169. **Условие:** Скорость ветра, надувающего парус площадью $S = 25\ \text{м}^3$, равна $v_0 = 20\ \text{м/с}$. Сила, которая при этом действует на парус, имеет вид $F = \alpha S\rho(v_0 - v)^2/2$, где $\alpha = 3$, $\rho = 1{,}2\ \text{кг/м}^3$ – плотность воздуха, v – скорость судна. Определить условия, при которых мощность ветра максимальна. Найти работу силы ветра за время $t = 60$ с.

Решение: Очевидно, условия – это и есть скорость и направление движения судна. Будем считать, что судно движется по ветру, т.к. в этом случае мощность ветра максимальна[1]. При этом, если скорость судна больше скорости ветра, то ветер будет тормозить судно, и его мощность будет отрицательна. Пусть скорость судна $v \le v_0$. Тогда мощность ветра $P = Fv = \alpha S\rho v(v_0 - v)^2/2$. Для решения задачи необходимо найти максимум этого выражения. Воспользуемся леммой Ферма: в точке экстремума производная равна нулю. Имеем:

$$\frac{dP}{dv} = \frac{\alpha S\rho}{2}\left((v - v_0)^2 + v \cdot 2(v - v_0)\right) = \frac{\alpha S\rho}{2}(v - v_0)(3v - v_0) = 0.$$

Это уравнение имеет 2 корня: $v = v_0$ – соответствует минимуму $P = 0$, и $v = v_0/3$ – соответствует искомому максимуму $P = \frac{\alpha S\rho}{2} \cdot \frac{v_0}{3}\left(v_0 - \frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}\alpha S\rho v_0^3 = 53\ \text{кВт}$. Работа силы ветра $A = Pt = \frac{2}{27}\alpha S\rho v_0^3 t = 3{,}2\ \text{МДж}$.

Ответ: $v = v_0/3$, $A = 3{,}2$ МДж.

---

[1] *Можно доказать это для произвольного угла α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$.*

13*б*. **<u>Условие</u>:** Пластинка массой $m = 0{,}2$ кг лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружинка, жесткость которой $k = 1$ кН/м. Какую работу A необходимо совершить, чтобы на пружине поднять пластинку на высоту $l = 10$ см над поверхностью стола?

<u>Решение</u>: Исходное растяжение (или сжатие) пружинки не дано, поэтому считаем его равным нулю[2]. Во время поднятия пластинки работу совершали против силы тяжести пластинки и силы Гука со стороны пружинки. Изменение энергии пластинки $\Delta W_1 = mgl$, пружинки $\Delta W_2 = kl^2/2$ ($g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения). Согласно закону сохранения энергии имеем:

$$A = \Delta W_1 + \Delta W_2 = mgl + \frac{kl^2}{2} = 5{,}2 \text{ Дж.}$$

Если же в начальном состоянии пружинка сжата на x, то тогда работа по поднятию пластинки $A = mgl + k(l^2 - x^2)/2$, причем при $mg/k < x < \sqrt{l^2 + \frac{2mgl}{k}}$ часть работы (общей) выполняет сама пружинка, а при $x \geq \sqrt{l^2 + \frac{2mgl}{k}}$ она выполняет всю работу, т.е. дополнительных усилий прикладывать не надо!

<u>Ответ</u>: $A = 5{,}2$ Дж.

---

[2] *Это странно: пружинка имеет нулевую исходную длину? Или в столе есть дырка, в которую она помещена? Если же в исходном состоянии она сжата под действием тяжести пластинки, то какова ее исходная длина?*

219. **Условие:** Необходимо сжать $V_1 = 1 \cdot 10^{-2}$м^3 воздуха до объема[3] $V_2 = 2 \cdot 10^{-2}$м^3. Как выгоднее его сжимать: адиабатно или изотермически?

Решение: Согласно числам в условии, газ не сжимался, а расширялся, что противоречит самому условию. При решении задачи считаем, что газ сжимался от произвольного объема V_1 до объема V_2, причем $V_1/V_2 = \alpha > 1$. Рассмотрим, какую работу необходимо совершить для сжатия газа в обоих случаях.

а) Адиабатное сжатие. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом, поэтому количество степеней свободы $i = 5$, тогда показатель адиабаты $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$. Уравнение процесса сжатия воздуха $PV^\gamma = P_0 V_1^\gamma$ (P, V – давление и объем газа в данный момент времени, P_0 – начальное давление), откуда $P = P_0(V_1/V)^\gamma$. Как известно, работа, совершенная для сжатия газа, определяется по формуле $A = -\int_{V_1}^{V_2} PdV$. Подставив P, получим:

$$A_1 = -\int_{V_1}^{V_2} P_0 \frac{V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_0 V_1^\gamma \left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right)}{\gamma - 1}.$$

Эта работа вся идет на нагревание газа.

б) Изотермическое сжатие. Уравнение этого процесса $PV = P_0 V_1$, откуда $P = P_0 V_1 / V$. Аналогично предыдущему случаю, получаем:

$$A_2 = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{P_0 V_1}{V} dV = P_0 V_1 \, ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Эта работа вся выделяется в виде тепла в окружающую среду.

Чтобы узнать, какая работа меньше, разделим A_1 на A_2. Имеем:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{P_0 V_1^\gamma \left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right)}{(\gamma - 1) P_0 V_1 \, ln \frac{V_1}{V_2}} = \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} - 1}{(\gamma - 1) \, ln \frac{V_1}{V_2}} = \frac{\alpha^{\gamma - 1} - 1}{(\gamma - 1) \, ln \, \alpha}.$$

Можно доказать[4], что эта дробь больше 1 при $\alpha > 1$. Таким образом, с точки зрения работы, изотермический процесс выгоднее. Наглядно это видно на графике $P(V)$: адиабата растет быстрее, чем изотерма, так что площадь под ней больше. Кстати, и при расширении газа изотерма выгоднее: газ совершает бо́льшую работу.

С другой стороны, при адиабатном сжатии работа уходит на нагревание газа, а не выделяется в окружающую среду, так что можно будет использовать ее в будущем.

Ответ: изотермически.

---

[3] *Видимо, здесь ошибка в числах. На фотографии не все читается.*

[4] *Это видно, хотя бы, из графика* $A_1/A_2(\alpha)$.

228. **<u>Условие</u>:** Смесь газов состоит из $\nu_1 = 2$ моль одноатомного и $\nu_2 = 3$ моль двухатомного газов. Определить молярные теплоемкости C_P и C_V смеси.

<u>Решение</u>: Как известно, молярные теплоемкости идеального одноатомного газа $C_{P1} = \frac{5}{2}R$ и $C_{V1} = \frac{3}{2}R$; двухатомного $C_{P2} = \frac{7}{2}R$ и $C_{V2} = \frac{5}{2}R$ соответственно ($R = 8{,}314$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная). Определим вначале общие теплоемкости dQ_P/dT и dQ_V/dT системы. Из определения молярной теплоемкости имеем:

$$\frac{dQ_P}{dT} = C_{P1}\nu_1 + C_{P2}\nu_2 \text{ и } \frac{dQ_V}{dT} = C_{V1}\nu_1 + C_{V2}\nu_2.$$

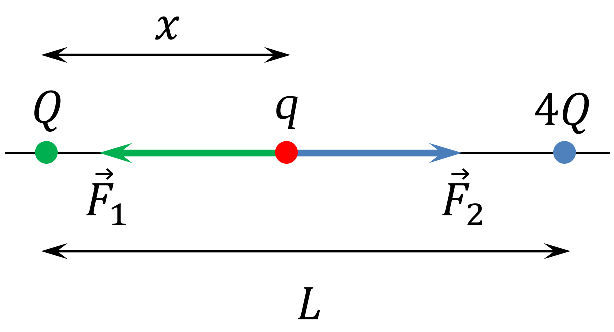
Искомые теплоемкости можно найти по формулам $C_P = \frac{dQ_P/dT}{\nu_1+\nu_2}$ и $C_V = \frac{dQ_V/dT}{\nu_1+\nu_2}$. Подставив dQ_P/dT и dQ_V/dT, получим:

$$C_P = \frac{C_{P1}\nu_1 + C_{P2}\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\frac{5}{2}R \cdot 2 + \frac{7}{2}R \cdot 3}{2+3} = 3{,}1\,R = 25{,}77\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}};$$

$$C_V = \frac{C_{V1}\nu_1 + C_{V2}\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\frac{3}{2}R \cdot 2 + \frac{5}{2}R \cdot 3}{2+3} = 2{,}1\,R = 17{,}46\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

<u>Ответ</u>: $C_P = 25{,}77$ Дж/(моль · К); $C_V = 17{,}46$ Дж/(моль · К).

309. **Условие:** Два положительных точечных заряда Q и $4Q$ закреплены на расстоянии $L = 60$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, нужно поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии. Определить какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, которая проходит через закрепленные заряды.



Решение: Изобразим систему зарядов на рисунке. Пусть подвижный заряд q находится в равновесии на расстоянии x от заряда Q. На подвижный заряд действуют две противоположно направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ со стороны закрепленных зарядов. По закону Кулона:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}; \; F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Qq}{(L-x)^2},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Чтобы заряд находился в равновесии, необходимо, чтобы выполнялось равенство $F_1 = F_2$. Отсюда получаем $4x^2 = (L-x)^2$, откуда $x = L/3$ или $x = -L$ (очевидно, второй корень не подходит).

Чтобы равновесие было устойчивым, необходимо, чтобы при небольшом отклонении заряда от равновесия внешнее поле возвращало его обратно. В случае отрицательного заряда это не наблюдается: при небольшом отклонении в сторону какого-л. заряда притяжение к нему возрастет, и подвижный заряд будет все более отдаляться от положения равновесия. В случае же положительного заряда все наоборот: при небольшом отклонении в сторону какого-л. заряда отталкивание от него возрастет и вернет подвижный заряд в положение равновесия.

Ответ: на расстоянии 20 см от заряда Q, равновесие устойчиво в случае отрицательного заряда.

369. **<u>Условие</u>:** Пять параллельно соединенных конденсаторов емкостями по $C = 0{,}1$ мкФ заряжены до общей разности потенциалов $U_0 = 30$ кВ. Определить среднюю мощность разряда, если батарея разряжается за время $t = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ с. Остаточное напряжение $U = 0{,}5$ кВ.

<u>Решение</u>: Так как конденсаторы соединены параллельно, то напряжение на каждом равно общему напряжению батареи. Энергия одного конденсатора определяется по формуле $W = CU^2/2$, где C – емкость конденсатора, U – напряжение на нем. Тогда изменение энергии конденсаторов вследствие разрядки $\varDelta W = 5C(U_0^2 - U^2)/2$, которое равно суммарной энергии разряда. Среднюю мощность разряда находим по формуле:

$$\bar{P} = \frac{\varDelta W}{t} = \frac{5C(U_0^2 - U^2)}{2t} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ Вт}.$$

<u>Ответ</u>: $\bar{P} = 150$ МВт.

409. **<u>Условие</u>:** Из вертикально расположенного плоского конденсатора равномерно вытекает керосин, которым был залит конденсатор. При этом в цепи, которая соединяет конденсатор с батареей аккумуляторов, напряжение которой $U = 100$ В, течет ток $I = 2 \cdot 10^{-11}$ А. С какой скоростью v понижается уровень керосина? Пластины конденсатора квадратные площадью $S = 100\ \text{см}^2$, расстояние между ними $d = 1$ мм.

<u>Решение</u>: В условии не дана диэлектрическая проницаемость керосина, при расчетах будем использовать значение $\varepsilon = 2{,}1$. Так как пластина квадратная, то ее размеры $a = b = \sqrt{S}$. Пусть в некоторый момент высота слоя воздуха в конденсаторе равна x. Конденсатор, частично заполненный диэлектриком, можно рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора: один пустой, другой с диэлектриком. Емкость первого $\text{C}_1 = \varepsilon_0 x\sqrt{S}/d$, второго $\text{C}_2 = \varepsilon\varepsilon_0(\sqrt{S} - x)\sqrt{S}/d$. Пусть прошло малое[5] время dt. За это время высота слоя воздуха увеличилась на $dx = vdt$, на столько же уменьшилась высота слоя керосина. Тогда новые емкости конденсаторов $C_1{}' = \varepsilon_0(x + dx)\sqrt{S}/d$, $C_2{}' = \varepsilon\varepsilon_0(\sqrt{S} - x - dx)\sqrt{S}/d$; а изменение емкостей $dC_1 = C_1{}' - C_1 = \varepsilon_0\sqrt{S}dx/d$, $dC_2 = C_2{}' - C_2 = -\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{S}dx/d$ (емкость уменьшилась). Полное изменение емкости $dC = dC_1 + dC_2 = -(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\sqrt{S}dx/d$. Так как напряжение на обкладках конденсатора поддерживали постоянным, то изменение заряда конденсатора $dQ = UdC =$ $= -U(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\sqrt{S}dx/d$, которое по модулю равно Idt. Подставив $dx = vdt$, получим:

$$\frac{U(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\sqrt{S}vdt}{d} = Idt,$$

откуда

$$v = \frac{Id}{U(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\sqrt{S}} = 0{,}21\ \text{мм/с}.$$

<u>Ответ</u>: $v = 0{,}21$ мм/с.

---

[5] *Так как процесс линейный (т.е. сила тока не зависит от x), то необязательно считать время dt малым.*

448. **<u>Условие</u>:** ЭДС батареи $\varepsilon = 60$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом. Внешняя часть цепи потребляет мощность $P = 125$ Вт. Определить силу тока I в цепи, напряжение U на внешней части цепи и ее сопротивление R.

<u>Решение</u>: По закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Тогда мощность, потребляемая внешней цепью, имеет вид

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}.$$

Домножив на $(R + r)^2$ и раскрыв скобки, получаем уравнение:

$$PR^2 + R(2Pr - \varepsilon^2) + Pr^2 = 0,$$

корни которого

$$R_{1,2} = \frac{\varepsilon^2 - 2Pr \pm \sqrt{\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 Pr}}{2P}.$$

Подставив численные значения, получаем $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 0{,}8$ Ом. Оба варианта удовлетворяют условию. Рассчитаем силу тока в цепи в обоих случаях:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} = 2{,}5 \text{ А},\ I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r} = 12{,}5 \text{ А}.$$

По закону Ома, напряжение

$$U = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r}.$$

Рассчитаем напряжение на внешней части цепи в обоих случаях:

$$U_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + r} = 50 \text{ В},\ U_2 = \frac{\varepsilon R_2}{R_2 + r} = 10 \text{ В}.$$

<u>Ответ</u>: $I_1 = 2{,}5$ А, $U_1 = 50$ В, $R_1 = 20$ Ом; или $I_2 = 12{,}5$ А, $U_2 = 10$ В, $R_2 = 0{,}8$ Ом.