Задача 9.1

Легкий одномоторний літак масою m=1000 кг може летіти при мінімальній силі тяги двигуна F=2000 Н. При польоті на висоті 1 км, на відстані 4 км до посадкової смуги аеродрому у літака раптово глохне двигун. Чи зможе він в такому випадку спланувати (долетіти як планер) до аеродрому?

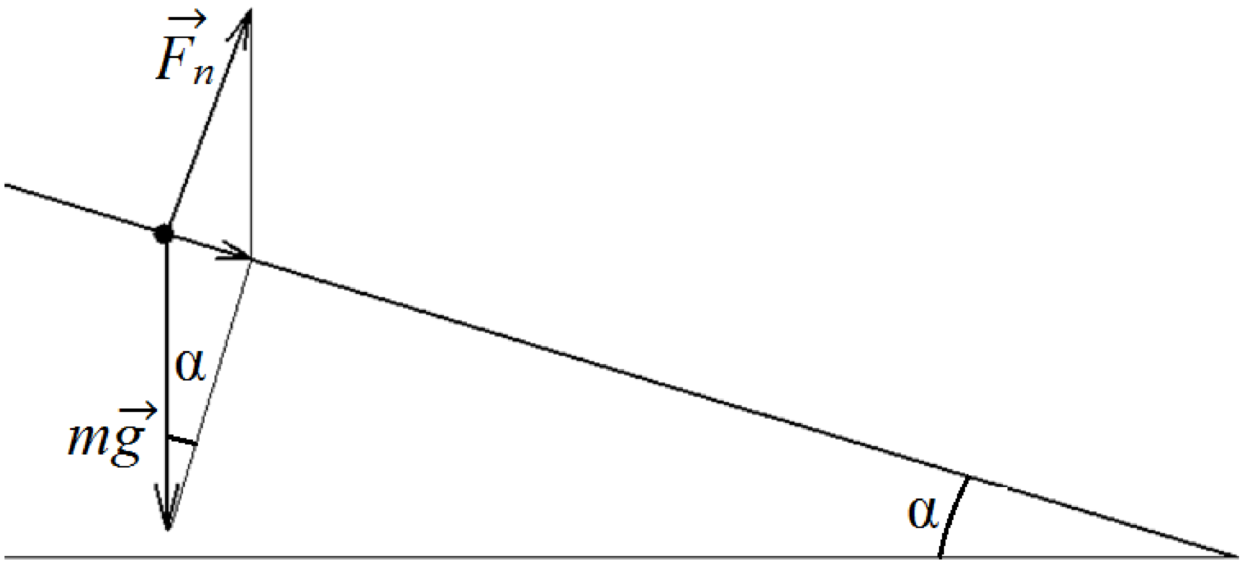
Розв'язок.

Сила тяги F необхідна для подолання сил опору повітря при підтриманні літаком мінімальної польотної швидкості (приблизно рівній «швидкості звалювання», при якій втрачається достатня повітряна підйомна сила). Отже, в найгіршому випадку - продовженні польоту зі згаданою мінімальною швидкістю (при більших швидкостях кут напрямку глісади* до горизонту зменшиться, що збільшить відстань планування) сила опору повітря дорівнюватиме силі тяги F, яку створюватиме рівнодіюча сили тяжіння mg та підйомної сили F_n, направленої перпендикулярно до напрямку гліссади, отже

$$F=mg\sin\alpha.$$

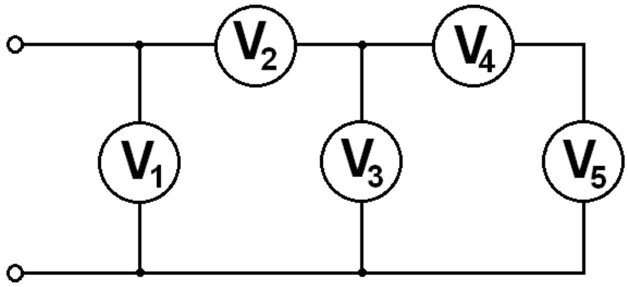
Звідси можна отримати чисельне значення для $\sin\alpha=0{,}2$ і, порівнюючи його з кутом, необхідним для досягнення смуги аеродрому: $\sin\alpha=1/4=0{,}25$, робимо висновок, що глісада, по якій може спланувати даний літак дозволить йому досягти смуги аеродрому.

**глісада* – авіаційний термін, що означає траєкторію польоту літака при заході на посадку.



Задача 9.2

З п'яти однакових вольтметрів зібране електричне коло (див. мал). Покази вольтметрів: U_1=5В, U_2=4В, U_3=2В, U_4=1В, U_5=1В. Відомо, що в одного з вольтметрів зігнута стрілка, і його покази неправильні. Який з вольтметрів несправний? Яке значення напруги він повинен був показувати?



Розв'язок

Згідно показаної схеми повинно виконуватись:

$$U_1 = U_2 + U_3 \qquad (1)$$
$$U_3 = U_4 + U_5. \qquad (2)$$

Підставляємо числові данні

$$5 < 4 + 2; \qquad (1')$$
$$2 = 1 + 1. \qquad (2')$$

Очевидно, що рівність (1) не виконується. Отже, несправний вольтметр 1, або вольтметр 2, оскільки показання вольтметру 3 входять до обох рівностей.

Для виявлення конкретного зіпсованого вольтметру скористаємось ще однією рівністю

$$I_2 = I_3 + I_4.$$
$$\frac{U_2}{R} = \frac{U_3}{R} + \frac{U_4}{R}, \text{ тобто } U_2 = U_3 + U_4,$$

де R – опір вольтметру.

Підставляємо

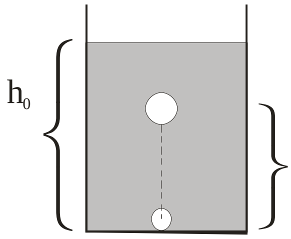
$$4 > 2 + 1.$$

Отже вольтметр 2 дає значення, які завищені на 1 В. Тобто U_2 = 3 В.

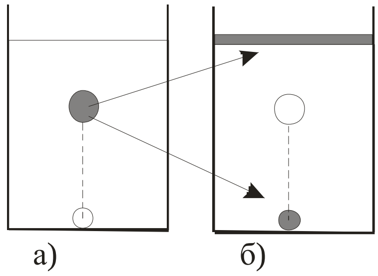
Це досить очевидно (які співвідношення для напруг порушуються).

Задача 9.3

На дні широкої посудини, заповненої важкою в’язкою рідиною, знаходиться повітряна бульбашка, що відривається від донця і починає повільно спливати (див. мал.). Яка кількість тепла виділиться в рідині до того моменту, коли бульбашка підніметься на висоту $h = 3h_0/4$, якщо при цьому її об’єм збільшився удвічі? Рух бульбашки настільки повільний, що кінетичною енергією рідини можна знехтувати. Глибина рідини $h_0 = 1{,}5$ *м*, її густина $\rho = 13600$ *кг/м*^{3}, початковий об’єм бульбашки $V_0 = 1$ *см*^{3}.



Мал. 1



Мал. 2

Задачу розв'язати в припущенні, що рух бульбашки настільки повільний, що кінетичною енергією руху рідини можна зневажити.

Для розрахунків прийняти: глибина стовпа рідини $h_0 = 1{,}5\ м$, її густина $\rho = 13600\ кг/м^3$, початковий об'єм бульбашки $V_0 = 1\ см^3$.

Розв'язок:

Головна діюча особа цього завдання – капля ртуті об'ємом $V = 2V_0$, яка у початковий момент перебував на висоті $h = 3h_0/4$. А головне питання – куди вона подінеться, коли на це місце підніметься повітряна бульбашка?

Частину відповіді видне відразу: частина ртуті зайняло старе місце бульбашки на дні. Але це тільки половина ртутної каплі. А куди перемістилася друга половина? Відповідь – на поверхню (мал. 2).

Тепер можна здійснити розрахунок повної механічної енергії системи $E = E_k + E_p$ в початковому й кінцевому станах. Початкова потенційна енергія системи була рівна $E_{p\ нач} = 2\rho g V_0 h = \frac{3}{2}\rho g V_0 h_0$. Кінцева – $E_{p\ кон} = \rho g V_0 \cdot 0 + \rho g V_0 h_0 = \rho g V_0 h_0$. Кінетична енергія рідини й на початку й наприкінці дорівнює нулю. Тому $E_{нач} = \frac{3}{2}\rho g V_0 h_0$ й $E_{кон} = \rho g V_0 h_0$. Як видне, повна механічна енергія системи зменшилася – частина її перейшла в тепло.

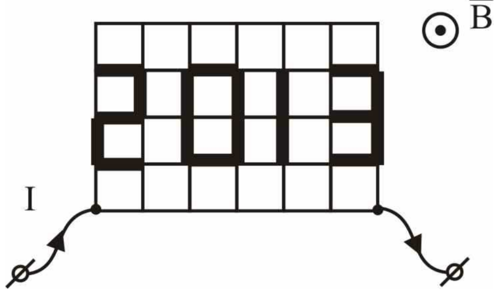
Виписуємо відповідь для кількості, що виділилася тепла:

$$Q = E_{нач} - E_{кон} = \frac{1}{2}\rho g V_0 h_0 = 0{,}102\ Дж$$

Відповідь: $Q = \frac{1}{2}\rho g V_0 h_0 = 0{,}102\ Дж$.

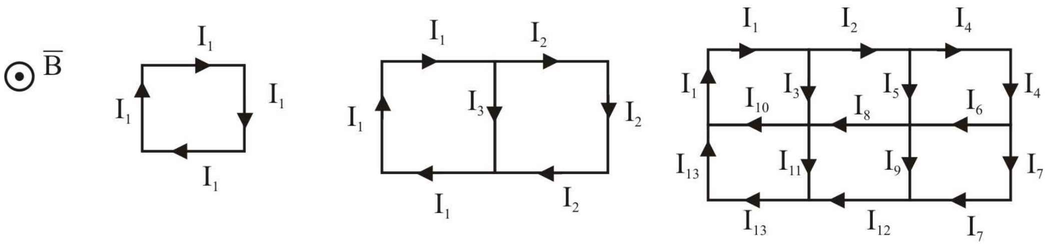
Задача 9.4

У прямокутній сітці 4х6 вісімнадцять ребер виготовлені з товстішого дроту (див. мал.). Сітку вміщують у магнітне поле з індукцією $B = 0{,}01$ Тл, перпендикулярне площині малюнка, і підводять електричний струм силою $I = 0{,}61$ А. Чому дорівнює сила Ампера, що діє на сітку, якщо сторона кожного квадрата сітки дорівнює $a = 5{,}5$ см? Сила Ампера розраховується за формулою $F_A = I \cdot B \cdot l$, де l – довжина провідника.



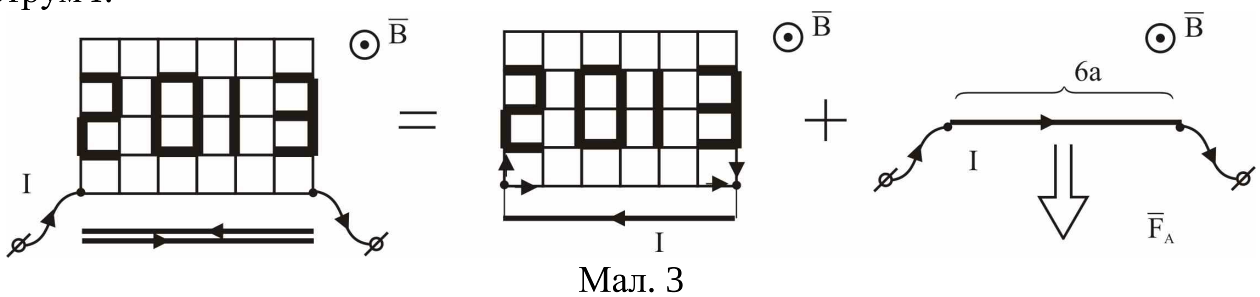
Розв'язок:

Якщо в однорідному магнітному полі перебуває дротовий каркас (мал. 2) із замкненою системою струмів (проводів, що підводять струм, немає), то сумарна сила Ампера, що діє на цю систему струмів дорівнює нулю (доказ см. нижче).



Мал.2

Знаючи це, уявне додамо до нашої сітки два шматки дроту довжиною $6a$, по одному з яких струм I тече вліво, а по іншому – вправо (мал. 3, *а*). Зрозуміло, сила Ампера, що діє на сітку, від додавання цього «силового нуля» не зміниться. А тепер розглянемо нашу схему як дві схеми: «замкнену схему», до якої не підходять зовнішні дроті, і провідник довжиною $6a$, по якому тече струм I.



Мал. 3

Сила, що діє на «замкнену систему струмів», дорівнює нулю. Тому одержуємо, що результуюча сила Ампера дорівнює силі, яка діє на вставлений шматок дроту:

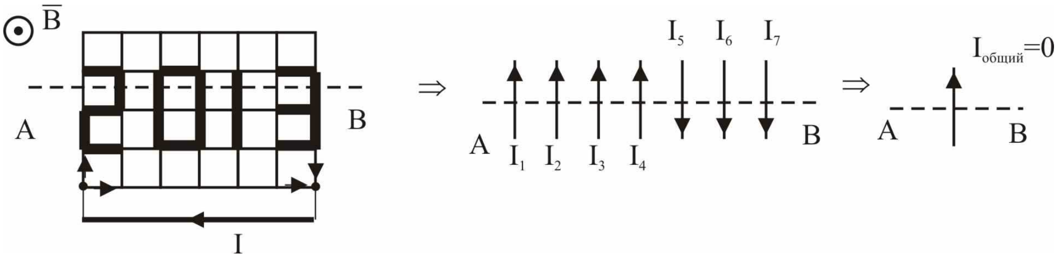
$$F_A = I \cdot 6a \cdot B = 0{,}61 \cdot 6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}01 = 2{,}013 \cdot 10^{-3}\ H = 2013\ мкH\ .$$

Відповідь: $F_A = I \cdot 6a \cdot B = 2013\ мкH$.

Доказ того факту, що сумарна сила Ампера, що діє на сітку з струмами, дорівнює нулю.

Доказ 1 (пряме)

Уявно розділемо нашу сітку з струмами на ребра з струмами. І розглянемо, наприклад, усі паралельні ребра, що перетинають переріз АВ (мал. 4).



Мал. 4

Зберемо їх в один пучок. Сила Ампера, що діє на цей пучок, буде прямо пропорційна сумарній силі струму, що протікає по цьому пучку. А вона буде дорівнює нулю, тому що переносу заряду через переріз АВ немає (верхня половинка сітки не заряджається).

Застосовуючи такі ж міркування до всіх інших ребер, ми одержимо, що сила Ампера, що діє на всі ребра в однорідні́м магнітнім полі, дорівнює нулю.

Доказ 2 (за допомогою закону збереження енергії)

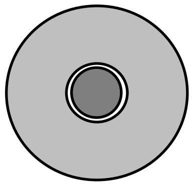
Припустимо, що наше твердження невірне й на сітку діє сила. Тоді сітка почне рухатися, і її кінетична енергія буде збільшуватися без усякої зміни струмів (при руху в одному магнітнім полі магнітні потоки, що пронизують різні грані не змінюються, тому ЕРС індукції не виникають, і струми не змінюються). Якщо струми не змінюються, то не змінюється й енергія магнітного поля.

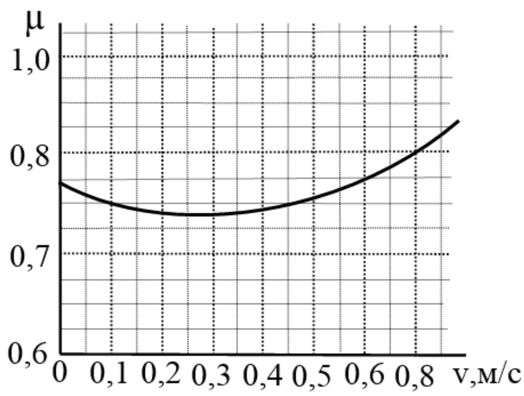
Одержуємо, що кінетична енергія сітки береться нізвідки, що суперечить закону збереження енергії.

Отримане протиріччя доводить, що наше твердження вірне.

Задача 9.5

Два тягарці масами $M = 5\ кг$ и $m = 3\ кг$ з'єднали легкою довгою ниткою, яку перекинули через блок (нитка по блоку не проковзує) масою $m_0 = 2$ кг. Тягарцям надали деяку швидкість. Через деякий час швидкість стала постійною. Знайдіть цю швидкість. Блок являє собою диск радіусом R з отвором радіусом $r = R/3$, надітий на горизонтальну вісь трохи меншого, ніж r, радіусу (див. мал.). Залежність коефіцієнту тертя ковзання μ від швидкості відносного руху поверхонь для матеріалів блоку і осі наведена на графіку μ(v) (див. мал.).





Розв’язок:

Щоб знайти швидкість за наведеним в умові графіком, спочатку треба знайти коефіцієнт тертя μ, який забезпечує рівномірний рух тягарців.

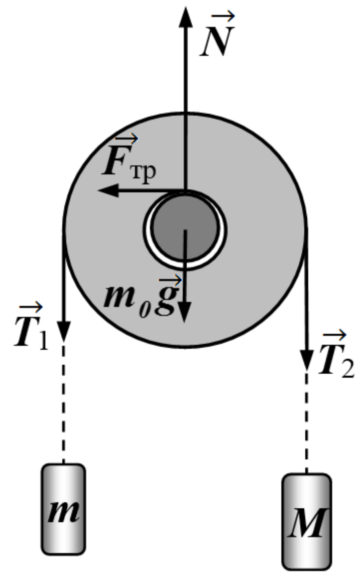


Рис.1

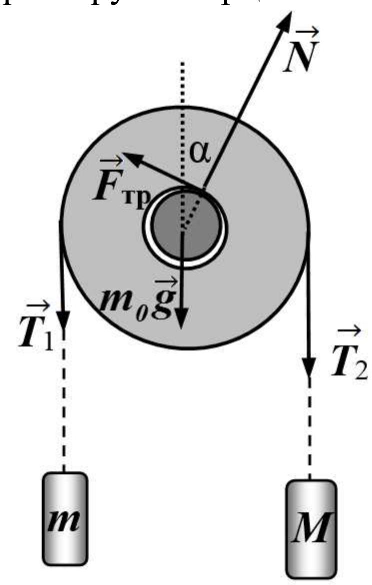


Рис.2

Блок під дією сил натягу нитки тисне на вісь. Сила тертя при цьому заважатиме йому проковзувати. За великого коефіцієнту тертя система може взагалі загальмувати і зупинитися.

Здається, що дотик між блоком і віссю має місце у верхніх точках осі і отвору блоку (рис.1). Це невірно, що легко зрозуміти, спроектувавши сили, що діють на блок, на горизонтальну вісь. Сила тертя виявляється нічим не компенсована. Отже місце дотику блоку і осі зміститься вправо (рис.2) і тоді рівнодіюча сили тертя $F_{тр}$ і реакції опори N буде спрямована вгору і за теоремою Піфагора дорівнюватиме $\sqrt{N^2 + F_{тр}^2}$. Вниз на блок діють сили натягу нитки $T_1 = mg,\ T_2 = Mg$ і сила тяжіння $m_0 g$ (тягарці рухаються зі сталою швидкістю). Отже

$$\sqrt{N^2 + F_{\text{тр}}^2} = (m_0 + m + M)g\ . \qquad (1)$$

Як для випадку статичної рівноваги, так і для руху зі сталою швидкістю, сума моментів сил на блок дорівнюватиме нулю. Відносно осі симетрії блока (перетину N і $m_0 g$) маємо:

$$T_1 R + F_{\text{тр}} r - T_2 R = 0. \qquad (2)$$

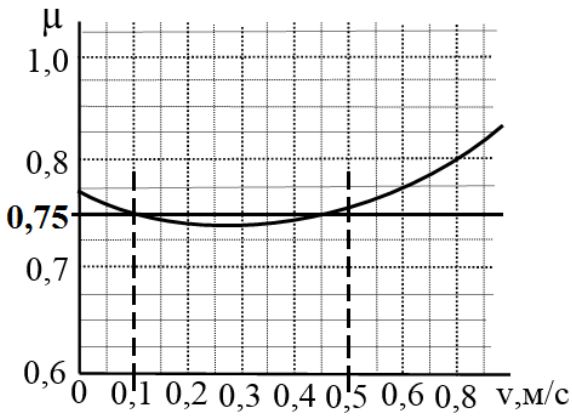
Для статики це рівняння тривіальне. У випадку руху отримати рівняння (1) можна також з енергетичних міркувань, розглянувши зміну потенціальної енергії тягарців і роботу сили тертя. Враховуючи $F_{\text{тр}} = \mu N$, перепишемо систему рівнянь (1) і (2):

$$\begin{cases} N\sqrt{1+\mu^2} = (m_0 + m + M)g, \\ \mu N r = (M - m)gR. \end{cases}$$

Де враховано, що при рівномірному русі вантажів сила натягу ниток дорівнюватиме їх вазі. Розв'язуючи систему, знаходимо коефіцієнт тертя:

$$\mu = 1 \Big/ \sqrt{\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{m_0 + m + M}{M - m}\right)^2 - 1} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,.$$

За графіком коефіцієнту тертя $\mu = 0{,}75$ відповідають дві швидкості: 0,1 м/с і 0,45 м/с.



Проаналізуємо, що відбудеться, якщо швидкість трохи зменшиться. Якщо зменшиться швидкість 0,1 м/с, це, згідно графіку, призведе до збільшення коефіцієнту тертя, що ще більше загальмує рух системи аж до повної її зупинки. Якщо зменшиться швидкість 0,45 м/с, це, згідно графіку, призведе до зменшення коефіцієнту тертя, що приведе до прискорення системи і повернення до попередньої швидкості. Якщо ж швидкість 0,45 м/с збільшиться, коефіцієнт тертя згідно графіку також збільшиться, і рух системи загальмується до знову ж таки швидкості 0,45 м/с. Отже встановиться швидкість 45 см/с руху внутрішньої поверхні блоку відносно осі.

Цій швидкості відповідає втричі більша швидкість руху тягарців – 1,35 м/с.

Зазначимо, що для того, щоб така швидкість встановилася, на самому початку тягарці слід було розігнати так, щоб швидкість блоку відносно осі перевищувала $\approx 0{,}3\,\text{м/с}$ (мінімум графіку).

Відповідь: Встановлена швидкість рівномірного руху тіл дорівнює 1,35 м/с.