Урок 7. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении. Метод половинного деления

1°. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

1) Сформулируем и докажем одну из самых важных теорем математического анализа:

Теорема (Больцано-Коши о промежуточном значении).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков. Тогда на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что $f(\xi) = 0$.

Доказательство теоремы: Воспользуемся методом, который часто называют методом Больцано в честь чешского математика и философа B.Bolzano. Мы будем опираться на аксиому Кантора (лемму о вложенных отрезках) и теорему о сохранении знака.

Разделим отрезок $[a, b] = \Delta_0$ пополам. Если в точке деления $f(x) = 0$, то теорема доказана. В противном случае рассмотрим получившиеся отрезки длины $\dfrac{b-a}{2}$. Среди них найдется один, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Обозначим его Δ_1. Разделим отрезок Δ_1 пополам. Если в точке деления $f(x) = 0$, то теорема доказана. В противном случае обозначим Δ_2 ту половину, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков.

Повторяя эту операцию, мы либо найдем точку, в которой $f(x) = 0$, либо получим бесконечную стягивающуюся систему вложенных отрезков $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, на концах каждого из которых $f(x)$ принимает значения разных знаков. Согласно аксиоме Кантора, эти отрезки имеют общую точку. Обозначим эту точку ξ. Если $f(\xi) = 0$, то теорема доказана. Пусть $f(\xi) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ существует окрестность точки ξ, в которой $f(x)$ сохраняет знак. Но некоторый отрезок Δ_n лежит в этой окрестности. Полученное противоречие доказывает теорему.

■

2) Из теоремы Больцано-Коши сразу получаем несколько очень полезных следствий:

Следствие 1.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого C, лежащего между A и B, существует точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $f(\xi) = C$.

Доказательство: Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ и, очевидно, принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков. Следовательно, по теореме Больцано-Коши существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\varphi(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = C$.

□

Следствие 2.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и пусть $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда для любого C такого, что $m < C < M$, существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $f(\xi) = C$.

Доказательство: Т. к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она достигает на $[a,b]$ своей точной верхней и нижней грани. Пусть $f(\alpha) = m$, а $f(\beta) = M$. Тогда, согласно следствию 1, существует такое $\xi \in (\alpha,\beta)$, что $f(\xi) = C$. Но $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$. Следствие 2 доказано.

□

Следствие 3.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и не обращается в нуль на интервале $(a;b)$. Тогда $f(x)$ сохраняет один и тот же знак во всех точках интервала $(a;b)$.

Доказательство: Предположим противное. Пусть, например, $f(\alpha) < 0$, а $f(\beta) > 0$. Но тогда в силу теоремы Больцано-Коши на интервале (α,β) найдется такая точка ξ, для которой $f(\xi) = 0$. Противоречие.

□

Замечание. *Следствие 3 служит обоснованием, в частности, применения метода интервалов для решения дробно-рациональных неравенств.*

3) **Упражнения**.

(1) Докажите, что уравнение $\cos x = x$ имеет корень на интервале $(0;\pi)$.

(2) Числа a, b и c таковы, что $(a+b+c)\,c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

2°. Метод половинного деления

1) Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении позволяет обосновать один из наиболее известных алгоритмов численного решения уравнений – метод половинного деления.

2) Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, причем $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тогда в силу теоремы Больцано-Коши на интервале (a,b) существует такая точка ξ, что $f(\xi) = 0$. Найдем ξ (точнее, найдем один из корней функции $f(x)$, лежащий в интервале $(a;b)$). Для этого разделим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в точке деления $f(x) = 0$, то мы нашли корень. В противном случае на концах одной из половинок $f(x)$ принимает значения разных знаков и

процесс можно продолжить. В итоге мы либо за конечное число шагов находим корень, либо получаем стягивающуюся систему вложенных отрезков. Очевидно, что общая точка этой системы – корень $f(x)$. За конечное число шагов мы сможем найти этот корень с любой наперед заданной точностью.

3) **Упражнение**. Докажите, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на интервале $(0; 1)$ и найдите его с точностью до $0,05$.

Домашнее задание

1) Докажите, что уравнения: а) $x^6 + 2x - 13 = 0$; б) $2^x = \dfrac{1}{3}\sin x + 2$ имеют по крайней один действительный корень.

2) Пусть $f(x) = -x^3 + 7x + 2$. Вычислите $f(-1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(3)$. На каких интервалах функция имеет корни? На каких интервалах функция сохраняет знак?

3) Докажите, что уравнение $x^5 + x - \dfrac{1}{x} = 0$ имеет корень на интервале $[0,5; 1]$. Найдите этот корень с точностью до $0,1$.

4) Докажите, что всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

5) Докажите, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, для которого $a + b + c > 0$ и $a - b + c < 0$, имеет действительный корень.

6) Пусть a, b, c – попарно различные числа. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

имеет два различных действительных корня.