РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1. (10 баллов)
Задача 1А. Блок

Пусть l_1 и l_2 — длины свисающих концов ($l_1 < l_2$). Тогда $l_2 - l_1 = \frac{L}{2}$ и $l_1 + l_2 + \pi R = L$, откуда $l_2 = \frac{3}{4}L - \frac{\pi}{2}R$.

1. Пусть в момент, когда разность высот концов каната равна $h = l_2 - l_1 = \frac{L}{2}$ за малое время Δt канат сместился на Δx. Так как в отсутствие трения силы, действующие на канат со стороны блока, работы не совершают, увеличение кинетической энергии каната равно уменьшению его потенциальной энергии, которое легко найти, заметив, что перемещение каната вдоль себя эквивалентно опусканию кусочка длины Δx на высоту h:

$$\Delta\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{L}\Delta x \cdot gh,$$
$$\frac{m2v\,\Delta v}{2} = \frac{m}{L}v\Delta t \cdot gh.$$

Отсюда

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{h}{L}g = \frac{g}{2}.$$

2. Запишем аналогично п.1 ЗСЭ для малого промежутка времени Δt для правой (от верхней точки) части каната. Пусть $l = l_2 + \frac{\pi}{2}R = \frac{3}{4}L$ — длина этой части, $M = m\frac{l}{L} = \frac{3}{4}m$ — её масса, T — сила натяжения каната в верхней точке, $H = l_2 + R = \frac{3}{4}L - R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ — разность высот верхней точки каната и нижней точки его длинного конца. Тогда:

$$\Delta\frac{Mv^2}{2} = \frac{m}{L}\Delta x \cdot gH - T\Delta x,$$
$$Mva = \frac{m}{L}v \cdot gH - Tv,$$
$$T = \frac{mgH}{L} - Ma = mg\left[\frac{3}{8} + \frac{R}{L}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

3. Запишем второй закон Ньютона для маленького кусочка каната в проекции на касательную к нему ось:

$$\Delta m \cdot a = \Delta m \cdot g\sin\alpha + T_1 - T_2.$$

Если кусочек выбран в месте с максимальной силой натяжения, то $T_1 = T_2$, откуда получаем

$$\sin\alpha = \frac{a}{g} = \frac{1}{2}.$$
$$\alpha = 30°$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Правильное значение ускорения	1
2.	Аккуратное обоснование полученного ответа в п. 1	1
3.	Есть правильный метод нахождения $T_{верх}$	1
4.	Получен правильный ответ для $T_{верх}$	0,5
5.	Есть правильный метод нахождения α	1
6.	Получен правильный ответ для α	0,5
Итого		**5.0**

Задача 1.В Запарь

Запертый в сосуде воздух при температуре 200ºС будет создавать давление

$$1 \text{ атм} \cdot \frac{473 \text{ К}}{293 \text{ К}} = 1{,}61 \text{ атм}$$

Давление пара при той же температуре $2{,}88 - 1{,}61 = 1{,}27$ атм. Тогда давление пара при произвольной температуре T (при условии, что вся вода испарилась) равно

$$P_{\text{пара}} = 1{,}27 \cdot \frac{T}{473} \text{ атм} = \frac{T}{373} \text{ атм}.$$

Пусть $P(T)$ — зависимость давления насыщенного пара воды от температуры. Тогда вся вода испарится при температуре, удовлетворяющей условию

$$P(T) = \frac{T}{373} \text{ атм},$$

решение которого легко найти, даже не зная точный вид зависимости $P(T)$:

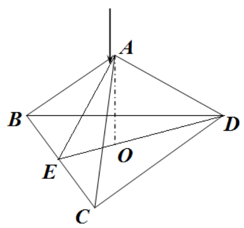
$$P = 1 \text{ атм}, T = 373 \text{ К} = 100 \text{ °C}$$

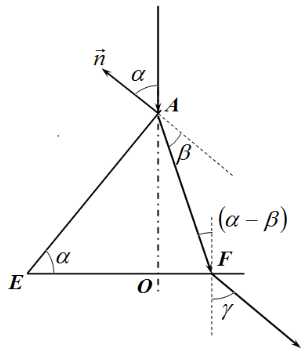
Схема оценивания.

№	Содержание	баллы
1.	Найдено давление воздуха при 200	0,5
2.	Найдено давление пара при произвольной температуре T	0,5
3.	Записано условие, определяющее температуру $T_{исп}$	0,5
4.	Правильный ответ	0,5
Итого		**2.0**

Задача 1.С Пирамида

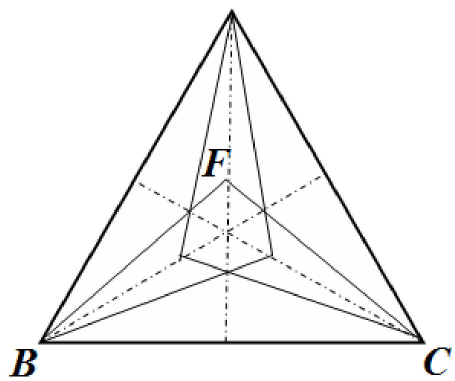
1. Рассмотрим луч, падающий на одну из граней в точке близкой к вершине пирамиды. Угол падения луча на грань равен углу между боковой гранью и основанием пирамиды $\angle AEO = \alpha$. Не сложно показать, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому $\alpha = 54{,}7°$.





По закону преломления Снелиуса угол преломления β определяется соотношением $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Отсюда следует, что $\beta = 24{,}6°$.

Найдем положение точки падения F этого луча на основание пирамиды. Высота боковой грани $|AE| = \frac{a}{2}$, высота пирамиды $|AO| = \frac{a}{2}\sin\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}41\,мм$. Тогда длина отрезка $|OF| = |AO|\,tg(\alpha - \beta) = 0{,}24\ мм$. Окончательно получаем, что эта точка лежит на расстоянии $|DF| = |OD| - |OF| = \frac{a}{\sqrt{3}} - 0{,}24\,мм = 0{,}91\,мм$.



Или на расстоянии $|EO| = a\frac{\sqrt{3}}{2} - |DF| = 0{,}82\,мм$ от середины стороны основания.

Таким образом, свет, преломленный рассматриваемой гранью, BCF осветит на основании треугольник. Аналогичные треугольники будут освещены светом, преломленным остальными двумя гранями (см. рис. 2).

2. Найдем угол γ, под которым лучи выйдут из пирамиды после преломления на е основании. Из рис. 1 и закона преломления следует, что

$$\sin\gamma = n\sin(\alpha - \beta) = n(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n^2 - \frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (1)$$

Численное значение этого угла $\gamma = 41°$.Так как лучи преломленные на одной грани параллельны, то на экране они осветят область, такую же, как и на основании пирамиды. Только эти треугольные области разойдутся на расстояние $r = Ltg\gamma = 8{,}6\,см$. Таким образом, на экране будут освещены три малых треугольных области, находящиеся в вершинах правильного треугольника со стороной $l = r\sqrt{3} = 14{,}9\,см$.

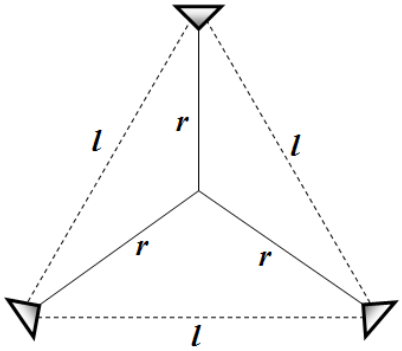
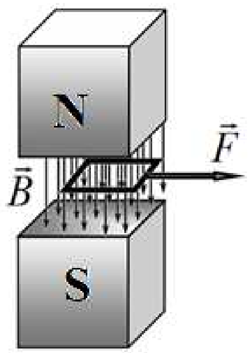


Схема оценивания.

№	Содержание	баллы
1	Закон преломления света	0.2
2	Угол падения лучей на грань	0.4
3	Положение точки F	1.0
4	Освещенные области на основании пирамиды	0.4
5	Угол выхода лучей из основания	0.4
6	Освещенные области на экране	0.6
Итого		**3.0**

Задача 2 (10 баллов)
Квадратная рамка

1. В физике принято соглашение, что линии магнитного поля начинаются на северном полюсе, а заканчиваются на южном. Поэтому, рисунок должен выглядеть так



2. При вытаскивании рамки из постоянного магнитного поля в ней возникает э.д.с. индукции, которая определяется законом Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Bax\right) = Ba\mathrm{v}(t)\,. \tag{1}$$

По закону Ома

$$\varepsilon = IR\,, \tag{2}$$

Откуда получаем связь между током и скоростью

$$I(t) = \frac{Ba\mathrm{v}(t)}{R}\,. \tag{3}$$

На рамку будет действовать сила, которая будет стараться втянуть рамку обратно в магнитное поле магнитов, и равная по закону Ампера

$$F_A(t) = BaI(t) = \frac{B^2a^2\mathrm{v}(t)}{R}\,. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение движения, являющееся вторым законом Ньютона, записывается в виде

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F - \frac{B^2a^2\mathrm{v}(t)}{R}\,. \tag{5}$$

Решением уравнения (5) с начальным условием $\mathrm{v}(0) = 0$ является функция

$$\mathrm{v}(t) = \frac{FR}{B^2a^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right)\right]. \tag{6}$$

3. Интегрируя (6) по времени, получаем следующую зависимость

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{v}(t)dt = \frac{FR}{B^2a^2}\left[t + \frac{mR}{B^2a^2}\left(\exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right) - 1\right)\right]. \tag{7}$$

Условие выхода рамки за пределы магнита является равенство

$$x(t_0) = a\,, \tag{8}$$

откуда получаем уравнение для t_0

$$t_0 + \frac{mR}{B^2a^2}\left[\exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t_0\right) - 1\right] = \frac{B^2a^3}{FR}\,. \tag{9}$$

Уравнение (9) является трансцендентным и не может быть решено аналитически. Для оценки времени воспользуемся тем, что за характерное время $\tau \sim mR/B^2a^2$ установится практически постоянная скорость $\mathrm{v}_0 = FR/B^2a^2$. Считаем, что в интервале времени от 0 до τ рамка движется практически с постоянным ускорением $w = F/m$, а после этого рамка движется с постоянной скоростью v_0. Тогда получаем

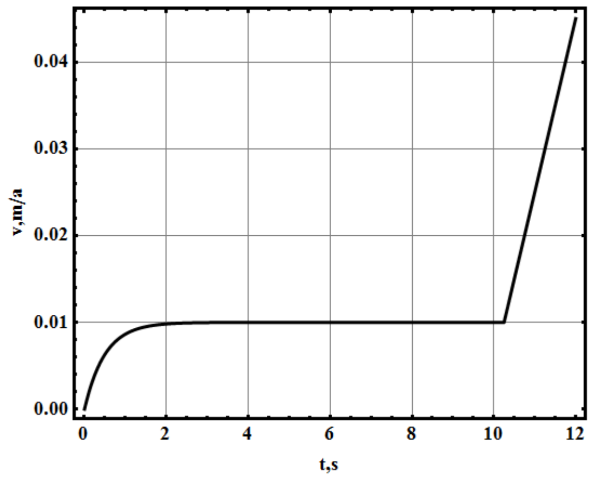
$$t_0 \sim \tau + \frac{a - \frac{wt^2}{2}}{\mathrm{v}_0} = \frac{B^2a^3}{FR} + \frac{mR}{2B^2a^2} = 10.25\,\text{с}. \tag{10}$$

Отметим, что численное решение уравнения (9) дает $t_0 \approx 10.5$ с.

4. После момента времени t_0 рамка продолжает двигаться с постоянным ускорением w. При этом скорость должна быть непрерывной функцией времени, поэтому зависимость скорости от времени имеет вид

$$\mathrm{v}(t) = \begin{cases} \dfrac{FR}{B^2a^2}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{B^2a^2}{mR}t\right)\right], & t < t_0 \\ \dfrac{FR}{B^2a^2} + \dfrac{F}{m}(t - t_0), & t \ge t_0 \end{cases}. \tag{11}$$

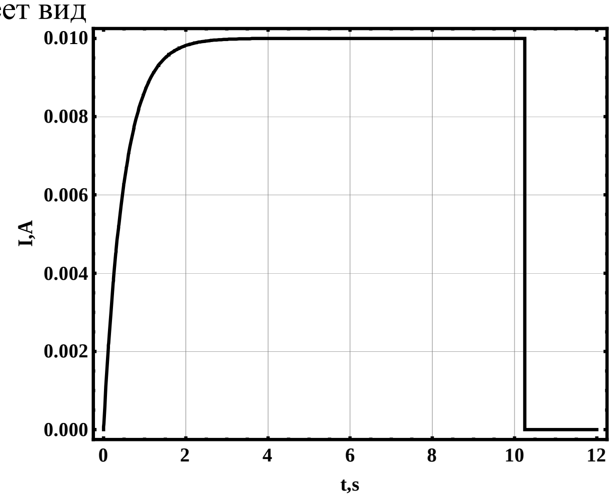
График зависимости имеет вид



5. Пока рамка находится внутри магнита, зависимость силы тока определяется уравнениями (3) и (6). После этого, сила тока в рамке обращается в нуль. Таким образом

$$I(t)=\begin{cases}\dfrac{F}{Ba}\left[1-\exp\left(-\dfrac{B^2a^2}{mR}t\right)\right], & t<t_0\\ 0, & t\geq t_0\end{cases}. \tag{12}$$

График зависимости имеет вид



6. Как и прежде, при вытаскивании рамки из постоянного магнитного поля в ней индуцируется э.д.с. индукции, которая определяется законом Фарадея (1). Помимо этого, действует э.д.с. самоиндукции сверхпроводящей рамки

$$\varepsilon_L=-L\frac{dI}{dt}. \tag{13}$$

Так как сопротивление сверхпроводящей рамки равно нулю, то закон Ома для рамки примет вид

$$Ba\mathrm{v}(t)-L\frac{dI}{dt}=0, \tag{14}$$

откуда получаем, с учетом того, что $I=0$ при $x=0$,

$$I=\frac{Bax}{L}. \tag{15}$$

Соответствующая сила Ампера дается выражением

$$F_A=BaI=\frac{B^2a^2x}{L}. \tag{16}$$

Таким образом, уравнение движения, являющееся вторым законом Ньютона, записывается в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - \frac{B^2a^2}{L}x\,. \tag{17}$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \frac{Ba}{\sqrt{mL}} \tag{18}$$

возле нового положения равновесия с координатой

$$x_0 = \frac{FL}{B^2a^2}\,. \tag{19}$$

Очевидно, что сила F будет минимальной, когда

$$x_0 = a/2\,, \tag{20}$$

откуда

$$F_{\min} = \frac{B^2a^3}{2L} = 5.00\times10^{-5}\text{ Н}. \tag{21}$$

7. В условиях предыдущего пункта, рамка достигает края магнита за половину периода, поэтому

$$t_0 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\frac{\sqrt{mL}}{Ba} = 7.02\text{ с}. \tag{22}$$

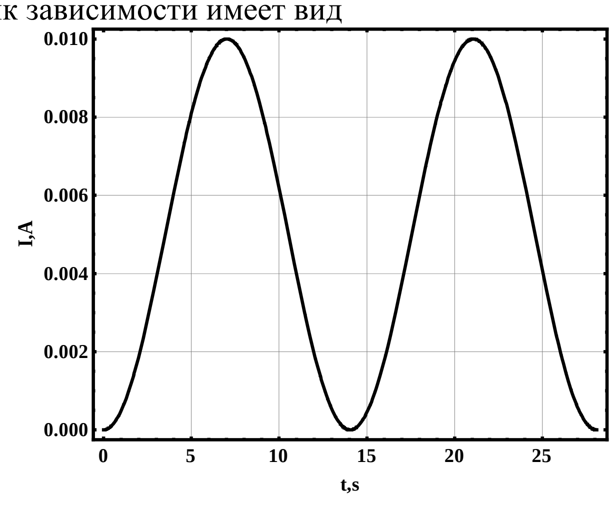
8. Решением уравнения (17) с начальными условиями $x(0)=0, x'(0)=0$ является функция

$$x(t) = \frac{F_{\min}L}{B^2a^2}\left(1-\cos\omega t\right) = \frac{a}{2}\left(1-\cos\omega t\right). \tag{23}$$

В соответствии с формулой (15) сила тока изменяется по закону

$$I(t) = \frac{Bax(t)}{L} = \frac{Ba^2}{2L}\left(1-\cos\omega t\right). \tag{24}$$

Соответствующий график зависимости имеет вид



9. Закон Ома для рамки имеет вид

$$Ba\text{v} - L\frac{dI}{dt} = IR\,, \tag{25}$$

а ее уравнение движения записывается так

$$m\frac{d\text{v}}{dt} = -BIa\,. \tag{26}$$

Уравнения (25) и (26) переписываются в конечных разностях следующим образом

$$Ba^2 - LI_0 = qR\,, \tag{27}$$

$$m\text{v}_0 = Bqa\,, \tag{28}$$

где q — заряд, протекший по цепи.

Решая (27) и (28) совместно, получаем

$$I_0 = \frac{B^2 a^3 - m\mathrm{v}_0 R}{aBL}. \tag{29}$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Правильно поставленные северный N и южный S полюса	0.2	**0.2**
2	Формула (1)	0.2	**1.2**
	Формула (2)	0.2	
	Формула (3)	0.2	
	Формулы (4)	0.2	
	Уравнение (5)	0.2	
	Решение (6)	0.2	
3	Формула (7)	0.2	**0.8**
	Формула (8)	0.2	
	Уравнение (9)	0.2	
	Численное значение t_0	0.2	
4	Формула (11)	0.2	**1.2**
	График зависимости $\mathrm{v}(t)$: оси подписаны и оцифрованы	0.2	
	График зависимости $\mathrm{v}(t)$: есть участок с постоянной скоростью	0.2	
	График зависимости $\mathrm{v}(t)$: есть участок с постоянным ускорением	0.2	
	График зависимости $\mathrm{v}(t)$: непрерывный	0.2	
	График зависимости $\mathrm{v}(t)$: правильные числовые значения	0.2	
5	Формула (12)	0.2	**1.2**
	График зависимости $I(t)$: оси подписаны и оцифрованы	0.2	
	График зависимости $I(t)$: есть участок с постоянным током	0.2	
	График зависимости $I(t)$: есть участок с нулевым током	0.2	
	График зависимости $I(t)$: разрывный	0.2	
	График зависимости $I(t)$: правильные числовые значения	0.2	
6	Формула (13)	0.2	**1.8**
	Уравнение (14)	0.2	
	Соотношение (15)	0.2	
	Квазиупругая сила (16)	0.2	
	Уравнение движения (17)	0.2	
	Положение равновесия (19)	0.2	
	Условие (20)	0.2	
	Формула (21) для силы $F_{\min}$	0.2	
	Численное значение $F_{\min}$	0.2	
7	Частота (18)	0.2	**0.6**
	Формула (22)	0.2	
	Численное значение t_0	0.2	
8	Формула (23)	0.2	**1.0**
	Формула (24)	0.2	
	График зависимости $I(t)$: оси подписаны и оцифрованы	0.2	
	График зависимости $I(t)$: два периода колебаний током	0.2	

	График зависимости $I(t)$: правильное значение амплитуды	0.2	
9	Закон Ома (25)	0.2	**2.0**
	Уравнение движения (26)	0.2	
	Формула (27)	0.7	
	Формула (28)	0.7	
	Выражение (29)	0.2	
Итого			**10,0**

Задача 3 (10 баллов)
Модель атома водорода по Бору

1. Время падания электрона на протон можно найти по аналогии с третьим законом Кеплера. Рассмотрим круговую орбиту некоторого радиуса R, тогда уравнение движения электрона запишется в виде

$$m_e\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2}, \tag{1}$$

где T – период обращения по орбите.
Таким образом, третий закон Кеплера для движения электрона имеет вид

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{16\pi^3\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e}, \tag{2}$$

где a – большая полуось эллипса.
Рассмотрим падение электрона на протон как движение по очень вытянутому эллипсу с полуосью $a = r_0/2$. Тогда время падения равно половине периода обращения электрона, поэтому

$$t_1 = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi^3 m_e\varepsilon_0 r_0^3}{2e^2}} = 2.46\times10^{-17}\text{ с.} \tag{3}$$

2. Для нахождения зависимости скорости электрона от радиуса орбиты снова воспользуемся вторым законом Ньютона, который теперь запишем в виде

$$m_e\frac{\mathrm{v}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \tag{4}$$

откуда получаем

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e r}}, \tag{5}$$

3. Момент импульса электрона находится из выражения (5)

$$L = m_e\mathrm{v}\,r = \sqrt{\frac{m_e r e^2}{4\pi\varepsilon_0}}. \tag{6}$$

4. Так как согласно постулату Бора момент импульса электрона квантуется, то есть $L = n\hbar$, то из уравнения (6) получаем

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e e^2}. \tag{7}$$

5. Из уравнения (7) следует, что минимальному радиусу орбиты соответствует главное квантовое число $n = 1$, откуда

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 5.19\times10^{-11}\text{ м.} \tag{8}$$

6. Полная энергия электрона в атоме равна сумме кинетической и потенциальной энергий, которая с учетом (5) записывается в виде

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (9)$$

Подставляя возможные значения радиусов орбит (7), немедленно получаем

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}. \qquad (10)$$

7. Из уравнения (10) следует, что минимальному значению полной энергии электрона соответствует главное квантовое число $n = 1$, откуда

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -2.24\times10^{-18}\ \text{Дж}. \qquad (11)$$

8. Полная энергия электрона (9) тратится на излучение электромагнитных волн, поэтому

$$\frac{dE}{dt} = -P. \qquad (12)$$

Отсюда получаем уравнение

$$r(t)^2\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}. \qquad (13)$$

Решая уравнение (13) с начальным условием $r(0) = r_1$, получаем

$$r(t) = \sqrt[3]{r_1^3 - \frac{e^4}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}t}. \qquad (14)$$

9. Время падения τ_1 определяется из условия $r(t) = 0$, откуда

$$\tau_1 = \frac{4\pi^2 m_e^2\varepsilon_0^2 c^3 r_1^3}{e^4} = \frac{256\pi^5\varepsilon_0^5 c^3\hbar^5}{m_e e^{10}} = 1.44\times10^{-11}\ \text{с}. \qquad (15)$$

10. За малый интервал времени dt электрон совершит поворот на угол $d\varphi$, равный

$$d\varphi = \frac{\mathrm{v}}{r}dt. \qquad (16)$$

Подставляя значение скорости из (5) и выражая dt из (13), находим

$$d\varphi = -\frac{6c^3(\pi m_e\varepsilon_0)^{3/2}}{e^3}\sqrt{r}\,dr. \qquad (17)$$

Полный угол поворота φ находится интегрированием от r_1 до нуля

$$\varphi = \int_{r_1}^{0} d\varphi = \int_0^{r_1}\frac{6c^3(\pi m_e\varepsilon_0)^{3/2}}{e^3}\sqrt{r}\,dr = \frac{4c^3(\pi m_e\varepsilon_0 r_1)^{3/2}}{e^3} = \frac{32\pi^3\varepsilon_0^3 c^3\hbar^3}{e^6}. \qquad (18)$$

Тогда полное число оборотов равно

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{16\pi^2\varepsilon_0^3 c^3\hbar^3}{e^6} = 1.96\times10^5. \qquad (19)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Формула (1)	0.5	**2.0**
	Формула (2)	0.5	
	Формула (3)	0.5	
	Правильное численное значение t_1	0.5	

2	Уравнение (4)	0.5	**1,0**
	Формула (5)	0.5	
3	Формула (6)	0.5	**0.5**
4	Формула (7)	0.5	**0.5**
5	Правильное численное значение r_1	0.5	**0.5**
6	Формула (9)	0.5	**1.0**
	Формула (10)	0.5	
7	Правильное численное значение E_1	0.5	**0.5**
8	Закон сохранения (12)	0.5	**1.5**
	Уравнение (13)	0.5	
	Формула (14)	0.5	
9	Правильное численное значение τ_1	0.5	**0.5**
10	Формула (16)	0.5	**2.0**
	Формула (17)	0.5	
	Формула (18)	0.5	
	Правильное численное значение N	0.5	
Итого			**10,0**