

## Вопросы по курсу математического анализа, 10 класс, 2015

1. Аксиоматика множества действительных чисел. Понятие непротиворечивости и категоричности системы аксиом.
2. Различные формулировки аксиомы полноты: лемма о вложенных отрезках (аксиома Кантора), теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного множества, принцип разделяющего числа. Равносильность этих формулировок.
3. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о сохранении знака.
4. Теоремы об арифметических операциях с пределами (для предела последовательности).
5. Теоремы о предельном переходе в неравенствах. Лемма “о двух милиционерах” (для предела последовательности).
6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
7. Монотонные последовательности. Критерий Вейерштрасса существования предела монотонной последовательности. Пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, |q| < 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}, |a| > 1$ ;  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ .
8. Число  $e$ .
9. Определение степени с иррациональным показателем. Теорема о предельном переходе в показателе степени.
10. Показательная функция. Логарифмическая функция. Формулы логарифмирования. Формула перехода к другому основанию.
11. Подпоследовательности. Лемма Больцано-Вейерштрасса. Предельные точки множества. Теорема Вейерштрасса о существовании предельных точек у ограниченного множества.
12. Критерий Коши существования предела последовательности.
13. Понятие числового ряда. Бесконечная геометрическая прогрессия. Критерий Коши сходимости ряда. Расходимость гармонического ряда. Сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .
14. Понятие предела функции в точке. Равносильность определений предела функции в точке по Коши и по Гейне. Теорема о единственности предела.
15. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел в точке. Теорема о сохранении знака. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Лемма “о двух милиционерах”. Теоремы об арифметических операциях с пределами (для предела функции).
16. Критерий Коши существования предела функции в точке.
17. Предел функции справа и слева. Существование односторонних пределов у монотонной функции. Вертикальные асимптоты графика функции.

18. Первый замечательный предел.
19. Предел функции на бесконечности. Второй замечательный предел.
20. Наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.
21. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Асимптотическое равенство (эквивалентность) функций. Примеры асимптотически равных функций.
22. Функции, непрерывные в точке. Их свойства.
23. Непрерывность некоторых элементарных функций ( $P_n(x)$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ).
24. Предел сложной функции в точке. Непрерывность сложной функции в точке. Непрерывность показательной и степенной функций. Пределы  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ .
25. Непрерывность логарифмической функции (непосредственное доказательство).
26. Непрерывность функции в точке справа и слева. Разрывы функции и их классификация. Характеристика разрывов монотонной функции.
27. Функции, непрерывные на отрезке. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении.
28. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении и ее следствия. Метод половинного деления.
29. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.
30. Определение производной. Геометрический смысл производной. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Нахождение производной по определению (для функций  $c$ ,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $e^x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ). Правая и левая производная. Необходимое и достаточное условие существования производной.
31. Производная суммы, произведения и частного. Формула для производной произведения нескольких сомножителей. Формула для производной дроби, числитель и знаменатель которой представлены как произведение нескольких сомножителей. Производная функций  $x^n$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .
32. Теорема о производной сложной функции. Производная показательной функции  $f(x) = a^x$ . Производная степенной функции  $f(x) = x^\alpha$ . Теорема о производной обратной функции. Производная логарифмической функции. Производные обратных тригонометрических функций.
33. Касательная к графику функции. Ее уравнение. Угол между кривыми.
34. Возрастание и убывание функции в точке. Понятие о локальном экстремуме. Теорема Ферма. Теорема Дарбу.
35. Теорема Ролля. Ее геометрическая интерпретация. Следствие из теоремы Ролля. Обобщение на случай бесконечного промежутка. Корни многочлена и дифференцирование.

- 36.** Теорема Коши о среднем значении. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений) и ее следствия.
- 37.** Условия постоянства функции на промежутке. Следствие из него. Условия монотонности функции на промежутке.
- 38.** Понятие локального экстремума. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции. Нахождение наибольших и наименьших значений функции на промежутке.
- 39.** Понятие выпуклой функции. Геометрический смысл определения. Условия выпуклости функции. Точки перегиба.
- 40.** Схема исследования функции.
- 41.** Понятие первообразной функции. Основное свойство первообразной. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
- 42.** Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Типы интегралов, берущихся с помощью тригонометрических подстановок. Формула интегрирования по частям. Интегрирование функций, содержащих квадратные трехчлены.

## Вопросы по курсу математического анализа, 10 класс, 2015.

### Облегченная версия

1. Лемма о вложенных отрезках (аксиома Кантора). Ограниченные множества. Понятие точной верхней (нижней) грани. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного множества.
2. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о сохранении знака.
3. Теоремы об арифметических операциях с пределами (для предела последовательности).
4. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Лемма “о двух милиционерах” (для предела последовательности).
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
6. Монотонные последовательности. Критерий Вейерштрасса существования предела монотонной последовательности. Пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ ,  $|q| < 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}$ ,  $|a| > 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ .
7. Число  $e$ .
8. Показательная функция. Логарифмическая функция. Формулы логарифмирования. Формула перехода к другому основанию.
9. Подпоследовательности. Лемма Больцано-Вейерштрасса.
10. Понятие предела функции в точке. Равносильность определений предела функции в точке по Коши и по Гейне. Теорема о единственности предела.
11. Теорема об ограниченности функции, стремящейся к пределу. Теорема о сохранении знака. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Лемма “о двух милиционерах”. Теоремы об арифметических операциях с пределами (для предела функции).
12. Предел функции справа и слева. Вертикальные асимптоты графика функции.
13. Первый замечательный предел.
14. Предел функции на бесконечности. Второй замечательный предел.
15. Наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.
16. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Асимптотическое равенство (эквивалентность) функций. Примеры асимптотически равных функций.
17. Функции, непрерывные в точке. Их свойства.
18. Непрерывность некоторых элементарных функций ( $P_n(x)$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ).
19. Непрерывность сложной функции в точке. Непрерывность показательной и степенной функций. Пределы  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ .
20. Непрерывность функции в точке справа и слева. Разрывы функции и их классификация. Вертикальные асимптоты графика функции.

- 21.** Функции, непрерывные на отрезке. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении.
- 22.** Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении и ее следствия. Метод половинного деления.
- 23.** Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Непрерывность логарифмической функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.
- 24.** Определение производной. Геометрический смысл производной. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Нахождение производной по определению (для функций  $c$ ,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $e^x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ). Правая и левая производная. Необходимое и достаточное условие существования производной.
- 25.** Производная суммы, произведения и частного. Формула для производной произведения нескольких сомножителей. Формула для производной дроби, числитель и знаменатель которой представлены как произведение нескольких сомножителей. Производная функций  $x^n$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .
- 26.** Теорема о производной сложной функции. Производная показательной функции  $f(x) = a^x$ . Производная степенной функции  $f(x) = x^\alpha$ . Теорема о производной обратной функции. Производная логарифмической функции. Производные обратных тригонометрических функций.
- 27.** Касательная к графику функции. Ее уравнение. Угол между кривыми.
- 28.** Возрастание и убывание функции в точке. Понятие о локальном экстремуме. Теорема Ферма.
- 29.** Теорема Ролля. Ее геометрическая интерпретация. Следствие из теоремы Ролля.
- 30.** Теорема Лагранжа (формула конечных приращений) и ее следствия.
- 31.** Условия постоянства функции на промежутке. Условия монотонности функции на промежутке.
- 32.** Понятие локального экстремума. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции. Нахождение наибольших и наименьших значений функции на промежутке.
- 33.** Понятие выпуклой функции. Геометрический смысл определения. Условия выпуклости функции. Точки перегиба.
- 34.** Схема исследования функции.
- 35.** Первообразная функция на промежутке. Основное свойство первообразной. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
- 36.** Способы нахождения неопределенных интегралов (замена переменных, тригонометрические подстановки, интегрирование по Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Типы интегралов, берущихся с помощью тригонометрических подстановок. Формула интегрирования по частям. Интегрирование функций, содержащих квадратные трехчлены.