1. Если считать соударение пакета с резервуаром абсолютно неупругим, то получим, что существует множество способов забросить пакет на вершину. Разумно среди них найти такой способ, при котором модуль начальной скорости минимален. В этом предельном случае потери энергии при ударе пакета о сферу не происходит, так как радиальная составляющая скорости равна нулю. Воспользуемся принципом обратимости в механике. Пусть по какой-либо причине пакет, находящийся на вершине сферы, начал сползать. В некоторый момент времени он оторвется от нее, при этом сила реакции опоры станет равна нулю. Найдем угол α между вертикалью и радиальным направлением на пакет. Его скорость в момент отрыва $v_1 = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление:

$$mg\cos\alpha = \frac{mv_1^2}{R},$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Тогда горизонтальная составляющая скорости $v_{1x} = v_1\cos\alpha = \sqrt{8gR/27}$, а вертикальная составляющая $v_{1z} = -v_1\sin\alpha = -\sqrt{10gR/27}$. Вблизи поверхности Земли полная скорость $v_2 = \sqrt{4gR}$, при этом ее горизонтальная составляющая $v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{8gR/27}$. Тогда вертикальная составляющая

$$v_{2z} = -\sqrt{v_2^2 - v_{2x}^2} = -10\sqrt{\frac{gR}{27}}.$$

Время свободного падения

$$T = \frac{|v_{2z} - v_{1z}|}{g} = \sqrt{\frac{10R}{27g}}\left(\sqrt{10} - 1\right).$$

Угол φ между горизонталью и вектором скорости $\vec{v}_2$ можно найти из соотношения $\operatorname{tg}\varphi = |v_{2z}/v_{2x}|$. Он равен

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{2}} \approx 74{,}2°.$$

Расстояние от нижней точки сферы до точки падения

$$L = R\sin\varphi + v_{1x}T = \frac{5R}{27}\left(\sqrt{5} + 4\sqrt{2}\right) \approx 1{,}46R.$$

2. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$ – зависимости напряжений на конденсаторах от времени, $i(t)$ – зависимость тока через катушку от времени (положительное направление тока – слева направо, положительное напряжение на конденсаторе – с плюсом слева). Продифференцировав уравнение $Q = CU$ по времени для обоих конденсаторов, получим:

$$\begin{cases} C_1 u_1'(t) = -i(t), \\ C_2 u_2'(t) = -i(t). \end{cases}$$

Так как активное сопротивление в цепи отсутствует, то суммарное напряжение на конденсаторе равно ЭДС самоиндукции. Имеем уравнение:

$$u_1(t) + u_2(t) = Li'(t).$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений с учетом начальных условий $i(0) = 0$, $u_1(0) = U_0$, $u_2(0) = 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} u_1(t) = U_0 - \dfrac{I(1-\cos(\omega t))}{\omega C_1} = U_0 \dfrac{C_1 + C_2 \cos\left(\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}t\right)}{C_1 + C_2}, \\ u_2(t) = -\dfrac{I(1-\cos(\omega t))}{\omega C_2} = -U_0 \dfrac{C_1\left(1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}t\right)\right)}{C_1 + C_2}, \\ i(t) = I\sin(\omega t) = U_0\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{(C_1+C_2)L}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}t\right), \end{cases}$$

где $\omega = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$ – частота колебаний, $I = \frac{U_0}{\sqrt{L\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}}$ – амплитуда тока (полуразность максимального и минимального значений). Наибольшее напряжение на втором конденсаторе (по модулю)

$$U_2 = \frac{2I}{\omega C_2} = U_0\frac{2C_1}{C_1 + C_2}.$$

Численно $I = 0{,}19$ А, $U_2 = 15$ В.

3. В данной оптической системе источник S формирует последовательность изображений: $S \to S_1$ в линзе, $S_1 \to S_2$ в сфере, $S_2 \to S_3$ в линзе. Воспользуемся обратимостью световых лучей. Так как изображение S_3 совпадает с источником S, то совпадают и изображения S_1 и S_2. Найдем, при каких условиях такое может произойти. Формула выпуклого сферического зеркала имеет вид:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{2}{R},$$

где f отсчитано радиально от точки падения луча на сферу вовнутрь нее, а d – в противоположном направлении. При условии $d = -f$ уравнение имеет два решения: $f = R$ и $d = -R$, а также менее очевидное асимптотическое решение $d = f = 0$. В первом случае изображения окажутся в центре сферы (все лучи отразятся от поверхности сферы перпендикулярно ей), а во втором – на ее поверхности. Тогда для искомого расстояния x от источника до линзы имеем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{F}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{d-R} = \dfrac{1}{F}, \end{array}\right.$$

решения которой

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{dF}{d-F}, \\ x = \dfrac{(d-R)F}{d-R-F}. \end{array}\right.$$

Первое решение существует при $d > F$, а второе – при $d > R + F$.

4. Рассмотрим движение заряженных частиц внутри конденсатора в установившемся случае. Пусть напряженность электрического поля внутри конденсатора E. Заряженные частицы (электроны и ионы) движутся так, что за одинаковые

промежутки времени на пластины конденсатора попадает их одинаковое количество. При этом эти частицы движутся слева направо (тока это не создает, так как и положительные, и отрицательные частицы движутся вместе), а также в перпендикулярном направлении – положительные вверх, отрицательные вниз. Плотность тока в конденсаторе

$$j = \frac{I}{S} = \frac{Ed}{RS},$$

где I – полный ток. Здесь нельзя использовать закон Ома $E = j\rho$ в связи с наличием внешнего магнитного поля. Так как скорость упорядоченного движения электронов при разумных значениях переменных миллископическая, а скорость движения жидкости порядка $1\ \text{м/с}$, то можно считать, что заряженные частицы движутся почти по прямой слева направо. Тогда из равенства электрической и магнитной сил, действующих на заряженную частицу, имеем $E = Bv$. Сила тока в цепи

$$I = \frac{Bvd}{R}.$$

Полезная мощность

$$P_{\text{eff}} = I^2 R = \frac{B^2 v^2 d^2}{R}.$$

Полная мощность

$$P = I^2\left(R + \frac{\rho d}{S}\right) = \frac{B^2 v^2 d^2}{R^2}\left(R + \frac{\rho d}{S}\right).$$

Соответственно, КПД генератора

$$\eta = \frac{P_{\text{eff}}}{P} = \left(1 + \frac{\rho d}{RS}\right)^{-1}.$$

По аналогии с законом Ома для полной цепи, можно ввести ЭДС ε и внутреннее сопротивление r генератора:

$$\varepsilon = Bvd\left(1 + \frac{\rho d}{RS}\right),$$

$$r = \frac{\rho d}{S}.$$