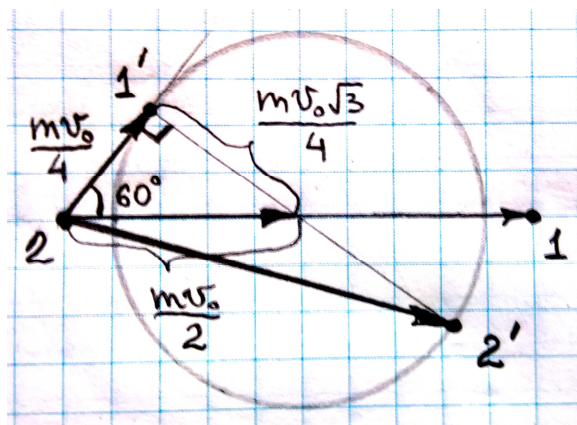


10 клас. Задача 1.

Кульками, яким надають швидкість v_0 , намагаються влучити в такі самі нерухомі кульки. Виявилось, що кут між початковою швидкістю після зіткнення (кут розсіювання) не перевищує $\pi/3$. Кульки рухаються поступально. Зіткнення вважати однократними. 1. У скільки разів зменшується швидкість кульки, якщо кут розсіювання становить $\pi/3$? 2. Якою стає у цьому випадку швидкість тієї кульки, яка спочатку була нерухомою? 3. Яка частка механічної енергії при цьому переходить у внутрішню?

Розв'язок. В системі центра мас імпульси кульок до зіткнення рівні за величиною і протилежні за напрямком. Після зіткнення вони також рівні за величиною (але ця величина зменшується) і протилежні за напрямком, але цей напрямок може бути різним.

Максимальному куту відхилення відповідає той випадок, коли результуючий імпульс першої кульки буде спрямований по дотичній до кола радіусом mv_1' (див. малюнок).



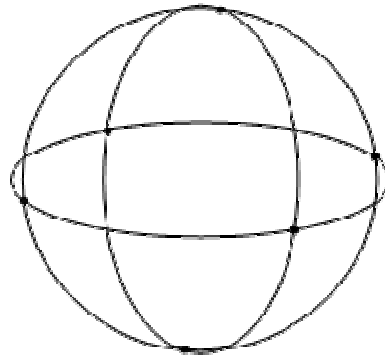
$$\text{З малюнку } v_1 = \frac{v_0}{4}, \quad v_2 = \sqrt{\left(\frac{v_0}{4}\right)^2 + \left(2\frac{v_0\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{v_0\sqrt{13}}{4}.$$

Доля втраченої енергії дорівнює

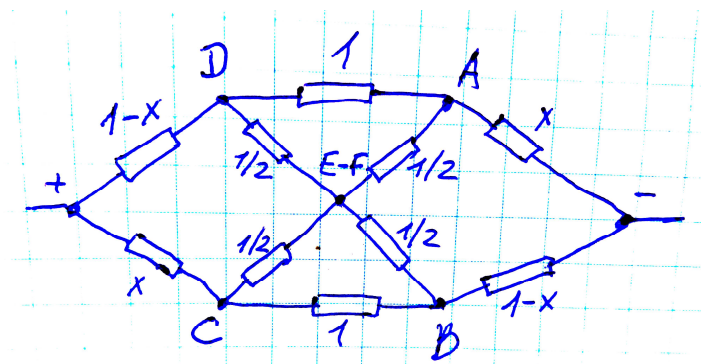
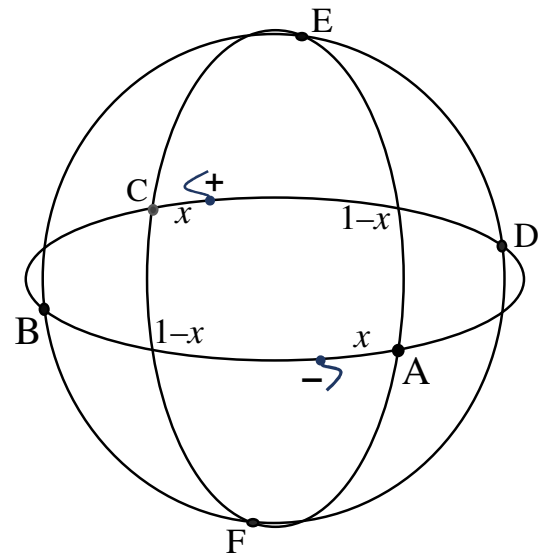
$$\frac{\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1'^2}{2} - \frac{mv_2'^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{1}{8}.$$

10 клас. Задача 2.

З дроту довжиною 12 м і опором 12 Ом зробили «глобус» так, що всі відрізки між найближчими парами з'єднань однакові (по чверть дуги кола на рис. 1). а) Визначте максимальний та мінімальний опір цього з'єднання при підключенні його до будь-яких діаметрально протилежних точок. б) Розгляньте випадок максимального опору, а електрони вважайте класичними частинками. До «глобусу» прикладено напругу 12 В. Визначте максимальний час, необхідний електронам, щоб пройти «глобусом». У кожному сантиметрі дроту знаходяться 10^{20} вільних електронів. Заряд електрона $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.



Розв'язок. «Глобус» складається з трьох дротових кіл, площини яких перпендикулярні. Довжина кожної чверті кола дорівнює 1 м, а опір 1 Ом. Опір між двома протилежними точками з'єднань дротів легко знайти, оскільки струм через перпендикулярне до осі симетрії коло не йтиме: $R_1 = 0,5$ Ом. Також легко знайти опір для іншого симетричного з'єднання, коли напруга подається до точок, що знаходяться посередині чвертей кола: $R_2 = 0,75$ Ом. Виявляється, це і будуть мінімальний і максимальний опору. Щоб довести це, слід розглянути загальний випадок (див. рисунок), коли напругу подають до протилежних точок, віддалених від A і C на відстань, що відповідає деякому опору x . Тоді у SI опору між точками під'єднання і відповідними їм сусідніми точками B і D $1-x$. В силу симетрії струми через обидва x будуть однаковими (позначимо їх I_1), як і через обидва опору $1-x$ (позначимо їх I_3), а точки E і F можна з'єднати, як такі, що мають однакові потенціали. Наведемо еквівалентну схему кола. Позначимо силу струму через ділянки AD і BC через I_2 .



Напишемо рівняння, які випливають із закону Ома, закону збереження заряду та симетрії кола:

$$\begin{cases} I_1 x + I_2 + I_3(1-x) = U \\ I_3(1-x) + \frac{I_3 - I_2}{2} = \frac{U}{2} \\ I_1 x + \frac{I_1 - I_2}{2} = \frac{U}{2} \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо:

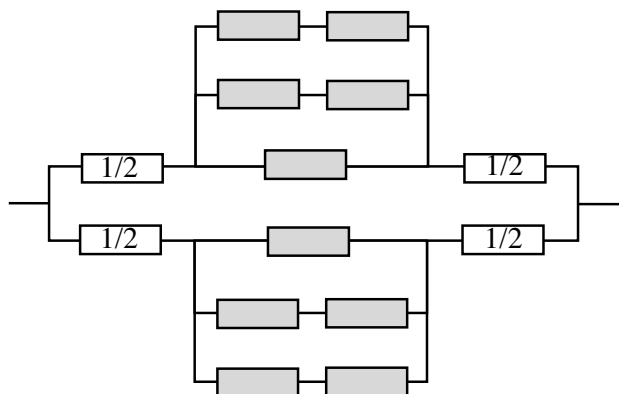
$$I_1 = \frac{U(3-2x)}{2(-2x^2+2x+1)}, \quad I_3 = \frac{U(2x+1)}{2(-2x^2+2x+1)}, \quad I_2 = \frac{U}{2(-2x^2+2x+1)}.$$

Звідси повна сила струму $I = I_1 + I_3 = \frac{2U}{-2x^2+2x+1}$. Отже, загальний опір кола

$$R = \frac{U}{I} = -x^2 + x + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Легко переконатися, що мінімум опору (0,5 Ом) відповідає $x=0$ або $x=1$, а максимум (0,75 Ом) відповідає $x = \frac{1}{2}$.

Максимальний опір $R_x = \frac{3}{4}$ Ом буде при $x = \frac{1}{2}$ Ом, тобто при подачі напруги до середин чвертей дуг кола АВ і CD. У цьому випадку еквівалентна схема має вигляд, зображений на другому рисунку (затоновані резистори мають опір по 1 Ом). Якщо на з'єднання подати напругу 12 В, загальний струми через резистори по $\frac{1}{2}$ Ом будуть по 8 А, через центральні резистори по 1 Ом – по 4 А, а через інші – по 2 А. Знайдемо швидкість руху електронів у дроті.



За визначенням сила струму $I = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t} = \frac{Ne}{l/v} = \frac{N}{l} ev = nev$.

де $n = \frac{N}{l} = 10^{29} \text{ см}^{-3}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Отже, швидкість руху електронів $v = \frac{I}{ne}$

Навіть при струмі 8 А вона дорівнює всього 0,5 см/с. При струмі 4 А – 1/4 см/с, а 2 А – 1/8 см/с. Отже, електронам, які підуть центральними прямими (на рис.) дільницями, знадобиться $100\text{с} + 400\text{с} + 100\text{с} = 10$ хвилин, а електронам, які після розгалуження підуть довгими шляхами: $100\text{с} + 1600\text{с} + 100\text{с} = 30$ хвилин. Можна вважати, що після цього часу електрони провідності у нашій конструкції заміняться.

10 клас. Задача 3.

Прискорення вільного падіння на поверхні Венери складає 0,9 від земного, але тиск та температура значно більші (див. таблицю). На висоті 50-52 км тиск венеріанської атмосфери 0,1 МПа, а температура приблизно 30°C. Розрахуйте вантажопідйомність повітряного міста (у кг на 1 м² його площі), яке ззовні має вигляд диска діаметром декілька км і висотою 200 м. В такому місті живуть люди, дихаючи тим самим повітрям, що й на Землі за атмосферного тиску 0,1 МПа і температури 30°C. Плівка, з якої зроблена оболонка міста, має поверхневу густину 80 г/м². Уявіть тепер, що під час зовнішнього обслуговування людина у скафандрі зірвалась і почала падати. За рахунок сили опору повітря, яка пропорційна квадрату швидкості, густині атмосфери та площі перерізу, для тіла людини встановлюється деяка швидкість, яка у земних умовах поблизу поверхні дорівнює 50 м/с. Чи буде зіткнення людини з поверхнею Венери безпечним? Відносні атомні маси С, О і N відповідно дорівнюють 12, 16 і 14.

Планета	Тиск біля поверхні планети	Температура біля поверхні	Склад атмосфери
Венера	9,2 МПа	462°C	96,5% CO ₂ , 3,5% N ₂
Земля	0,1 МПа	15°C	78% N ₂ , 22% O ₂

Розв'язок. Для венеріанської атмосфери молярна маса повітря

$$M_B = \frac{m}{\nu_{CO_2} + \nu_{N_2}} = \frac{m}{\frac{0,965m}{44} + \frac{0,035m}{28}} \approx 43,4 \frac{\text{г}}{\text{моль}}, \text{ а для земної } M_3 = \frac{m}{\nu_{N_2} + \nu_{O_2}} = \frac{m}{\frac{0,78m}{28} + \frac{0,22m}{32}} \approx 28,9 \frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

1% земної атмосфери складають аргон, вуглекислий газ (більш важкі, ніж кисень) та водяні пари (більш легкі, ніж кисень), тому з незначною похибкою ми віднесли цей відсоток до кисню.

Як бачимо ($M_3 < M_B$), кулю із земним складом повітря виштовхуватиме більш щільне повітря Венери. Розрахуємо різницю сили Архімеда і ваги повітря всередині кулі. Для цього густину повітря виразимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона.

$$(\rho_{B_1} - \rho_{3_1})g_B V = (M_B - M_3) \frac{P_1 \pi r^2 h}{RT_1} g_B$$

Ця сила має утримувати оболонку $\sigma S = \sigma(2\pi r^2 + 2\pi r h) = 2\pi r^2(1 + h/r)\sigma$ і корисне навантаження всередині. За умовою діаметр міста декілька кілометрів, отже h/r щонайменше у 10 разів менше за одиницю. Отже з прийнятною точністю для порівняно невисоких великих дисків масою бокової смужки оболонки можна знехтувати. Тоді маса оболонки $\sigma S \approx 2\pi r^2 \sigma$, а маса корисного навантаження у розрахунку на квадратний метр

$$(M_B - M_3) \frac{P h}{RT} - 2\sigma \approx 112 \text{ кг/м}^2 \approx 10^2 \text{ кг/м}^2$$

У розрахунках вважали, що на Землі прискорення вільного падіння 9,8 м/с². Як бачимо, масою оболонки взагалі можна знехтувати, оскільки значно менше, ніж 100 кг/м².

Знайдемо швидкість людини поблизу поверхні планети. Спочатку людина буде падати наче на Землі, розжениться до якоїсь максимальної швидкості, після чого почне гальмувати за рахунок збільшення густини атмосфери. Сила опору за умовою пропорційна до квадрату швидкості, густині атмосфери і площі перерізу.

Під час руху швидкість, що встановлюється, знаходиться з рівності сил. Отже, $v = \sqrt{\frac{mg}{k\rho S}}$

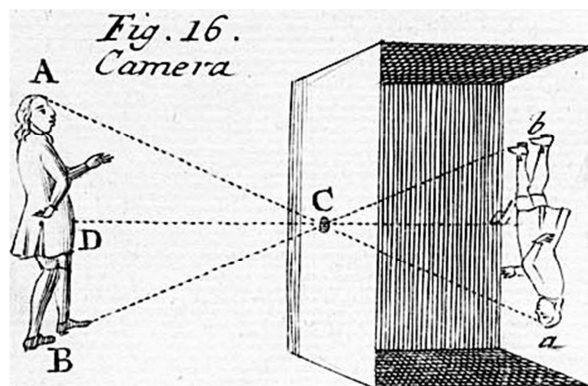
Поділимо аналогічні вираз для Венери і Землі, щоб позбутися невідомих.

$$\frac{v_B}{v_3} = \sqrt{\frac{g_B \rho_{3_2}}{g_3 \rho_{B_2}}} = \sqrt{0,9 \frac{M_3 P_{3_2} T_{B_2}}{M_B P_{B_2} T_{3_2}}} \approx 0,129$$

Швидкість перед приземленням на Венері буде 6,5 м/с. З такою швидкістю приземляються, коли стрибають з висоти $h = \frac{v^2}{2g} \approx 2,1$ м, що можна вважати безпечним для підготовленої людини.

10 клас. Задача 4.

На рисунку з Циклопедії (перша всесвітньовідома енциклопедія англійською, 1728 р.) показаний принцип утворення зображення у камері-обскурі (див. рисунок). Чи не припустився художник принципової помилки? Уявіть, що Ви фотографуєте камерою-обскурою невеликий предмет навпроти. Ви підібрали плоско-опуклі лінзи, які по черзі можна накласти (оптичним центром) на отвір камери. Перша лінза дає чітке зображення, а друга — настільки ж розмите, як і без лінзи. Вкажіть відношення оптичних сил цих лінз. Якщо лінзою, перекриваючи отвір С, довільним чином ковзати вздовж поверхні камери зі швидкістю v , з якою швидкістю $і$ в якому напрямку буде рухатись зображення на задній стінці камери?



Розв'язок.

1 (1 бал). Художник припустився помилки. У вертикальному напрямку зображення перевернуте, а в горизонтальному — ні. Праву та ліву руки зображення слід поміняти місцями.

2 (1 бал). Щоб відповісти на друге питання, введемо позначення (рис. 1). Тоді оптична сила першої лінзи

$$D_1 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

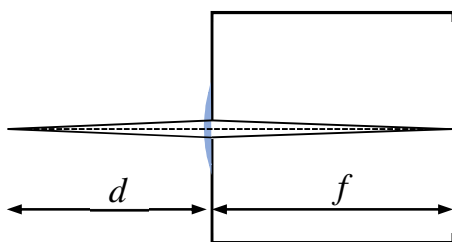


Рис. 1

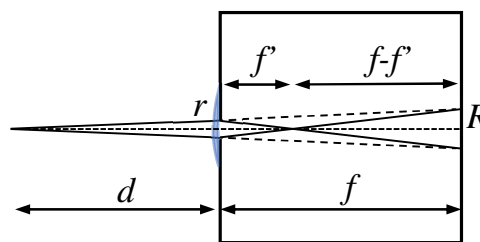


Рис. 2

3 (1 бал). Друга лінза може давати таке ж за площею розмиття, якщо матиме більшу оптичну силу (рис. 2)

$$D_2 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f'}.$$

З подібності трикутників $\frac{R}{r} = \frac{d+f}{d} = \frac{f-f'}{f}$, звідки $\frac{1}{f'} = \frac{1}{d} + \frac{2}{f}$ і $D_2 = 2\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right) = 2D_1$.

Отже, відношення оптичних сил лінз дорівнює 2.

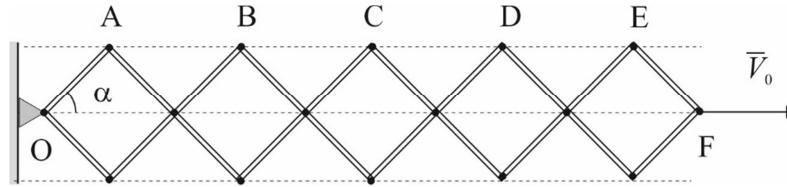
4 (2 бали). Якщо лінзу рухати вздовж передньої стінки камери, промінь, що проходить крізь отвір, по різному заломлюватиметься в залежності від його відстані до оптичного центру. Але, щоб зрозуміти, де буде зображення, не потрібні складні розрахунки. Так у випадку першої лінзи зображення завжди буде на лінії «предмет — оптичний центр лінзи». Отже, модуль швидкості руху зображення буде

$u_1 = \frac{d+f}{d} = \left(1 + \frac{f}{d}\right)v$ і ніяк не залежатиме від того, де саме знаходиться оптичний центр лінзи. Напрямок руху зображення буде співпадати з напрямком руху оптичного центру лінзи.

Аналогічно для другої лінзи «чітке зображення» рухатиметься зі швидкістю $u'_2 = \left(1 + \frac{f'}{d}\right)v$, а розмите зображення на стінці — $u_2 = \frac{f}{f'}u'_2$, звідки з урахуванням отриманого раніше й знаходимо, що $u_2 = 2u_1$.

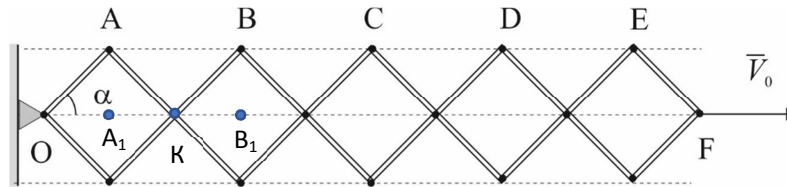
10 клас. Задача 5.

На рис. 3 зображений шарнірний механізм, який називається «Нюрнберзькі ножиці». Точка F починає рухатися зі сталою швидкістю $v_0 = 2$ м/с. Знайти прискорення в точках A, B, C, D, E , у той момент, коли кут α дорівнює 30° , якщо довжина важеля OA дорівнює 1 м.



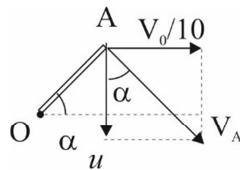
Розв'язування.

а). Позначимо деякі точки: A_1, K, B_1 . Швидкості цих точок: $V_K = V_0/5$; $V_{A_1} = V_0/10$; $V_{B_1} = 3V_0/10$. Оскільки, A_1 завжди знаходиться під A , B_1 завжди знаходиться під B , то горизонтальна компонента швидкості всіх точок не змінюється, а отже горизонтальна складова прискорення відсутня.

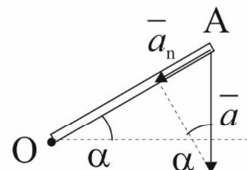


б) Всі точки знаходяться на однаковій висоті, тому вертикальна складова швидкості для точок A, B, C, D, E однакова, а отже однакові прискорення. **ПРИСКОРЕННЯ ВСІХ ТОЧОК ОДНАКОВІ І НАПРЯМЛЕНІ ВЕРТИКАЛЬНО ВНИЗ!**

в) Найзручніше вибрати найпростіший випадок, рух точки A . Швидкість точки A рівна $V_A = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{V_0}{10}$ і напрямлена перпендикулярно до відрізка OA (рис. 1а)



а)



б)

Рис. 1

Оскільки точка A рухається по частині кола радіусом OA тому має нормальну складову прискорення $a_n = V_A^2 / \ell$.

г) Накреслимо доцентрову складову прискорення точки A і повну складову прискорення точки A (рис. 1б). З рисунка видно, що $a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin^3 \alpha} \cdot \frac{V_0^2}{100 \cdot \ell} = 0,32$ м/с²

$$a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin^3 \alpha} \cdot \frac{V_0^2}{100 \cdot \ell} = 0,32 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Відповідь: } a = \frac{1}{\sin^3 \alpha} \cdot \frac{V_0^2}{100 \cdot \ell} = 0,32 \text{ м/с}^2$$