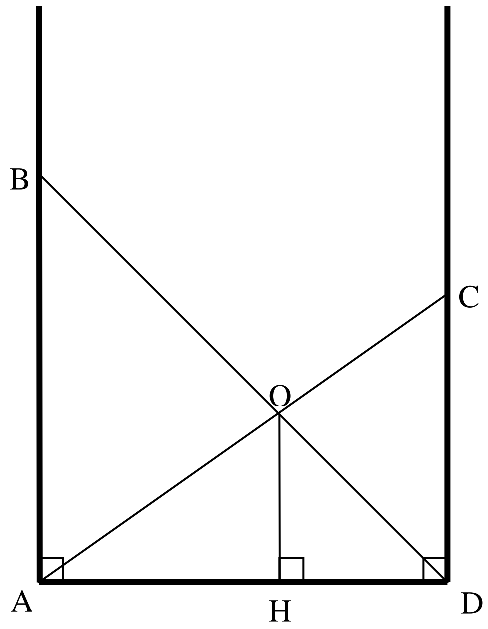
# Палки в колодце

**Условие**: В колодец кинули две палки: одна длиной 3 м, вторая – 2 м. После падения палки пересеклись, причем высота точки их пересечения над дном колодца равна 1 м. Найти диаметр колодца.




**Решение:** Изобразим схематически вертикальное сечение колодца (см. рисунок). При падении центры тяжести палок заняли наиболее низкое положение, т.е. их проекции на дно есть диаметры колодца. Т.к. палки пересеклись, то это один и тот же диаметр. На рисунке AC и BD – палки, AD – дно колодца, OH – высота. AC = $a$; BD = $b$; OH = $h$.

Пусть AD = $d$. Тогда AB = $\sqrt{a^2 - d^2}$ ;

CD = $\sqrt{b^2 - d^2}$ (из теоремы Пифагора в **Δ** ABD и

**Δ** ACD соотв.). Из подобия **Δ** AOH и **Δ** ACD:

$$AH = \frac{d \cdot h}{\sqrt{b^2 - d^2}};$$

Аналогично из подобия **Δ** DOH и **Δ** DBA:

$$DH = \frac{d \cdot h}{\sqrt{a^2 - d^2}};$$

Но AH + DH = d. Имеем уравнение:

$$\frac{d \cdot h}{\sqrt{a^2 - d^2}} + \frac{d \cdot h}{\sqrt{b^2 - d^2}} = d;$$

или, при сокращении на $d$:

$$\frac{h}{\sqrt{a^2 - d^2}} + \frac{h}{\sqrt{b^2 - d^2}} = 1.$$

У этого уравнения единственный положительный вещественный корень ≈ 1.23 м.
Ниже приведен полный вывод программы Mathematica 9.0 (включая решение в общем виде).
**Ответ:** 1.23 м.

# Приложение

$$\text{NSolve}\left[\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}==1,\ x,\ \text{Reals}\right]$$

$$\{\{x\to -1.23119\},\ \{x\to 1.23119\}\}$$

$$\text{Solve}\left[\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}==1,\ x,\ \text{Reals}\right]$$

$$\left\{\left\{x\to -\sqrt{\text{Root}\left[385-454\,\#1+163\,\#1^2-22\,\#1^3+\#1^4\ \&,\ 1\right]}\right\},\ \left\{x\to \sqrt{\text{Root}\left[385-454\,\#1+163\,\#1^2-22\,\#1^3+\#1^4\ \&,\ 1\right]}\right\}\right\}$$

$$\text{Assuming}\left[\{a\in\text{Reals},\ b\in\text{Reals},\ c\in\text{Reals}\},\ \text{Solve}\left[h\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\right)==1,\ x,\ \text{Reals}\right]\right]$$

$$\Big\{\Big\{x\to \text{ConditionalExpression}\Big[$$
$$-\sqrt{\text{Root}\left[a^4 b^4-2a^4b^2h^2-2a^2b^4h^2+a^4h^4-2a^2b^2h^4+b^4h^4+\left(-2a^4b^2-2a^2b^4+2a^4h^2+8a^2b^2h^2+2b^4h^2\right)\#1+\left(a^4+4a^2b^2+b^4-6a^2h^2-6b^2h^2\right)\#1^2+\left(-2a^2-2b^2+4h^2\right)\#1^3+\#1^4\ \&,\ 1\right]},$$
$$\left(a>\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ b>\sqrt{h^2}\ \&\&\ h>0\right)\ ||\ \left(a<-\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ b>\sqrt{h^2}\ \&\&\ h>0\right)\ ||$$
$$\left(a<-\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ b<-\sqrt{h^2}\ \&\&\ h>0\right)\ ||\ \left(b<-\sqrt{h^2}\ \&\&\ a>\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ h>0\right)\Big]\Big\},$$

$$\Big\{x\to \text{ConditionalExpression}\Big[\sqrt{\text{Root}\left[a^4 b^4-2a^4b^2h^2-2a^2b^4h^2+a^4h^4-2a^2b^2h^4+b^4h^4+\left(-2a^4b^2-2a^2b^4+2a^4h^2+8a^2b^2h^2+2b^4h^2\right)\#1+\left(a^4+4a^2b^2+b^4-6a^2h^2-6b^2h^2\right)\#1^2+\left(-2a^2-2b^2+4h^2\right)\#1^3+\#1^4\ \&,\ 1\right]},$$
$$\left(a>\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ b>\sqrt{h^2}\ \&\&\ h>0\right)\ ||\ \left(a<-\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ b>\sqrt{h^2}\ \&\&\ h>0\right)\ ||$$
$$\left(a<-\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ b<-\sqrt{h^2}\ \&\&\ h>0\right)\ ||\ \left(b<-\sqrt{h^2}\ \&\&\ a>\sqrt{2\sqrt{\frac{b^6h^6}{\left(b^2-h^2\right)^4}}+\frac{b^4h^2+b^2h^4}{\left(b^2-h^2\right)^2}}\ \&\&\ h>0\right)\Big]\Big\}\Big\}$$