



# Принцип Дирихле-1. Знакомство с принципом Дирихле

Если есть  $N$  клеток и не менее, чем  $N \cdot k + 1$  кроликов, то хотя бы в одной из клеток окажется не меньше, чем  $k + 1$  кроликов.

1. Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?
2. Двадцать школьников решали задачи. Один решил 18 задач, а остальные меньше. Докажите, что какие-то два школьника решили поровну задач.
3. а) Докажите, что среди любых 3 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 2.  
б) Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.
4. а) Есть 82 кубика. Докажите, что из них найдется либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.  
б) Придумайте аналогичную задачу, чтобы нашлось либо 20 разноцветных, либо 20 одноцветных кубиков. Каким наименьшим числом кубиков вам удастся обойтись? Попробуйте объяснить, почему это число действительно наименьшее.
5. а) Тиранозаврик Вася весь день вычислял степени двойки – его интересовало, найдутся ли такие две различных степени, что три их последние цифры совпадут. Помогите Васе.  
б) Какого количества степеней двойки заведомо хватит тиранозаврику Васе, чтобы получить ответ на свой вопрос?
6. Пятнадцать мальчиков собрали вместе 100 орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.
7. 10 друзей послали друг другу SMS сообщения. Каждый послал 5 сообщений. Докажите, что двое послали сообщения друг другу.
8. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.
9. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.
10. а) Какое наибольшее число полей на доске  $8 \times 8$  можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех полей вида  было по крайней мере одно незакрашенное поле?  
б) Какое наименьшее число полей на доске  $8 \times 8$  можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке вида  было по крайней мере одно черное поле?
11. Числа  $1, 2, \dots, 7$  разбиты на две группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп меньше 72.

## Задачи для самостоятельного решения

12. В городе Харькове живут более 1 400 000 человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.
13. В стране Курзюпии есть  $M$  футбольных команд по 11 человек. Они все должны ехать на чемпионат страны.  $M$ -местный самолет сделал 10 рейсов, а еще один вертолет перевез  $M - 1$  человека. Докажите, что хотя бы одна команда приехала на чемпионат в неполном составе.
14. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.
15. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое количество знакомых в этой компании.
16. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что найдется школьник, решивший не менее пяти задач.
17. В каждой клетке таблицы  $n \times n$  записано число 0, 1 или 2. В каждой строке, столбце и на обеих больших диагоналях считаем сумму всех стоящих там чисел. Могут ли все такие суммы быть различными?
18. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2009.
19. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
20. Числа  $1, 2, \dots, 9$  разбили на 3 группы. Докажите, что произведение чисел в хотя бы одной группе меньше 72.