Problem 1

Изврат № 1. Поменялись местами точное и приближенное решения, при этом уравнения и линеаризации по-прежнему разные. Объяснено, как бортануть лишние корни в приближенном решении.

Задача № 1

<u>Условие</u>: Миномет установлен у основания некоторой горы под углом $\alpha = 1{,}5$ радиана к горизонту. Минометный расчет ведет записи о том, насколько далеко падают мины в зависимости от их начальной скорости. Определите по этим данным высоту и примерную форму горы.

v_0, м/с	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
l, м	0,710576	1,611942	2,85057	4,45474	6,48101	8,9838	12,0195	15,6393	19,879	24,7493
v_0, м/с	50	54	58	62	66	70	74	78	82	
l, м	30,2305	36,2765	42,8294	49,8405	57,2941	65,2363	73,8201	83,4179	95,0382	

<u>Решение</u>: Сопротивлением воздуха при решении задачи пренебрегаем. Введем систему координат, как на рис. 1.1. Рассмотрим движение снаряда, выпущенного из начала координат со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Его координаты при таком движении зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t\cos\alpha$ и $y(t) = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2$ соответственно. Выразив t из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение траектории:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

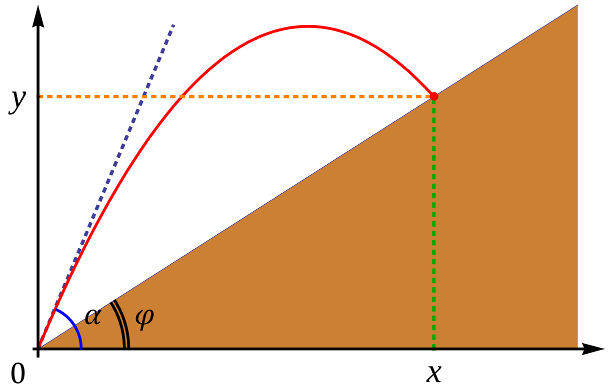

Рис. 1.1. Ось Ox горизонтальна, ось Oy вертикальна. Миномет расположен в начале координат.

Далее приведем два способа решения: приближенный в общем виде и точный численный.

1. *Приближенное решение.*

Решим задачу приближенно, не основываясь на численных методах. Перейдем к полярным координатам (l,φ). Координаты точек падения снаряда $x = l\cos\varphi$ и $y = l\sin\varphi$. Подставим их в уравнение (1) и разделим обе его части на x:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gl\cos\varphi}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

откуда, с использованием тождества $\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$ получим

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{gl\cos^2\varphi}{2v_0^2\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Такое уравнение невозможно решить стандартными способами, оно приводится к уравнению четвертой степени, которое решать безнадежно.

Если считать форму горы плоскостью, то угол φ должен быть одинаковым для всех экспериментальных точек. Учитывая уравнение (2), получим постоянство величины l/v_0^2. В самом деле, рассмотрите рис. 1.2. Зависимость $v_0^2(l)$ достаточно близка к линейной.

Найдем тогда угол φ наклона горы. Будем считать углы α и φ близкими между собой и к $\pi/2$. А именно, применим приближения $\sin(\alpha-\varphi) \approx \alpha-\varphi$ и $\cos\varphi = \sin(\pi/2-\varphi) \approx \pi/2-\varphi$. Уравнение (2)

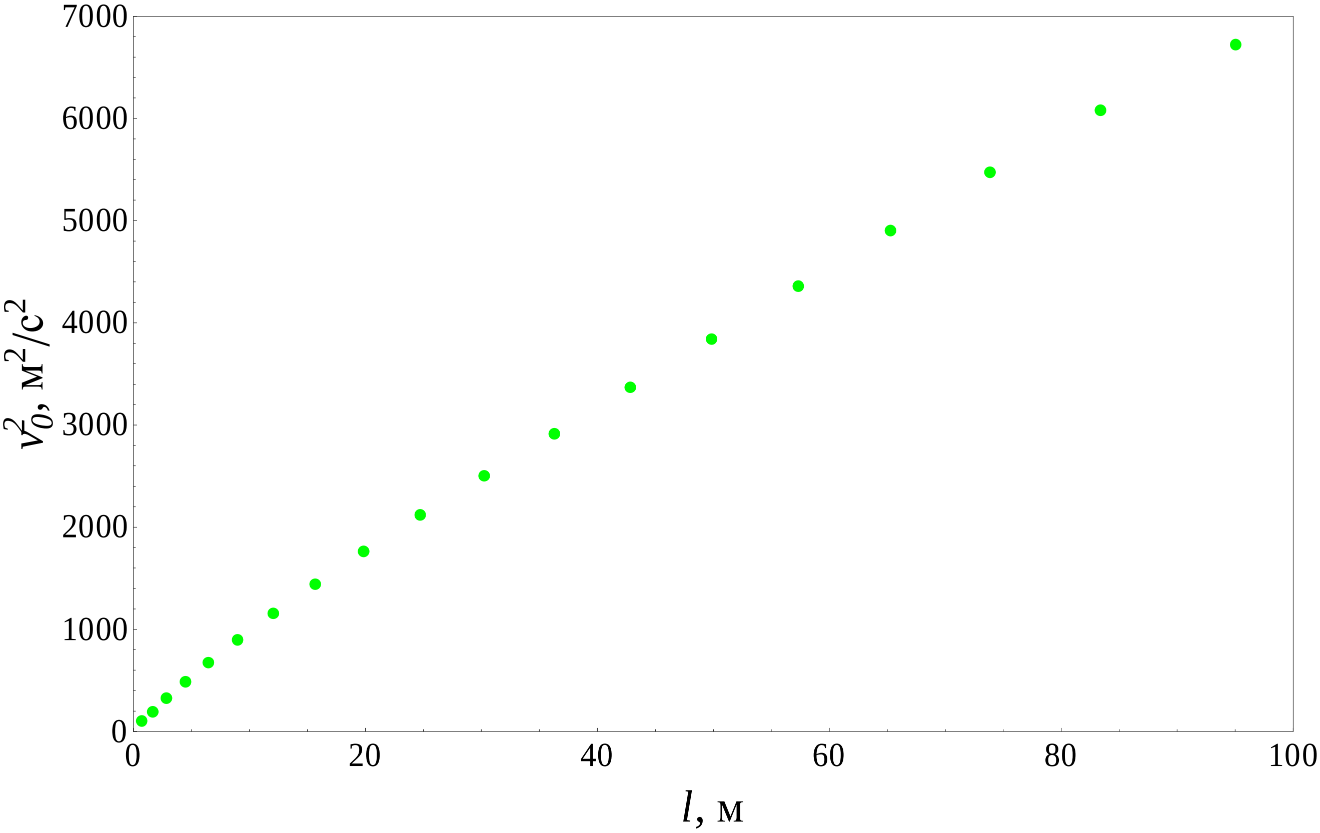

Рис. 1.2. Зависимость квадрата начальной скорости от дальности полета по данным из условия.

примет вид

$$\alpha - \varphi = \frac{gl}{2v_0^2 \cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2,$$

которое легко привести к виду

$$q\varphi^2 - \varphi\,(q\pi - 1) + \left(\frac{q\pi^2}{4} - \alpha\right) = 0, \quad q = \frac{gl}{2v_0^2 \cos\alpha}.$$

Получили квадратное уравнение, корни которого

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2q}\left(q\pi - 1 \pm \sqrt{(q\pi - 1)^2 - q\pi^2 + 4\alpha}\right).$$

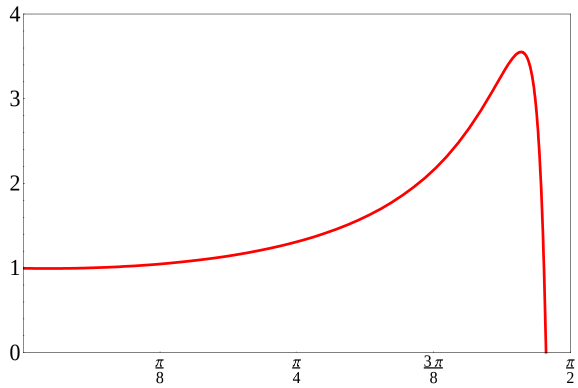

Рис. 1.3. График $y(\varphi) = \sin(\alpha - \varphi)/\cos^2\varphi$, где $\alpha = 1{,}5$ рад.

Во всех случаях искомый корень — с плюсом перед радикалом (второй корень не подходит, так как он не соответствует примененным приближениям). Других корней быть не может. Действительно, рассмотрите рис. 1.3. Функция, изображенная на графике, по уравнению (2) равна $\varepsilon = gl/2v_0^2 \cos\alpha$. Так как все такие величины ε согласно условию меньше 1 (убедитесь сами), то прямая $y = \varepsilon$ пересекает график на рис. 1.3 в единственной точке, близкой к $\pi/2$. В таблице представлены решения этого уравнения для всех случаев, представленных в условии, в порядке их перечисления. Как далее выяснится, ошибка по сравнению с точным решением $\Delta\varphi = 0{,}001°$.

$\varphi,°$	85,7915	85,7645	85,7517	85,7419	85,7326	85,7229	85,7126	85,7018	85,6907
85,6797	85,6695	85,6604	85,6528	85,6466	85,6416	85,6373	85,6328	85,6266	85,6151

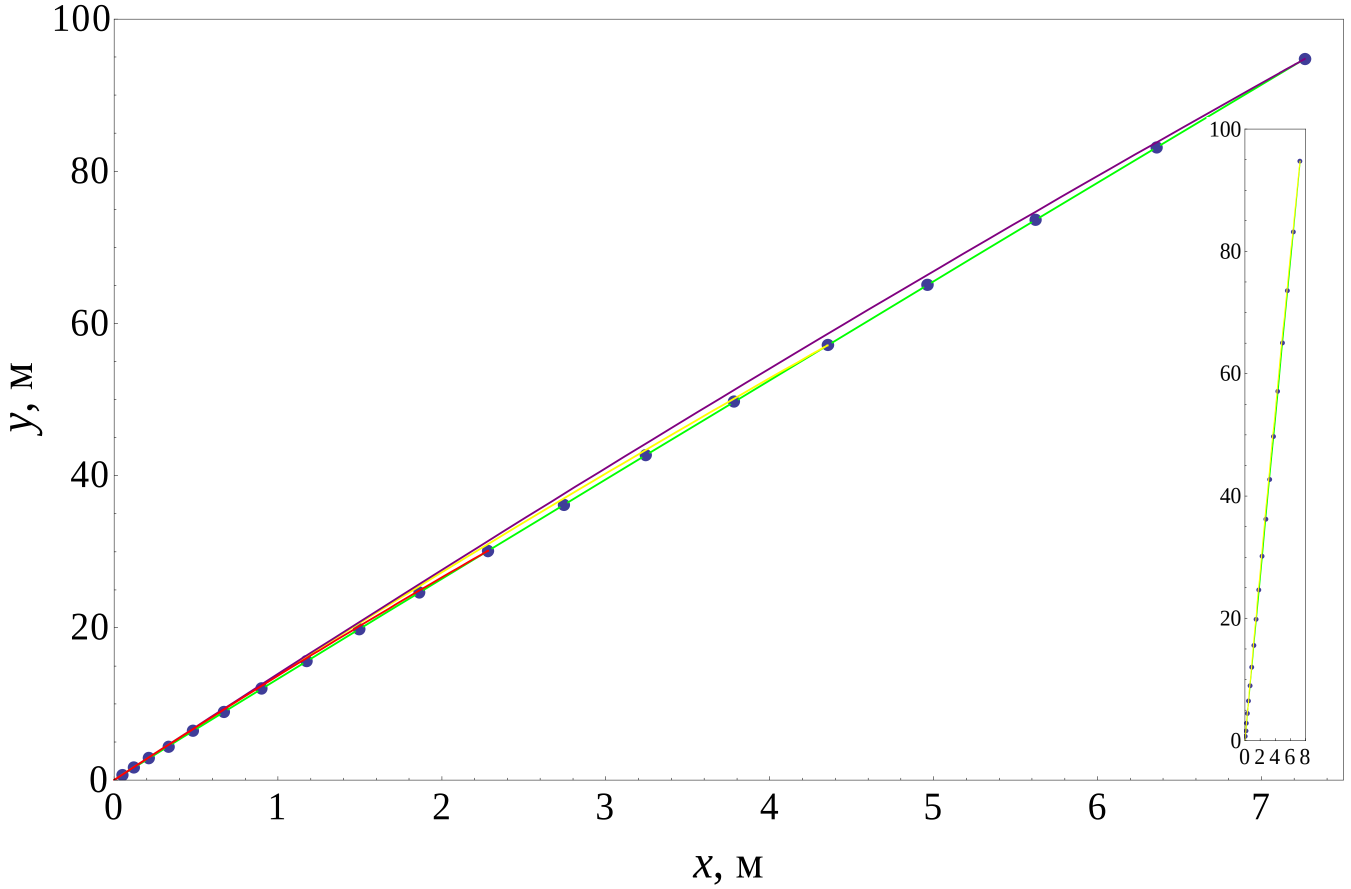

Рис. 1.4. График поверхности горы по точкам (не в масштабе). Зеленым изображена поверхность горы, другими цветами изображены траектории снарядов. Справа приведен график в масштабе.

По полученным данным был построен график[1], см. рис. 1.4. Траектории снарядов кажутся настолько прижатыми к поверхности из-за малой разности углов α и φ.

Наилучшая величина для угла наклона горы — среднее этих величин[2]: $\overline{\varphi} = 85{,}69°$. Отличие этого ответа от полученного точным способом вызвано не ошибкой приближения, а различными методами усреднения. По полученным данным можно утверждать, что гора имеет небольшую выпуклость вверх. Высота горы $H = l_{19} \sin\varphi_{19} = 94{,}7601$ м.

2. *Точное решение.*

Пусть снаряд упал в точке (x, y). Тогда эта пара точек удовлетворяет уравнению (1). Также, из теоремы Пифагора следует уравнение:

$$x^2 + y^2 = l^2. \tag{3}$$

Подставив y из (1) в (3), получим:

$$x^2 \left(1 + \left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right]^2\right) = l^2 \tag{4}$$

Получили уравнение четвертой степени. Ввиду технических сложностей точного решения его решили численно при помощи программы *Mathematica*[3]. Каждому значению x найдено соответствующее значение координаты y в соответствии с уравнением (3). По полученным данным

[1]На самом деле он построен по данным точного решения. Впрочем, невооруженным глазом это различие не заметно.

[2]На самом деле правильно усреднять не углы, а их тангенсы, как во втором случае.

[3]Имеется в виду программа компании Wolfram Research, Inc., см. www.wolfram.com/mathematica

была составлена таблица (ее элементы перечислены в порядке их предоставления в таблице из условия):

x, м	0,0521	0,1196	0,2111	0,3307	0,4822	0,6699	0,8985	1,1720	1,4936	1,8642
y, м	0,7086	1,6150	2,8427	4,4425	6,4631	8,9588	11,9859	15,5953	19,8228	24,6790
x, м	2,2824	2,7445	3,2460	3,7827	4,3534	4,9617	5,6203	6,3601	7,2650	
y, м	30,1442	36,1725	42,7062	49,6967	57,1285	65,0473	73,6058	83,1751	94,7601	

За высоту горы примем высоту наивысшей точки, в которую попал снаряд: $H = 94{,}7601$ м.

Предполагая линейную зависимость $y(x)$, найдем наклон этой горы и оценим его погрешность. Погрешность исходных величин по условию не задана, поэтому их считаем определенными с достаточной точностью. Воспользуемся методом наименьших квадратов. Пусть уравнение поверхности горы имеет вид $y = kx$. Будем минимизировать сумму[4]

$$S = \sum (y_i - kx_i)^2,$$

где суммирование ведется по всем i от 1 до $n = 19$ — количество измерений. Так как единственным параметром является k, то необходимо выполнение условия $dS/dk = 0$. Продифференцировав, получим:

$$\sum 2x_i (y_i - kx_i) = 0,$$

откуда

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}. \tag{5}$$

Погрешность оцениваем по формуле

$$\Delta k \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum (y_i - mx_i)^2}{\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum x_i^2 \sum y_i^2 - \left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2}}. \tag{6}$$

По формулам (5) и (6) получаем $k = 13{,}10 \pm 0{,}01$. Угол наклона горы $\overline{\varphi} = \operatorname{arctg} k = (85{,}636 \pm 0{,}004)^\circ$. Погрешность оцениваем по формуле

$$\Delta\overline{\varphi} = \Delta k \frac{d\overline{\varphi}}{dk} = \frac{\Delta k}{1 + k^2}.$$

Такое резкое уменьшение относительной погрешности связано с тем, что функция арктангенса растет очень медленно при аргументах, близких к $\pi/2$. В ответе приведем значения, полученные точным методом.

Ответ: Высота $H = 94{,}7601$ м, форма близка к наклонной плоскости (с небольшой выпуклостью вверх), образующей угол $\overline{\varphi} = (85{,}636 \pm 0{,}004)^\circ$ с горизонтом.

[4]Метод подробно описан в книге Squires, G.L. *Practical physics.* 4th ed. Cambridge University Press, 2001, см. формулы (4.34) и (4.35)