

Задача № 5

Условие: Изучите и опишите зависимость скорости вытекания жидкости из высокого цилиндрического сосуда от диаметра отверстия в дне цилиндра, сделанного с помощью швейной иглы.

Цель эксперимента: определить зависимость скорости истечения жидкости из круглого отверстия от его радиуса.

Оборудование: вода, труба пластмассовая “сотка” диаметром 110 мм и длиной около 1,2 м, трансмиссия от трубы “редукция” 110 мм — 50 мм, крепление трубы, пластмассовые бутылки и крышки от них, пластиковые стаканчики, металлическая пластина толщиной 0,1 мм, оптический проектор-увеличитель “TV-microscope”, весы электронные, набор иглол различных диаметров, игла от шприца диаметром 0,8 мм, клей силиконовый, клеевой пистолет, паяльник, ножницы, линейка.

Теоретические сведения: В первом приближении, если считать воду идеальной жидкостью, скорость ее истечения из маленького отверстия не зависит от его радиуса и равна $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота сосуда. В действительности же из-за диссипации энергии скорость должна уменьшиться. Точный расчет этого уменьшения сложен, его мы проводить не будем. Вообще говоря, скорость воды в отверстии ввиду вязкости будет разной по сечению: вблизи краев отверстия близка к нулю, а в его центре — максимальна. Эта максимальная скорость близка к $\sqrt{2gh}$, а измеренная может от нее отличаться на несколько десятков процентов.

Оценим по порядку величины поправку $\delta v \ll v$ к скорости за счет вязкого трения вблизи отверстия, отбрасывая численные коэффициенты порядка единицы. Считаем, что диссипация происходит в области длиной порядка радиуса R отверстия. Рассмотрим малый цилиндрический слой жидкости длины $h \sim R$ (значок \sim означает равенство по порядку), радиуса r и толщины Δr . В качестве его скорости возьмем среднюю скорость истечения (оценочный расчет!). Его масса $\Delta m \sim \rho R r \Delta r$. За время Δt через выделенный объем пространства пройдет жидкость массой $\delta m \sim \rho R v \Delta r \Delta t$. Так как поток стационарный, можно считать, что кинетическую энергию теряет именно вытекающая из выделенного объема жидкость. Ее скорость изменилась за счет диссипации на малую величину δv , а энергия — на $\delta W \sim \delta m v \delta v \sim \rho R v^2 \Delta r \Delta t \delta v$. Суммируя по слоям, получим полное изменение энергии:

$$W \sim \rho v^2 R^2 \Delta t \delta v. \quad (1)$$

Эта работа совершается против сил вязкого трения. Сила вязкого трения, действующая на выделенный элемент жидкости, $\delta F_{\text{тр}} \sim \eta r h \Delta v / \Delta r \sim \eta R r \Delta v / \Delta r$, где Δv — разность скорости выделенного элемента и соседнего, η — вязкость жидкости. Выделившаяся на одном слое малая теплота $\delta Q \sim F_{\text{тр}} \Delta v \Delta t \sim \eta R r \Delta v^2 \Delta t / \Delta r$. Применяя приближение $\Delta v / \Delta r \sim v / R$, получим $\delta Q \sim \eta r v \Delta v \Delta t$. Просуммировав по слоям, получим выделившуюся теплоту:

$$Q \sim \eta R v \Delta t. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим:

$$\delta v \sim \frac{\eta}{\rho R}.$$

Относительное изменение скорости $\delta v / v$ есть не что иное, как обратное число Рейнольдса. При подстановке вполне жизненных значений $\eta = 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 1000$ кг/м³, $R = 10^{-3}$ м и $v = 1$ м/с получим $\delta v / v = 10^{-3}$, что при любой грубости приближений пренебрежимо мало. Для того, чтобы относительное изменение скорости достигло 10%, радиус отверстия должен быть порядка $R = 10^{-5}$ м. Для дырок, сделанных швейной иглой, эффектом вязкости можно пренебречь.

Остается сделать вывод, что основную роль при формировании струи будут играть турбулентные образования и мелкие неровности вблизи отверстия.

Постановка эксперимента: В качестве цилиндрического сосуда в эксперименте использовали пластмассовую трубу диаметром $D = 100$ мм и толщиной $d = 3$ мм, так что потерями на вязкость в самой трубе можно пренебречь. Снизу к ней присоединили редукцию на 50 мм, в которую затем вставили наконечник пластиковой бутылки с резьбой (см. рисунок). На его надевались съемные заглушки с отверстиями. Заглушка представляет собой крышку с проделанной в ней дыркой, в которую вставлена металлическая пластинка с отверстием. Все щели были наглухо залиты силиконовым клеем. Размер отверстия измеряли при помощи проектора, на который вместе с пластинкой была для сравнения помещена игла от шприца.

Согласно стандарту эта игла имеет размер $x = 0,8$ мм. При помощи линейки измеряли размеры изображений объектов на экране. Если на экране диаметр отверстия d' , а размер иглы x' , то истинный диаметр отверстия

$$d = \frac{d' x}{x'}. \quad (3)$$

Соответственно, площадь отверстия $S = \pi d^2/4$. Погрешность при измерении размеров линейкой $\Delta x' = \Delta d' = 0,5$ мм. Тогда погрешность в диаметре вычисляем по формуле

$$\Delta d = d \sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{x'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d'}{d'}\right)^2} \quad (4)$$

Измерения скорости истечения проводили так. Вначале в трубу заливали воду и далее поддерживали ее уровень постоянным. Затем под струю на некоторое время подставляли пластиковый стаканчик. Перед экспериментом измеряли массу m_0 пустого стаканчика, после эксперимента — массу m стаканчика с водой. Время t , в течение которого струя попадала в стаканчик, измеряли при помощи секундомера на телефоне. Зная эти величины, определяли скорость по формуле

$$v = Q/S = m/(\rho St), \quad (5)$$

где ρ — плотность воды. Такой способ легче осуществить, но он содержит дополнительную погрешность в площади сечения.

Поэтому мы будем находить некую среднюю величину, определяемую по формуле $v = Q/S$, где Q — объемный расход жидкости в м³/с, S — площадь сечения отверстия.

