Физика, теоретический тур

Задача 1

Один из концов однородного массивного стержня длины L шарнирно прикреплен к вертикальной оси. Шарнир устроен так, что в системе отсчета, связанной с осью, стержень может совершать колебания в одной из вертикальных плоскостей. Трение в шарнире отсутствует. Ось вращается с угловой скоростью ω, ускорение свободного падения - g (Рис.1.1)

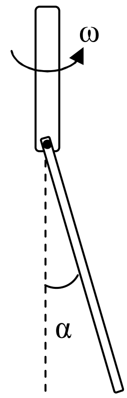


Рис.1.1

a) Вычислите значения угла α, при которых этот угол не меняется со временем;

b) Проанализируйте устойчивость системы для каждого равновесного состояния.

Пусть в некоторый момент времени стержень получает небольшое отклонение от устойчивого положения равновесия в разрешенной плоскости.

c) Вычислите период этих колебаний.

Решение

Задачу удобно решать в системе связанной с вращающейся осью. В этой неинерциальной системе отсчета стержень находится в равновесии под действием сил, включающих центробежные силы инерции. Пусть в результате вращения оси, стержень отклонился на угол α от вертикали. Выделим на расстоянии ℓ от точки *O*, элемент стержня $d\ell$ с массой dm. Если масса всего стержня m, тогда $dm=(m/L)\cdot d\ell$. Центробежная сила и сила тяжести действующие на этот элемент определяются следующим образом (Рис.1.2)

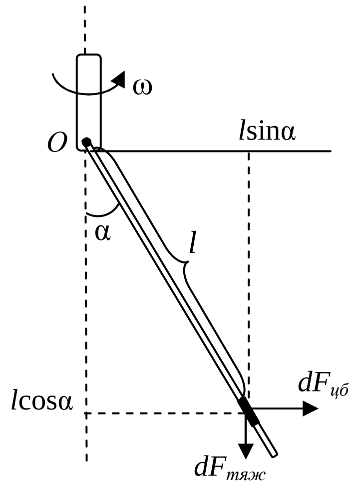


Рис.1.2

$$dF_{ц.б.} = \omega^2 \ell \sin\alpha \cdot dm = (m/L)\omega^2 \sin\alpha \cdot \ell \cdot d\ell \quad (1.1)$$ ***(0,5 балла)***

$$dF_{тяж} = g \cdot dm = (mg/L)d\ell \quad (1.2)$$ ***(0,5 балла)***

Моменты этих сил относительно точки *O*

$$dM_{ц.б.} = \ell \cos\alpha \cdot dF_{ц.б.}$$ и
$$dM_{тяж} = \ell \sin\alpha \cdot dF_{тяж}$$

Тогда момент силы тяжести действующий на стержень равен

$$M_{тяж} = -(mgL/2)\sin\alpha \quad (1.3)$$ ***(0,5 балла)***

Соответственно момент центробежной силы

$$M_{ц.б.} = (m\omega^2 L^2/3)\cos\alpha \cdot \sin\alpha \quad (1.4)$$ ***(0,5 балла)***

Условие равновесия системы $\sum_i \vec{M}_i = 0$. Откуда получаем $\left(\frac{m\omega^2 L^2}{3}\cos\alpha - \frac{mgL}{2}\right)\sin\alpha = 0$,

a1) $\sin\alpha = 0$, следовательно $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$; (***1.0 балл)***

a2) $\cos\alpha = \omega_0^2/\omega^2$, где $\omega_0^2 \equiv 3g/(2L)$. Следовательно $\alpha = \arccos(\omega_0^2/\omega^2)$

причем $\omega^2 > \omega_0^2$. (***1.0 балл)***

Скорость изменение полного момента

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = -\frac{mgL}{2}\cos\alpha + \frac{m\omega^2 L^2}{3}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad (1.5)$$

Устойчивость системы относительно равновесного положения определяется из условия $(\partial M/\partial\alpha) < 0$. Тогда

b1) Для $\alpha = 0$ производная момента равна

$$\partial M / \partial \alpha = (mL^2/3) \cdot (\omega^2 - \omega_0^2), \qquad (1.6)$$

следовательно положение устойчиво при $\omega^2 < \omega_0^2$; (***1.0 балл***)

Для $\alpha = \pi$ производная момента равна $\partial M / \partial \alpha = (mL^2/3) \cdot (\omega^2 + \omega_0^2)$, это выражение всегда положительно, следовательно, положение всегда неустойчиво. (***1.0 балл***)

b2) При $\cos\alpha = \omega_0^2 / \omega^2$ производная момента равна

$$\partial M / \partial \alpha = (mL^2/3) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega^2)/\omega^2, \qquad (1.7)$$ ***(1.0 балл)***

следовательно положение устойчиво при всех $\omega^2 > \omega_0^2$.

Значит, в зависимости от параметров системы колебания возможны при $\alpha = 0$ и $\alpha = \arccos(\omega_0^2/\omega^2)$. Уравнение колебательного движения

$$I \cdot (\Delta\alpha)'' = \Delta M \qquad (1.6)$$ (***0,5 балла***)

Момент инерции стержня относительно точки *O* равен

$$I = mL^2/3.$$ (***0,5 балла***)

При малых $\Delta\alpha$ возвращающий момент можно представить в виде $\Delta M = (\partial M / \partial \alpha) \cdot \Delta\alpha$. Тогда период колебаний определяется следующим образом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{-\partial M / \partial \alpha}} \qquad (1.8)$$ ***(1.0 балл)***

Из 1.6 и 1.8 для $\alpha = 0$ (при $\omega^2 < \omega_0^2$) получаем для периода колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \qquad (1.9)$$ (***0,5 балла***)

Для $\alpha = \arccos\left(\omega_0^2/\omega^2\right)$ (при $\omega^2 > \omega_0^2$) из 1.7 и 1.8 период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\omega^4 - \omega_0^4}} \qquad (1.10)$$ (***0,5 балла***)

Задача 2 (***8 баллов***)

Для отопления комнаты используется горелка, при этом в комнате устанавливается температура $t_1 = 17^oC$, в то время как на улице температура $t_o = 7^oC$. Для отопления комнаты предлагается использовать идеальный тепловой насос, работающий по обратному циклу Карно. КПД двигателя, совершающего работу в цикле, равен $\eta = 60\%$. Считая, что теплообмен между комнатой и улицей пропорционален разности температур и двигатель потребляет то же количество топлива, что и горелка, вычислить установившуюся температуру в комнате, если:

a) двигатель расположен вне комнаты;
b) двигатель расположен внутри комнаты.

Решение

Пусть коэффициент теплообмена *k*, тогда потери энергии для горелки равны

$$A = k(T_1 - T_0),$$ ***(1.0 балл)***

где A – энергия, выделяемая горелкой в единицу времени, $T = t^0\text{C} + 273$. Тепловой насос работает по обратному циклу Карно, при этом его максимальная температура равна температуре в комнате, а минимальная – на улице.

Если температура в комнате равна *T*, КПД прямого цикла Карно $(T-T_0)/T$, в обратном цикле выполняется соотношение

$$\frac{A_{Карно}}{Q_2} = \frac{T - T_0}{T},$$ ***(2.0 балла)***

где Q_2 – количество теплоты, отводимое в комнату в единицу времени.

$$A_{Карно} = \eta A,$$ ***(1.0 балл)***

где A – работа, совершаемая двигателем в единицу времени. Уравнение теплового баланса (когда двигатель снаружи)

$$k(T - T_0) = Q_2 = \frac{TA_{Карно}}{T - T_0} = \frac{\eta T}{T - T_0} k(T_1 - T_0),$$ ***(1.5 балла)***

$$T - T_0 = \frac{T}{T - T_0} \eta (T_1 - T_0),$$

откуда

$$\underline{(T - T_0)^2 - \eta (T_1 - T_0)(T - T_0) - \eta T_0 (T_1 - T_0) = 0}.$$

Решая последнее уравнение, получаем $T - T_0 = 44.1^0$, следовательно, в комнате установится температура t_2=54,1^{0}С. ***(1.0 балл)***

Когда двигатель внутри, в комнате дополнительно рассеивается мощность $(1-\eta)A$, которую двигатель не превращает в работу, то есть условие

$$k(T - T_0) = \frac{T\eta}{T - T_0} k(T_1 - T_0) + (1-\eta)(T_1 - T_0)k,$$ ***(1.0 балл)***

откуда

$$\underline{(T - T_0)^2 - \eta (T_1 - T_0)(T - T_0) - T_0 (T_1 - T_0) = 0}.$$

Решение полученного уравнения $T - T_0 = 56^0$ и температура в комнате будет t_3=66^{0}С ***(0.5 балла)***

Задача 3(12 баллов)

Имеется кольцо радиуса R, по которому течет ток I.

a) Вычислите магнитное поле в точке O_1 на оси кольца. Кольцо видно из точки O_1 под углом 2α. (см. Рис.3.1)

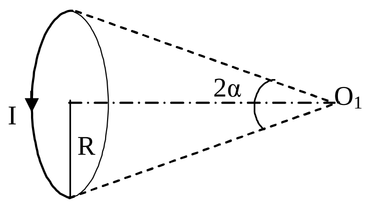


Рис.3.1

Соленоид с радиусом R состоит из N витков, равномерно намотанных на длине ℓ. По соленоиду течет ток I.

b) Найдите индукцию магнитного поля на оси соленоида в точке, из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β. (см. Рис.3.2)

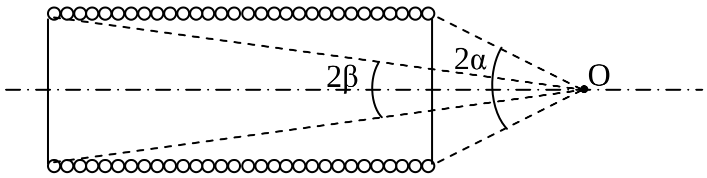


Рис.3.2

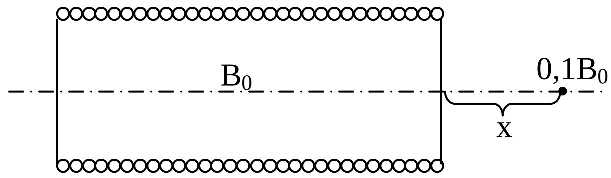


Рис.3.3

В дальнейшем полагаем, что ℓ>>R.

c) Вычислите поле B_0 внутри соленоида на его оси вдали от торцов;

d) Найдите расстояние x, при котором $B=0.1\cdot B_0$ (см. Рис.3.3);

e) Вычислите индуктивность катушки L, считая поле внутри катушки вдали от торцов однородным по всему сечению.

Намагниченная пуля пролетает вдоль оси соленоида, подключенного к конденсатору С. Магнитный момент пули М параллелен оси соленоида. Будем пренебрегать изменением скорости пули в процессе пролета.

- ***f) Напишите условие того, что время пролета пулей области неоднородности магнитного поля значительно меньше периода колебаний в LC контуре. Считайте в дальнейшем, что это условие всегда выполнено;***
- ***g) При какой скорости υ пули амплитуда колебаний тока в контуре после пролета пули максимальна?***
- ***h) Чему при этом равна амплитуда тока I_{max}? Нарисуйте график зависимости I(t) для этого случая: t=0 - момент пролета пули точки на расстоянии x (см. пункт d) ;***
- ***i) Докажите, что сила, действуюшая на пулю со стороны магнитного поля, равна $M\dfrac{\partial B}{\partial x}$ и направлена параллельно оси.***

<u>Примечание:</u>
Пулю можно рассматривать как кольцо малой площади S_0, по которому течет ток I_0, причем $M=S_0I_0$.
В теории магнетизма доказывается следующая теорема взаимности: Если поток магнитного поля первого контура через второй обозначить $L_{12}I_1$, а поток поля второго контура через первый обозначить $L_{21}I_2$, то $L_{12}=L_{21}$. При этом предполагается, что знаки потоков согласованы с положительными направлениями обхода контуров.

Решение

а) Из симметрии следует, что полное поле направлено по оси. Поле малого элемента тока $R\cdot d\varphi$ направлено под углом $\pi/2-\alpha$ к оси и из закона Био-Савара равно

$$\frac{\mu_0 Id\varphi}{4\pi R}\sin^2\alpha \quad (2.1)$$

Проектируя на ось и интегрируя от 0 до 2π , имеем

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha \quad (2.2)$$

(1.0 балл)

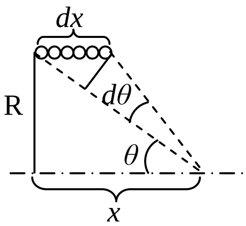


Рис.3.4

b) Так как $x=Rctg\theta$ (см. рис.3.4), то полоска, заключенная между углами θ и $\theta+d\theta$, имеет ширину

$$dx=\frac{R}{\sin^2\theta}d\theta \quad (2.3)$$

Используя это и результат предыдущего пункта, имеем

$$B=\int\frac{\mu_0 NI}{2lR}\sin^3\theta dx=\frac{\mu_0 NI}{2l}\int_\alpha^\beta\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 NI}{2l}(\cos\beta-\cos\alpha). \quad (2.4)$$

(2.0 балла)

c) В формуле (2.4) $\cos\beta\approx 1$ и $\cos\alpha\approx -1$, поэтому

$$B_0=\frac{\mu_0 NI}{l} \quad (2.5)$$

(0.5 балла)

d) В формуле (2.4) $\cos\beta\approx 1$, поэтому получаем для $\cos\alpha$ уравнение

$$1-\cos\alpha=0{,}2 \quad (2.6)$$

откуда

$$x=4R/3 \quad (2.7)$$

(1.0 балл)

e) Полный поток через катушку равен

$$\Phi=B_0SN=\mu_0\frac{\pi R^2N^2}{l}I \quad (2.9)$$

откуда

$$L = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l} \qquad (2.10)$$ ***(0.5 балла)***

f) $$\frac{\upsilon \cdot \sqrt{LC}}{R} >> 1 \qquad (2.11)$$ ***(1.0 балл)***

g) Рассмотрим, как меняется поток поля пули через катушку в процессе полета. Используем теорему взаимности

$$\Phi = L_{12} I_0 = \frac{B(x,I) S_0}{I} I_0 = \frac{B(x,I)}{I} M \qquad (2.12)$$ ***(1.0 балл)***

где $B(x,I)$ – поле катушки, I – ток в катушке. Так как $B(x,I)/I$ от I не зависит, то поток поля пули через катушку меняется тогда, когда пуля пролетает область неоднородности. В силу (2.11) полный поток через катушку за это время не успевает измениться, поэтому из сохранения потока в катушке появится ток I_1, определяемый из

$$L I_1 = M \frac{\mu_0 N}{l} \qquad (2.13)$$ ***(1.0 балл)***

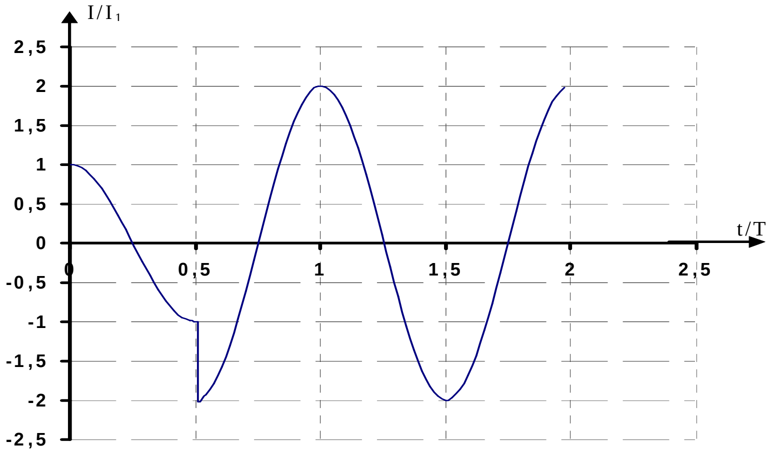
Подставляя сюда значение L из (2.10), получим

$$I_1 = \frac{M}{\pi R^2 N} \qquad (2.14)$$

После пролета области неоднородности поток поля пули через катушку не меняется, в катушке происходят гармонические колебания тока. Когда пуля пролетает второй конец катушки, происходит еще один скачок силы тока, противоположный по знаку первоначальному. Поэтому для того, чтобы в итоге амплитуда получилась максимальной, время пролета катушки должно равняться нечетному количеству полупериодов колебаний контура

$$\upsilon = \frac{l}{(2n-1)\pi\sqrt{LC}}, \text{ где } n=1, 2, 3,\ldots \qquad (2.15)$$ ***(1.0 балл)***

h) $$I_{\max} = 2 I_1 = \frac{2M}{\pi N R^2} \qquad (2.16)$$ ***(0.5 балла)***



(1.0 балл)

Рис.3.5

i) Сила Ампера действующая на пулю, равна $2\pi B_\perp I_0 R$. Выразим $B_\perp$ через $B(x)$, используя замкнутость линий магнитного поля

$$-(B_x - B_{x+dx})\pi R^2 = B_\perp 2\pi R dx,$$ ***(0.5 балла)***

$$B_\perp 2\pi R I_0 = -\frac{B_x - B_{x+dx}}{dx} \pi R^2 I_0,$$ ***(0.5 балла)***

$$F = M \frac{\partial B}{\partial x}.$$ ***(0.5 балла)***