10кл.

Краткое решение задачи №1

Из условия задачи следует, что исходное число молекул метана равно числу молекул кислорода. Реакция протекает с неполным сгоранием метана – в реакции участвует весь кислород и половина молекул метана. Из уравнения реакции и начальных условий задачи следует, что образовавшееся число молекул воды, равно числу молекул метана в исходной смеси. Выпадение росы на стенках свидетельствует о том, что пар при температуре 100^0 С стал насыщенным, т.е. давление составляет $1*10^5$ Па. Из уравнения $P \cdot V = N \cdot k \cdot T$ получаем число молекул воды.

Отсюда видно, что искомая величина $m = (m_1 + m_2) \cdot N$,

где m_1 – масса молекулы метана, m_2 – масса молекулы кислорода

Или окончательно

$$m = \frac{P_a \cdot V}{R \cdot T} \cdot (\mu_1 + \mu_2),$$

где μ_1 и μ_2 соотвествующие молярные массы

Это соотношение справедливо для предельного случая. В общем случае

$$m \geq \frac{P_a \cdot V}{R \cdot T} \cdot (\mu_1 + \mu_2)$$

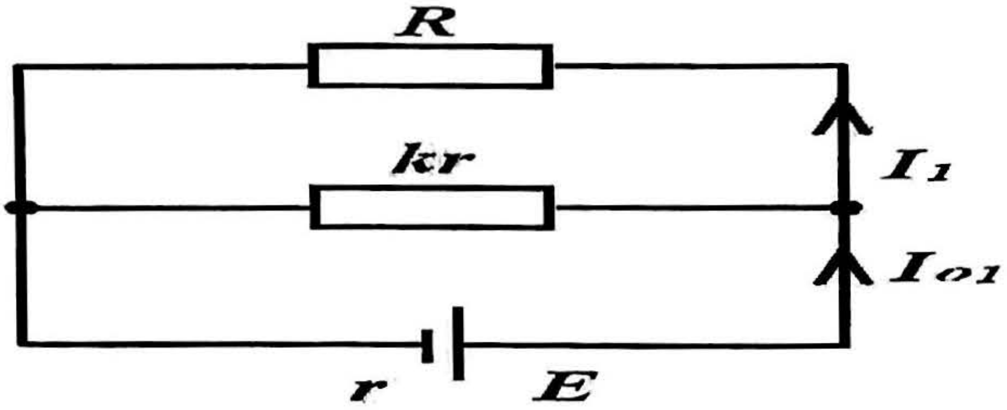
10кл. Задача 2

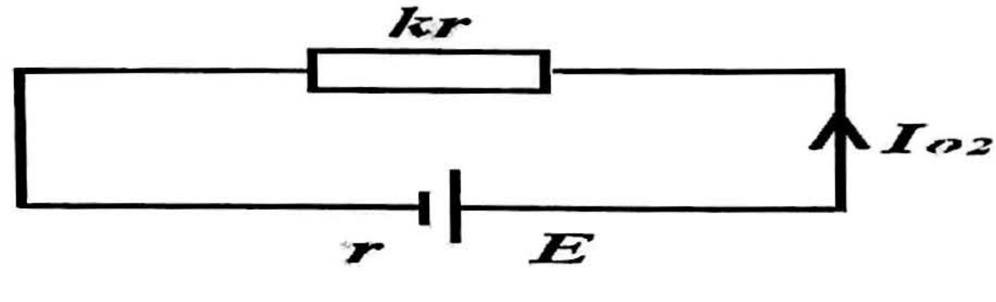
До гальванічного елемента паралельно приєднані два резистори. Опір першого резистора в к разів перевищує опір елемента. А опір другого такий, що при такому з'єднанні на ньому виділяється максимальна теплова потужність. У скільки разів зміниться швидкість розчинення цинкового електроду елемента, якщо від нього відімкнути другий резистор?

Розв'язок.

Із закону Фарадея для електролізу випливає, що швидкість розчинення електрода прямо пропорційна силі струму, що проходить через електроліт. Отже, для відповіді на поставлене питання необхідно знайти відношення сил струмів у двох вказаних у задачі способах приєднання резисторів.

$$n = \frac{I_{0,2}}{I_{0,1}}$$





С початку, знайдемо значення опору резистора R, на якому при даному з'єднанні виділяється максимальна потужність.

Так як резистори з'єднані паралельно, то напруга на них однакова, тоді, з урахуванням законів Ома отримуємо значення сили струму через цей резистор:

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{\varepsilon}{r + \dfrac{R \cdot k \cdot r}{R + k \cdot r}} \\ I_0 \cdot \dfrac{R \cdot k \cdot r}{R + k \cdot r} = I_1 R \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + \dfrac{k+1}{k} R}$$

За законом Джоуля-Ленца:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R\frac{k+1}{k})^2} = \frac{\varepsilon^2}{\frac{r^2}{R} + 2 \cdot r \frac{k+1}{k} + R(\frac{k+1}{k})^2} = \frac{\frac{k+1}{k}\varepsilon^2}{\frac{r^2}{R}\frac{k}{k+1} + 2 \cdot r + R(\frac{k+1}{k})}$$

різниці

Розглянемо знаменник функції потужності та виділимо в ньому повний квадрат.

$$f = \frac{r^2}{R}\frac{k}{k+1} + 2 \cdot r + R\frac{k+1}{k} = \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{(k+1)R}{k}}} + \sqrt{\frac{(k+1)R}{k}}\right)^2 = \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{(k+1)R}{k}}} - \sqrt{\frac{(k+1)R}{k}}\right)^2 + 4 \cdot r$$

Бачимо, що потужність буде максимальною, коли знаменник буде мінімальним, тобто коли значення виразу у дужках дорівнює нулю.

Тоді: $\frac{r}{\sqrt{\frac{(k+1)R}{k}}} - \sqrt{\frac{(k+1)R}{k}} = 0$

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{(k+1)R}{k}}} = \sqrt{\frac{(k+1)R}{k}} \Rightarrow R = \frac{k \cdot r}{k+1}$$

Знаючи значення опорів, отримуємо струми, які йдуть через гальванічній елемент в обох випадках:

$$I_{0,1} = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R \cdot k \cdot r}{R + k \cdot r}} = \frac{\varepsilon}{r(1 + \frac{k}{k+2})} = \frac{\varepsilon(k+2)}{2 \cdot r(k+1)}$$

$$I_{02} = \frac{\varepsilon}{k \cdot r + r} = \frac{\varepsilon}{(k+1) \cdot r}$$

Тоді шукане відношення швидкостей розчинення електродів дорівнює: $n = \frac{I_{0,2}}{I_{0,1}} = \frac{2}{k+2}$.

Прим. Потрібно зауважити, що для знаходження значення опору R, функцію потужності можливо було дослідити на екстремум за допомогою похідної, та отримати той самий результат:

$$P_1 = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R\frac{k+1}{k})^2} \Rightarrow P' = 0, при$$

$$(r + R\frac{k+1}{k})^2 - 2 \cdot R \cdot (r + R\frac{k+1}{k}) \cdot \frac{k+1}{k} = 0$$

$$R = \frac{k \cdot r}{k+1}$$

"Під кутом до горизонту" Дві гармати з двох віддалених точок одночасно роблять постріли. Перша стріляє на південь під кутом 15° до горизонту (швидкість снаряду $v_1 = 800$ м/с). Друга стріляє на схід під кутом 75° до горизонту (швидкість снаряду $v_2 = 400$ м/с). • Визначте відносну швидкість снарядів. • Визначте відстань між гарматами r_0 та мінімальну відстань r_{min}, на яку наблизяться снаряди під час польоту, якщо через час $t_1 = 1$ с після пострілів, відстань між снарядами була $r_1 = 400$ м, через $t_2 = 2$ с після пострілів – $r_2 = 800$ м. Опором повітря, впливом сил інерції, пов'язаних з обертанням Землі, знехтувати.

Розв'язок. Для знаходження величини відносної швидкості $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ можна, наприклад, записати координати векторів у системі координат, вісь OX якої спрямована на південь, вісь OY – на схід, а вісь OZ – вгору: $\vec{v}_1 = (v_1 \cos 15^\circ; 0; v_1 \sin 15^\circ)$, $\vec{v}_2 = (0; v_2 \cos 75^\circ; v_2 \sin 75^\circ)$.

Тоді $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-v_1 \cos 15^\circ; v_2 \cos 75^\circ; v_2 \sin 75^\circ - v_1 \sin 15^\circ)$, а модуль відносної швидкості

$$\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right| = \sqrt{\left(-v_1 \cos 15^\circ\right)^2 + \left(v_2 \cos 75^\circ\right)^2 + \left(v_2 \sin 75^\circ - v_1 \sin 15\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 / 2}.$$

Підставляючи числові дані, знаходимо $\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right| = 800$ м/с. Зазначимо, що відносна швидкість у процесі руху не змінюється, оскільки, за рахунок однакового прискорення, доданки, в які входить час, скорочуються: $\vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = (\vec{v}_2 + \vec{g}t) - (\vec{v}_1 + \vec{g}t) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Це означає, що відносно системи відліку, яка рухається з прискоренням $\vec{g}$, рух снарядів виглядатиме прямолінійним і рівномірним. Для зручності перейдемо у систему відліку першого снаряду. Він весь час буде знаходитись на початку координат, а положення другого снаряду визначатиме вектор $\vec{r} = \vec{r}_0 + \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)t$.

Квадрат цього радіус-вектора $r^2 = r_0^2 + 2r_0\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|t \cos\gamma + \left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|^2 t^2$ дорівнює квадрату відстані між снарядами у довільний момент часу, тобто

$$\begin{cases} r_1^2 = r_0^2 + 2r_0\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right| t_1 \cos\gamma + \left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|^2 t_1^2, \\ r_2^2 = r_0^2 + 2r_0\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right| t_2 \cos\gamma + \left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|^2 t_2^2. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на t_2, друге на t_1 і віднімемо, щоб позбутися кута γ між вектором $\vec{r}_0$, який з'єднує першу гармату з другою, і відносною швидкістю $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ снарядів. Відстань між гарматами (вона ж відстань між снарядами у початковий момент часу):

$$r_0 = \sqrt{\frac{t_2 r_1^2 - t_1 r_2^2}{t_2 - t_1} + \left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|^2 t_1 t_2} = 400\sqrt{6}\ \text{м} \approx 980\ \text{м}.$$

Кут γ тепер знаходиться з виразу $\cos\gamma = -\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$. Для довільного моменту часу t квадрат відстані між снарядами може бути записаний у більш зручному для аналізу вигляді шляхом виділення повного квадрату:

$$r^2 = r_0^2\sin^2\gamma + \left(r_0\cos\gamma + |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| t\right)^2.$$

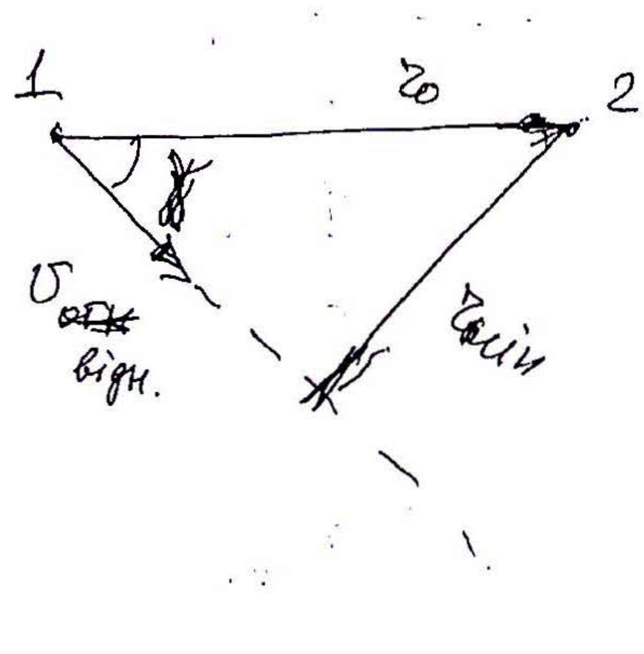
Відстань між снарядами набуває найменшого значення у момент часу

$t = -\dfrac{r_0\cos\gamma}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} = \dfrac{400\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}}{8\cdot 800}\,\text{с} = \dfrac{9}{8}\,\text{с}$, коли повний квадрат у виразі для r^2 дорівнює нулю, а найменша відстань

$$r_{\min} = r_0\sin\gamma = 400\sqrt{6}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2}\ \text{м} = 100\sqrt{15}\ \text{м} \approx 387\ \text{м}.$$

Зазначимо, що незмінність відносної швидкості не обумовлює рівномірний характер зміни відстані, як може здатися на перший погляд. У цьому легко переконатися, якщо уявити автомобіль, який рівномірно проїжджає повз вас. Зміна відстані до нього не рівномірна, хоча його відносна швидкість має стале значення.

На цій ідеї можна побудувати більш наочне розв'язання даної задачі. В системі відліку першого снаряда, другий пролітає повз нього зі швидкістю 800 м/с вздовж деякої прямої. Оскільки за кожну секунду він проходить 800 м, а відстань між снарядами через 1 с руху – 400 м, а через 2 с – 800 м, отримуємо рівнобедрений трикутник (див. Рис.). З цього трикутника відразу знаходимо $r_{\min} = 100\sqrt{15}$ м, а потім $r_0 = 400\sqrt{6}$ м.



ЗАДАЧА 2. Дві відкриті зверху циліндричні посудини різної висоти і однакового діаметра **d** стоять поруч на відстані **x** (рис.1). Нижча посудина порожня, а вища наповнена водою до висоти $\mathbf{H_1}$. Через невеликий отвір A з вищої посудини зливають воду в нижчу до заповнення останньої доверху, тобто до висоти $\mathbf{H_2}$. При заданих $\mathbf{H_1}$ та $\mathbf{H_2}$ значення координати **y** вибрано так, що відстань **x** набуває максимального значення, а значення діаметра **d** при цьому обирається мінімальним. Визначити параметри **y**, **x** та **d**.

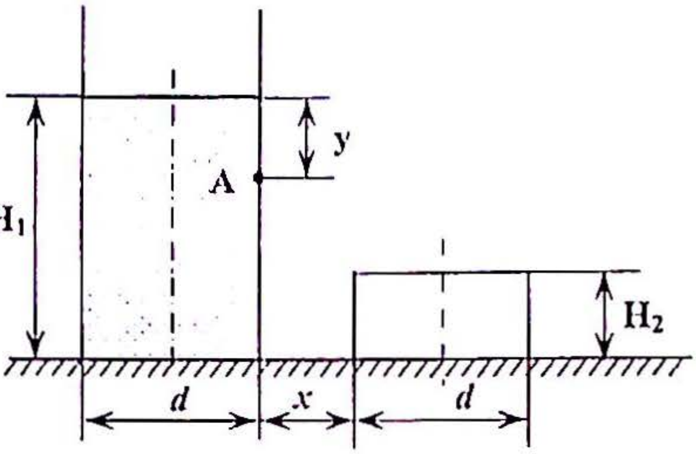


Рис.1

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Струмінь води, що вилітає з отвору, має потрапляти в другу посудину. ~~Так як~~ Оскільки отвір малий, то кінетичною енергією опускання води в посудині можна знехтувати.

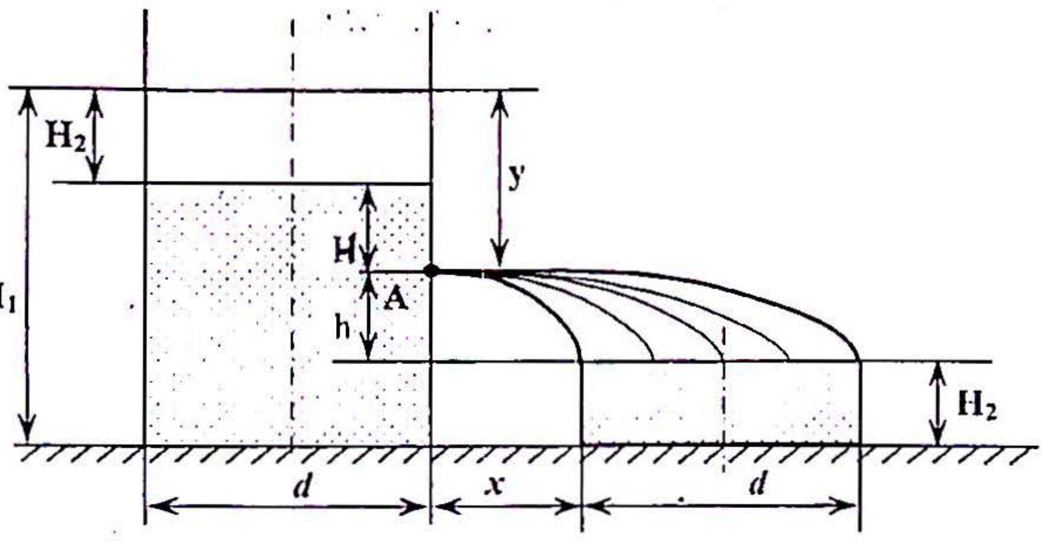


Рис.2

Потенціальна енергія стовпа води висотою H перейде в кінетичну енергію елементарної маси при виході з отвору:

$$mgH = \frac{mv^2}{2}.$$

Швидкість струменя води при виході з отвору

$$v = \sqrt{2gH} \qquad (1)$$

В початковий момент струмінь летить найдальше, а зі зниженням рівня води падає все ближче. Найближчий із струменів, що потрапляють в нижчу

10кл № 4
стр 2

і для нього $V=\sqrt{2g(y}$

посудину, відповідає зниженню рівня води у вищій посудині на **H₂**. Отже, напір води **H** змінюється в межах $y \le H \le$ ~~$H_1 - H_2$~~ $y - H_2$.

Дальність польоту струменя

$$S = vt\,. \tag{2}$$

При падінні елементарна маса струменя змінює висоту на величину

$$h = H_1 - H_2 - y\,. \tag{3}$$

~~Так як~~ час вільного падіння елементарної маси

$$t = \sqrt{\frac{2(H_1 - H_2 - y)}{g}}, \tag{4}$$

то дальність польоту найближчого струменя ~~при довільному H~~ дорівнює

$$S = 2\sqrt{(y - H_2)(H_1 - H_2 - y)}\,. \tag{5}$$

Значення **y** треба вибрати таким, щоб в кінцевий момент, коли $x = S$, значення **S** було максимальним. Під коренем відносно **y** маємо рівняння параболи, гілки якої направлені вниз. Корені параболи $y_1 = H_2$, $y_2 = H_1 - H_2$. Тому максимальне значення **S**, яке дорівнює **x**, буде при

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{H_1}{2}. \tag{6}$$

Отже, згідно (5) найбільша відстань між посудинами

$$x = 2\sqrt{\left(\frac{H_1}{2} - H_2\right)\left(H_1 - H_2 - \frac{H_1}{2}\right)} = H_1 - 2H_2\,. \tag{7}$$

При цьому має виконуватись умова $\frac{H_1}{2} \succ H_2$, інакше повністю наповнити нижчу посудину неможливо.

Вибором параметра **d** забезпечимо потрапляння струменя в нижчу посудину в початковий момент зливу. В цьому випадку напір води $H = y = \frac{H_1}{2}$, тому

$$S_0 = 2\sqrt{\frac{H_1}{2}\left(H_1 - H_2 - \frac{H_1}{2}\right)} = \sqrt{H_1(H_1 - 2H_2)}\,.$$

Таким чином, мінімальний діаметр

$$d = S_0 - x = \sqrt{H_1(H_1 - 2H_2)} - (H_1 - 2H_2)\,. \tag{8}$$

Відповідь: $y = \frac{H_1}{2}$; $x = H_1 - 2H_2$; $d = \sqrt{H_1(H_1 - 2H_2)} - (H_1 - 2H_2)$ за умови, що $\frac{H_1}{2} \succ H_2$.

С авторским решением согласны

[signature] /Гелинов Ю.Г./

[signature] /Дюкарева .../

Завдання (9-10 класи)

У нашій лабораторії в холодильнику при температурі 0 °C зберігається посудина з льодом. Коли ми дістаємо його з холодильника, він покривається крапельками сконденсованої вологи («запотіває»).

Було помічено, що маса води, яка конденсується на стінках посудини, до моменту, коли весь лід розтане, залежить від температури повітря в кімнаті. Якщо температура повітря дорівнює 20 °C, то конденсується 22 грами води. А якщо температура повітря підвищується до 30 °C, то тільки 16,5 грама води. При цьому абсолютна вологість повітря (маса молекул води, що міститься в 1 $м^3$ повітря) у нашій лабораторії завжди та сама.

Чому дорівнює маса льоду в посудині?

Питома теплота плавлення льоду дорівнює $3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, питома теплота пароутворення води $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Завдання вирішити в припущенні, що конвекції немає і потік тепла від повітря кімнати на стінки посудини прямо пропорційний різниці температур, теплоємністю посудини зневажити.

Розв'язання

Посудина з льодом одержує тепло за рахунок двох процесів: за рахунок теплопровідності повітря і за рахунок конденсації дифундувальних на стінки посудини молекул води (саме результат другого процесу ми бачимо, коли холодні предмети «запотівають»).

Кількість тепла, яке посудина з льодом одержує за рахунок теплопровідності повітря, прямо пропорційна різниці температур між повітрям і льодом і часу процесу. Тому ми можемо записати:

$$Q_{тепл} = \alpha \cdot \Delta t \cdot t ,$$

де α - невідомий коефіцієнт.

Потік молекул води за рахунок дифузії на стінки посудини постійний (за умовою задачі), тому маса сконденсованої води прямо пропорційна часу процесу $m = \beta \cdot t$, де β - другий невідомий коефіцієнт. Установивши це, ми можемо зробити найголовніше – пов'язати час танення льоду в першому і другому випадках:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1}{m_2} .$$

Запишемо рівняння балансу тепла для двох випадків танення льоду ($\Delta t_1 = 20\,°C$ і $\Delta t_2 = 30\,°C$):

$$\begin{cases} \alpha \cdot \Delta t_1 \cdot t_1 + L \cdot m_1 = \lambda \cdot M, \\ \alpha \cdot \Delta t_2 \cdot t_2 + L \cdot m_2 = \lambda \cdot M. \end{cases}$$

Перепишемо їх у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha \cdot \Delta t_1 \cdot t_1 = \lambda \cdot M - L \cdot m_1, \\ \alpha \cdot \Delta t_2 \cdot t_2 = \lambda \cdot M - L \cdot m_2, \end{cases}$$

і розділимо одне на інше. Одержимо для невідомої маси льоду рівняння:

$$\frac{\Delta t_1 \cdot m_1}{\Delta t_2 \cdot m_2} = \frac{\lambda \cdot M - L \cdot m_1}{\lambda \cdot M - L \cdot m_2} .$$

Звідки для маси льоду в посудині одержуємо:

$$M = \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (\Delta t_2 - \Delta t_1)}{m_2 \cdot \Delta t_2 - m_1 \cdot \Delta t_1} = 460\ г .$$

Відповідь: маса льоду в посудині дорівнює 460 грам.