1. Если считать энергиями, получается $\omega = \sqrt{\dfrac{2g\sqrt{D^2 - L^2}}{D^2}}$, период $T = 1{,}30$ s. Если же пробовать (неправильно) считать силами, фиксируя шарик на одной горизонтали, у меня получилось $\omega = \sqrt{\dfrac{2gb^2}{a^3}}$, где $a = 25$ cm, $b = 15$ cm — полуоси эллипса.

2. Обозначим m — масса столба, I — момент его инерции относительно нижней точки, h — высота центра масс над поверхностью. Тогда коэффициент трения

$$\mu = \frac{|\alpha \sin\varphi \cos\varphi - 2\sin\varphi(1-\cos\varphi)|}{1 - \alpha\sin^2\varphi - 2\cos\varphi(1-\cos\varphi)},$$

где $\alpha = mh^2/I$; $\alpha = 3/4$ для тонкой палки с равномерным распределением массы по длине. Исследование этой функции при $\alpha = 3/4$ показало, что сила трения обратится в нуль при $\cos\varphi = 8/11$, а сила реакции опоры — при $\cos\varphi = \dfrac{4+\sqrt{5}}{8}$. Таким образом, проскальзывание произойдет при углах φ, меньших 38,8 градусов.

3. Ответ на второй вопрос очевиден, ничто не мешает сделать ускорение в какой-либо точке поверхности сколь угодно малым, например, в центре очень тонкого диска.

Ответить же на первый вопрос чуть сложнее. Пусть необходимо направить поле вдоль оси Oz. Тогда в полярных координатах (r, φ, z) поверхность планеты задается уравнением

$$\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = const,$$

где константу можно найти, приравняв объем под поверхностью объему исходного вещества.

Если обозначить $const = 1/d_0^2$, то объем планеты

$$V = \int_0^{d_0} \pi r^2 dz = \frac{4}{15}\pi d_0^3.$$

Величина же поля

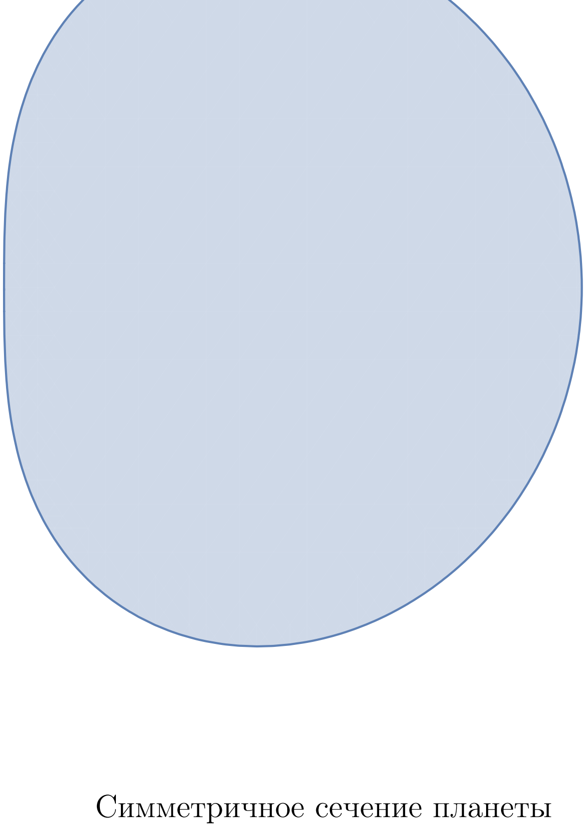
$$g = G\rho \iint\limits_{\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \geqslant \frac{1}{d_0^2}} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} 2\pi r\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}G\rho d_0 \int_0^1 \int_0^{\zeta^{1/3}-\zeta} \frac{d\psi d\zeta}{(\psi+\zeta)^{3/2}} = \frac{4\pi}{5}G\rho d_0 =$$

$$= \frac{4\pi}{5}\left(\frac{15}{4\pi}\right)^{1/3} GM^{1/3}\rho^{2/3} \approx 2{,}666\, GM^{1/3}\rho^{2/3},$$

где M — масса вещества. Для однородного шара с такой же массой

$$g = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} GM^{1/3}\rho^{2/3} \approx 2{,}599\, GM^{1/3}\rho^{2/3}.$$

Как видим, “оптимизация” привела к увеличению поля в $3/5^{2/3} \approx 1{,}026$ раз, что само по себе выглядит смешно.



Симметричное сечение планеты