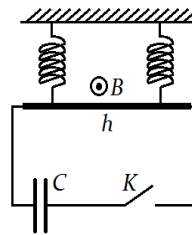


Про всемогутність математики та здоровий фізичний глузд

Наведемо умову задачі, яку було запропоновано учням 11 класу на IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики (м. Чернігів, березень 2010 року).

Прямолінійний провідник довжиною h і масою m підвішений на двох пружинах жорсткістю k в горизонтальному однорідному магнітному полі з індукцією B (див. рисунок). При замиканні ключа K конденсатор ємністю C , заряджений до різниці потенціалів U , замикається на провідник і розряджається. Визначити амплітуду A коливань провідника, якщо час розрядження конденсатора набагато менший за період цих коливань. (Задачу запропонував С.У. Гончаренко)



Авторський розв'язок цієї задачі, який ґрунтується на фізичних міркуваннях, досить простий. Під час розрядження конденсатора провідником тече струм I , унаслідок чого на провідник діє сила Ампера $F = BIh$. За малий проміжок часу Δt провідник отримує імпульс $\Delta p = F \cdot \Delta t = BIh \cdot \Delta t = -Bh \cdot \Delta q$. Тут Δq — зміна заряду конденсатора. Отже, повний отриманий провідником імпульс дорівнює за модулем $p = Bhq = BhCU$. З умови випливає, що за час розрядження конденсатора видовження пружин не змінилося. Подальші коливання відбуватимуться за рахунок набутої провідником кінетичної енергії під дією «додаткової» сили пружності, яка виникає внаслідок відхилення провідника від положення рівноваги. Силу тяжіння можна не враховувати — в положенні рівноваги її компенсовано силами пружності пружин. У момент найбільшого відхилення від положення рівноваги початкова кінетична енергія переходить у потенціальну:

$$\frac{p^2}{2m} = 2 \cdot \frac{kA^2}{2}, \text{ звідки}$$

$$A = \frac{BhCU}{\sqrt{2mk}}. \quad (1)$$

Дехто з учасників олімпіади врахував і ЕРС індукції, яка виникає у рухомому провіднику в магнітному полі. Ця ЕРС (Bvh) дорівнює напрузі на конденсаторі, якщо знехтувати спадом напруги у колі. Тоді до початкової кінетичної енергії провідника слід додати енергію електричного поля конденсатора. Отримана поправка до формули (1) має

вигляд множника $1 + \frac{C(Bh)^2}{m}$ у певному ступені. Якщо взяти більш-менш реальні значення величин, цією поправкою можна знехтувати.

Проте дехто з учасників отримав суттєво іншу відповідь, розв'язавши задачу «строго», тобто застосувавши диференціальні рівняння. Головна ідея цього розв'язку — оскільки розрядження конденсатора відбувається швидко, активний опір R кола малий. Отже, цим опором можна знехтувати. Тоді ЕРС індукції у провіднику дорівнює напрузі на конденсаторі:

$$Bh\dot{x} = \frac{q}{C}. \quad (2)$$

Тут x — відхилення провідника від положення рівноваги, q — заряд конденсатора. Рівняння руху провідника з урахуванням сил пружності та сили Ампера має вигляд

$$m\ddot{x} = -2kx - B\dot{q}h. \quad (3)$$

З рівняння (1) випливає: $Bh\ddot{x} = \frac{\dot{q}}{C}$. Тоді з рівняння (2):

$$(m + C(Bh)^2)\ddot{x} = -2kx. \quad (4)$$

Це рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m + C(Bh)^2}}$.

Початкове (тобто максимальне) значення швидкості згідно рівнянню (2) дорівнює $\frac{U}{Bh}$.

Тоді зі співвідношення $v_{\max} = A\omega$ отримуємо $A = \frac{U}{Bh} \sqrt{\frac{m + C(Bh)^2}{2k}}$.

Мало того, що ця відповідь не збігається з (1) — вона взагалі викликає подив! Адже згідно з цією формулою амплітуда коливань стає необмежено великою, коли магнітне поле зменшується до нуля ($B \rightarrow 0$) або коли $m \rightarrow \infty$. З фізичних міркувань очевидно, що цього не може бути. То де ж «ховається» помилка? Виявляється, вона не така вже й очевидна.

Якщо не вважати з самого початку, що $R = 0$, то замість рівняння (2) отримаємо $\frac{q}{C} - Bh\dot{x} = IR$. Скориставшись рівнянням (3), отримаємо диференціальне рівняння вже не другого, а третього порядку. Коефіцієнт при \ddot{x} містить множник R . Отже, коли ми **відразу** нехтуємо опором, ми знижуємо порядок диференціального рівняння, тобто **якісно** змінюємо характер розв'язку. Правильний розв'язок містить не тільки «коливальні»

компоненти, а й швидко загасаючий доданок виду $\exp(-\frac{t}{RC})$. Враховуючи цей доданок і початкові умови, можна отримати правильне значення амплітуди, тобто... формулу (1)!

Заперечувати могутність математики не має сенсу. Проте не слід забувати й про здоровий фізичний глузд і фізичну інтуїцію. Саме завдяки цим якостям дослідників зроблено чимало відкриттів. До речі, історія науки знає випадки, коли представники природничих наук, незадоволені «бідністю» арсеналу «цариці наук», пропонували щось своє і в цій галузі. Так з'явилися узагальнені функції, інтеграли по траєкторіях... А ще раніше саме так з'явилися диференціювання та інтегрування.