Задача № 2

<u>Условие</u>: Шар массой $2m$ бросают вертикально вверх со скоростью v_0. К шару привязана легкая абсолютно жесткая нить длиной[1] $l < v_0^2/2g$, к другому концу которой привязан шар массой m. Через какое время t и на какой высоте h шары столкнутся?

<u>Решение</u>: Рассмотрим движение шаров до столкновения. Вначале первый (тяжелый) шар движется вверх равнозамедленно, а второй (легкий) покоится. Когда тяжелый шар достигнет высоты l, нить натянется, и произойдет "удар" через нить (то, что он достигнет этой высоты, следует из предположения в условии). Непосредственно перед этим его скорость $u_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$. Дальнейшее сильно зависит от свойств нити и шаров, например от жесткости и упругости нити и модуля Юнга вещества шаров. Разберем два крайних случая: абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара.

1. *Абсолютно упругий удар.* В этом случае в результате удара сохраняются и импульс, и энергия. Скорости u_1 и u_2 шаров непосредственно после него определяются соответствующими законами сохранения:

$$\begin{cases} 2mu_0 = 2mu_1 + mu_2, \\ mu_0^2 = mu_1^2 + \dfrac{mu_2^2}{2}. \end{cases}$$

Эти уравнения легко привести к виду:

$$2u_0 = 2u_1 + u_2, \tag{1}$$
$$2u_0^2 = 2u_1^2 + u_2^2. \tag{2}$$

Выразим u_2 из (1)

$$u_2 = 2(u_0 - u_1)$$

и подставим в (2):

$$2u_0^2 = 2u_1^2 + 4(u_0 - u_1)^2 \Leftrightarrow 3u_1^2 - 4u_0u_1 + u_0^2 = 0.$$

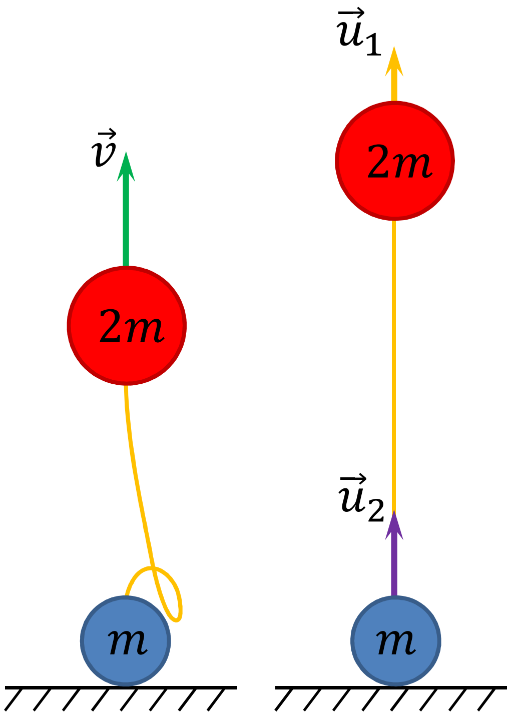

Рис. 2.1. Слева изображен момент до "удара". Справа — момент непосредственно после него.

Решения этого квадратного уравнения

$$u_1 = \frac{2u_0 \pm \sqrt{4u_0^2 - 3 \cdot u_0^2}}{3}; \qquad u_1 = u_0, \quad u_1 = \frac{u_0}{3}.$$

Первый корень не подходит, он соответствует случаю отсутствия удара (очевидно, законы сохранения при этом выполняются, в реальности это выглядит как прохождение шаров сквозь друг друга). Тогда $u_1 = u_0/3$ и $u_2 = 2(u_0 - u_1) = 4u_0/3$.

После такого перераспределения скоростей оба шара будут двигаться вниз с ускорением g. Перейдем в систему отсчета, связанную с легким шаром. В этой системе отсчета тяжелый шар движется равномерно со скоростью $u_2' = u_1 - u_2 = -u_0$ (вниз). Так как начальное расстояние между шарами l, то время между моментом максимального расстояния между шарами и моментом столкновения $t_2 = l/u_0$.

[1] В исходном условии в формуле было $l < v_0/2g$, что, очевидно, неверно из соображений размерности.

Найдем время t_1 между началом движения и моментом максимального расстояния между шарами. По формуле равноускоренного движения

$$v_0 - u_0 = gt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 - u_0}{g}. \tag{3}$$

Искомое время

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 - u_0}{g} + \frac{l}{u_0} = \frac{v_0 - u_0}{g} + \frac{v_0^2 - u_0^2}{2gu_0} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{-3p^2 + 2p + 1}{2p}, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{u_0}{v_0} = \sqrt{1 - \frac{2gl}{v_0^2}}, \quad 0 < p < 1.$$

Найдем высоту, на которой произошло столкновение, при помощи уравнения движения легкого шара. Этот шар двигался вверх равнозамедленно с ускорением g и начальной скоростью $u_2 = 4u_0/3$ в течение времени t_2. По формуле равноускоренного движения

$$h = u_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{4l}{3} - \frac{gl^2}{2u_0^2} = l\left(\frac{4}{3} - \frac{v_0^2 - u_0^2}{4u_0^2}\right) = l\left(\frac{4}{3} - \frac{1 - p^2}{4p^2}\right) = l \cdot \frac{19p^2 - 3}{12p^2}. \tag{5}$$

Выражение, определяемое формулой (5), в принципе может быть меньше нуля. Это соответствует случаю, когда легкий шар столкнется с опорой перед столкновением с тяжелым шаром. Таких столкновений в принципе может быть сколь угодно много. Найдем время и место столкновения шаров в общем случае, считая столкновения легкого шара с опорой абсолютно упругими. Так как при соударении с опорой шар изменяет свою скорость на $2u_2$ в направлении другого шара, то в выбранной нами СО это выглядит, как будто тяжелый шар мгновенно увеличивает скорость на те же $2u_2$. Такие увеличения повторяются через промежуток времени $\Delta t = 2u_2/g = 8u_0/3g$.

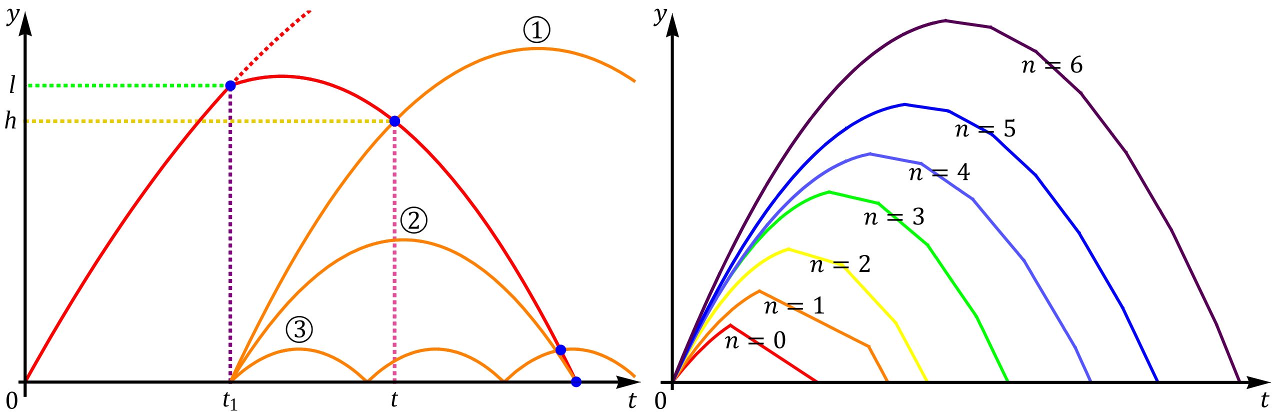

Рис. 2.2. Схематический график зависимости вертикальной координаты $y(t)$ шаров от времени для случая абсолютно упругого столкновения. Слева — в лабораторной системе отсчета. График зависимости координаты тяжелого шара от времени изображен красным, а легкого — оранжевым. Качественно выделено три сценария: в первом из них легкий шар столкнулся с тяжелым перед столкновением с опорой, во втором легкий столкнулся с опорой и с тяжелым одновременно, в третьем он успел столкнуться с опорой $n = 2$ раза перед столкновением с тяжелым. Справа — в системе отсчета, связанной с легким шаром, показан только для тяжелого. Показано семь вариантов по n от 0 до 6. Изгибы обозначают столкновения легкого шара с опорой. В случае абсолютно неупругого столкновения выглядит также, только в нем первое звено ломаной горизонтально.

Найдем количество n таких полных промежутков до столкновения (оно равно количеству столкновений легкого шара с опорой). Путь, пройденный (тяжелым) шаром в течение первого промежутка времени $l_1 = u_0\Delta t$, в течение 2-го промежутка $l_2 = (u_0 + 2u_2)\,\Delta t$, ..., в течение n-го промежутка $l_n = (u_0 + 2\,(n-1)\,u_2)\,\Delta t$. Полный путь за это время

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = nu_0\Delta t + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2u_2\Delta t = \frac{32n^2u_0^2}{9g} - \frac{8nu_0^2}{9g} = \frac{8u_0^2}{9g}\left(4n^2 - n\right). \tag{6}$$

Необходимо найти такое n, что $L_n \leqslant l$, но $L_{n+1} > l$. Для этого решим уравнение $L_n = l$ относительно n:

$$l = \frac{8u_0^2}{9g}\left(4n^2 - n\right) \Leftrightarrow 4n^2 - n - \frac{9gl}{8u_0^2} = 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1}{8}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{18gl}{u_0^2}}\right). \tag{7}$$

Если положительный корень n_1 этого уравнения (с плюсом перед радикалом) целый, то он и есть искомым числом. Действительно, $L_{n_1} = l$ по уравнению, а также, очевидно, $L_{n_1+1} > L_{n_1} = l$. Если же он нецелый, то искомое число — целая часть n_1 (обозначим ее $\lfloor n_1 \rfloor$). Это легко видеть из следующих соображений: так как функция $f(x) = \dfrac{8u_0^2}{9g}\left(4x^2 - x\right)$ возрастает при положительных аргументах, больших 1, и $\lfloor n_1 \rfloor \leqslant n_1 < \lfloor n_1 \rfloor + 1$, то $f\left(\lfloor n_1 \rfloor\right) \leqslant f(n_1) < f\left(\lfloor n_1 \rfloor + 1\right)$. Учитывая уравнения (6) и (7), получим $L_n \leqslant l < L_{n+1}$.

Найденную величину можно записать в безразмерном виде через коэффициент p:

$$n = \left\lfloor \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\left(v_0^2 - u_0^2\right)}{u_0^2}}\right)\right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\left(1 - p^2\right)}{p^2}}\right)\right\rfloor.$$

В течение времени $n\Delta t$ шар пройдет расстояние L_n, определяемое формулой (6). Оставшееся расстояние

$$\Delta l = l - L_n = l - \frac{8u_0^2}{9g}\left(4n^2 - n\right)$$

шар пройдет со скоростью $u_0 + 2nu_2$. Потраченное на это время

$$t_2 = \frac{\Delta l}{u_0 + 2nu_2} = l \cdot \frac{1 - \dfrac{8u_0^2}{9gl}\left(4n^2 - n\right)}{u_0\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)} = \frac{v_0}{g}\cdot\frac{1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(4n-1)\right)}{2p\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)}. \tag{8}$$

Полное время с учетом формул (3) и (8)

$$t = t_1 + n\Delta t + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \left(\frac{8n}{3} - 1\right)p + \frac{1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(4n-1)\right)}{2p\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)}\right). \tag{9}$$

Из формулы равноускоренного движения с учетом формулы (8) находим высоту, на которой произошло столкновение:

$$h = u_2t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = l \cdot \frac{1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(4n-1)\right)}{\left(1 - p^2\right)\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)}\left(\frac{4}{3} - \frac{1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(4n-1)\right)}{4p^2\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)}\right). \tag{10}$$

Можно убедиться, что при $n = 0$ формулы (9) и (10) переходят в (4) и (5) соответственно, а при $p = \sqrt{\frac{3}{19}}$ соответствующие выражения равны при $n = 0$ и $n = 1$.

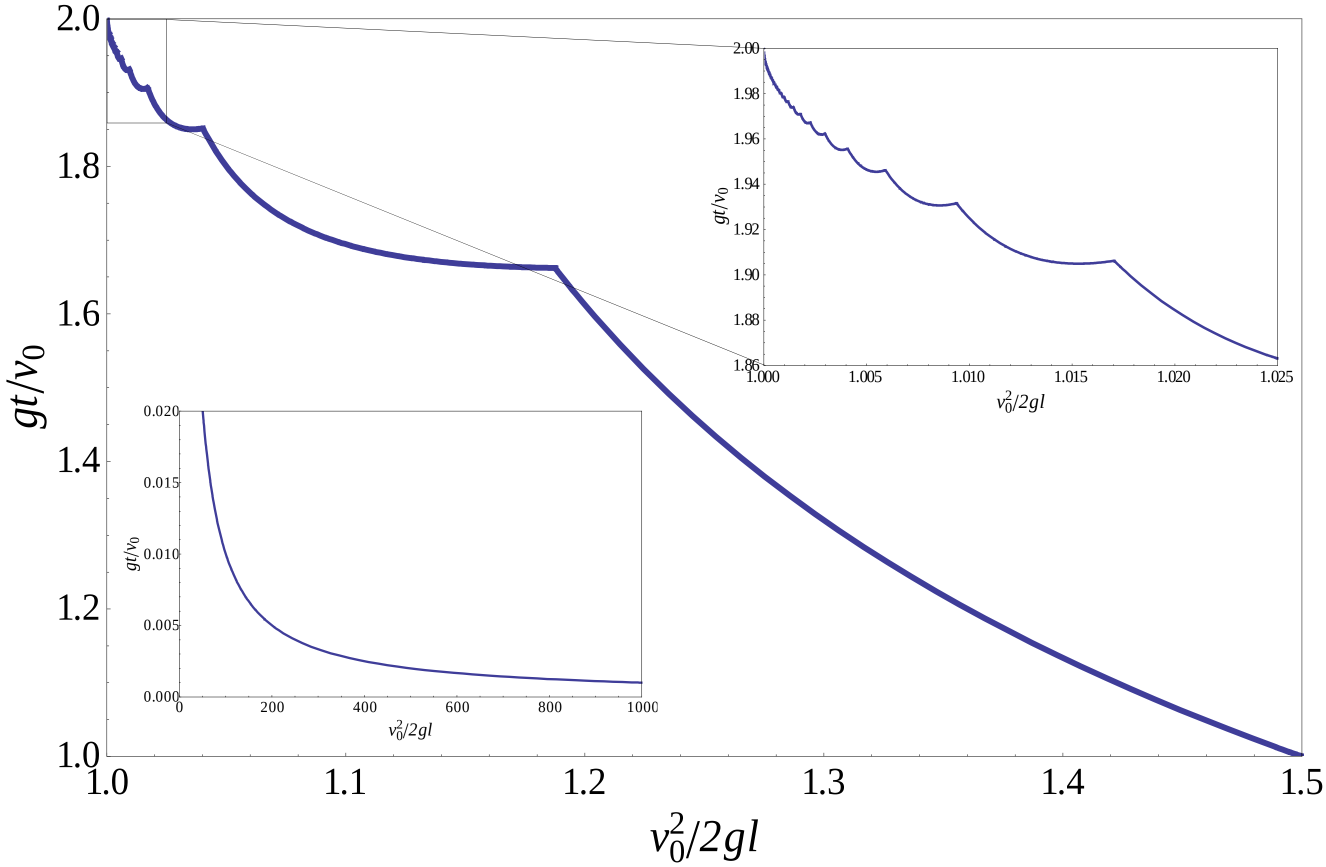

Рис. 2.3. Зависимость безразмерного времени от характерной величины $k = \left(1 - p^2\right)^{-1} = v_0^2/2gl$. График имеет изломы, так как функция содержит в себе целую часть числа (разрывов быть не может, так как они означали бы резкое изменение промежутка времени при малом изменении параметров, например p). При k, близком к 1, слева вблизи очередного излома функция иногда становится возрастающей. Это можно объяснить так: при увеличении, например, начальной скорости, увеличиваются скачки скорости, но увеличивается и их период, что может привести к локальному увеличению времени. При $k \to 1$ время стремится к 2, а при $k \to \infty$ — к нулю (более того, даже размерное время стремится к нулю).

2. *Абсолютно неупругий удар.* В этом случае сохраняется импульс, но не энергия. Скорости же шаров уравниваются: $u_1 = u_2$ (обозначения прежние). С учетом уравнения (1) получим $u_1 = u_2 = 2u_0/3$.

Проанализируем далее движение шаров, как в предыдущем случае. Единственное отличие от него в том, что легкий шар неизбежно ударится об опору перед столкновением с тяжелым шаром (соответственно, $n \geqslant 1$). Перейдем, как и в первом случае, в систему отсчета, связанную с легким шаром. В ней непосредственно после “удара” через нить (тяжелый) шар неподвижен. Движение начинается после удара легкого шара об опору. Такие удары будут повторяться вплоть до столкновения шаров с периодом $\Delta t = 2u_2/g = 4u_0/3g$, причем в результате каждого удара скорость шара будет увеличиваться на $2u_2$.

Найдем количество n полных промежутков времени, как в предыдущем случае. Путь, пройденный шаром за первый промежуток времени $l_1 = 0$, в течение 2-го промежутка $t_2 = 2u_2\Delta t$, …, в течение n-го промежутка $l_n = 2(n-1)u_2\Delta t$. Полный путь

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = n(n-1)u_2\Delta t = \frac{8u_0^2}{9g}n(n-1). \tag{11}$$

Решим уравнение $L_n = l$ относительно n:

$$l = \frac{8u_0^2}{9g}n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - n - \frac{9gl}{8u_0^2} = 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9gl}{2u_0^2}}\right).$$

Искомая величина $n = \lfloor n_1 \rfloor$ (доказательство см. в первом случае). В безразмерном виде это выглядит как

$$n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\left(1-p^2\right)}{4p^2}}\right) \right\rfloor.$$

В течение времени $n\Delta t$ шар пройдет расстояние L_n, определяемое формулой (11). Оставшееся расстояние

$$\Delta l = l - L_n = l - \frac{8u_0^2}{9g}n(n-1)$$

шар пройдет со скоростью $2nu_2$. Потраченное на это время

$$t_2 = \frac{\Delta l}{2nu_2} = l \cdot \frac{1 - \dfrac{8u_0^2}{9gl}n(n-1)}{\dfrac{4n}{3}u_0} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{8pn}. \tag{12}$$

Полное время с учетом формул (3) и (12)

$$t = t_1 + n\Delta t + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \left(\frac{4n}{3} - 1\right)p + \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{8pn}\right). \tag{13}$$

Из формулы равноускоренного движения с учетом формулы (12) находим высоту, на которой произошло столкновение:

$$h = u_2t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = l \cdot \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{4n\left(1-p^2\right)}\left(\frac{2}{3} - \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{16p^2n}\right). \tag{14}$$

Этот результат похож на полученный в первом случае: сравните формулы (13), (14) и (9), (10).

В наиболее простом случае при $n = 1$ получим:

$$t = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{-p^2 + 24p + 9}{24p}, \qquad h = l \cdot \frac{3\left(41p^2 - 9\right)}{192p^2}.$$

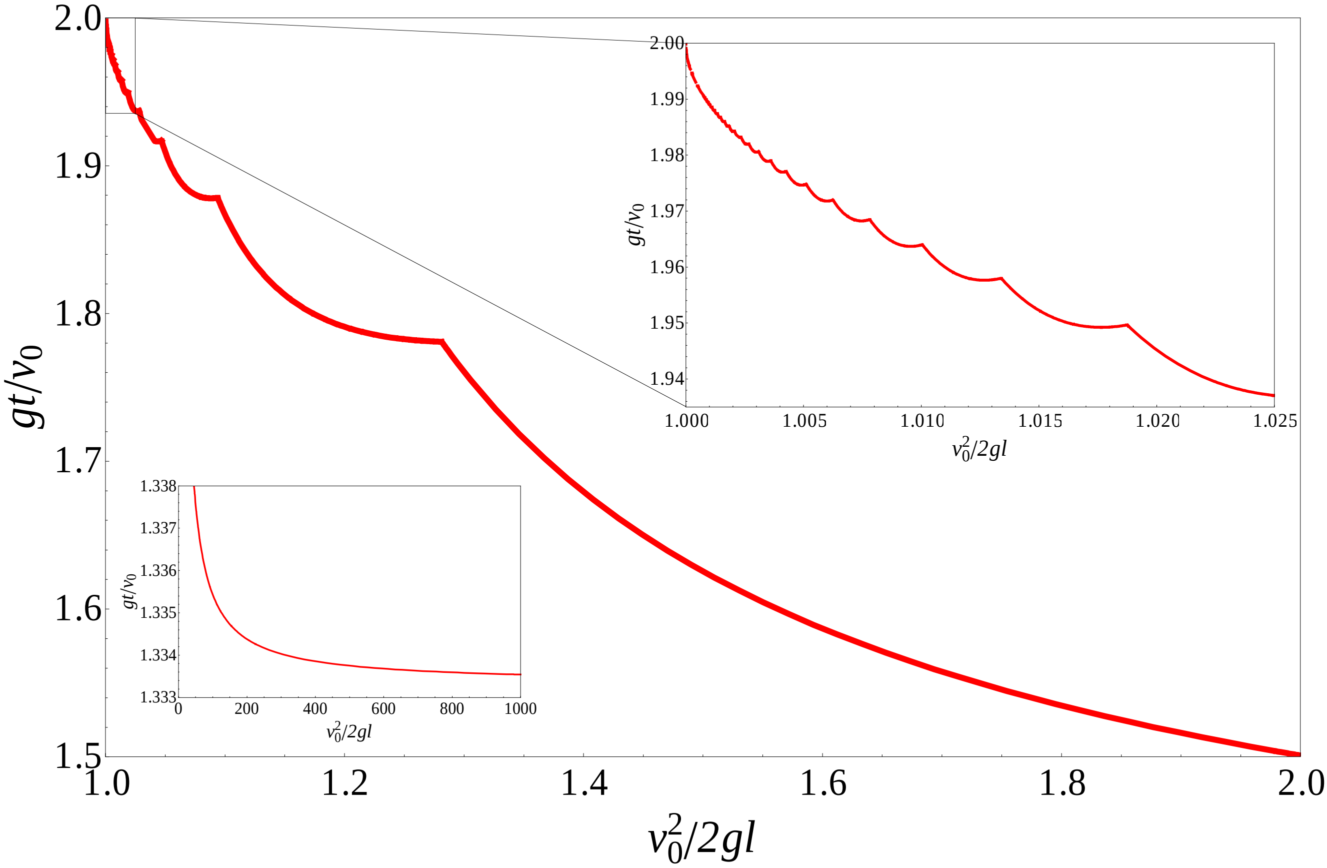

Рис. 2.4. Зависимость безразмерного времени от характерной величины $k = \left(1 - p^2\right)^{-1} = v_0^2/2gl$ (сравните с рис. 2.3). При $k \to 1$ безразмерное время стремится к 2, как в предыдущем случае. При $k \to \infty$ время стремится к $4/3$ (в предыдущем случае — к нулю), а размерное время — к бесконечности.

<u>Ответ</u>: 1. При абсолютно упругом ударе $t = \dfrac{v_0}{g}\left(1 + \left(\dfrac{8n}{3} - 1\right)p + \dfrac{1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(4n-1)\right)}{2p\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)}\right)$ и

$$h = l \cdot \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9}n(4n-1)\right)}{(1-p^2)\left(\frac{8n}{3} + 1\right)}\left(\frac{4}{3} - \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9}n(4n-1)\right)}{4p^2\left(\frac{8n}{3} + 1\right)}\right),$$ где

$n = \left\lfloor \dfrac{1}{8}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{9\left(1-p^2\right)}{p^2}}\right)\right\rfloor$ и $p = \sqrt{1 - \dfrac{2gl}{v_0^2}}$. Если не учесть столкновения легкого шара с опорой, то $n = 0$ и формулы приобретают вид $t = \dfrac{v_0}{g} \cdot \dfrac{-3p^2 + 2p + 1}{2p}$ и $h = l \cdot \dfrac{19p^2 - 3}{12p^2}$.

2. При абсолютно неупругом ударе $t = \dfrac{v_0}{g}\left(1 + \left(\dfrac{4n}{3} - 1\right)p + \dfrac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{8pn}\right)$ и

$l \cdot \dfrac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{4n\left(1-p^2\right)}\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3\left(1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{16p^2 n}\right)$. В наиболее простом случае при $n = 1$ получим $t = \dfrac{v_0}{g} \cdot \dfrac{-p^2 + 24p + 9}{24p}$ и $h = l \cdot \dfrac{3\left(41p^2 - 9\right)}{192p^2}$.