8.1. На фото (мал.1) – професор кафедри квантової макрофізики ДНУ В.С.Савчук. Вважаючи, що фото було зроблено з досить великої відстані, визначити: 1) яка вада зору у вченого – короткозорість чи далекозорість; 2) визначити з якомога більшою точністю оптичну силу лінз його окулярів; 3) як зміниться відповідь, якщо припустити, що фото було зроблено з близької відстані (поясніть). Відомо, що при виготовленні окулярів оптичні центри лінз розташовують навпроти зіниць очей, коли людина дивиться вдалину. Для виконання завдання скористуйтеся лінійкою та наведеною моделлю (мал.2), на якій схематично зображено голову людини, лінзи окулярів і хід променів (вигляд зверху). При розрахунках вважати, що *R*=(10,0±1,0) см. Оцінити точність розрахунків.

Розв'язок: Для розв'язання задачі необхідно за допомогою лінійки виміряти відстань *L* між краями голови, які можна побачити в очках та відстань *l* між зірницями (Рис. 1).

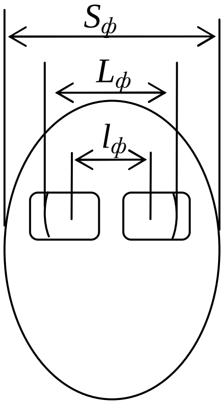


Рис.1.

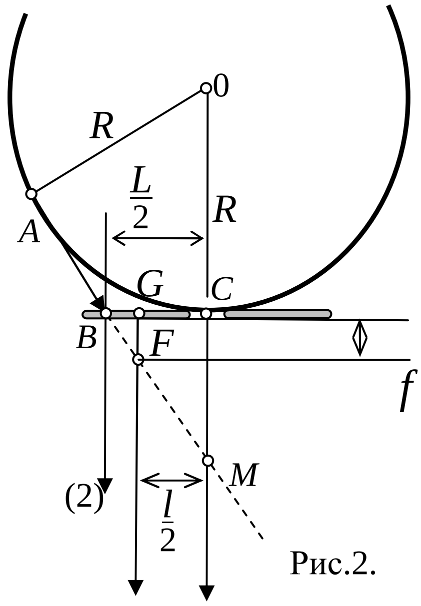


Рис.2.

Після нанесення цих величин на схему, отримаємо Рис. 2. Перетин променя (1), який іде від зірниці та продовження променя *AB*, який іде від краю голови, дають положення фокуса *F* лінзи окулярів. Із подібності – трикутників маємо:

$$\frac{h}{f} = \frac{L}{L - l}\text{, де } h = MC \text{ та } f = FG$$

Враховуючи, що оптична сила D = 1/f, отримуємо

$$Dh = \frac{L}{L - l} \tag{1}$$

Із подібності трикутників ΔAOM і ΔMBC

$$\frac{2h}{L} = \frac{\sqrt{(R + h)^2 - R^2}}{R} = \frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R} \tag{2}$$

Розв'язуючи (1) і (2) сумісно, отримуємо:

$$D = \frac{4R^2 - \mathrm{L}^2}{2RL(L - l)}$$

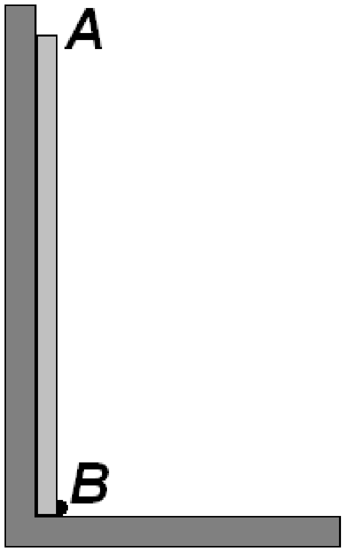
Розміри *L* і *l* можна отримати помноживши відповідні розміри на фото $L_ф$ і $l_ф$ масштабний множник $2R/S_ф$, де $S_ф$ – поперечний розмір голови на фото. Тоді

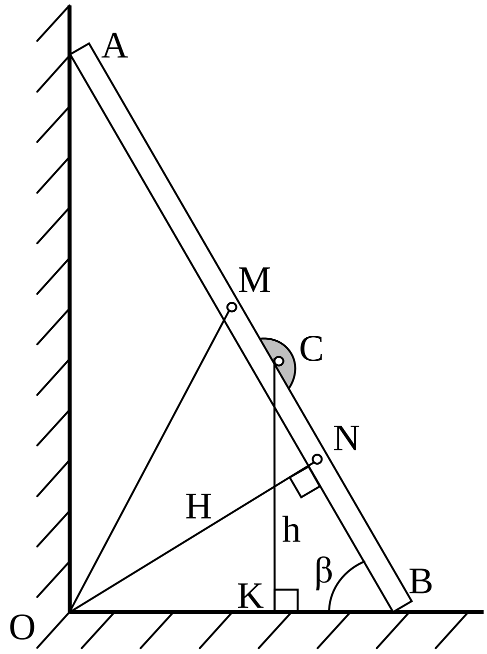
$$D = \frac{S_ф{}^2 - L_ф{}^2}{2RL_ф(L_ф - l_ф)}$$

Похибка оптичної сили: $\Delta D \approx D\left(\frac{2\Delta S_ф}{(S_ф - L_ф)} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L_ф}{L_ф} + \frac{2\Delta L_ф}{L_ф - l_ф}\right).$

Задача 2 (8 клас)

Біля вертикальної стінки стоїть паличка AB довжиною L. На її нижньому кінці B сидить жук. В той момент, коли кінець B почали рухати праворуч з постійною швидкістю v, жук поповз по паличці з постійною щодо неї швидкістю u. На яку максимальну висоту над підлогою підніметься жук за час свого руху по паличці, якщо її верхній кінець не відривається від стінки?





Розв'язання

Нехай через час *t* положення палички відповідає малюнку.

Тоді т.C – місце знаходження жука на паличці, т.M – середина палички; CK = h – висота жука над підлогою, ON = H – відстань від кута O до палички, t – час, який минув з початку руху жука.

Тоді .OB = V·t, BC = U·t; AM = OM = L/2.

Трикутники ONB і CKB подібні, оскільки вони прямокутні та мають спільний гострий кут β, тому:

CK/ON = BC/OB, або h/H = (U·t)/(V·t) = U/V,

Звідки h=H·(U/V).

У прямокутному трикутнику OMN катет ON=H≤OM=L/2. (OM-гіпотенуза), причому рівність досягається при β=45^0.

Отже $h_{\max} = H_{\max}\dfrac{U}{V} = \dfrac{U}{2V}L$

Цей результат буде вірним, якщо за час $t_{\max} = \dfrac{OB}{V} = \dfrac{L}{\sqrt{2}V}$ (де $OB = \sqrt{\dfrac{L^2}{4} + \dfrac{L^2}{4}} = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ за теоремою Піфагора) жук не встигає доповзти до верхнього кінця палички, тобто коли $U \cdot t_{max} < L$, що еквівалентно нерівності $U \le \sqrt{2}V$. У протилежному випадку висота буде максимальною до моменту часу t=L/U досягнення жуком точки A:

$$h_{\max} = \sqrt{L^2 - (V\cdot t)^2} = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{U^2}}.$$

Задача 3 (8 клас)

Нехай S_0 - площа горизонтального перерізу липового кільця (мал. 2). Вагу кільця зрівноважує сила гідростатичного тиску: $mg = p\cdot S_0$, де $m = \rho_л \cdot H\cdot S_0$, $p = \rho_в\cdot g\cdot h$, а h – глибина занурення кільця. Звідси

$$\rho_л gH = \rho_в gh \quad .(1)$$

При заповненні внутрішньої частини кільця бензином гідростатичний тиск на рівні нижнього краю кільця залишається постійним. Оскільки густина бензину $\rho_б$ менше за густину $\rho_в$ води, загальна висота шару бензину і води всередині кільця буде більша за висоту h води зовні кільця. Оскільки липа в бензині не тоне, в решті решт бензин почне підпливати під кільце знизу. Нехай x – максимальна товщина шару бензину налитого всередину кільця. Запишемо рівність гідростатичних тисків :

$$\rho_б gx = \rho_в gh\,. \quad (2)$$

Розв'язавши спільно рівняння (1) і (2), отримаємо

$$x = H\frac{\rho_л}{\rho_б}.$$

Оскільки об'єм бензину всередині кільця $V = S\cdot x = S\cdot H\frac{\rho_л}{\rho_б}$, то його маса

$$m_б = \rho_б V = H\cdot S\cdot \rho_л = 0{,}75\ \text{кг}$$

Задача 4 (8 клас)

Перший мотоцикліст рухається до голови колони зі швидкістю $v - v_1$ відносно колони і назад з відносною швидкістю $v + v_1$. Час до зустрічі з другим мотоциклістом рівний

$$t = \frac{l}{2(v_1 - v)} + \frac{x}{v + v_1}.$$

Аналогічно, час руху другого мотоцикліста до зустрічі з першим

$$t = \frac{l}{2(v_2 + v)} + \frac{l - x}{v_2 - v}.$$

Для знаходження невідомої величини (місце зустрічі відносно колони) , маємо рівняння

$$\frac{l}{2(v_1 - v)} + \frac{x}{v + v_1} = \frac{l}{2(v_2 + v)} + \frac{l - x}{v_2 - v}.$$

Простіше зразу підставити співвідношення між швидкостями $v_1 = 4v$, $v_2 = 2v$.

$$\frac{l}{6v} + \frac{x}{5v} = \frac{l}{6v} + \frac{l - x}{v};$$

$$x = \frac{5l}{6};\ x = \frac{5 \cdot 3}{6} = 2{,}5\,\text{км}.$$

Час до зустрічі $\quad t = \dfrac{l}{6v} + \dfrac{5l}{6 \cdot 5v} = \dfrac{l}{3v} = 100\,\text{с}.$

Шлях, що пройшла колона $S = v \cdot t$, $S = 1$ км.

Задача 5 (8 клас)

На шальку пружинних терезів кладуть тіло масою m. У момент, коли тіло торкнеться поверхні шальки терезів, його миттєво відпускають. У результаті повного затухання коливань шальки з тілом виділяється кількість теплоти Q_m. Скільки тепла Q_M виділиться, якщо аналогічно покласти тіло масою M, причому $M = n \cdot m$?

Розв'язання.

Нехай x – величина деформації пружини при переході з початкового (ненавантаженого) стану рівноваги в кінцевий (навантажений) стан статичної рівноваги. Тягарець масою m зменшить свою потенціальну енергію в полі земного тяжіння на величину E_m:

$$E_\text{m}=mgx$$

Оскільки після затухання коливань $F_\text{пр} = mg$, то енергія стиснутої пружини дорівнюватиме:

$$E_\text{пр} = \frac{mgx}{2}$$

Очевидно, що $E_\text{пр} = \frac{E_\text{m}}{2}$. Кількість тепла, що виділиться у результаті:

$$Q_\text{m} = E_\text{m} - E_\text{пр} = mgx - \frac{mgx}{2} = \frac{mgx}{2}.$$

Оскільки $mg = kx$, $x = \frac{mg}{k}$, то $Q_\text{m} = \frac{(mg)^2}{2k}$.

Аналогічним чином, якщо $M = n \cdot m$, то

$$Q_M = \frac{(Mg)^2}{2k} = n^2 \frac{(mg)^2}{2k} = n^2 Q_\text{m}.$$

Отже, $Q_\text{M} = n^2 Q_\text{m}$.