РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1
Подставка с грузом

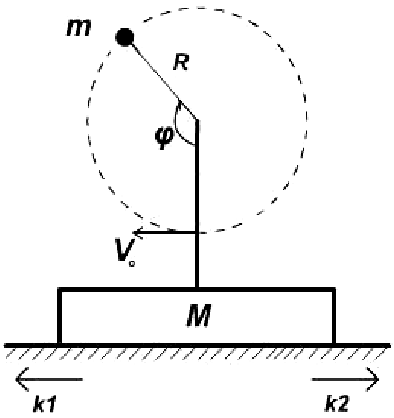

Рис.1

1. **[*1 балл*]** Из закона сохранения энергии для груза имеем

$$V_0^2 - V_{top}^2 = 4gR \approx 2V_0\Delta V\,, \quad \Delta V / V = 2gR / V_0^2 << 1$$

2. **[2 *балла*]** Максимальный угол отклонения полной силы реакции опоры от вертикали составляет

$$\alpha = \text{arctg}\,\mu\,.$$

Обозначим

$$T = mV_0^2 / R\,, \qquad \omega = V_0 / R.$$

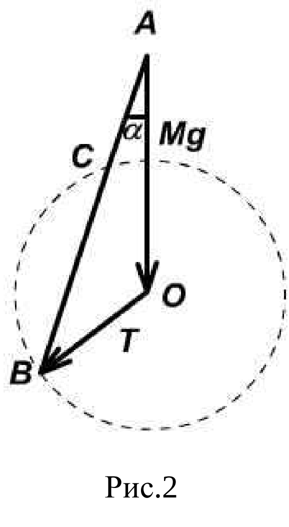

Рис.2

Из векторной диаграммы (см.Рис.2) видно, что максимальный угол отклонения

$$M\vec{g} + \vec{T}$$

составляет $\arcsin(T/Mg)$ при $T \le Mg$ (касание окружности). Если угол отклонения $M\vec{g}+\vec{T}$ от вертикали больше чем α, то равновесие невозможно и начнется проскальзывание подставки. Искомое условие запишется как

$$V_0^{\min} = \sqrt{\frac{MgR\mu}{m\sqrt{1+\mu^2}}}$$

3. Из векторной диаграммы (Рис.2): началу проскальзывания соответствует точка *B*. На участке *BC* подставка разгоняется, после – начинает тормозить. При двух точках пересечения прямой и окружности $\angle ABO < \pi/2$, поэтому из теоремы синусов для треугольника ABO :

$$\angle ABO = \arcsin(\mathrm{Mg}\frac{\sin\alpha}{m\omega^2\ R}) = \arcsin(\frac{\mu Mg}{m\omega^2\ R\sqrt{1+\mu^2}})$$

a) **[*1 балл*]** Тогда

$$\varphi_0 = \alpha + \angle ABO = \mathrm{arctg}\,\mu + \arcsin(\frac{\mu Mg}{m\omega^2\ R\sqrt{1+\mu^2}}).$$

b) **[*1 балл*]** Аналогично

$$\psi = \alpha + \pi - \angle ABO = \mathrm{arctg}\,\mu + \pi - \arcsin(\frac{\mu Mg}{m\omega^2\ R\sqrt{1+\mu^2}}).$$

4. Для вычисления ускорения запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$$F_{\mathrm{friction}} = \mu\ \mathrm{N} = \mu\,(M\mathrm{g} + T\cos\varphi)$$

$$M\,\mathrm{a}(\varphi) = T\sin\varphi - F_{\mathrm{friction}} = T\sin\varphi - \mu\,(M\mathrm{g} + T\cos\varphi)$$

Тогда

$$V(\varphi) = \int a(\varphi)dt = \int \frac{a(\varphi)d\varphi}{\omega}$$

Проинтегрировав, находим:

$$V(\varphi) = -\left(\frac{T}{\omega M}(\cos\varphi + \mu\sin\varphi) + \frac{\mu g\varphi}{\omega}\right) + \left(\frac{T}{\omega M}(\cos\varphi_0 + \mu\sin\varphi_0) + \frac{\mu g\varphi_0}{\omega}\right).$$

a) **[*1 балл*]** Тогда

$$V_{\max} = \mathrm{v}(\psi) = 2\frac{T}{\omega M}\sqrt{1+\mu^2-\mu^2(\frac{Mg}{T})^2} - \frac{\mu g}{\omega}(\pi - 2\arcsin\frac{\mu Mg}{T\sqrt{1+\mu^2}})$$

b) **[*1 балл*]** Условие для θ : $V(\theta) = 0$

$$\frac{T}{\omega M}(\cos\varphi_0 + \mu\sin\varphi_0) + \frac{\mu g\varphi_0}{\omega} = \frac{T}{\omega M}(\cos\theta + \mu\sin\theta) + \frac{\mu g\theta}{\omega}$$

5. Числа подобраны так, что $\frac{Mg}{T} = \frac{1}{\mu} = 1/(\frac{\pi}{2} - 1)$.

a) **[0.5 *балл*]** Используя это получаем:

$$\varphi_0 = 90^0,\ \psi = 90^0 + 2\mathrm{arctg}(0.57) \approx 150^0,\ \theta = 180^0$$

b) **[*0.5 балл*]** Значение

$$V_{\max} = 2\frac{\mu g}{\omega}(\mu - \mathrm{arctg}\,\mu) \approx 6{*}10^{-3}\mathrm{m/c} << V_0$$

c) **[*1 балл*]** Перемещение

$$S=\int \frac{V(\varphi)d\varphi}{\omega}.$$

Подставляя

$$\mu=\frac{\pi}{2}-1,\varphi_0=\frac{\pi}{2},\theta=\pi,$$

Имеем

$$S=(\frac{\pi}{2}-1)(2+\frac{\pi^2}{8}-\pi)g/\omega^2 \approx 5.3*10^{-5}m.$$

d) **[*1 балл*]** Изменение скорости груза происходит, поскольку часть кинетической энергии тратится на работу против силы трения. В первом неисчезающем порядке изменение скорости определится из Закона изменения энергии, где работа силы трения рассчитана, предполагая скорость постоянной:

$$mV_0\Delta V=\int F_{friction}ds=-\int_{\varphi_0}^{\theta}\mu(\mathrm{Mg}+\mathrm{T}\cos\varphi)\,\mathrm{v}(\varphi)\frac{d\varphi}{\omega}.$$

По порядку величины

$$\frac{\Delta V}{V_0}\propto -\frac{\mu MgS}{mV_0^{2}}\propto -5*10^{-4}.$$

Точное значение: $-3*10^{-4}$

Задача 2
A

[5 *баллов*] Прямое вычисление тока через сопротивление *R*, (Рис.3) с помощью правил Кирхгофа очень трудоемкая задача и окончательному результату быстро не приведет.

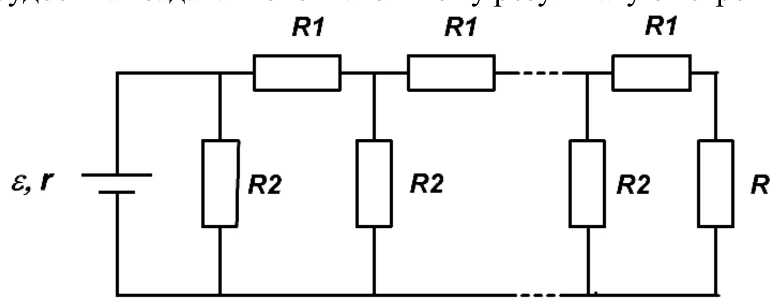

Рис.3

Поэтому сначала рассмотрим схему на Рис.4. Пусть при этом через сопротивление R_x. течет ток *I*. Тогда ток через сопротивление R_2 будет равен

$$I_2=\frac{R_x+R_1}{R_2}I$$

Соответственно ток через источник

$$I_B=\frac{R_x+(R_1+R_2)}{R_2}I$$

Второе правило Кирхгофа для внешнего контура

$$\frac{R_x+(R_1+R_2)}{R_2}I\cdot r+I\cdot(R_1+R_x)=\varepsilon$$

Отсюда найдем значение тока *I*, явно подставляя значения R_1 и R_2. Тогда

$$I=\frac{(2/3)\varepsilon}{(R_x+3)}$$

Если учесть, что внутреннее сопротивление батарейки равно *r = 3 Ом*, тогда можно записать

$$I=\frac{(2/3)\varepsilon}{R_x+3}=\frac{(2/3)\varepsilon}{R_x+r}=\frac{\varepsilon_1}{R_x+r},$$

то есть электрическая схема на Рис.4 эквивалентна схеме на Рис.5, где $\varepsilon_1=(2/3)\varepsilon$

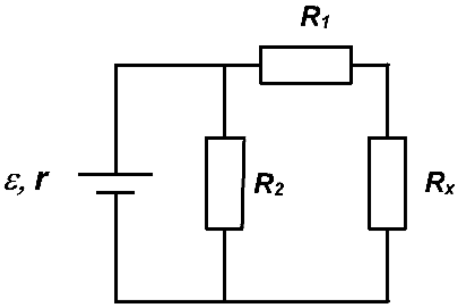

Рис.4

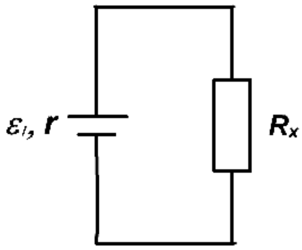

Рис.5

Применяя данное преобразование 17 раз, окончательный результат получим в следующем виде

$$I=\frac{(2/3)^{17}\varepsilon}{R_x+r}=\frac{(2/3)^{17}\cdot 10}{17+3}=0{,}5\cdot(2/3)^{17}=0{,}0005\ \text{A}$$

B

[3 *балла*] Свет проходит через линзу, отражается от зеркала и снова проходит через линзу. Следовательно, приставление к линзе плоского зеркала эквивалентно приставлению вплотную к линзе другой, точно такой же линзы. Расстояние от предмета до одиночной линзы и до системы линза-зеркало неизменно. Увеличение также одно и то же. Но Γ = f/d, следовательно, одинаковы и абсолютные расстояния до изображения (здесь f – расстояние до изображения, d – расстояние до предмета).

Фокусное расстояние линзы вдвое больше, чем фокусное расстояние системы линза-зеркало. Легко увидеть, что оба изображения не могут быть одновременно действительными или одновременно мнимыми. В самом деле, если изображения оба действительные, то

$$\Gamma_1=\frac{F_1}{d-F_1};\qquad \Gamma_2=\frac{F_2}{d-F_2}$$

и при $\Gamma_1=\Gamma_2$ должно быть $F_1=F_2$. Анологично, если оба изображения мнимые. Остается случай, когда одно изображение мнимое, а другое действительное. Поскольку $F_1>F_2=F_1/2$, то изображение, создаваемое одиночной линзой мнимое, а изображение, создаваемое системой линза-зеркало – действительное. (Для мнимого изображения должно быть $d<F$, для действительного $d>F$.) Тогда

$$|\Gamma_1| = \frac{F}{F-d}; \quad |\Gamma_2| = \frac{F/2}{d-F/2};$$

Далее с учетом $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$ получим d = 2F/3, откуда Г = 3.

Задача 3
Термоядерный синтез

a) **[1 балл]** В соответствии с законом Эйнштейна о эквивалентности массы и энергии, получим

$$E_0 = (m_D + m_T - m_{He} - m_n)c^2 = 2.973\cdot 10^{-12} \text{ Дж}$$

b) **[0.5 балла]** Та же самая энергия записывается в электрон-вольтах в виде

$$E_0 = 2.973\cdot 10^{-12}/1.6022\cdot 10^{-19} = 1.856\cdot 10^{7} \text{ эВ}.$$

c) **[1 балл]** Если пренебречь начальными энергиями реагирующих частиц, то совместное использование законов сохранения энергии и импульса дает известный ответ

$$E_n = \frac{m_{He}}{m_{He}+m_n} = 2.375\cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 1.482\cdot 10^{7} \text{ эВ},$$

$$E_{He} = \frac{m_n}{m_{He}+m_n} = 5.984\cdot 10^{-13} = 3.735\cdot 10^{6} \text{ эВ}$$

d) **[1 балл]** Для преодоления кулоновского барьера ядро должно обладать энергией

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Тогда

$$T = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 a k_B} = 1.115\cdot 10^{9}\,\text{K}.$$

e) **[3 балла]** Число реакций, протекающих в единицу времени в единице объема дается усреднением по максвелловскому распределению

$$<\sigma(\mathrm{v})\mathrm{v}> = \int_0^\infty \mathrm{v}\sigma(\mathrm{v}) f(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

с функцией

$$f(\mathrm{v}) = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \mathrm{v}^2 \exp\left(-\frac{\mu \mathrm{v}^2}{2k_B T}\right).$$

Вводя безразмерную величину $x = \mu \mathrm{v}^2 / 2k_B T$ и подставляя последнее выражение в предыдушее получаем

$$<\sigma(\mathrm{v})\mathrm{v}> = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_0\sqrt{\frac{2k_B T}{\mu}}\int_0^\infty x\exp(-x)\frac{\sigma}{\sigma_0}\left(x\frac{k_B T_0}{e10^3}\right)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_0\sqrt{\frac{2k_B T}{\mu}}\int_0^\infty f(x)dx.$$

Подынтегральная функция $f(x)$ строится с помощью графика для сечения и имеет следующий вид

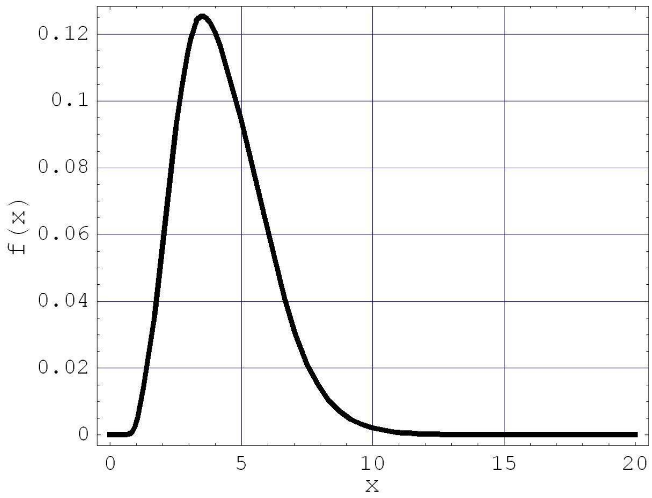

Рис.6

Оценка площади под кривой (Рис.6) дает

$$<\sigma(\mathrm{v})\mathrm{v}>=6.731\cdot10^{-23}\,\frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

f) **[3 балла]** Плазма состоит из электронов и ионов, которые теряют тепловую энергию за время τ. Тепловая мощность потерь дается выражением

$$P_{losses}=\frac{3nk_BT}{\tau}.$$

Мощность потерь должна быть меньше чем мощность, выделяемая в термоядерных реакциях (см. пункт e)

$$P_{fusion}=\frac{n^2}{4}<\sigma(\mathrm{v})\mathrm{v}>\left(E_{He}+\eta E_n\right).$$

Так, $P_{fusion}>P_{losses}$

$$n\tau>\frac{12k_BT_0}{(E_{He}+\eta E_n)<\sigma(\mathrm{v})\mathrm{v}>}\approx1.982\cdot10^{20}\,\frac{\text{с}}{\text{м}^3}.$$

Это так называемый критерий Лоусона.

g) **[2.5 балла]** Размерный анализ дает $\alpha=-1$ и $\beta=2$. Термическое давление плазмы

$$P_{thermal}=4nk_BT$$

должно быть компенсировано магнитным давлением снаружи

$$P_{magnetic}=\frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Итак $P_{thermal}=P_{magnetic}$

$$B=2\sqrt{2\mu_0nk_BT_0}=1.178\,\text{Тс}.$$