1. Маленький шарик массой m висит неподвижно на невесомой нерастяжимой нити длиной l. Шарику толчком сообщают такую горизонтальную скорость, что он в итоге поднимается над начальной точкой на максимальную высоту $h_0 < l$. Найдите силу натяжения нити в момент, когда шарик находился на высоте $h=h_0/2$

Решение (рисунок – 1, выкладки (з-н Ньютона, ЗСЭ) – 2, правильный ответ – 2):

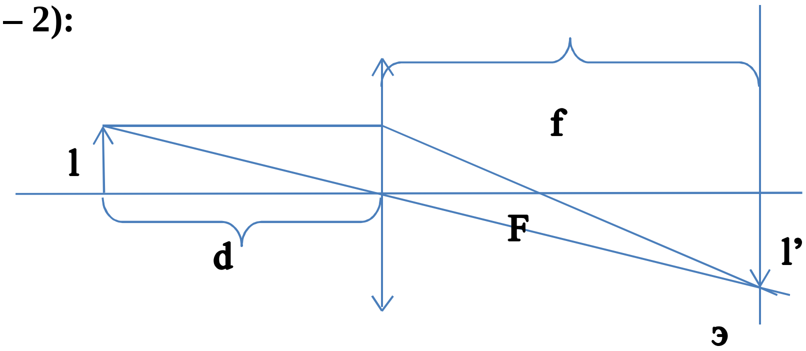
Пусть φ – угол отклонения нити от вертикали. Тогда второй закон Ньютона для шарика имеет вид: $T - mg\cos\varphi = m v^2/l$; а закон сохранения энергии $m v^2/2 = mg(h_0 - h)$; $\cos\varphi = (l - h)/l$. Из этих уравнений получаем зависимость силы натяжения нити T от высоты h:

$T = mg(l + 2h_0 - 3h)/l;$

При $h=h_0/2$ имеем $T = mg(1 + h_0/2l)$.

2. С помощью тонкой линзы на экране получено увеличенное изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние между предметом и экраном в 4.5 раза больше фокусного расстояния линзы. С каким увеличением изображается предмет?

Решение(рисунок – 1, формулы (линзы) – 1, выкладки – 1, правильный ответ – 2):



Расстояние от предмета до экрана равно f + d = 4.5 F => F = (f + d) / 4.5. По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, подставляя в которую выражение для F, получим $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{4.5}{f+d}$

$$\left(1+\frac{d}{f}\right)\left(1+\frac{f}{d}\right)=4.5$$

$$X = \frac{f}{d}$$

$$X^2 - 2.5X + 1 = 0$$

$$X_1 = 0.5$$

$$X_2 = 2$$

Из подобия треугольников l'/l = f/d =2. Предмет изображается увеличенным в 2 раза.

3. Проводник с сопротивлением R = 3000 Ом состоит из двух последовательно соединенных частей: угольного стержня и проволоки, имеющих температурные коэффициенты сопротивления $\alpha_1 = -10 \cdot 10^{-3}$ K^{-1} и

$\alpha_2 = 2 * 10^{-3}\ K^{-1}$. Какими следует выбрать сопротивления этих частей, чтобы общее сопротивление проводника R не зависело от температуры.

Решение(формулы(для сопротивления) – 1, рассуждение и выкладки – 2, правильный ответ – 2):

При последовательном соединении $R = R_1 + R_2 = R_{01}(1 + \alpha_1 t) + R_{02}(1 + \alpha_2 t)$

Чтобы общее сопротивление проводника R не зависело от температуры необходимо

$$\begin{cases} R_{01}\ \alpha_1 t + R_{02}\ \alpha_2 t = 0 \\ R_{01} + R_{02} = R \end{cases}$$

$R_{01} = -R\ \alpha_2/(\alpha_1 - \alpha_2) = 500$ (Ом)

$R_{02} = R\ \alpha_1/(\alpha_1 - \alpha_2) = 2500$ (Ом)

4. В расположенном горизонтально цилиндре слева от закрепленного поршня находится 1 моль идеального газа. В правой части цилиндра вакуум, а пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра, находится в недеформированном состоянии. Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды. Когда поршень освободили, объем, занимаемый газом, увеличился вдвое. Как изменится температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы.

Решение(формулы – 1, рассуждения и обоснование – 2, ответ – 2 (для температуры и давления по 1)):

Второе начало термодинамики:

$Q = \Delta U + A$ (1)

$Q = 0$ – поскольку сосуд теплоизолирован

Пусть вначале температура газа была T_1 давление p_1 и объем V_1, а после того, как поршень освободили и установилось равновесие, параметры газа приняли значения T_2, p_2 и V_2, причем $V_2 = 2V_1$. Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре, то ее изменение пропорционально изменению температуры газа: $\Delta U = C\ (T_2 - T_1)$. Работа, совершенная газом, равна изменению потенциальной энергии деформированной пружины: $A = k\ x^2/2$, где x – смещение поршня.

Сила упругости пружины $F = kx$ равна силе давления газа p_2S: $kx = p_2S$, где S — площадь поверхности поршня.

Давление газа связано с его температурой уравнением состояния:

$p_2V_2 = RT_2$ (2)

$\Delta V = V_1 = S\,x \Rightarrow V_2 = 2\,S\,x$

$p_2 = kx / S$

Подставляя в (2) получим $kx^2 = RT_2/2$, т.е. $A = RT_2/4$

Теперь из (1) , которое перепишется в виде $C\ (T_2 - T_1) + RT_2/4 = 0$ находим

$T_2 = T_1 / (1+R/4C)$, т.е. температура уменьшится.

Разделив на уравнение состояния получим

$p_1 / p_2 = 2\ T_1 / T_2 = 2\ (1+R/4C)$

$p_2 < p_1$

5. В глубинах космоса, вдали от всех других тел, летает жидкая планета из ртути – огромный однородный шар. Ускорение свободного падения на поверхности планеты составляет 1000м/с^2. Стальной шарик объёмом 1 см^3 находится на расстоянии трети радиуса планеты от её центра. Найдите полную силу, которая действует на шарик. Плотность ртути 13,6 г/см^3, плотность стали 7,8 г/см^3.

Решение (формулы (з–н всемирного тяготения, Архимеда) – 2, выкладки (гравитационное действие сф. слоя) – 2, правильный ответ – 1):

$mg = GMm/R^2$, $M = \rho_{рт}\ 4/3\ \pi R^3 \Rightarrow R = 3g / (4\ \rho_{рт}\ G\ \pi)$

$R = 3 * 1000 / (4 * 13600 * 6.67 * 10^{-11} * 3.14) = 263176$ (км)

Поскольку сферический слой не оказывает гравитационного воздействия на тела внутри него, то сила гравитационного притяжения равна:

$F_т = m\,g' = \frac{GmM'}{\left(\frac{R}{3}\right)2} = \frac{4}{9} G\, m\, \rho_{рт}\, \pi\, R$, учитывая выражение для R получим $g' = g/3$

$F_т = mg' = g\,m / 3 = \rho_{ст} \frac{g}{3} V_ш$

Сила Архимеда: $F_A = \rho_{рт} \frac{g}{3} V_ш$

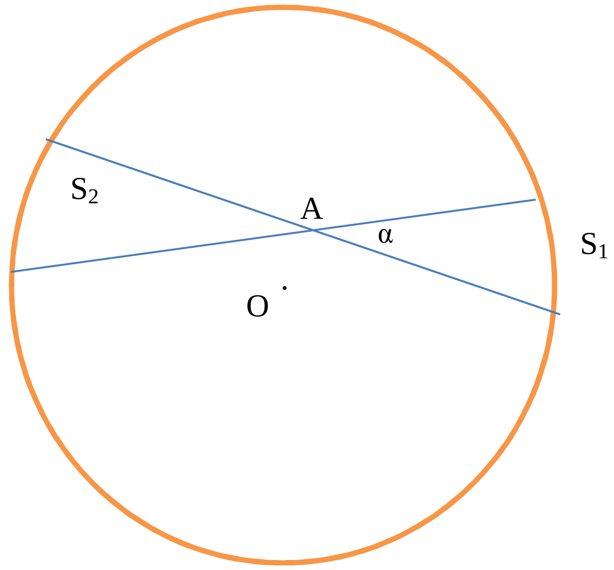
$F_\Sigma = (\rho_{рт} - \rho_{ст}) \frac{g}{3} V_ш = (13{,}6 - 7{,}8)*1*10^{-3}*1000/3 = 1{,}9$ (Н) (от центра планеты)

Почему сферический слой не оказывает гравитационного воздействия на тела внутри него

Рассмотрим массивную сферу массой *M*, радиуса *R*. Ее центр расположен в точке *O*.

Поверхностная массовая плотность сферы $\lambda = \frac{M}{4\pi R^2}$.

Рассмотрим произвольную точку *A* внутри сферы. Построим два конуса с малыми углами при вершине. Вершины конусов лежат в точке A, а образующие конусов лежат на одних и тех же прямых. На рисунке изображено сечение сферы, содержащее точку *A*.



Поскольку углы при вершинах конусов α малы, то можно считать, что основание конусов не часть сферы, а круг.
Расстояние от А до основания первого конуса $r_1 = R - AO$, а до второго $r_2 = R + AO$.

Площади оснований конусов $S_1 \sim \pi \cdot \left(r_1 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \right)^2$ и $S_2 \sim \pi \cdot \left(r_2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \right)^2$, соответственно.
Тогда сила, действующая на точку A со стороны основания первого конуса

$$F_1 = \frac{G\lambda S_1 m}{r_1^2} \sim \frac{G\lambda m\pi \left(r_1 tg \alpha/2 \right)^2}{r_1^2} = G\lambda m\pi tg^2\frac{\alpha}{2},$$

где m – масса пробного тела, расположенного в точке A.
А сила действующая со стороны основания второго конуса

$$F_2 = \frac{G\lambda S_2 m}{r_2^2} \sim \frac{G\lambda m\pi \left(r_2 tg \alpha/2 \right)^2}{r_2^2} = G\lambda m\pi tg^2\frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно $F_1 = F_2$, т.е. эти силы равны по величине и противоположны по направлению, т.е. их равнодействующая равна нулю.

Поскольку мы выбрали конусы произвольно, для любых двух участков поверхности сферы, удовлетворяющих данным условиям (они «противоположны» и малы), полученный вывод будет правильным.
Т.о. для любой точки, расположенной внутри массивной сферы гравитационное воздействие сферы на точку будет равно нулю.