# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

## 16 января 2011 года

## Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

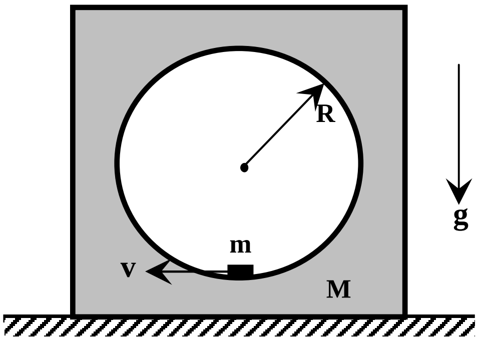
1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и ***Листы для записи*** (***Writing sheets***). Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На ***Writing sheets*** следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону ***Writing sheets***. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы ***Writing sheets***.
7. На каждом использованном ***Writing sheets,*** в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну **(*Country*)**, Ваш код **(*Student Code*),** порядковый номер задачи **(*Question Number*)**, текущий номер каждого листа **(*Page Number*)** и полное количество листов, использованных при решении всех задач **(*Total Number of Pages)***. Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные ***Writing sheets*** были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчёт полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
   - Пронумерованные по порядку ***Writing sheets***;
   - Черновые листы;
   - Неиспользованные листы;
   - Отпечатанные условия задачи

   Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

## Задача 1

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

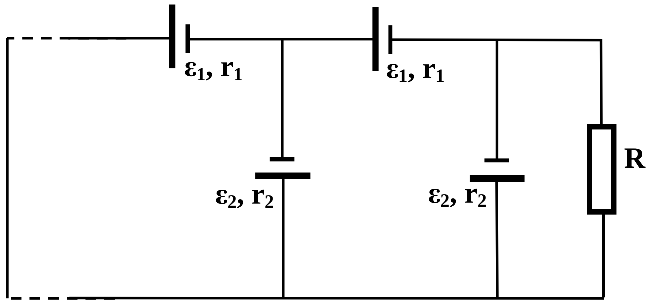
### 1A (3.5 балла)




Тело представляет собой куб, в котором вырезана сферическая полость радиуса $R$. Внутри сферической полости в нижней точке покоится шайба, геометрическими размерами которой можно пренебречь. Найдите минимальную горизонтальную скорость (при всех возможных отношениях масс куба и шайбы), которую необходимо сообщить шайбе, чтобы в процессе движения куб оторвался от поверхности стола. Трение в системе полностью отсутствует. При каком отношении масс куба и шайбы $M/m$ достигается минимальное значение скорости шайбы?

### 1B (4 балла)

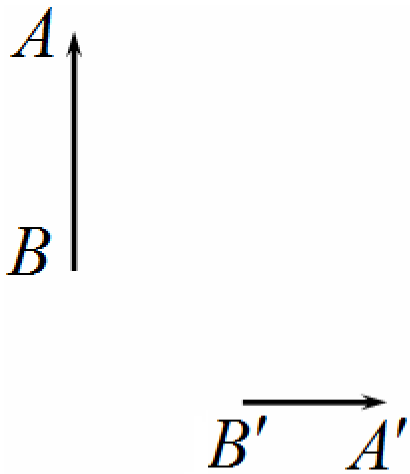
К сопротивлению $R = 2{,}0$ Ом подключена бесконечная система источников питания так, как показано на рисунке. Определите силу тока, протекающего через сопротивление $R$. Э.д.с источников тока и их внутренние сопротивления известны и равны: $\varepsilon_1 = 2{,}0$ В, $r_1 = 1{,}0$ Ом, и $\varepsilon_2 = 1{,}0$ В, $r_2 = 2{,}0$ Ом.




### 1C (2.5 балла)

На рисунке показан предмет AB и его изображение A’B’ в тонкой линзе. С помощью построений найдите:

а) оптический центр линзы (0,5 балла);
б) плоскость линзы (1 балл);
в) главные фокусы линзы (0,5 балла).
Укажите, является эта линза собирающей или рассеивающей (0,5 балла).




## Задача 2
## Электропроводность металлов (10 баллов)

### Закон Ома

Проводниками называются материальные тела, в которых при наличии электрического поля возникает упорядоченное движение зарядов, то есть электрический ток. Закон, связывающий силу тока $I$, протекающего по проводнику, с разностью потенциалов (напряжением) $U$, приложенной к его концам, был открыт экспериментально Георгом Омом (1787–1854) и имеет вид

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (1)$$

где $R$ – величина, называемая сопротивлением проводника.

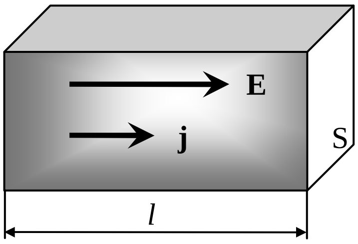



Рис.1

Рассмотрим малый элемент проводника длиной $l$ и поперечным сечением $S$, к концам которого приложена разность потенциалов $U$. Пусть $\sigma$ – удельная электрическая проводимость вещества, которая является величиной, обратной удельному электрическому сопротивлению $\rho$. Электрическое сопротивление элемента проводника и сила тока, текущего по нему, равны

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}, \qquad I = jS, \qquad (2)$$

где введена плотность тока $j$, представляющая собой количество заряда, проходящего в единицу времени через единицу поперечного сечения проводника и зависящая от концентрации электронов и их **средней скорости упорядоченного движения**.

Принимая во внимание, что $E = U/l$ – напряженность электрического поля, из (1) и (2) получаем локальную (дифференциальную) форму записи закона Ома

$$j = \sigma E. \qquad (3)$$

Учитывая, что направления векторов напряженности электрического поля и плотности тока в проводнике одинаковы, это соотношение можно записать в векторном виде

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \qquad (4)$$

1. **[1 балл]** Исходя из закона Джоуля-Ленца, впервые открытом Джеймсом Джоулем и позже Эмилем Ленцем, определите объемную плотность тепловой мощности $P_V$, выделяемой в проводнике, то есть теплоты, образующейся в 1 *м*$^3$ проводника за 1 *с*. Ответ выразите через $E$ и $\sigma$.

## Модель Друде

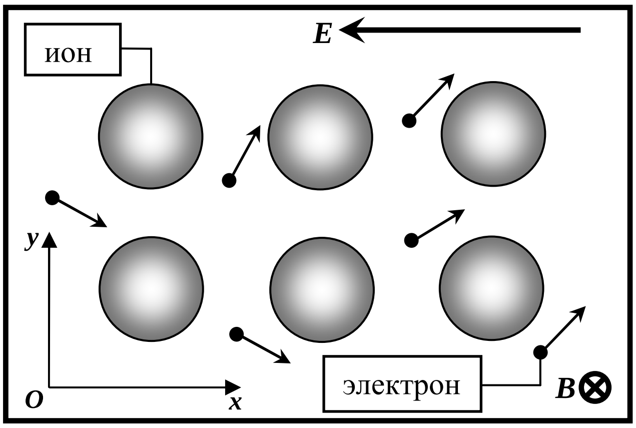



Рис.2

Немецкий физик Пауль Друде, после открытия Джозефом Джоном Томпсоном электрона в 1900 году, предложил так называемую классическую теорию электропроводности металлов. Согласно этой теории электроны с концентрацией $n$, массой $m$ и зарядом $-e$ могут свободно перемещаться в ионной кристаллической решетке металла, периодически сталкиваясь с ионами в узлах и передавая им свою кинетическую энергию.

Действительное движение электрона очень сложное, поскольку он находится в хаотическом тепловом движении. Под влиянием внешнего поля все электроны получают одинаковое ускорение и приобретают дополнительную скорость. В результате возникает упорядоченное движение электронов, то есть электрический ток. Нас будет интересовать только это упорядоченное движение электронов, которое накладывается на их хаотическое тепловое движение.

Так как реальная картина электропроводности очень сложна, примем следующую упрощенную модель. Допустим, что электрон с начальной нулевой скоростью ускоряется в течении времени $\tau$, затем сталкивается с ионом и отдает ему всю приобретенную кинетическую энергию. Затем он снова начинает ускоряться, через время $\tau$ снова сталкивается с ионом и так далее. *При этом электроны между собой не взаимодействуют.*

2. **[1 балл]** Определите вектор средней упорядоченной скорости движения электронов $\mathbf{u}$. Ответ выразите через $e$, $\mathbf{E}$, $m$ и $\tau$.

3. **[1 балл]** Плотность тока определяется компонентой средней скорости, параллельной вектору напряженности внешнего электрического поля $E$. Покажите, что в этой модели справедлив закон Ома и найдите проводимость металла $\sigma$. Ответ выразите через $e$, $n$, $m$ и $\tau$.

4. **[1 балл]** Какое количество теплоты $Q_V$ передают электроны кристаллической решетке в 1 *м*$^3$ проводника за 1 *с*. Ответ выразите через $e$, $\mathbf{E}$, $n$, $m$ и $\tau$.

## Магнетосопротивление

Важным гальваномагнитным явлением является изменение проводимости проводника, помещенного в поперечное магнитное поле. Это явление называется эффектом магнетосопротивления. Как показывает опыт, относительное изменение удельной проводимости $\Delta\sigma/\sigma$ при не очень сильных магнитных полях с индукцией $B$ выражается формулой

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma(B)-\sigma(B=0)}{\sigma(B=0)} = \mu B^{\nu}, \qquad (5)$$

где $\mu$ и $\nu$ – некоторые постоянные.

*Используя модель Друде, описанную выше, выполните следующие задания. Внимательно изучите второй рисунок 2, представленный выше, так как на нем представлены система координат и направления всех векторов.*

5. **[1 балл]** Найдите зависимости проекций скорости электрона на оси координат $u_x(t)$ и $u_y(t)$ от времени $t$ между двумя последовательными столкновениями. Ответ выразите через $e$, $E$, $B$, $m$ и $t$.

6. **[2 балла]** Плотность тока определяется компонентой средней скорости, параллельной вектору напряженности внешнего электрического поля $E$. Считая величину индукции магнитного поля $B$ достаточно малой, определите значения постоянных $\mu$ и $\nu$ в формуле (5). Ответ выразите через $e$, $m$ и $\tau$.

## Эффект Холла

Эдвин Холл в 1879 году открыл явление возникновения поперечной разности потенциалов, называемой холловским напряжением, при помещении проводника с током в постоянное магнитное поле.

В простейшем рассмотрении эффект Холла выглядит следующим образом. Пусть через металлический брус в слабом магнитном поле $B$ течёт электрический ток под действием напряжённости внешнего электрического поля $E$. Магнитное поле будет отклонять электроны от их прямолинейного движения к одной из граней бруса. Таким образом, сила Лоренца приведёт, в отличие от магнетосопротивления, к накоплению отрицательного заряда возле одной грани бруска и положительного – возле противоположной. Накопление заряда будет продолжаться до тех пор, пока возникшее поперечное электрическое поле зарядов

$E_H$ (направленное на представленном выше рисунке вдоль оси $Oy$) **полностью не скомпенсирует** за время $\tau$ поперечное смещение электронов.

*Используя модель Друде, описанную выше, выполните следующие задания. Внимательно изучите рисунок 2, представленный выше, так как на нем представлены система координат и направления всех векторов.*

7. **[0.5 балла]** Внимательно посмотрите на второй рисунок, приведенный выше. Возле какой из граней, верхней или нижней, будет происходить накопление отрицательного заряда?

8. **[1.5 балла]** Найдите зависимости проекций скорости электрона на оси координат $u_x(t)$ и $u_y(t)$ от времени $t$ между двумя столкновениями. Ответ выразите через $e$, $E$, $E_H$, $B$, $m$ и $t$.

9. **[1 балл]** Найдите холловскую напряженность поперечного электрического поля $E_H$. Ответ выразите через $e$, $E$, $B$, $m$ и $\tau$, а затем через $e$, $j$, $B$, и $n$.

*При решении данной задачи вы можете использовать приближенные формулы, справедливые при малых значениях $x$:*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

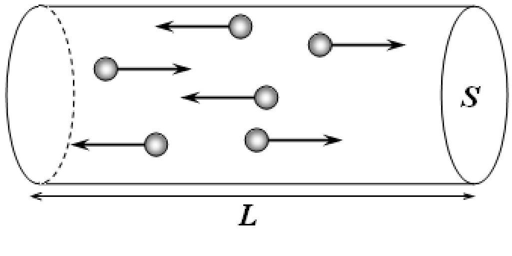
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

## Задача 3 (10 баллов)
## Термодинамика простейшего квантового идеального газа

В классической физике энергия системы изменяется непрерывно. В физике микромира большинство физических величин квантуется, то есть принимает дискретный ряд значений. Квантование энергии может приводить к реально наблюдаемым макроскопическим эффектам. В данной задаче вам предлагается рассмотреть простейшую модель квантового идеального газа.

### Модель

Газ состоит из $N$ одинаковых атомов массы $m$, которые находятся в длинном цилиндрическом сосуде длиной $L$ и площадью поперечного сечения $S$. Атомы могут двигаться только вдоль оси сосуда. Кинетическая энергия атомов квантуется, то есть может принимать дискретный ряд значений, определяемый формулой




$$E_n = n\varepsilon, \tag{1}$$

где $n = 1, 2, 3...$, а $\varepsilon$ - известная постоянная величина.

Считайте, что для кинетической энергии атома применима классическая формула.

Сосуд приведен в контакт с термостатом так, что температура газа в сосуде равна $T$. Изменение величины кинетической энергии атомов происходит в результате контакта с термостатом. Концентрация атомов невелика, так что столкновениями атомов между собой можно пренебречь.

В состоянии термодинамического равновесия число атомов $N_n$, имеющих энергию $E_n$, определяется функцией распределения Больцмана

$$N_n = C\exp\left(-n\frac{\varepsilon}{k_B T}\right), \tag{2}$$

где $k_B$ - постоянная Больцмана, $C$ - нормировочный множитель, который вам необходимо определить самостоятельно.

## Задания:

1 **[1 балл]** Определите число атомов $N_n$, имеющих энергию $E_n$. Ответ выразите через $N$, $\varepsilon$, $T$ и $k_B$.

2. **[3 балла]** Найдите выражение для внутренней энергии $U$ газа. Ответ выразите через $N$, $\varepsilon$, $T$ и $k_B$. Получите приближенные формулы для внутренней энергии газа в двух предельных случаях $k_B T >> \varepsilon$ (**высокая температура, классический предел**) и $k_B T << \varepsilon$ (**предел низких температу**р).

3 **[3 балла]** Вычислите молярную теплоемкость газа $C_V$ при постоянном объеме. Ответ выразите через $N$, $\varepsilon$, $T$ и $k_B$. Получите приближенные формулы для теплоемкости в классическом пределе и пределе низких температур. Постройте примерный график зависимости молярной теплоемкости рассматриваемого газа от температуры.

4 **[3 балла]** Найдите давление $P$, создаваемое газом на стенку сосуда. Ответ выразите через $N$, $\varepsilon$, $T$ и $k_B$. Получите приближенные формулы для давления в классическом пределе и пределе низких температур. Постройте примерный график зависимости давления газа от температуры.

*При решении данных задач вы можете использовать формулы:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\exp(x) \approx 1 + x, \quad x << 1,$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x, \quad |x| << 1.$$