

Решения

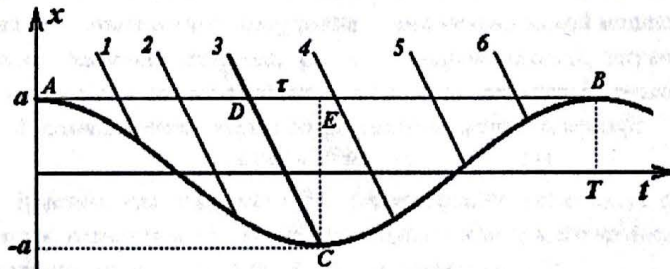
1 Понятно, что после удара шарик подпрыгнет выше первоначального уровня, если после удара модуль его скорости станет больше. В свою очередь это произойдет в том случае, когда в момент удара платформа движется вверх, навстречу шарiku. Так как время бросания произвольно, то, казалось бы, момент попадания шарика на платформу так же произволен, поэтому приблизительно половина шариков получит приращение скорости, а вторая половина свою скорость уменьшит. Однако рассмотрим повнимательнее кинематические законы движения шариков и платформы. Пусть закон движения платформы описывается функцией

$$x_0 = a \cos \omega t. \quad (1)$$

Так как амплитуда колебаний в сто раз меньше высоты падения шарика, можно пренебречь изменением скорости шарика, когда он движется в пределах амплитуды колебания, поэтому его закон движения можно описать линейной функцией

$$x = b - v_0 t, \quad (2)$$

где $v_0 = \sqrt{2gh}$ - скорость движения шарика, b - некоторая константа, зависящая от момента бросания шарика (ее следует считать некоторой случайной величиной). Ясно, что для решения задачи достаточно рассмотреть один период колебания платформы.



На рисунке изображены графики законов движения платформы (синусоида) и некоторых шариков (наклонные прямые линии). Из-за случайности времени бросания шарик будут достигать верхнего уровня колебаний платформы в произвольные случайные моменты времени. Иными словами, график закона движения шарика пересекает прямую AB в произвольный момент времени. Однако, как хорошо видно на рисунке, моменты столкновений (пересечений с синусоидой) распределяются не равномерно. Так столкновение с движущейся вверх платформой произойдет в том случае, когда линия закона движения шарика пересечет AB на участке DB , который больше отрезка AD (в этом случае произойдет пересечение со спадающей ветвью синусоиды). «Критической» является прямая пересекающая синусоиду в нижней точке. Таким образом, доля шариков, которые увеличат свою скорость в результате столкновения, равна

отношению длин отрезков DB и AB . Последний из них равен периоду колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$. Также легко определить из закона движения величину отрезка DE :

$$\tau = \frac{2a}{v_0}. \quad (3)$$

Окончательно, доля шариков, которые подпрыгнут выше исходного уровня, определяется формулой

$$\eta = \frac{\tau + \frac{T}{2}}{T} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2av}{\sqrt{2gh}} \approx 0,73. \quad (4)$$

При увеличении частоты колебаний методика расчета может претерпеть существенные изменения.

Так график закона движения шарика может пересечь синусоиду в нескольких точках (см. рис.). Видно, что на синусоиде появляется «мертвая зона» - участок DCE , в котором не может вообще произойти столкновения - шарик не может догнать платформу. Шарик уменьшит свою скорость, если пересечение с синусоидой произойдет на малом участке AD , где D точка касания прямой закона движения шарика с синусоидой. Рассмотрим этот участок подробнее.

Пусть D точка касания (момент этого касания обозначим t_1). Тогда интервал времени достижения верхнего уровня колебаний платформы, в течение которого столкновение приведет к уменьшению скорости, изобразится отрезком AB (длину этого участка обозначим τ). В этом случае доля шариков, увеличивших скорость, рассчитывается по формуле

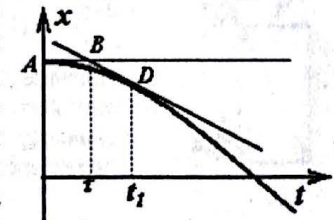
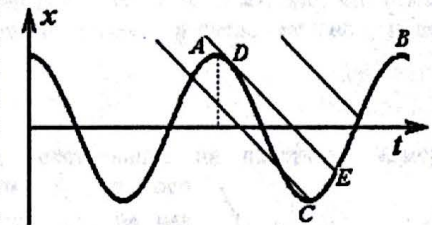
$$\eta = \frac{T - \tau}{T}, \quad (5)$$

из которой следует, что величина интервала AB должна быть равна

$$\tau = (1 - \eta)T = (1 - \eta) \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6)$$

Закон движения шарика (2), при котором он достигает точки $x = a$ в момент времени τ , имеет вид

$$x = a - v_0(t - \tau). \quad (7)$$



Чтобы в момент времени t_1 произошло касание (как шарика с платформой, так и графиков их законов движения) необходимо, чтобы в этой части были равны функции и их производные, то есть

$$\begin{cases} a \cos \omega t_1 = a - v_0(t_1 - \tau); \\ -a \sin \omega t_1 = -v_0 \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения (8) являются системой с двумя неизвестными величинами - ω, t_1 , поэтому может быть решена. К сожалению, эта система не может быть решена «в квадратурах», однако величина τ и, следовательно, t_1 являются малыми, поэтому можно воспользоваться приближенными формулами для тригонометрических функций

$$\sin \omega t_1 \approx \omega t_1, \quad \cos \omega t_1 \approx 1 - \frac{(\omega t_1)^2}{2}. \quad (9)$$

В этом приближении система уравнений (8) легко решается (конечно, с учетом выражения (6)) -

$$v = \frac{v_0}{8\pi^2 a(1-\eta)} \approx 0,56 \cdot 10^3 \text{ Гц}. \quad (10)$$

2 Мощность тока в цепи двигателя IU (I -сила тока в цепи двигателя, U -напряжение контактной цепи) равна сумме механической мощности βv^2 (v -скорость движения трамвая, βv - сила сопротивления), затрачиваемой на преодоление сил сопротивления, и мощности джоулевых тепловых потерь $I^2 R$ (R -полное электрическое сопротивление цепи двигателя):

$$IU = \beta v^2 + I^2 R. \quad (1)$$

Заметим, что слагаемое βv^2 равно произведению силы тока на ЭДС индукции, возникающей в якоре электродвигателя при его вращении.

Выразим полезную мощность $P = \beta v^2$ из уравнения (1):

$$\beta v^2 = IU - I^2 R. \quad (2)$$

Из вида зависимости $P(I)$ следует, что полезная мощность достигает максимального значения при $I = \frac{U}{2R}$, причем $P_{\max} = \frac{U^2}{4R}$.

При движении трамвая со скоростью v_0 , меньшей максимальной скорости, выполняется соотношение

$$\beta v_0^2 = I_0 U - I_0^2 R, \quad (3)$$

а при движении с максимальной скоростью справедливо

$$\beta v_{\max}^2 = \frac{U^2}{4R}. \quad (4)$$

Решив уравнения (3)-(4), определим сопротивление цепи

$$R = \frac{U}{2I_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_{\max}^2}} \right). \quad (5)$$

Два решения соответствуют тому, что полезная мощность квадратично зависит от силы тока (см. уравнение (2)), следовательно, ее одно и то же значение может быть достигнуто при двух значениях сопротивления цепи.. При остановке трамвая сила тока в цепи двигателя станет равной

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2I_0}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_{\max}^2}}}.$$

Два рассчитанных по этой формуле значения силы тока равны 600 А и 32 А. Для выбора одного из значений рассчитаем по формуле (4) максимальную мощность, достигаемую при данных значениях сопротивления и напряжения в цепи. Получаем 99 кВт при напряжении 660 В и токе 600 А и 5,3 кВт при 660 В и токе 32 А. Очевидно, что реальным является первое значение мощности трамвая, а следовательно, и первое значение силы тока, т.е. 600 А.

Ответ: $I = 600 \text{ А}$

3 Рассмотрим внешние силы, действующие на пластинку номер k , расположенную на расстоянии x_k от оси вращения. Помимо силы тяжести mg , на нее действует со стороны магнитного поля сила Ампера $F = IBl$. Условие равновесия обоймы сводится к равенству суммарных моментов сил тяжести и сил Ампера

$$\sum_k mg x_k \sin \alpha = \sum_k I_k B l x_k \cos \alpha. \quad (1)$$

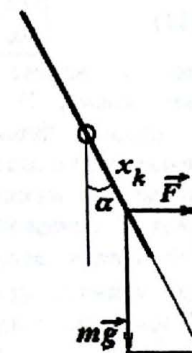
Так как пластинки одинаковы и соединены параллельно, а внутреннее сопротивление источника значительно превышает сопротивление пластинок, то сила тока через каждую пластинку может быть найдена по формуле

$$I_k = \frac{\varepsilon}{nr}, \quad (2)$$

где n - общее число вложенных пластинок.

Из уравнений (1)-(2) находим положение равновесия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon B l}{n r m g}. \quad (3)$$



4. Вычислим силу взаимодействия между двумя атомами как функцию расстояния между ними

$$f = -U' = \frac{12a}{r^{13}} - \frac{6b}{r^7}. \quad (1)$$

Положению равновесия соответствует нулевая сила взаимодействия (или, что равносильно, минимум потенциальной энергии). Поэтому равновесное расстояние между атомами (период решетки) найдем из условия $f = 0$, из которого следует

$$r_0 = \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2)$$

На один атом в кубической кристаллической решетке приходится объем r_0^3 , следовательно плотность кристалла рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{m}{r_0^3} = m \sqrt{\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

Вычислим энергию связи, приходящуюся на один атом. Так как атом взаимодействует с $n=6$ ближайшими соседями, то его потенциальная энергия

$$u = \frac{n}{2} U(r_0) = -\frac{3b^2}{4a}, \quad (4)$$

где учтено, что функция $U(r)$ описывает энергию взаимодействия двух атомов. Для перехода из кристаллического в газообразное состояние нужно сообщить кристаллу энергию, необходимую для разрыва всех связей, иными словами, удельная теплота сублимации рассчитывается по формуле

$$\lambda = -\frac{u}{m} = \frac{3b^2}{4am}. \quad (5)$$

При отклонении атомов от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть атомы в исходное положение. При малых деформациях эта сила пропорциональна деформации. Для ее вычисления преобразуем формулу (1) при условии $r = r_0 + x$, где x - малое отклонение от положения равновесия. В ходе преобразований необходимо использовать приближенную формулу, приведенную в условии задачи с учетом членов первого порядка малости

$$f = \frac{12a}{(r_0 + x)^{13}} - \frac{6b}{(r_0 + x)^7} = \frac{12a}{r_0^{13}} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-13} - \frac{6b}{r_0^7} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-7} \approx -\frac{36b}{r_0^7} \cdot \frac{x}{r_0}. \quad (6)$$

В поперечном сечении кристалла на один атом приходится площадь r_0^2 , следовательно, механическое напряжение в кристалле определяется формулой

$$\sigma = \frac{f}{r_0^2} = \frac{36b}{r_0^9} \cdot \frac{x}{r_0} = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{r_0}. \quad (7)$$

Сравнивая с законом Гука $\sigma = E\varepsilon$ (где $\varepsilon = \frac{x}{r_0}$ - относительная деформация), получим выражение для модуля Юнга

$$E = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 12,8b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

Сила взаимодействия между атомами принимает максимальное значение при некотором расстоянии r_1 . Если расстояние между атомами превысит r_1 , то сила взаимодействия (притяжения) начнет уменьшаться и, следовательно, при постоянной внешней силе кристалл разрушится. Найдем значение r_1 из условия $f' = 0$:

$$f' = -\frac{12 \cdot 13a}{r^{14}} + \frac{6 \cdot 7b}{r^8} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) находим расстояние r_1 , при котором сила притяжения максимальна

$$r_1 = \left(\frac{26a}{7b}\right)^{\frac{1}{6}}. \quad (10)$$

Таким образом, максимальное относительное удлинение кристалла до разрушения определяется соотношением

$$\varepsilon_{\max} = \frac{r_1 - r_0}{r_0} = \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,11. \quad (11)$$

При таком удлинении сила взаимодействия и соответствующее механическое напряжение (которое и является предельной прочностью) определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{U'(r_1)}{r_0^2} = \frac{18}{\sqrt{2}} \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{7}{6}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 26,2b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

Термическое расширение твердых тел связано с увеличением кинетической энергии колеблющихся атомов. С ростом температуры увеличивается диапазон изменения расстояний между атомами. Существенным фактором является несимметричность потенциальной кривой - максимальное отклонение от положения равновесия в большую сторону превышает отклонение в меньшую сторону. Обозначим максимальное и минимальное расстояния между атомами в ходе колебаний r_1 и r_2 , соответственно. Тогда среднее расстояние между атомами может быть оценено как среднее арифметическое между этими величинами. Расстояния r_1 и r_2 являются корнями уравнения

$$U(r) = U(r_0) + kT, \quad (13)$$

где kT - средняя энергия одномерного колебательного движения атомов в кристаллической решетке (k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура). Если обозначить $x = r - r_0$ и принять во внимание формулу (20), то уравнение (13) примет вид

$$ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} - kT = 0, \quad (14)$$

корни которого находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{b}{2a} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4akT}{b^2}}\right). \quad (15)$$

Теперь можно найти значения r_1 и r_2 :

$$r_{1,2} = r_0(1 \pm \delta)^{\frac{1}{\delta}} \approx r_0(1 \mp \frac{\delta}{6} + \frac{7}{72}\delta^2), \quad (16)$$

где обозначено $\delta = \sqrt{\frac{4arT}{b^2}}$ и использовано разложение степенной функции с учетом членом второго порядка малости. Среднее расстояние между атомами найдем, усредняя r_1 и r_2 :

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_0 \left(1 + \frac{7}{72}\delta^2\right) = r_0 \left(1 + \frac{7akT}{18b^2}\right). \quad (17)$$

Сравнивая выражение (17) с формулой термического расширения $l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$, находим линейный коэффициент термического расширения

$$\alpha = \frac{7ak}{18b^2}. \quad (18)$$

5. Степень почернения фотопластинки пропорциональна экспозиции - произведению интенсивности света на время засветки. Если интенсивность света изменяется в течении времени фотографирования, то для вычисления степени почернения необходимо просуммировать экспозиции по тем промежуткам в течении которых интенсивность света постоянна. В разных точках трека световые импульсы перекрываются по разному (либо не перекрываются вовсе). В момент перекрытия импульсов интенсивность возбуждения возрастает в 2 раза, следовательно, интенсивность люминесценции возрастает в 4 раза. Этим объясняется наличие области большего почернения на фотографии трека. Заметим, что в случае обычной люминесценции или рассеяние «след» импульса имел бы постоянную засветку.

Построим графики законов движения передних и задних фронтов первого, распространяющегося вправо, и второго, распространяющегося влево, импульсов:

1) передний фронт первого импульса $x_1 = ct$;

2) задний фронт первого импульса $x_2 = c(t - \tau)$;

3) передний фронт второго импульса $x_3 = l - ct$;

4) задний фронт второго импульса $x_4 = l - c(t - \tau)$.

В этих уравнениях c - скорость света в растворе; l - длина кюветы; τ - длительность импульса. Как видно из графиков импульсы перекрываются в области от точки A до точки C , а в точке

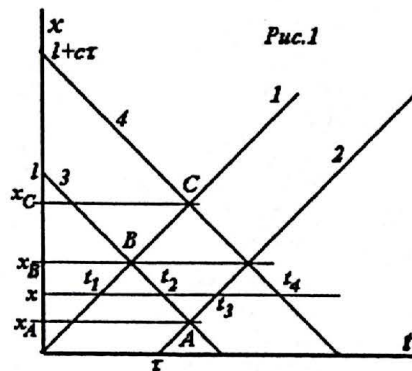


Рис.1

B - перекрытие импульсов полное. Координаты этих точек легко найти из уравнений движения:

$$x_A = \frac{l - c\tau}{2}; x_B = \frac{l}{2}; x_C = \frac{l + c\tau}{2}.$$

При $x < x_A$ возбуждающие импульсы не перекрываются, поэтому суммарная засветка пленки в этих точках равна $E_1 = 2bl_0^2\tau$, где b - некоторый постоянный коэффициент.

При $x_A < x < x_B$ степень засветки следует рассчитывать по формуле

$$E_2 = bl_0^2(t_2 - t_1) + b(2l_0)^2(t_3 - t_2) + bl_0^2(t_4 - t_3),$$

где смысл используемых моментов времени ясен из рисунка. Эти моменты времени также легко могут быть найдены из законов движения. Аккуратный подсчет засветки в этой области приводит к результату

$$E_2 = bl_0^2(4\tau - 2\frac{l - 2x}{c}).$$

При $x > x_B$ функция отображается симметрично - для чего следует заметить величину $l - cx$ на $l + cx$. Таким образом полностью искомая зависимость степени почернения от координаты имеет вид:

$$E = \begin{cases} 2bl_0^2, & \text{при } x < \frac{l - c\tau}{2} \\ bl_0^2(4\tau - 2\frac{l - 2x}{c}), & \text{при } \frac{l - c\tau}{2} < x < \frac{l}{2} \\ bl_0^2(4\tau - 2\frac{l + 2x}{c}), & \text{при } \frac{l}{2} < x < \frac{l + c\tau}{2} \\ 2bl_0^2, & \text{при } x > \frac{l + c\tau}{2} \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис.2. Легко заметить, что разность $x_C - x_A = c\tau$, т.е. ширина максимума равна длине импульса в растворе, откуда без труда вычисляется его длительность.

В реальном эксперименте такого типа неизбежны флуктуации степени почернения. Поэтому необходимо на приведенном графике «усреднить» функциональную зависимость, что проделано на рис.3.

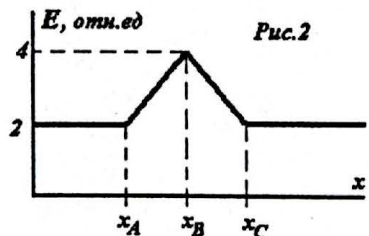


Рис.2

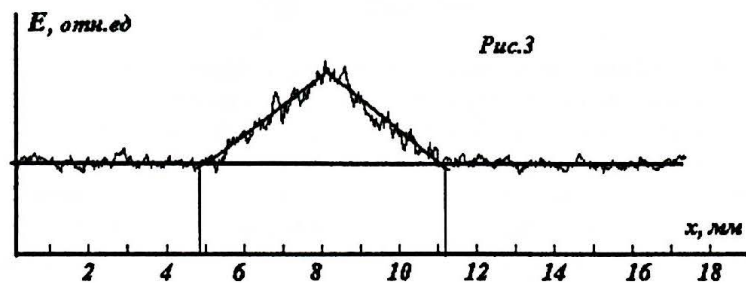


Рис.3

Из этого графика находим, что длина импульса примерно равна $\delta l \approx 6 \text{ мм}$, следовательно, его длительность

$$\tau = \frac{\delta l}{c} = \frac{n \delta l}{c_0} \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ с} = 30 \text{ нс},$$

где $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света в вакууме.