

Задача 1. Просто цепь

Первоначально цепь может показаться симметричной относительно горизонтальной линии, проходящей через центр рисунка, что позволило бы отбросить участок цепи KE (рисунок 1), поскольку ток через него не идет. Однако такое предположение неверно, поскольку элементы с несимметричной вольт-амперной характеристикой – диоды – включены навстречу друг другу. Если напряжение приложено к диоду в обратном направлении, то, согласно вольт-амперной характеристике, ток через него не идет. Так, ток не пойдет через нижний диод D .

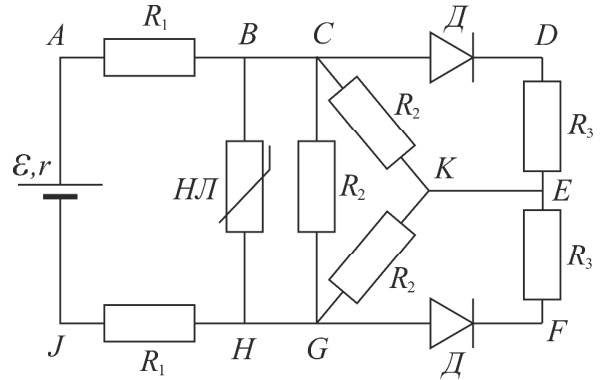


Рисунок 3 - Схема электрической цепи с обозначениями ключевых точек

Действительно, если предположить, что через оба диода ток в соответствующем направлении все же идет, то получим, что потенциал в точках C и G больше потенциала в точке E . Но тогда токи в узел K со всех сторон будут входить и никуда не выходить, чего быть не может. Таким образом, ток через нижний диод D на самом деле не будет проходить и, соответственно, ток через нижний резистор R_3 равен нулю. Поскольку ток и напряжение резисторе связаны линейным соотношением, то напряжение на нижнем резисторе R_3 также равно нулю. В силу отсутствия тока для дальнейшего изучения цепи участок GFE можно отбросить (рис. 2).

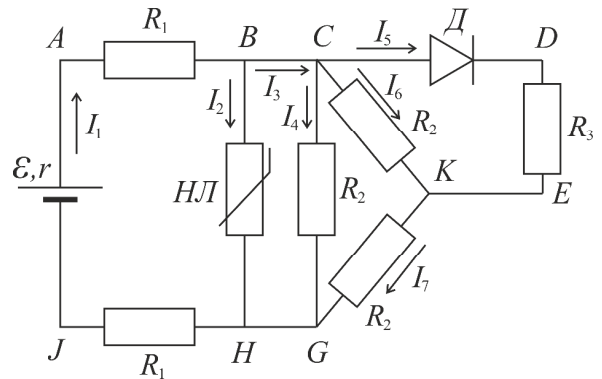


Рисунок 4 - Схема электрической цепи после отбрасывания участка с "закрытым" диодом

Так как вольт-амперная характеристика для нелинейного элемента задана графически, то для нахождения тока I_2 , проходящего через него, будем использовать графический метод. Для этого необходимо найти связь между напряжением на нелинейном элементе $U_{\text{нл}}$ и током через него I_2 , определяемую всеми остальными элементами цепи.

Начнем рассмотрение с узла C . В нем разветвляется ток I_3 , что позволяет записать следующее соотношение для токов: $I_3 = I_4 + I_5 + I_6$. Все токи можно выразить через соответствующие напряжения с помощью закона Ома для участка цепи с резисторами:

$$I_4 = \frac{U_{CG}}{R_2}; \quad I_5 = \frac{U_{DE}}{R_3}; \quad I_6 = \frac{U_{CK}}{R_2}$$

Изучая вольтамперную характеристику диода при его прямом включении можно заметить, что в случае напряжения на элементе, меньшего $U_d = 0,70$ В, ток не пойдет. В противном случае через диод может проходить любой ток, при этом на элементе падение напряжения будет равно U_d . Будем считать, что через диод ток протекает. В случае неверного предположения мы получим явно некорректный результат в виде, например, обратного направления тока через оставшийся резистор R_3 .

Получаем, что напряжение U_{DE} можно выразить: $U_{DE} = U_{CK} - U_d$. Поскольку в итоге мы хотим получить связь напряжения и тока в нелинейном элементе, то будем пытаться выразить все имеющиеся напряжения через $U_{CG} = U_{BH}$. Для участка KG с резистором R_2 можно записать $U_{KG} = I_7 R_2$, что приводит к:

$$U_{CG} - U_{CK} = (I_5 + I_6) R_2 = \left(\frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2 = \left(\frac{U_{CK} - U_d}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2$$

Отсюда можно выразить:

$$U_{CK} = \frac{U_{CG} + U_d \frac{R_2}{R_3}}{2 + \frac{R_2}{R_3}} = \frac{U_{CG} R_3 + U_d R_2}{2R_3 + R_2}$$

$$U_{DE} = U_{CK} - U_d = (U_{CG} - 2U_d) \frac{R_3}{2R_3 + R_2} \quad (1)$$

Тогда, возвращаясь назад к току I_3 , получим:

$$I_3 = I_4 + I_5 + I_6 = \frac{U_{CG}}{R_2} + \frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} = U_{CG} \frac{2R_2 + 3R_3}{R_2(R_2 + 2R_3)} - \frac{U_d}{R_2 + 2R_3}$$

Ток через источник разветвляется в узле B следующим образом: $I_1 = I_2 + I_3$. С другой стороны, этот ток можно определить из закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

Полное сопротивление всей цепи R можно записать как сумму сопротивлений двух резисторов R_1 , включенных последовательно с источником, и сопротивления оставшейся цепи, которое выразим через закон Ома:

$$R = 2R_1 + \frac{U_{BH}}{I_1}$$

Тогда из последних двух выражений можно получить выражение для тока:

$$I_1 = \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} \quad (2)$$

Наконец, получаем выражение для тока через нелинейный элемент, учитывая равенство напряжений $U_{BH} = U_{CG}$:

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} - U_{BH} \frac{2R_2 + 3R_3}{R_2(R_2 + 2R_3)} + \frac{U_d}{R_2 + 2R_3} \quad (3)$$

Полученное выражение представляет собой зависимость силы тока I_2 , протекающей через нелинейный элемент HL , от напряжения на нем U_{BH} . Подставив численные значения характеристик, получим:

$$I_2 = 0,094 \text{ А} - 0,125 \text{ СМ} \cdot U_{BH}$$

Данная зависимость определяет прямую, которую можно провести на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента (рисунок 3).

Координаты точки пересечения графиков как раз определяют ток и напряжение на нелинейном элементе. Получаем: $I_2 \approx 0,042 \text{ A}$, $U_{BH} \approx 0,41 \text{ V}$. Тогда по формуле (1), полученной ранее, найдем напряжение на оставшемся резисторе R_3 :

$$U_{DE} = (U_{BH} - 2U_d) \frac{R_3}{2R_3 + R_2} = -0,297 \text{ V}$$

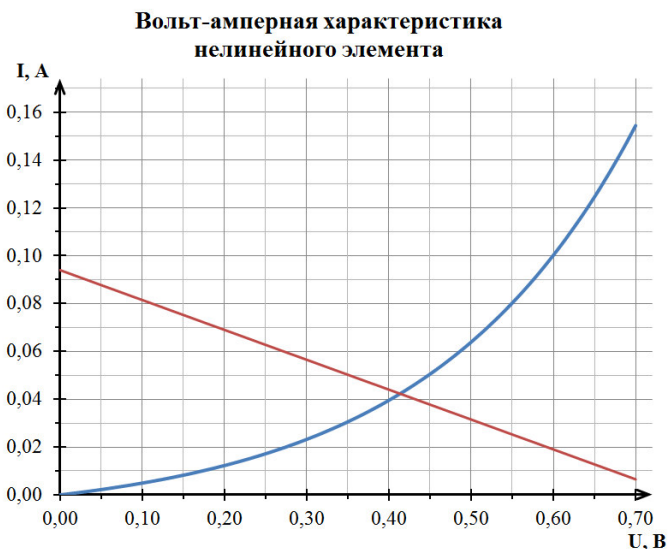


Рисунок 5 - Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента с пересечением прямой, характеризующей цепь

Полученный отрицательный результат говорит о том, что ток идет через резистор R_3 в направлении, обратном предполагаемому, чего быть не может. Получаем, что допущение о том, что через верхний диод D ток идет, неверно. То есть напряжение на участке $СК$ меньше, чем U_d (в этом можно убедиться, проведя расчеты по имеющимся формулам), что недостаточно для «открытия» диода. Таким образом, можно сделать вывод, что ток через оставшийся резистор R_3 не пойдет и, соответственно, напряжение на нем будет равно нулю.

Ответ: токи и напряжения на обоих резисторах R_3 равны нулю.

Примечания:

Задачу можно было решить и альтернативным способом, с самого начала предположив, что токи через оба диода не пойдут. Тогда, проведя необходимые вычисления данной электрической цепи, необходимо было бы показать, что напряжение на участке $СК$ меньше, чем U_d .

Наконец имеется еще один, самый короткий, способ решения. Руководствуясь значениями ЭДС источника, его внутреннего сопротивления и сопротивлений R_1 , можно рассчитать, что максимально возможная сила тока в цепи составляет $0,080 \text{ A}$. Тогда, согласно вольт-амперной характеристике нелинейного элемента, максимальное напряжение на нем – $0,55 \text{ V}$. Отсюда следует, что напряжение на диодах не сможет превысить достаточного $U_d = 0,70 \text{ V}$, чтобы ток через них проходил. Отсюда сразу следует ответ данной задачи.

После того, как участки цепи с диодами оказались выключенными, осталось рассчитать силу тока через резисторы R_1 . Три резистора R_2 можно заменить на резистор с сопротивлением $\frac{3}{2}R_2$. Тогда рассматриваемая схема приобретет вид, показанный на рис. 4.

Для расчета этой цепи можно воспользоваться уже использованным графическим методом, основанном на уравнениях (2)-(3). Так как участок цепи с диодами отключен, то в уравнении (3) следует положить $R_3 \rightarrow \infty$, в результате чего получим

$$I_2 = \frac{\varepsilon - U}{r + 2R_1} - \frac{3U}{2R_2}$$

Здесь обозначено $U = U_{BH}$ - напряжение на нелинейном элементе. Подставляя численные значения, получим

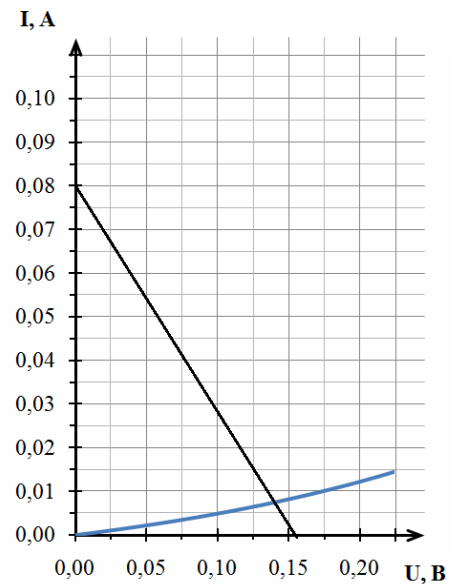
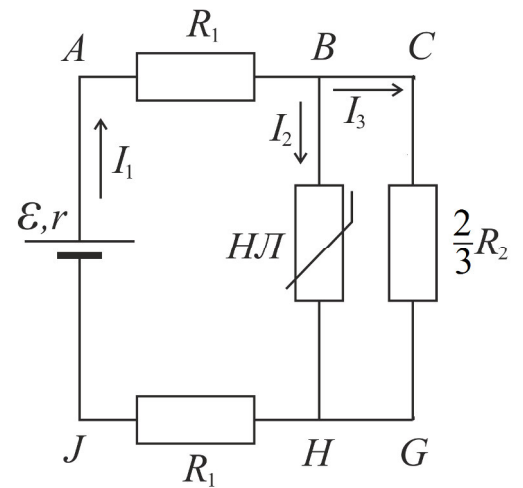
$$I_2 = 0,080 - 0,155U$$

Построив график этой прямой на графике ВАХ нелинейного элемента, по координатам точки пересечения найдем силу тока $I_2 \approx 7 \text{ мА}$ и напряжение $U = U_{BH} \approx 0,14 \text{ В}$. Это же напряжение приложено и к параллельно подключенному резистору, поэтому силу тока через него

$$I_3 = \frac{3U}{2R_2} \approx 10 \text{ мА}.$$

Искомая сила тока через резисторы R_2 равна сумме

$$I_1 = I_2 + I_3 \approx 17 \text{ мА}.$$



Задача 2. Перераспределение зарядов.

2.1 Рассмотрим величину плотности тока внутри пластины. С одной стороны она определяется законом Ома (в дифференциальной форме):

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (1)$$

С другой стороны плотность тока можно выразить через концентрацию свободных электронов и их среднюю скорость

$$\vec{j} = e\bar{n}\vec{v}. \quad (2)$$

Сравнивая эти выражения, получим

$$\vec{v} = \frac{1}{e\bar{n}\rho} \vec{E}. \quad (3)$$

Таким образом, подвижность электронов равна

$$\beta = \frac{1}{e\bar{n}\rho}. \quad (4)$$

Для дальнейшего решения задачи необходимо рассмотреть две стадии процесса: первая – область избыточной концентрации не достигла поверхности пластины; вторая – после того, как первые электроны достигли поверхности пластины.

2.2 Итак, пусть область избыточной концентрации распространилась на расстояние $z < h$ (рис.). Вне этой области $x > z$ напряженность поля остается неизменной и равной

$$E_0 = \frac{n_0 e z_0}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Действительно, она определяется зарядом, который находится на расстоянии от центра меньшим чем x , то есть всеми избыточными электронами.

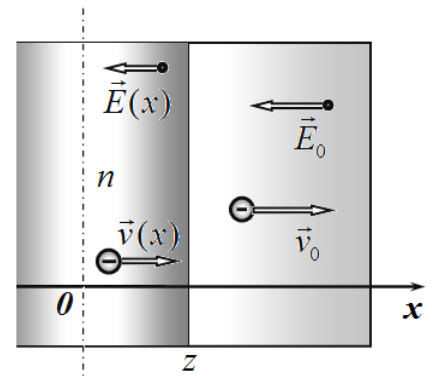
Поэтому в этой области скорости всех свободных (собственных) электронов, следовательно, плотность тока будут одинаковыми во всех точках. Поэтому в этой области избыточных зарядов возникать не будет. Кроме того, заряды, накапливающиеся на сторонах пластины, не влияют на поле внутри нее, поэтому при описании движения избыточных электронов свободные электроны можно не принимать во внимание.

Предположим (и это является основой дальнейшего описания!), что в процессе перераспределения на избыточных электронах их концентрация n одинакова во всех точках области $|x| < z$ (но изменяется с течением времени). Тогда, как было показано ранее, напряженность электрического поля будет зависеть от координаты по закону

$$E(x) = \frac{nex}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

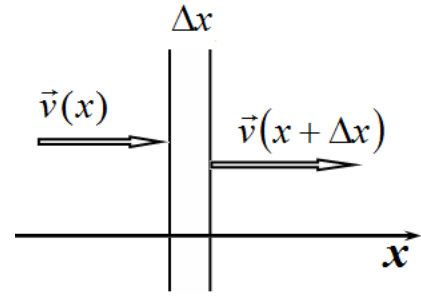
Аналогично будет изменяться и скорость электронов

$$v(x) = \beta E(x) = \frac{1}{e\bar{n}\rho} \frac{nex}{\epsilon_0} = \frac{n}{\bar{n}} \frac{1}{\rho\epsilon_0} x. \quad (6)$$



Рассмотрим теперь тонкий слой толщиной Δx , находящийся внутри рассматриваемой области. Изменение концентрации в этом слое описывается уравнением (смысл которого – разность между пришедшими и ушедшими электронами)

$$\Delta n = \frac{nv(x) - nv(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta t = -\frac{n^2}{\bar{n}} \frac{1}{\rho \epsilon_0} \Delta t. \quad (7)$$



Важно отметить, что во всех точках концентрация изменяется одинаково, поэтому если в начальный момент времени распределение избыточных электронов было однородным, то оно и будет оставаться однородным и далее! Что доказывает сделанное предположение!

Понятно, что скорость движения границы определяется скоростью электронов, которые расположены на этой границе, поэтому

$$v_z = v(z) = \beta E(x) = \frac{n}{\bar{n}} \frac{1}{\rho \epsilon_0} z = \frac{n_0 z_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} \quad (7)$$

Как следует из этого выражения, скорость движения границы не зависит от времени.

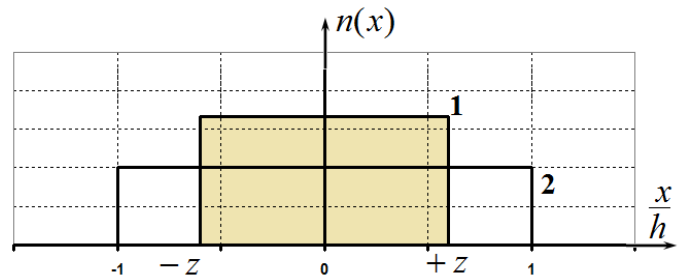
2.3 Таким образом, мы показали, что распределение избыточных электронов внутри области $|x| < z$ является однородным. Так как общее число избыточных электронов остается постоянным, то эта концентрация определяется очевидной формулой

$$n(t) = \frac{n_0 z_0}{z(t)} = \frac{n_0 z_0}{z_0 + \frac{n_0 z_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} t} = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} t}. \quad (9)$$

В области $|x| > 0$ концентрация избыточных электронов равна нулю. Отметим, что функция (9) также является решением дифференциального уравнения (7)

Теперь обсудим поведение избыточных электронов после того, как граница области их расположения достигла краев пластины. Как уже было отмечено, заряды на сторонах пластины не влияют на поле внутри, поэтому изменение концентрации электронов будет определяться, по-прежнему, формулой (8). Однако, на этом этапе часть электронов окажется на сторонах пластины, так, что суммарное число избыточных электронов внутри пластины будет уменьшаться.

Графики зависимости распределения $n(x)$ представляют собой прямоугольники 1- граница области избыточных электронов не достигла сторон пластины; 2- после того, часть избыточных электронов оказалась на границе.



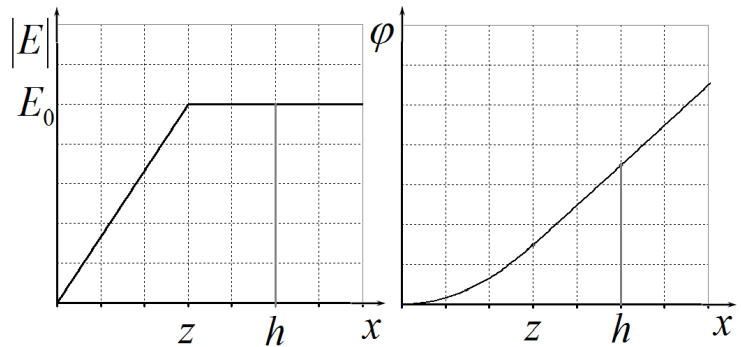
2.4 Прежде всего, рассмотрим распределение модуля напряженности электрического поля. Вне области расположения избыточных зарядов напряженность поля постоянна и равна

$$E_0 = \frac{n_0 e z_0}{\epsilon_0}.$$

В области с равномерно распределенным зарядом напряженность поля линейно возрастает от нуля до E_0 . Следовательно, зависимость напряженности поля от координаты x имеет вид

$$E = E_0 \frac{x}{z}. \quad (10)$$

График этой зависимости имеют вид показанный на рисунке (так как распределение зарядов симметрично относительно начала координат, то достаточно рассмотреть область $x > 0$). Примем потенциал в центре пластины равным нулю. Учитывая связь между разностью потенциалов и напряженностью $\Delta\varphi = -E\Delta x$, можем определить потенциал в произвольной точке, как площадь под графиком зависимости $|E(x)|$ - не забывайте, что электроны имеют отрицательный заряд. Следовательно, в области избыточных электронов $x < z$ потенциал возрастает квадратично

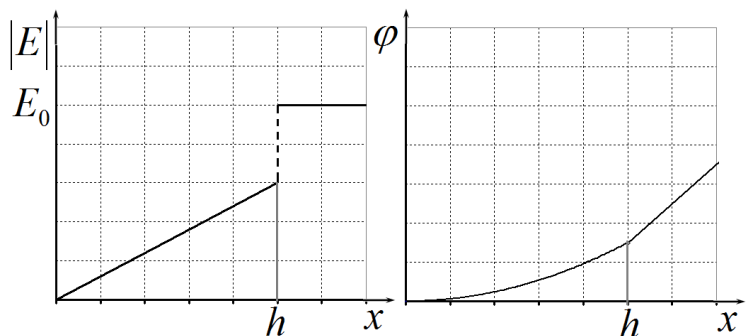


$$\varphi(x) = E_0 \frac{x^2}{2z} \quad (11)$$

А вне этой области возрастает по линейному закону

$$\varphi(x) = E_0 \frac{z}{2} + E_0(x - z) = E_0 \left(x - \frac{z}{2} \right) \quad (12)$$

«разбегания зарядов». Несколько иная картина будет в том случае, когда избыточные заряды начнут накапливаться на сторонах пластины. Напряженность поля внутри пластины будет нарастать медленнее, поэтому непосредственно у края напряженность будет меньше, чем E_0 . Затем благодаря накопившимся поверхностным зарядам, при переходе через край пластины испытывать скачок до значения E_0 . Зависимость потенциала от координаты в этой точке будет иметь излом.



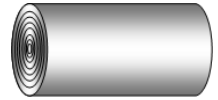
2.5 Зависимость концентрации от времени определяется функцией (9), поэтому, строго говоря, время «разбегания» зарядов равно бесконечности. Однако, всегда можно ввести некое характерное время. Например, можно найти время в течение которого, концентрация убывает в 2 раза (своеобразный «период полураспада»). Полагая в формуле (9) $n = \frac{n_0}{2}$, находим

$$T_{1/2} = \frac{\bar{n}\rho\epsilon_0}{n_0} \quad (13)$$

Интересно отметить, что найденное время зависит от начальной концентрации избыточных электронов. Такой результат типичен, если распад не является линейным.

Задача 3. Слоистые резисторы

3.1.1 Мысленно разобьем проводник на тонкие коаксиальные трубки, толщины Δr_i которых значительно меньше их радиуса r_i ($\Delta r_i \ll r_i$).



Одна из таких трубок, сопротивление которой $R_i = \rho_i \frac{l}{S_i}$, выделена на рисунке. В данном случае трубки соединены параллельно, следовательно, сопротивление резистора следует искать по закону параллельного соединения резисторов



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\rho_i l} = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi r_i \Delta r_i}{l \alpha r_i} = \frac{2\pi}{\alpha l} \sum_{i=1}^n \Delta r_i = \frac{2\pi a}{\alpha l}, \quad (1)$$

где $S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$ – площадь поперечного сечения выделенной на рисунке тонкой трубки.

Следовательно, сопротивление резистора в данном случае

$$R_1 = \frac{\alpha l}{2\pi a} = 10 \text{ Ом}. \quad (2)$$

3.1.2 Сила тока через резистор в этом случае

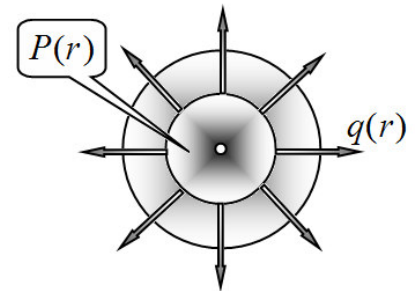
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U = 0,15 \text{ А}. \quad (3)$$

Соответственно, выражение для выделяемой мощности принимает вид

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U^2 = 0,23 \text{ Вт}. \quad (4)$$

Поскольку удельное сопротивление данного резистора минимально на оси цилиндра, то, согласно (4) больше всего будет нагреваться его сердцевина.

3.1.3 В установившемся режиме количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в цилиндре некоторого радиуса r (т.е. тепловой поток $q(r)$), должно отводиться наружу через его боковую поверхность $S = 2\pi r l$. В противном случае температура трубки должна была бы меняться. Из формулы (1) следует, что проводимость любого цилиндра, находящегося внутри рассматриваемого резистора и коаксиального с ним, пропорциональна радиусу этого цилиндра. Поэтому выражение для мощности теплоты, выделяющейся внутри выделенного цилиндра, аналогично формуле (4). Тогда уравнение для потока теплоты будет иметь вид



$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\alpha l} U^2 = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot S = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot 2\pi r l \Rightarrow \Delta T = -\frac{U^2}{\alpha \mathcal{M}^2} \Delta r. \quad (5)$$

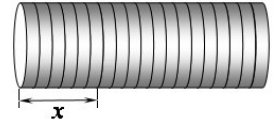
Согласно (5) приращение температуры данного слоя обратно по знаку приращению радиуса резистора, т.е. температура внутри него падает при увеличении r . Это означает, что максимальная температура резистора будет на его оси симметрии. Так и должно быть, поскольку теплота самопроизвольно перетекает от горячего слоя к холодному, а не наоборот

Суммируя (5) по всем слоям, найдем, что максимальная температура $T_{\max 1}$ в центре резистора будет равна

$$T_{\max 1} = T_0 - \Delta T = T_0 + \frac{U^2}{\alpha l^2} a = 46^\circ \text{C} . \quad (6)$$

3.2. «Блинная структура»

3.2.1 Рассмотрим блинную структуру. В этом случае сопротивление зависит от расстояния по закону $\rho(x) = \alpha \cdot x$, следовательно, для вычисления сопротивления последовательно соединенных «блинов» справедливо выражение



$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\Delta x_i}{S} = \frac{\alpha}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x_i = \\ &= \frac{\alpha l^2}{2S} = \frac{\alpha l^2}{2\pi a^2} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Ом} = 0,10 \text{ кОм} \end{aligned} \quad (7)$$

3.2.2 Силу тока в резисторе найдём по закону Ома

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U = 15 \text{ мА} \quad (8)$$

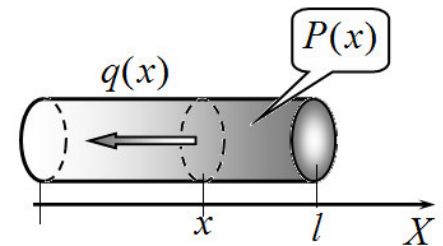
Согласно закону Джоуля-Ленца мощность тока, выделяемая в таком проводнике

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U^2 = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} = 23 \text{ мВт} . \quad (9)$$

Поскольку удельное сопротивление возрастает слева направо, то при прохождении тока больше нагреется правый конец цилиндра, где его удельное сопротивление больше.

3.2.3 Как следует из формулы (7), сопротивление резистора на

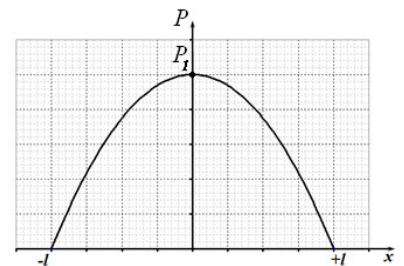
участке от x до l равно $R_{l-x} = \frac{\alpha}{2S}(l^2 - x^2)$. Поскольку сила тока в любом поперечном сечении резистора одинакова, то мощность тока, выделяемая на рассматриваемом участке резистора длиной $l - x$, может быть найдена как



$$P_{l-x} = I_2^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \left(\frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U \right)^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2). \quad (10)$$

График этой функции представляет собой параболу (см. рис.), ветви которой направлены вниз.

В установившемся режиме тепловой поток $q(x)$, проходящий через поперечное сечение проводника на расстоянии x от его конца (см. рис) должен быть равен мощности, выделяющейся справа от рассматриваемого сечения (10), иначе температура резистора продолжила бы меняться. Согласно закону Фурье для теплопередачи



$$q(x) = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta x} S = P_{l-x} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2) . \quad (11)$$

Выражая из (12) малое приращение температуры, получим

$$\Delta T = -\frac{2\pi a^2 U^2}{S \gamma \alpha l^4} (l^2 - x^2) \Delta x . \quad (12)$$

Знак «-» в (12) говорит о том, что тепловой поток направлен против положительного направления оси Ox .

Суммируя (12), получим, что повышение температуры правого конца стержня пропорционально площади под графиком параболы. С учетом замечания из условия задачи, имеем

$$T_{\max 2} = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{2\pi a^2 U^2}{\gamma \alpha l^4} \sum (l^2 - x_i^2) \Delta x_i = T_0 + \frac{2U^2}{\gamma \alpha l^2} \cdot \frac{2}{3} l = 370^\circ \text{C} = 3,7 \cdot 10^2^\circ \text{C} . \quad (13)$$

3.2.4 В рассматриваемом случае плотность тока ($j = I/S$, $[j] = \text{A}/\text{m}^2$) не меняется вдоль резистора, поскольку площадь его поперечного сечения остается постоянной. Так как удельное сопротивление рассматриваемого резистора изменяется, то должна изменяться и напряженность поля внутри цилиндра, что возможно только при накоплении объемных зарядов внутри него! Согласно закону Ома в дифференциальной форме (для плотности тока) можем записать

$$j = \frac{1}{\rho} \cdot E \Rightarrow E = \rho \cdot j , \quad (14)$$

где E – напряженность электрического поля в данном сечении резистора. С учетом зависимости $\rho(x) = \alpha \cdot x$ получаем

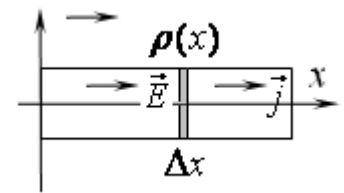
$$E(x) = \alpha x \cdot \frac{I_2}{S} = \frac{2U}{l^2} \cdot x . \quad (16)$$

Следовательно, для приращения напряженности электрического поля справедливо выражение

$$\Delta E = j \cdot \Delta \rho . \quad (15)$$

Приращение напряженности поля связано с объемным зарядом, «сящим» на малом слое проводника толщиной Δx

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{\epsilon_0} \Rightarrow j \Delta \rho = \frac{\rho^* \Delta x}{\epsilon_0} \quad \rho^* = \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \epsilon_0 j . \quad (16)$$



При выводе этого соотношения использована формула для напряженности поля, создаваемого тонким слоем заряда.

Используя (16), суммируя по слоям, найдем полный заряд, «сящий» внутри резистора на всем его протяжении

$$q^* = \sum_{i=1}^n q^*_i = \sum_{i=1}^n \rho^*_i S \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \epsilon_0 j S \Delta \rho_i = \epsilon_0 j S \sum_{i=1}^n \Delta \rho_i = \epsilon_0 I \alpha l = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{l} U = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Кл} . \quad (17)$$

Интересно, что согласно (18), это соответствует динамической емкости резистора

$$C = \frac{q^*}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{l} = \frac{2\epsilon_0 S}{l} = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ Ф} = 0,11 \text{ пФ} . \quad (18)$$

Задача 4. Сверхпроводящие кольца

При взаимном движении колец будет изменяться магнитный поток поля, создаваемого одним кольцом, через другое, что приведет к появлению ЭДС индукции и, следовательно, изменению силы тока, что, в свою очередь, вызовет возникновение ЭДС самоиндукции. Так кольца являются сверхпроводящими, то суммарная ЭДС должна быть равна нулю. Из закона электромагнитной индукции

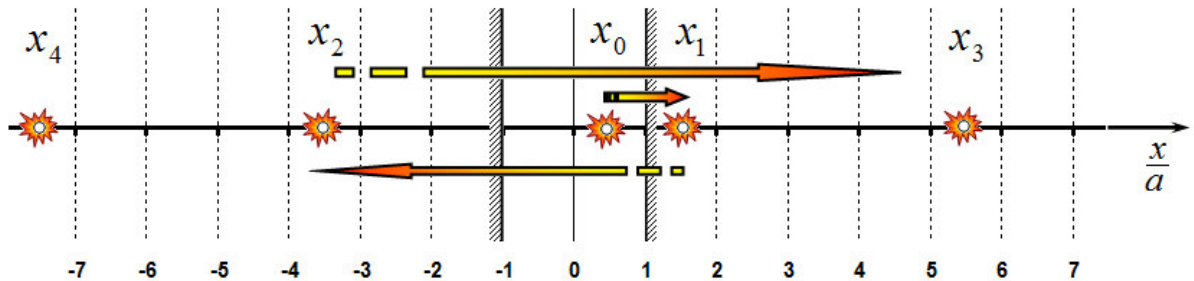
$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (1)$$

следует постоянство магнитного потока через каждое кольцо. Когда кольца будут разнесены на очень большое расстояние, этот поток будет создаваться только током в самом кольце. В начальном состоянии поток создавался током силой $2I_0$, следовательно, при удалении колец ток в каждом из них увеличится в два раза, то есть станет равным $2I_0$. Работа по разнесению колец пойдет на увеличение энергии магнитного поля, поэтому будет равна

$$A = 2 \frac{L(2I_0)^2}{2} - \frac{L(2I_0)^2}{2} = 2LI_0^2. \quad (2)$$

Задача 5. Зеркала

5.1 Очевидно, что в данном случае число изображений будет бесконечно велико, из-за многократных отражений в параллельных зеркалах. Изображение в плоском зеркале располагается симметрично, т.е. расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от источника до зеркала.



Это позволяет записать координату первого изображения в правом зеркале (см. рис.)

$$x_1 = a + (a - x_0) = 2a - x_0. \quad (1)$$

Далее следует отобразить это изображение в левом зеркале, используя тоже правило построения:

$$x_2 = -a - (x_1 + a) = -2a - x_1. \quad (2)$$

После этого строим очередные изображения (сначала в правом зеркале, затем в левом) по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} \\ x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

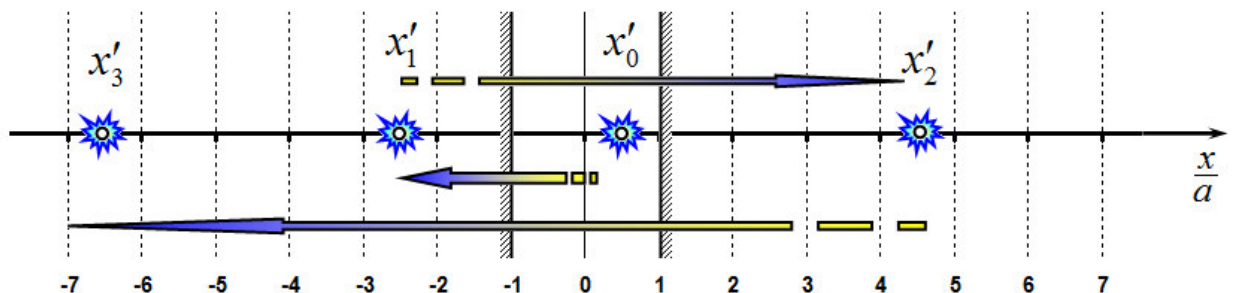
Координаты этих изображений можно выразить и в явном виде. Для этого отдельно выразим координаты четных и нечетных изображений

$$\begin{aligned} x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} = -2a - (2a - x_{2n-2}) = x_{2n-2} - 4a \\ x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} = 2a - (-2a - x_{2n-1}) = x_{2n-1} + 4a \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих формул следует, что эти координаты образуют арифметические прогрессии

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{2}a - 4na \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ x_{2n+1} &= \frac{3}{2}a + 4na \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично следует построить вторую серию изображений, начиная с левого зеркала.



Для этой серии формулы для расчета координат имеют вид:

- для двух первых изображений:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -a - (x_0 + a) = -x_0 - 2a \\x'_2 &= a + (a - x'_1) = -x'_1 + 2a\end{aligned}\quad (6)$$

- для последующих изображений:

$$\begin{aligned}x'_{2n+1} &= -x_{2n} - 2a \\x'_{2n+2} &= -x'_{2n+1} + 2a\end{aligned}\quad (7)$$

- наконец в явном виде:

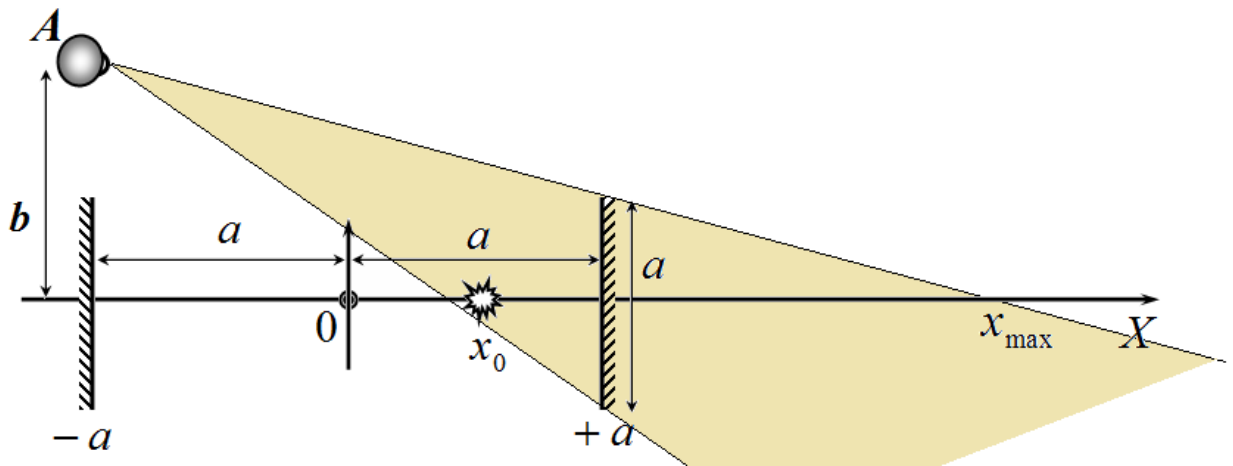
$$\begin{cases}x'_{2n+1} = -x_{2n} - 2a = -(-x'_{2n-1} + 2a) - 2a = x'_{2n-1} - 4a \\x'_{2n+2} = -x'_{2n+1} + 2a = -(-x'_{2n-1} + 2a) + 2a = x'_{2n-1} + 4a\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x'_{2n} = \frac{1}{2}a + 4na \\x'_{2n+1} = -\frac{5}{2}a - 4na\end{cases}\quad (8)$$

В Таблице 1 приведены рассчитанные значения координат (в см) нескольких первых изображений.

n	$x_{2n+1} = 2a - x_{2n}$	$x_{2n} = -2a - x_{2n-1}$	$x'_{2n+1} = -x_{2n} - 2a$	$x'_{2n+2} = -x'_{2n+1} + 2a$
1	15		-25	
2		-35		45
3	55		-65	
4		-75		85
5	95		-105	

Теперь следует определить, какие из этих изображений видны с указанной точки расположения глаза. Из рисунка следует, что область видимости определяется размером правого зеркала, которое можно рассматривать как «окошко» через которое рассматривают изображения. Область видимости ограничивается крайним верхним лучом, отраженным от этого зеркала.



Из подобия треугольников следует, максимальная координата x_{\max} точки оси, которая видна из точки A, определяется уравнением

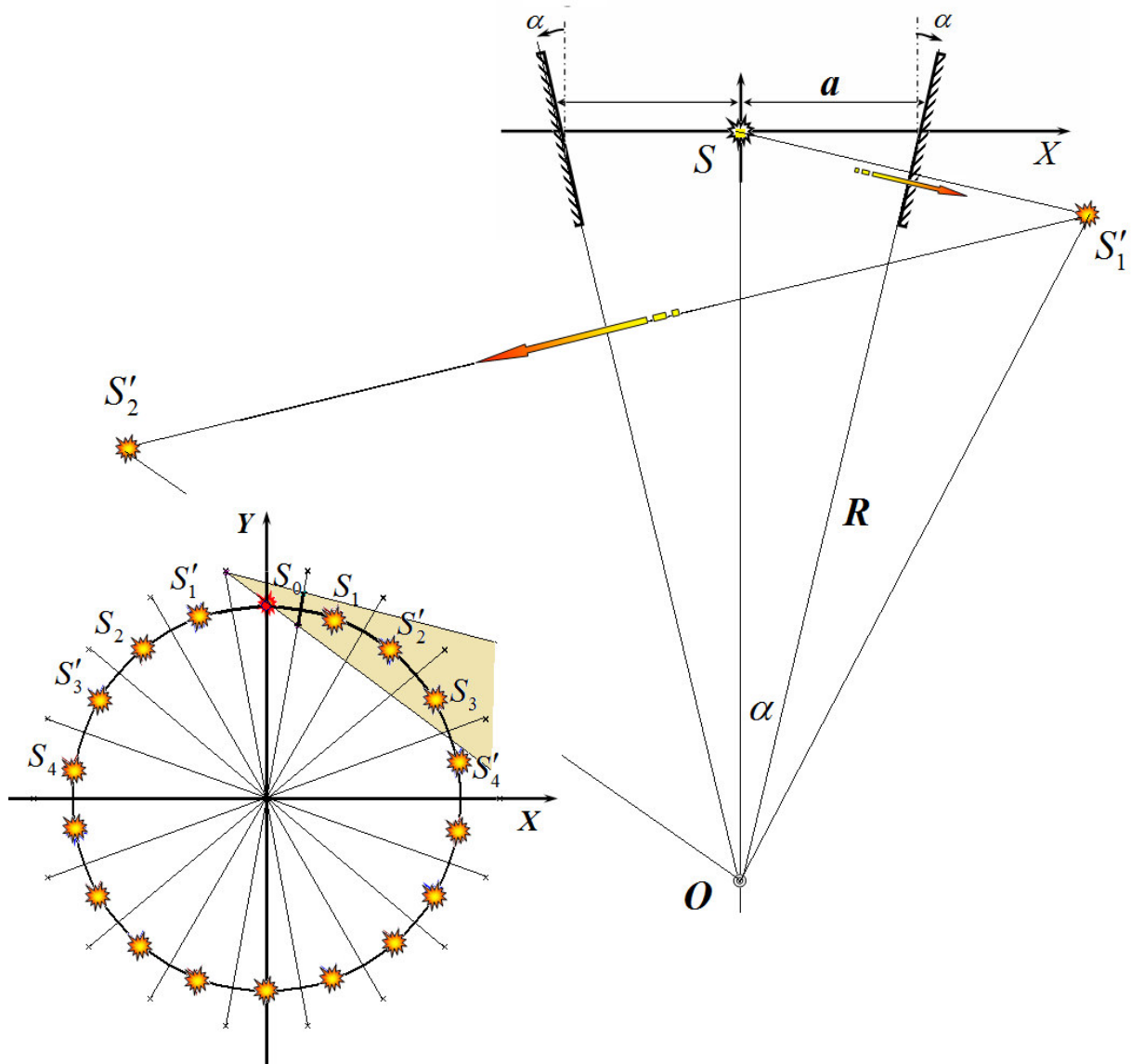
$$\frac{b}{x_{\max} + a} = \frac{0,5a}{x_{\max} + a}, \quad (9)$$

Из которого следует, что

$$x_{\max} = \frac{ab + 0,5a^2}{b - 0,5a} = 26,7 \text{ см.} \quad (10)$$

Таким образом, при указанном положении глаза видно только одно изображение с координатой $x_1 = 15 \text{ см}$.

5.2 Если зеркала повернуть, то изображения выстроятся по окружности, центр которой O лежит в точке пересечения линий зеркал.



Действительно, первое изображение S'_1 расположено симметрично плоскости правого зеркала, т.е. на том же расстоянии от точки O , что и источник S , аналогично и для всех последующих изображений. Как и параллельном расположении зеркал, следует построить две серии изображений: в первой серии начиная с правого зеркала, во второй – с левого. Из рисунка следует, что радиус окружности, на которой лежат все изображения, равен

$$R = \frac{a}{\sin \alpha} \approx 57,6 \text{ см} \quad (11)$$

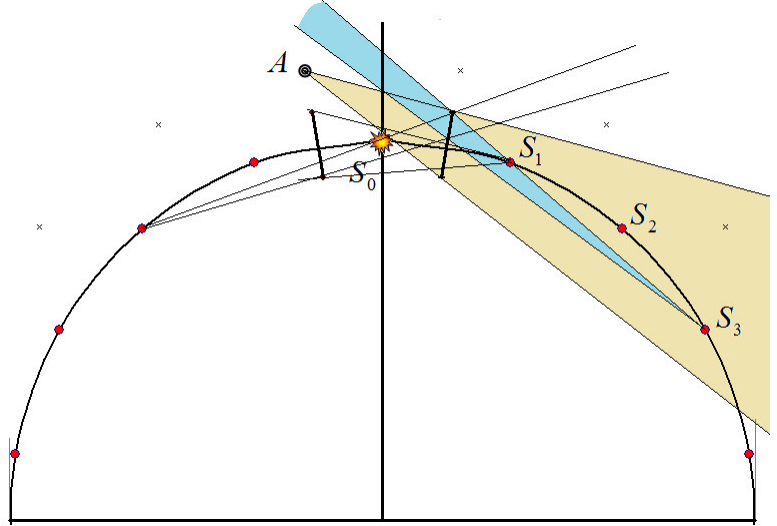
Также нетрудно заметить, что угловое расстояние между соседними изображениями равно $\Delta\varphi = 2\alpha = 20^\circ$. Для того, чтобы записать формулы для координат изображений

удобно сместить начало координат в центр окружности. В этой системе координаты изображений описываются простыми формулами

$$\begin{cases} x_k = R \sin k\Delta\varphi \\ y_k = R \cos k\Delta\varphi \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, 17. \quad (12)$$

Далее можно построить положения всех изображений, положение зеркал и глаза наблюдателя и анализ видимости провести геометрически.

Такое построение показано на рисунке. Опять, рассматривая зеркало, как «окошко» находим, что в область видимости попадают только три изображения (по нумерации формул (12)). Однако, в данном случае далеко лучи отраженные от зеркал не полностью покрывают следующее зеркало. Поэтому необходимо аккуратно построить крайние лучи, которые принимают участие в формировании следующего изображения. Такое построение



показывает, что третье изображение не видно с точки расположения глаза. На рисунке выделен пучок лучей, который формирует это изображение – глаз находится вне этого пучка!

Таким образом, в рассматриваемой ситуации видны только два изображения, координаты которых равны

$$\begin{cases} x_1 = 19,7 \text{ см} \\ y_1 = 54,1 \text{ см} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 37,0 \text{ см} \\ y_1 = 44,1 \text{ см} \end{cases}. \quad (13)$$