Струм розрядки конденсатора зумовлює виникнення сили Ампера:
$F = IBh$.
За невеликий проміжок часу Δt провідник отримує імпульс
$\Delta p = F\Delta t = I\Delta tBh = \Delta qBh$.
Тут Δq – заряд, який втратив конденсатор. Оскільки час розрядки конденсатора малий, за цей час провідник отримає імпульс
$p = qBh = CUBh$,
практично не змістившись із положення рівноваги. За законом збереження енергії

$$\frac{p^2}{2m} = 2\frac{kA^2}{2}.$$

Звідси амплітуда коливань

$$A = \frac{CUBh}{\sqrt{2mk}}.$$

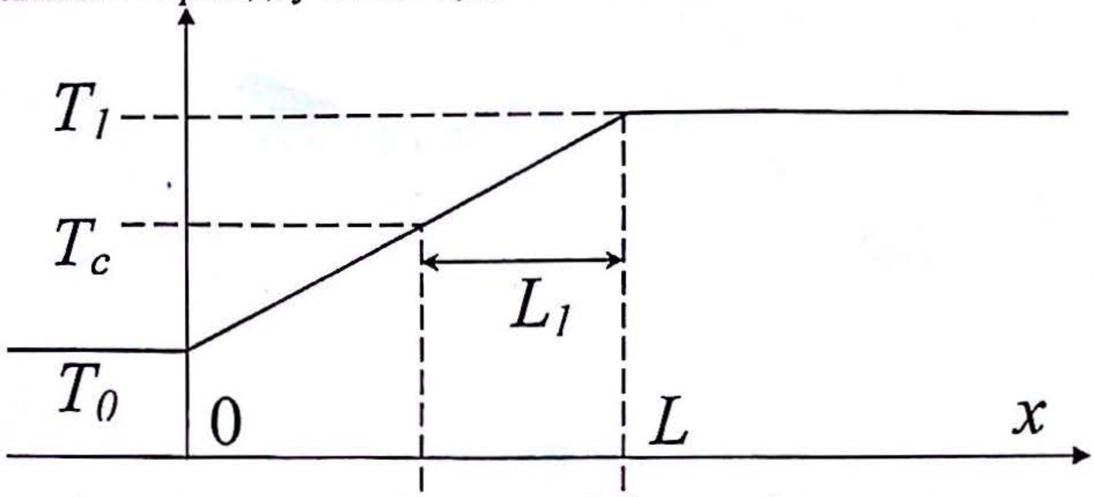
Ми не враховуємо потенціальну енергію в полі сили тяжіння, оскільки силу тяжіння вже зрівноважено за рахунок початкової деформації пружин.
Зазначимо, що з початком руху провідника змінюватиметься магнітний потік через контур, унаслідок чого виникатиме ЕРС індукції та індукційний струм. Цей струм нагріватиме провідник, що спричинить згасання коливань. Таким чином, амплітуда коливань дещо менша за отримане вище значення:
$A < \frac{CUBh}{\sqrt{2mk}}$.

/Гельфгат І.М./
/Гальчинський О.В/

Задача 2, 11 клас

1. Температура T_1 ланцюжка у стаціонарному стані визначається тепловим балансом $Q_+(T_1) = Q_-(T_1)$ звідки: $T_1 = Q_0/\gamma + T_0$ або $(Q_0 = \gamma(T_1 - T_0))$ **(1)**

2: Розглянемо перехідну область, довжиною L:



На ділянці з температурою T_1 тепловий баланс підтримується, що зрозуміло з (1) . На ділянці з температурою T_0 не існує теплообміну. На перехідній ділянці тепловий баланс забезпечується за рахунок додаткового тепла, що виділяється на ділянці L_1 $\quad Q_+ = Q_0 \cdot L_1 = Q_0 \cdot (T_1 - T_c) \cdot \dfrac{L}{(T_1 - T_0)}$ або $Q_+ = \gamma \cdot L (T_1 - T_c)$

$$Q_- = \frac{1}{2} \gamma \cdot L \cdot (T_1 - T_0) \quad \left(Q_- = \int_0^L \gamma (T_{(x)} - T_0) dx = \frac{1}{2} \gamma \cdot L \cdot (T_1 - T_0) \right) \text{або } Q_- = \frac{Q_0}{2} L$$

Прирівнявши праві частини, маємо:

$$T_c = \frac{T_1 + T_0}{2} \quad \text{або} \quad T_0 = 2 \cdot T_c - T_1 \quad \textbf{(2)}$$

3. Для визначення швидкості поширення фронту горіння запишемо рівняння теплового балансу. Додаткове тепло, що виділяється в перехідній області за час Δt

$$Q_\Sigma = \Delta t \cdot \left(\gamma \cdot L \cdot (T_1 - T_c) - \frac{1}{2} \gamma \cdot L \cdot (T_1 - T_0) \right)$$

Воно піде на нагрівання ділянки довжиною Δx:

$$Q_\Sigma = C \cdot \Delta x \cdot (T_1 - T_0)$$

Прирівнявши, можна отримати швидкість поширення фронту:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{L \cdot \gamma \cdot (2 \cdot (T_1 - T_c) - (T_1 - T_0))}{2 \cdot C \cdot (T_1 - T_0)}$$

Після перетворень:

$$V = \frac{L \cdot \gamma^2 \cdot (T_1 - 2 \cdot T_c + T_0)}{2 \cdot C \cdot Q_0}$$

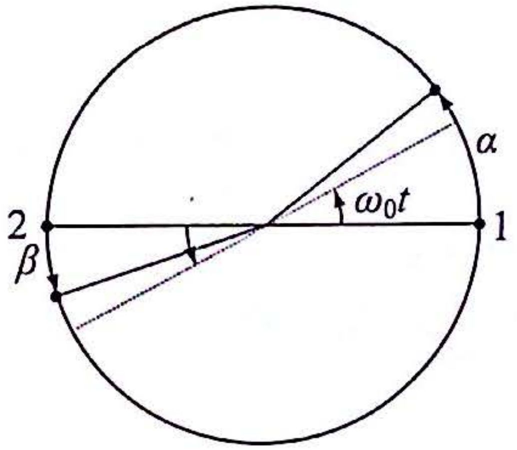
Або

$$V = \frac{L \cdot \gamma^2 \cdot (T_1 - T_c)}{C \cdot Q_0} - \frac{L \cdot \gamma}{2 \cdot C} \quad \textbf{(3)}$$

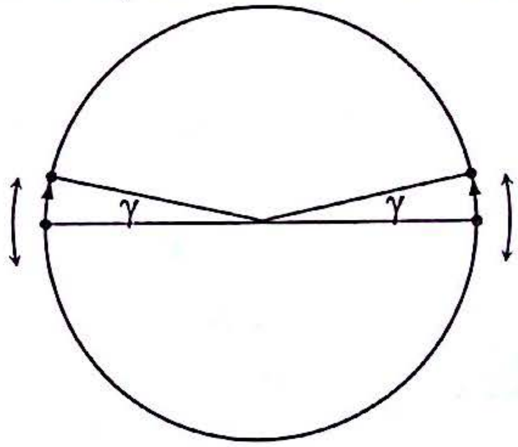
"**Рух по колу**" Дві однакові заряджені намистинки надіті на тоненьке горизонтальне кільце, зроблене зі спеціального непровідного матеріалу. Спочатку намистинки знаходяться у діаметрально протилежних точках кільця. Яку невелику швидкість v_0 слід надати одній із намистинок, щоб, зробивши повний оберт, вона на мить зупинилась у точці, з якої почала рух? Силами тертя, опором повітря і розмірами намистинок у порівнянні з розміром кільця знехтувати.

Відомо, що якби перед початком досліду кільце раптово зникло, частинки розлетілися б і (за умови невагомості) на віддаленні набули швидкості v_∞.

<u>Розв'язок.</u> Згідно умови задачі на систему двох частинок не діють зовнішні сили, які б могли змінити їх загальний момент імпульсу mv_0R відносно центру кільця. Отже $mv_0R = mR^2\dot{\alpha} + mR^2\dot{\beta}$, де $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ - кутові швидкості першої і другої частинок (див. Рис.1). У системі відліку, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega_0 = \dfrac{v_0}{2R}$, загальний момент імпульсу дорівнюватиме нулю: $0 = mR^2(\dot{\alpha} - \omega_0) + mR^2(\dot{\beta} - \omega_0)$, рух частинок виглядатиме як зустрічні коливання з кутом відхилення від положення рівноваги $\gamma = \alpha - \omega_0 t$ (див. Рис.1,2).



За умовою задачі першій частинці надають "невелику швидкість v_0", що означає можливість розглядати коливання системи як малі. Запишемо закон збереження енергії $2\dfrac{mR^2\dot{\gamma}^2}{2} + \dfrac{kq^2}{2R\cos\gamma} = E$ і продиференціюємо його за часом: $2mR^2\dot{\gamma}\ddot{\gamma} + \dfrac{kq^2\sin\gamma}{2R\cos^2\gamma}\dot{\gamma} = 0$.



Випадок, коли кутова швидкість $\dot{\gamma} = 0$, відповідає відсутності коливань, тому, скорочуючи на $\dot{\gamma}$, отримуємо $\ddot{\gamma} + \dfrac{kq^2\sin\gamma}{4mR^3\cos^2\gamma} = 0$. У випадку малих кутів $\sin\gamma \approx \gamma$, $\cos\gamma \approx 1$, маємо рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{\gamma} + \frac{kq^2}{4mR^3}\gamma = 0$$

з циклічною частотою $\omega = \sqrt{\dfrac{kq^2}{4mR^3}}$. Розв'язок цього рівняння

$\gamma(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$. Тоді залежність кута α повороту першої частинки від часу має вигляд:

$$\alpha(t) = \omega_0 t + A\sin\omega t + B\cos\omega t .$$

Сталі інтегрування A і B визначаємо з початкових умов: $\alpha(0)=0,\ \dot{\alpha}(0)=\frac{v_0}{R}$:

$$B = 0,\ A = \frac{1}{\omega}\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right) = \frac{v_0}{2\omega R} .$$

Отже

$$\alpha = \frac{v_0}{2R}\left(t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right), \quad \dot{\alpha} = \frac{v_0}{2R}(1+\cos\omega t).$$

Перша частинка зупиняється, коли її кутова швидкість $\dot{\alpha} = 0$. З останнього виразу знаходимо, що це відбувається, коли $\cos\omega t = -1$. Тобто, у моменти часу $t = \frac{1}{\omega}(\pi + 2\pi n)$ $(n = 0,1,2,3,..)$ відбуваються періодичні зупинки першої частинки. Кут α при цьому дорівнює $\alpha = \frac{\pi v_0}{2R\omega}(1+2n)$. За умовою задачі частинка повинна зупинитись, зробивши повний оберт. Отже $\alpha = 2\pi$. Дорівнюючи, знаходимо

$$v_0 = \frac{4R\omega}{1+2n} = \frac{2}{1+2n}\sqrt{\frac{kq^2}{mR}} .$$

Зазначимо, що з додаткової умови задачі слідує (за законом збереження енергії), що $\frac{kq^2}{2R} = 2\frac{mv_\infty^2}{2}$, або $\frac{kq^2}{mR} = 2v_\infty^2$.

Остаточна відповідь: $v_0 = \frac{2\sqrt{2}v_\infty}{1+2n}$.

Як бачимо, швидкість наче квантується, набуваючи зчислену множину значень. Значення початкової швидкості, які задовольняють малим n = 0, 1, 2 мабуть слід відкинути, оскільки, по-перше, за цих умов розглянута модель малих коливань є не дуже точною, і, по-друге, умову задачі відносно малості v_0 можна інтерпретувати, як порівняння v_0 з v_∞.

(П.А. Віктор)

"Ефект Казимира" Квантова теорія передбачає притягання незаряджених провідників у вакуумі (ефект Казимира), які знаходяться на малих відстанях один від одного. Оцініть, за якої відстані між двома паралельними металевими пластинами сила, що діє на одиницю площі пластини (своєрідній квантовий тиск), дорівнює атмосферному тиску 10^5 Па. Оцінку проведіть двома способами і порівняйте їх результати. Вказівки:
1. Проведіть розрахунки згідно наступної моделі. Уявіть, що за рахунок випадкових відхилень від рівноважного стану (флуктуацій) у поверхневому шарі пластини з'являється пара зарядів $+e$ і $-e$ (диполь), кожний з яких займає однаковий об'єм, один ближче до другої пластини, інший – далі. За рахунок електростатичної індукції на протилежній пластині виникає перерозподіл зарядів і, як наслідок, сила взаємодії. Проведіть розрахунки для однієї пари зарядів і припустіть далі, що такі флуктуації відбуваються безперервно вздовж всієї поверхні. 2. Проведіть оцінку з міркувань розмірностей, вважаючи, що квантовий тиск не повинен залежати від елементарного заряду e.
Довідкові дані: швидкість світла $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, стала Планка $\hbar = 10^{-34}$ Дж$\cdot$с, елементарній заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, електрична стала $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Розв'язок. Зробимо спочатку оцінку із розмірних міркувань. За умовою, відстань між пластинами значно менша їх розмірів, отже сила, що діє на одиницю площі, не повинна залежати від площі пластини. Вона може залежати від відстані між пластинами d, від сталої Планка, оскільки розглядається квантове явище, і, мабуть від швидкості світла, адже пластини є провідниками електричного струму, і, якщо ми не розглядаємо залежність сили від заряду, що логічно (пластини в цілому нейтральні), то слід врахувати фундаментальну сталу електромагнітного поля, яке пов'язано з носіями зарядів.

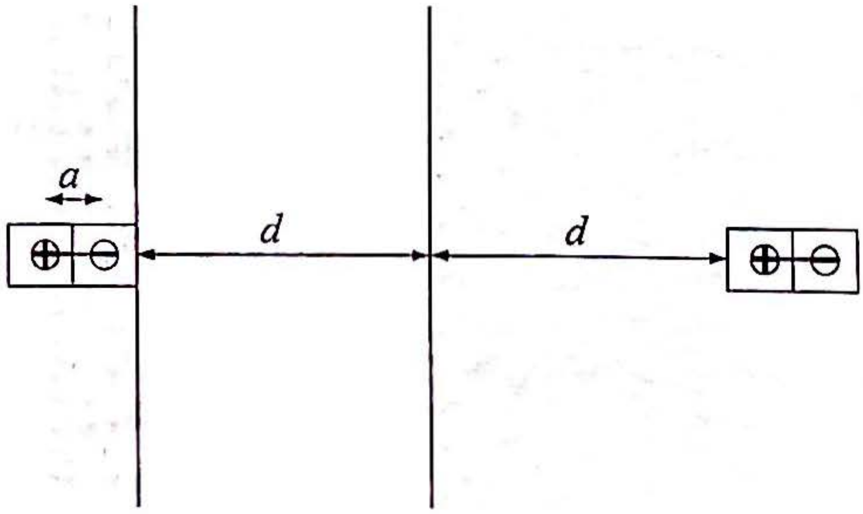
Запишемо розмірності: $[P] = \left[\dfrac{F}{S}\right] = \dfrac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$, $[d] = \text{м}$, $[\hbar] = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$, $[c] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Єдина розмірна комбінація: $P = \alpha \cdot \dfrac{c\hbar}{d^4}$, де α - безрозмірна стала. Як бачимо, тиск швидко зменшується з відстанню. Для оцінки замість безрозмірної сталої підставляємо одиницю:

$$d \approx \sqrt[4]{\frac{c\hbar}{P}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{м} \approx 2 \cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Відстань достатньо мала – менша за довжину світлової хвилі, але більша за розміри атомів

Тепер розглянемо запропоновану модель флуктуацій положень зарядів. Цікаво, що, незважаючи на знак заряду, який знаходиться ближче до другої пластини, завжди буде виникати сила притягання. Для знаходження цієї сили скористаємось методом електростатичних зображень (див.Рис.1). Для забезпечення еквіпотенціальності поверхні другої пластини у присутності зовнішнього заряду, на такій самій відстані від її поверхні, але поза нею, наче в дзеркалі, розміщаємо фіктивний заряд протилежного знаку. Зображення диполя буде диполем (див.Рис.1). Силу взаємодії між диполями можна знайти, розглянувши рівнодіючу з чотирьох сил попарних взаємодій точкових зарядів і врахувавши те, що $a \ll d$. *Можна зробити швидше: взяти диференціал від напруженості поля точкового заряду (отримуємо різницю напруженостей у двох сусідніх точках). Добуток на заряд диполя дасть силу, з якою точковий заряд взаємодіє з диполем. Якщо тепер поділити силу на величину точкового заряду, отримаємо напруженість поля від диполя у точці точкового заряду. Диференціал від отриманої напруженості – є різницею напруженості від диполя у двох сусідніх точках. Добуток на заряд другого диполя і дасть силу взаємодії двох диполів. Оскільки заряди у нас однакові, достатньо двічі взяти диференціал від напруженості точкового заряду.*

$$F = \frac{3}{32\pi}\frac{e^2 a^2}{\varepsilon_0 d^4}.$$



Насправді ми врахували не все, хоча для оцінки цього достатньо. *Ми не врахували, що зображення диполя в поверхні другої пластини повинне мати своє зображення в першій і так далі. Це дещо збільшує величину сили, але не дуже сильно, оскільки відстані стають все більшими (неважко переконатись, що детально розрахована сила відрізнятиметься від сили взаємодії двох диполів у нескінченну суму кубів обернених натуральних чисел). Далі ми не врахували, що диполі не обов'язково повинні бути зорієнтовані перпендикулярно до поверхонь. Будь-які інші напрями зменшують ефективну відстань* a, *а отже і силу. Таким чином, два явище частково компенсують одне одне.*

Якщо такі пари зарядів виникають всюди по поверхні обох пластин, тиск можна знайти, подвоївши $F = \frac{3}{32\pi}\frac{e^2 a^2}{\varepsilon_0 d^4}$ і поділивши на ефективну площу

a^2, яка приходиться на один диполь. Отже тиск $P \approx \dfrac{ke^2}{d^4}$ не залежить від гіпотетичних розмірів диполя. Оцінимо відстань

$$d = \left(\frac{ke^2}{P}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 7 \cdot 10^{-9}\ \text{м} \approx 10^{-8}\ \text{м}.$$

Дуже близько до першої оцінки, хоча тепер у формулу не входить стала Планка і швидкість світла. Дорівнюючи обидва вирази, знайдемо зв'язок між фундаментальними сталими:

$$\alpha c\hbar = ke^2.$$

Згідно Ейнштейну у подібних випадках за справу слід братися серйозно і шукати теоретичне виведення формули. Ще один Нобелівський лауреат Річард Фейнман зазначав, що наш світ дивно побудований – правильна теорія завжди має декілька тлумачень.

Зазначимо також, що $\dfrac{ke^2}{c\hbar} = \alpha \approx \dfrac{1}{137}$ - стала тонкої структури.

З точки зору квантової механіки навіть за відсутності речовини у вакуумі існують нульові коливання полів (фізичний вакуум). Між близькими провідними пластинами збуджуються ті коливання, які відповідають стоячим хвилям, ззовні – будь-які. Ця різниця і приводить до ефекту Казимира. Згідно розрахунків $P = \dfrac{\pi^2}{240}\dfrac{c\hbar}{d^4}$. На сьогодні ця формула експериментально підтверджена з великою точністю. Згідно неї

$$d \approx \sqrt[4]{\frac{\pi^2}{240}\frac{c\hbar}{P}} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{м} \approx 10^{-8}\ \text{м}.$$

11 клас, задача 5.

Розв'язок

Для того, щоб відбулося самозбудження, потрібно, щоб звук, вийшовши з динаміка, дійшов до мікрофона, був ним перетворений в змінну напругу, підсилився і знову вийшов з динаміка вже з більшою амплітудою, ніж на початку циклу (зворотній зв'язок). При цьому фаза коливань після обходу кола зворотного зв'язку має збігатися з фазою до обходу, бо інакше при багаторазовому обході сумарний сигнал прямуватиме до нуля.

Звук, вийшовши з динаміка, являтиме собою коливання тиску, що поширюються з швидкістю звуку u. Оскільки ці коливання породжуються мембраною площею S_0 і розходяться в кут α, на віддалі R від динаміка вони покриватимуть площу сферичного сегмента $S(R) = 2\pi R^2(1-\cos\alpha)$. Відповідно, інтенсивність зміни тиску в звуковій хвилі зменшиться у стільки ж разів, у скільки збільшилася площа, тобто для амплітуди змінної складової тиску маємо:

$$p(R) = \frac{p_0\sqrt{S_0}}{\sqrt{S(R)}} \qquad (1)$$

Після сприйняття цього звуку мікрофоном, отримаємо напругу амплітудою $U_1 = Ap(R)$, після підсилювача - $U_2 = kU_1 = kAp(R)$. Динамік перетворить цю напругу на тиск з амплітудою

$$p_1 = BU_2 = kABp(R) = kAB\frac{p_0\sqrt{S_0}}{\sqrt{S(R)}} = kAB\frac{p_0\sqrt{S_0}}{R\sqrt{2\pi(1-\cos\alpha)}}.$$

Для того, щоб ~~...~~ при обході відбулося самозбудження, потрібно $p_1 > p_0$, тобто

u – швидкість звуку.

$$\frac{kAB\sqrt{S_0}}{R\sqrt{2\pi(1-\cos\alpha)}} > 1. \qquad (2)$$

Частоту звуку можна визначити з умови незмінності фази при обході кола зворотного зв'язку. Звукова хвиля від динаміка буде поширюватися за законом $\cos[\omega(t-R/u)+\varphi]$, де φ - початкове значення фази. Амплітуда зміни тиску в цій хвилі спадатиме за законом (1). Оскільки за умовою мікрофон, підсилювач та динамік фазу не змінюють, уся зміна фази виникає за рахунок поширення звуку між динаміком та мікрофоном. Тобто зміна фази $\Delta\varphi = \omega R/u$. Щоб фаза не змінювалася, потрібно $\Delta\varphi = 2\pi N$, де N – ціле число. Отже, маємо $2\pi N = \omega R/u$, або $N = fR/u$. Таким чином, частоти генерованого звуку $f = Nu/R$, де N-ціле число. Слід визначити, яким може бути R при різних можливих розташуваннях співака на сцені. Очевидно, найменшою віддаль від динаміка до мікрофона буде, коли співак знаходиться якнайближче до динаміка, але в межах конуса, куди йде звук. Тоді мінімальне значення R визначатиметься різницею висот та кутом розходження α, $R_{\min} = (H-h)\mathrm{ctg}\alpha \approx 0.87\,м$. Максимальна віддаль буде визначатися амплітудною умовою (2), маємо $\frac{kAB\sqrt{S_0}}{\sqrt{2\pi(1-\cos\alpha)}} > R$, тобто має виконуватися умова $R < R_{\max} = \frac{kAB\sqrt{S_0}}{\sqrt{2\pi(1-\cos\alpha)}} \approx 10.9\,м$. Оскільки це перевищує розміри сцени, звук буде з'являтися завжди, коли мікрофон перебуватиме в конусі, куди йде звук від одного з динаміків. Враховуючи, що швидкість звуку u=331 м/с, отримуємо мінімальні та максимальні частоти для різних N:

N	1	2	3	4	5	6	7
fmin, Гц	30,37	60,73	91,1	121,47	151,83	182,2	212,57
fmax,Гц	371,91	743,82	1115,73	1487,64	1859,55	2231,46	2603,37

Відповідь: Як видно з таблиці, смуги для різних N перекриваються і, відповідно, самозбудження можливе на частотах, вищих за 30 Гц. Причому на різних динаміках будуть збуджуватися різні частоти (за винятком окремих точок).

Член-
/ Ю. Т. Кельник /
Заболотний ВФ