

## Поднимающийся шар

Резиновый шар, наполненный гелием, поднимается в небо. Давление и температура атмосферного воздуха уменьшаются с высотой. В дальнейшем будем предполагать, что сферическая форма шара сохраняется, несмотря на прикреплённый к нему груз, и пренебрежём объёмом самой оболочки и груза. Будем также предполагать, что температура гелия внутри шара совпадает с температурой окружающего воздуха, и считать гелий и воздух идеальными газами. Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К); молярные массы гелия  $M_{\text{H}}$  и воздуха  $M_{\text{A}}$  равны  $M_{\text{H}} = 4,00 \times 10^{-3}$  кг/моль и  $M_{\text{A}} = 28,9 \times 10^{-3}$  кг/моль соответственно. Ускорение свободного падения  $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>.

### ЧАСТЬ А

(а) [1,5 балла] Предположим, что окружающий воздух имеет давление  $P$  и температуру  $T$ . Давление внутри шара выше наружного из-за упругих свойств оболочки. Пусть шар содержит  $n$  молей гелия и давление внутри него равно  $P+\Delta P$ . Определите выталкивающую силу  $F_{\text{В}}$ , действующую на шар, как функцию от  $P$  и  $\Delta P$ .

(б) [2 балла] В Корее в один из летних дней было найдено, что температура  $T$  воздуха на высоте  $z$  над уровнем моря задаётся соотношением  $T(z)=T_0(1-z/z_0)$  в диапазоне  $0 < z < 15$  км, где  $z_0=49$  км и  $T_0=303$  К. Давление  $P_0$  и плотность воздуха  $\rho_0$  на уровне моря равны  $P_0=1$  атм  $= 1,01 \times 10^5$  Па и  $\rho_0=1,16$  кг/м<sup>3</sup> соответственно. В указанном диапазоне высот давление изменяется с высотой по закону  $P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta$  (2.1) Выразите постоянную  $\eta$  через величины  $z_0$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$  и  $g$ ; определите её значение с точностью до двух значащих цифр. Считайте ускорение свободного падения  $g$  постоянным, не зависящим от высоты.

### ЧАСТЬ В

Когда резиновый шар (с радиусом  $r_0$  в нерастянутом состоянии) раздувается до сферы радиуса  $r(\geq r_0)$ , его оболочка из-за растяжения приобретает упругую энергию. В упрощённой теории упругая энергия  $U$  надутой сферической оболочки при постоянной температуре  $T$

$$U = 4\pi r_0^2 k R T (2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3) \quad (2.2)$$

описывается выражением

где  $\lambda \equiv r/r_0 (\geq 1)$  – коэффициент растяжения (по радиусу), а  $k$  – некоторая константа, выраженная в единицах моль/м<sup>2</sup>.

(с) [2 балла] Выразите  $\Delta P$  через параметры, входящие в выражение (2.2), и изобразите графически (на листе ответов) зависимость  $\Delta P$  от  $\lambda$ .

(d) [1,5 балла] Постоянная величина  $k$  может быть определена через количество молей гелия, необходимых для надувания шара. При  $T_0 = 303$  К и  $P_0 = 1,0$  атм нерастянутый шар (при  $r = r_0$ ) содержит  $n_0 = 12,5$  молей гелия. Для раздувания шара до значения  $\lambda = 1,5$  при неизменных температуре  $T_0$  и внешнем давлении  $P_0$  в нём должно находиться в общей сложности  $n = 3,6n_0 = 45$  молей гелия. Выразите параметр  $a$  оболочки, определяемый как отношение  $a =$

$k/k_0$  (где  $k_0 \equiv \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$ ), через  $n$ ,  $n_0$  и  $\lambda$ . Вычислите его значение с точностью до двух значащих цифр.

### ЧАСТЬ С

Шар накачали на уровне моря как в пункте (d) (коэффициент растяжения по радиусу  $\lambda = 1,5$ , число молей гелия внутри  $n=3,6n_0=45$  молей, при температуре  $T_0=303$  К и давлении  $P_0=1,0$  атм  $= 1,01 \times 10^5$  Па). Общая масса шара, включая газ, оболочку и груз, равна  $M_T=1,12$  кг. Такой шар начинает подниматься от уровня моря.

(е) [3 балла] Пусть этот шар поднялся до такой высоты  $z_f$ , на которой выталкивающая сила уравновешивается суммарной силой тяжести. Определите  $z_f$  и коэффициент растяжения  $\lambda_f$  на этой высоте. Рассчитайте их числовые значения с точностью до двух значащих цифр. Утечкой газа и боковым смещением из-за ветра пренебрегите



## Задача 2. Детектирование электрических сигналов.

Некоторые морские животные способны обнаруживать другие существа на расстоянии благодаря электрическим токам, текущим в теле этих существ в процессе дыхания или в других процессах, связанных с сокращением мышц. Некоторые хищники используют этот электрический сигнал для обнаружения своих жертв, даже когда последние прячутся в песок.

Физический механизм, лежащий в основе возникновения тока в жертве и ее обнаружения хищником, можно смоделировать, как показано на рис. 4. Ток, генерируемый жертвой, течет между двумя расположенными в теле жертвы сферами, имеющими положительный и отрицательный потенциалы. Расстояние между центрами этих двух сфер равно  $l_s$ , каждая сфера имеет радиус  $r_s$  значительно меньший, чем  $l_s$ . Удельное сопротивление морской воды равно  $\rho$ .

Предположим, что удельное сопротивление тела жертвы такое же как и окружающей морской воды, так что границы между телом жертвы и окружающей средой нет.

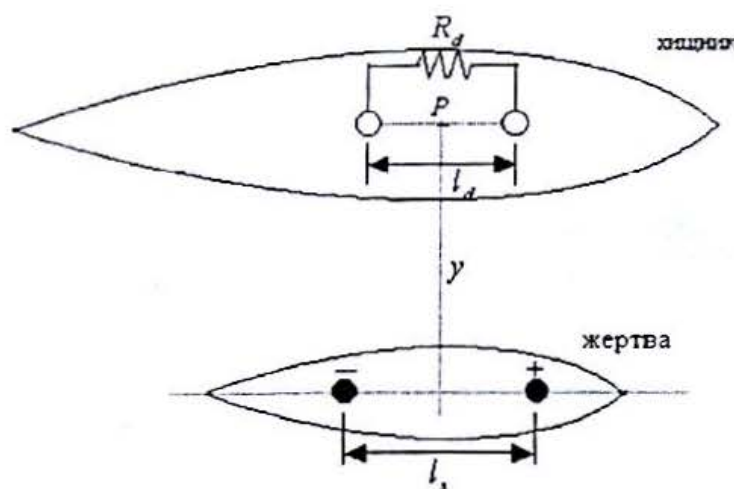


Рисунок 4. Модель, описывающая прием электрического сигнала, приходящего от жертвы к хищнику.

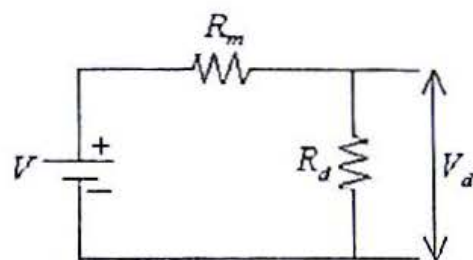


Рисунок 5. Замкнутый контур, включающий внутреннее сопротивление  $R_d$  хищника и сопротивление окружающей среды  $R_m$ .

Для описания того, как хищник принимает электрический сигнал, исходящий от жертвы, детектор моделируется двумя сферами в теле хищника, находящимися в контакте с окружающей морской водой и расположенными параллельно аналогичной паре сфер в теле жертвы. Сферы в теле хищника расположены на расстоянии  $l_d$  друг от друга и имеют радиус  $r_d$  значительно меньший  $l_d$ . Центр детектора находится на расстоянии  $y$  выше жертвы и линия, соединяющая две сферы детектора (рис. 4), ориентирована вдоль линий электрического поля, создаваемого жертвой. Расстояния  $l_s$  и  $l_d$  много меньше, чем  $y$ . Напряженность электрического поля между сферами хищника можно считать постоянной по модулю.

Таким образом, образуется замкнутый контур, включающий заданное внутреннее сопротивление  $R_d$  хищника и сопротивление окружающей среды  $R_m$  (см. рис. 5). На этом рисунке  $V$  – это напряжение между сферами детектора, обусловленное электрическим полем жертвы (в отсутствие  $R_d$ ).  $V_d$  – это напряжение между сферами с учетом внутреннего сопротивления хищника.

Задания:

1. определите вектор плотности тока  $j$  (ток на единицу площади), обусловленный точечным источником тока  $I_s$  на расстоянии  $r$  от него в неограниченной однородной среде (1.5 б.);
2. для заданной силы тока  $I_s$ , текущего между сферами жертвы в неограниченной среде, определите, опираясь на закон  $E = \rho j$ , напряженность электрического поля в середине между сферами детектора (точка P) (2.0 б.);
3. определите для той же силы тока  $I_s$  напряжение между сферами в жертве  $V_s$  (1.5 б.), определите сопротивление  $R_s$  между этими сферами (0.5 б.), определите также мощность  $P_s$ , выделяющуюся при этом в окружающей среде (0.5 б.);
4. определите сопротивление среды  $R_m$  между сферами хищника (0.5 б.), определите напряжение  $V_d$  между этими сферами (см. рис. 5) (1.0 б.), получите выражение для мощности  $P_d$ , передаваемой от жертвы к хищнику (0.5 б.);
5. определите оптимальное значение  $R_d$ , при котором детектируемая мощность  $P_d$  максимальна (1.5 б.), определите также эту максимальную мощность (0.5 б.).

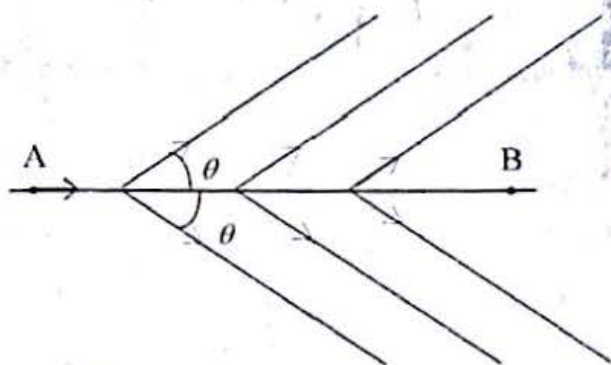


## 1. ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И КОЛЬЦЕВОЙ ЧЕРЕНКОВСКИЙ ДЕТЕКТОР

Свет распространяется в вакууме со скоростью  $c$ . Не существует частиц, движущихся со скоростью больше, чем  $c$ . Однако в прозрачной среде частица может двигаться со скоростью  $v$ , превышающей скорость света в этой среде  $c/n$ , где  $n$  – показатель преломления среды. Эксперимент (Черенков, 1934) и теория (Тамм и Франк, 1937) показали, что заряженная частица, движущаяся со скоростью  $v$  в прозрачной среде с показателем преломления  $n$ , удовлетворяющим условию  $v > c/n$ , излучает свет, названный *черенковским излучением*, в направлениях, образующих с ее траекторией угол  $\theta = \arccos(1/\beta n)$ , (1)

где  $\beta = v/c$ .

1. Чтобы объяснить этот эффект, рассмотрим частицу, движущуюся с постоянной скоростью  $v > c/n$  по прямой линии. Она проходит точку А в момент времени 0 и точку В в момент  $t_1$ . Так как задача симметрична относительно вращения вокруг оси АВ, достаточно рассмотреть световые лучи в любой плоскости, содержащей АВ.



В любой точке С между А и В частица излучает сферическую световую волну, распространяющуюся со скоростью  $c/n$ . Назовем волновым фронтом в заданный момент времени  $t$  огибающую всех таких сфер в этот момент.

1.1. Определите волновой фронт в момент времени  $t_1$  и начертите линию его сечения плоскостью, содержащей траекторию частицы.

1.2. Выразите угол  $\varphi$  между указанной линией и траекторией частицы через  $n$  и  $\beta$ .

2. Рассмотрим пучок частиц, движущихся вдоль прямой линии IS, пересекающей в точке S выпуклое сферическое зеркало с фокусным расстоянием  $f$  и центром С. Скорость пучка  $v > c/n$  такова, что угол  $\theta$  мал. Отрезок SC образует с линией SI малый угол  $\alpha$ . Излучение пучка частиц создает кольцевое изображение в фокальной плоскости зеркала. Поясните это явление с помощью рисунка. Определите положение центра кольца О и его радиус  $r$ .

Установка, описанная выше, используется в *кольцевых черенковских детекторах* (КЧД), а среда, через которую частицы проходят, называется *излучателем*.

**Примечание:** поскольку углы  $\alpha$  и  $\theta$  малы, во всех пунктах данной задачи соответствующими членами второго и высших порядков малости можно пренебречь.

3. Рассмотрим пучок частиц с известным импульсом  $p = 10.0 \text{ ГэВ}/c$ , состоящий из частиц трех типов: протонов, каонов и пионов с массами покоя  $M_p = 0.94 \text{ ГэВ}/c^2$ ,  $M_k = 0.50 \text{ ГэВ}/c^2$  и  $M_\pi = 0.14 \text{ ГэВ}/c^2$  соответственно. Напомним, что величины  $pc$  и  $Mc^2$  имеют размерность энергии,  $1 \text{ эВ}$  – энергия, приобретаемая электроном, ускоренным разностью потенциалов  $1 \text{ В}$ ,  $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$ ,  $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$ .

Пучок частиц движется в воздухе, находящемся под давлением  $P$ , который играет роль излучателя. Показатель преломления воздуха выражается через его давление  $P$ , измеренное в атмосферах, с помощью формулы  $n = 1 + aP$ , где  $a = 2.7 \cdot 10^{-4} \text{ атм}^{-1}$ .

3.1. Рассчитайте для каждого из трех типов частиц минимальное значение  $P_{\min}$  атмосферного



давления, при котором они начинают давать черенковское излучение.

3.2. Рассчитайте давление  $P_{1/2}$ , при котором радиус кольцевого изображения, порожденного излучением каонов, равен половине радиуса кольцевого изображения, порожденного излучением пионов, а также значения  $\theta_\kappa$  и  $\theta_\pi$  для этого случая. Можно ли при таком давлении наблюдать кольцевое изображение, порожденное излучением протонов?

4. Предположим теперь, что пучок не является полностью монохроматическим: импульс частиц распределен в интервале с центром в точке  $10 \text{ ГэВ}/c$ , имеющем полуширину  $\Delta p$  (на половине высоты). Это приводит к уширению кольцевого изображения. Соответствующее уширение распределения по  $\theta$  характеризуется полушириной  $\Delta\theta$  (на половине высоты).

4.1. Вычислите  $\Delta\theta_\kappa/\Delta p$  и  $\Delta\theta_\pi/\Delta p$ , то есть значение  $\Delta\theta/\Delta p$  для пионов и каонов.

4.2. Два кольцевых изображения, созданных излучением пионов и каонов, можно хорошо различить, если угловое расстояние  $\theta_\pi - \theta_\kappa$  превышает сумму полуширин  $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$  более чем в 10 раз, то есть  $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10 \Delta\theta$ . Рассчитайте максимальное значение  $\Delta p$ , при котором два изображения еще можно хорошо различить.

5. Черенков впервые открыл эффект, ныне носящий его имя, наблюдая за сосудом с водой, расположенным вблизи радиоактивного источника. Он увидел, что вода в сосуде светилась.

5.1. Найдите минимальное значение кинетической энергии  $T_{min}$  частицы с массой покоя  $M$ , движущейся в воде, при котором появляется черенковское излучение. Показатель преломления воды  $n=1.33$ .

5.2. Радиоактивный источник, использованный Черенковым, излучал  $\alpha$ -частицы (ядра гелия), имеющие массу покоя  $M_\alpha=3.8 \text{ ГэВ}/c^2$ , и  $\beta$ -частицы (электроны), имеющие массу покоя  $M_e=0.51 \text{ МэВ}/c^2$ . Рассчитайте численные значения  $T_{min}$  для  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц.

Зная, что кинетическая энергия частиц, излучаемых радиоактивными источниками, не превышает нескольких МэВ, определите, какие частицы порождали излучение, наблюдавшееся Черенковым.

6. В предыдущих пунктах задачи не учитывалась зависимость черенковского излучения от длины волны  $\lambda$ . Учтем теперь тот факт, что черенковское излучение частицы имеет широкий непрерывный спектр, включающий видимую область (длины волн от 0.4 мкм до 0.8 мкм). Известно также, что при возрастании  $\lambda$  в пределах этой области показатель преломления излучателя линейно уменьшается на 2% от величины  $(n-1)$ .

6.1. Рассмотрим пучок пионов с заданным импульсом  $10.0 \text{ ГэВ}/c$ , движущийся в воздухе, находящемся под давлением 6 атм. Определите разность углов  $\delta\theta$ , соответствующих краям видимой области.

6.2. Качественно исследуйте влияние дисперсии (т.е. зависимости  $n$  от  $\lambda$ ) на изображение кольца, созданное излучением пучка пионов. Импульсы пионов распределены в интервале с центром в точке  $p=10 \text{ ГэВ}/c$ , имеющем полуширину  $\Delta p=0.3 \text{ ГэВ}/c$  (на половине высоты).

6.2.1. Рассчитайте уширение, обусловленное дисперсией (изменением показателя преломления), а также уширение, вызываемое немонахроматичностью пучка (разбросом импульсов частиц).

6.2.2. Опишите, как изменяется цвет кольца при переходе от его внутреннего края к внешнему.

