \Phi \times \Phi \to \mathbb{R}$ теж неперервна та Φ-еліптична на просторі Φ.