Тема: Геометрические задачи на экстремумы
Материалы к урокам по стереометрии

1. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно a и наклонено к плоскости основания под углом α. При каком значении угла α объём пирамиды будет наибольшим?

2. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

3. Найти наибольший объём конуса с данной образующей l.

4. Периметр осевого сечения цилиндра равен m. Найти наибольший объём такого цилиндра.

5. Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого был бы равен 72 см^3, а стороны основания относились бы как $1 : 2$. Какими должны быть размеры всех рёбер, чтобы полная поверхность ящика была наименьшая?

6. Объём правильной треугольной призмы равен V. Найти сторону a основания, при которой полная поверхность призмы будет наименьшая.

7. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $0,5$ м, боковая поверхность призмы равна $0,96$ м^2. Какими должны быть катеты основания, чтобы сумма всех рёбер призмы была наименьшей?

8. В правильной треугольной призме расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно l. При какой длине высоты призмы её объём будет наибольшим? Найти это наибольшее значение объёма.

9. Среди всех правильных шестиугольных призм, у которых периметр боковой грани равен l, найти ту, которая имеет наибольший объём. Чему равна высота этой призмы?

10. В конус с заданным объёмом V вписан цилиндр так, что одно его основание лежит в плоскости основания конуса, а окружность второго основания касается боковой поверхности конуса. Найти объём цилиндра наибольшего объёма.

11. Расстояние от центра окружности, вписанной в основание правильной треугольной пирамиды, до боковой грани пирамиды равно a. Двугранный угол при основании пирамиды равен φ. Определить площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении φ площадь боковой поверхности наименьшая?

12. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды наклонено к плоскости её основания под углом φ. В пирамиду вписан куб, длина ребра которого равна a, так, что одна его грань лежит в плоскости основания пирамиды, а четыре вершины противоположной грани – на боковых рёбрах пирамиды. Вычислить объём пирамиды. При каком φ значении объём пирамиды наименьший?

13. Основание треугольной пирамиды – равнобедренный прямоугольный треугольник. Все двугранные углы при основании пирамиды равны φ. В пирамиду вписан цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого его основания касается боковых граней пирамиды. Радиус основания цилиндра равен r, высота цилиндра $3r$. Вычислить объём пирамиды. При каком значении φ объём пирамиды наименьший?

14. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом φ. В пирамиду вписана правильная треугольная призма так, что одно её основание лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания – на боковых рёбрах пирамиды. Каждое ребро призмы равно a. Вычислить объём пирамиды. При каком значении φ объём пирамиды наименьший?

15. Основание треугольной пирамиды, боковые рёбра которой наклонены к плоскости основания под углом φ, – равнобедренный прямоугольный треугольник. В пирамиду вписана прямая треугольная призма так, что одно её основание лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания – на боковых рёбрах пирамиды. Сторона основания призмы, лежащая на гипотенузе основания пирамиды, равна a, высота призмы $2a$. Вычислить объём пирамиды. При каком φ значении объём пирамиды наименьший?

16. Найти высоту H цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса R.

17. Найти высоту конуса H наименьшего объёма, который можно описать около шара радиуса R.

18. Какой должна быть высота H конуса, вписанного в шар радиуса R, для того, чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

19. Площадь сферы равна S. Около этой сферы описан конус. Какова наименьшая площадь поверхности этого конуса?

20. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы её объём был наибольшим? Найти это наибольшее значение объёма пирамиды.

21. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, имеющая наибольший объём. Найти двугранный угол при ребре основания пирамиды.

22. В конус высотой H и радиусом основания R вписана правильная шестиугольная призма так, что одно её основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат боковой поверхности конуса. Какой должна быть высота h призмы, чтобы её объём был наибольшим? Найти это наибольшее значение V объёма.

23. Вокруг шара радиуса R описана правильная треугольная пирамида высотой H. Найти объём V пирамиды. При каком значении H этот объём принимает наименьшее значение? Найти этот наименьший объём $V_{\min}$.

24. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида высотой H. Найти объём V пирамиды. При каком значении H этот объём принимает наибольшее значение? Найти этот наибольший объём $V_{\max}$.

25. Правильная треугольная призма вписана в шар радиуса R. Найти сторону основания и высоту призмы, имеющей:

а) наибольший объём; б) наибольшую площадь боковой поверхности.

26. Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около полушара радиуса R так, что центр основания конуса совпадает с центром полушара.

27. Конус объёма V описан около шара. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. При каком значении α объём шара наибольший?

28. От прямоугольного листа картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезали по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеили открытую прямоугольную коробку. Какой должна быть сторона вырезанных квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим?