

2013/14. 9 класс. Серия 1. «Лето красное пропели, а теперь...»

1. Из вершин B и C равнобедренного $\triangle ABC$ ($AB = AC$) с углом при основании 40° проведены прямые BD и CD так, что $\angle DBC = 20^\circ$, а $\angle ACD = 10^\circ$. Найдите $\angle CAD$, если D лежит внутри $\triangle ABC$.
2. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n для нечетных n .
3. В каждой из трех стран живет по n математиков. Известно, что каждый из них переписывается не менее, чем с $n + 1$ иностранным математиком. Докажите, что найдутся трое математиков, которые попарно переписываются между собой.
4. Решить уравнение в целых числах: $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.
5. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что некоторая прямая пересекает все эти многоугольники.
6. Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C . Внутри угла BAC выбрана точка Q . На отрезке AQ нашлась такая точка P , что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2 , описанные вокруг треугольников BPQ и CPQ , вторично в точках M и N . Докажите, что $OM = ON$.