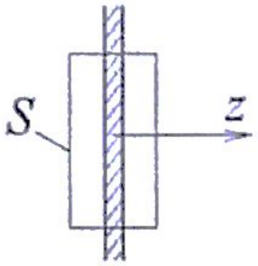
Задача

Плоский металевий електрод, на який поданий потенціал φ_0 ($e\varphi_0 \ll kT$, де e – заряд електрона, k – стала Больцмана), занурений у плазму, яка складається з нейтральних атомів, однозарядних іонів і електронів з масами відповідно m_i та m_e і концентрацією n_0 та має температуру T. Знайдіть закон розподілу потенціалу вздовж осі z, перпендикулярної до електрода. Вважаючи, що довжина вільного пробігу іонів та електронів дорівнює відповідно λ_i та λ_e, знайдіть також густину струму, що тече на електрод.

Вказівки. Розв'язок лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами можна шукати у формі експоненти. Величини λ_i та λ_e вважати малими порівняно з розміром, на якому помітно змінюється потенціал.

Розв'язок

Ефект, який розглядається в задачі – це екранування заряджених тіл у плазмі. Якщо, наприклад, тіло, вміщене в плазму, заряджене позитивно, то до нього будуть притягатися електрони, а іони, навпаки, будуть від нього відштовхуватися. В результаті навколо тіла виникне заряджений шар, який компенсує його електростатичне поле. Якби плазма була холодною, цей шар мав би нескінченно малу товщину. Але тепловий рух перешкоджатиме притяганню зарядів до тіла, тому ширина шару буде скінченою.



Для розв'язання задачі скористаємося теоремою Гаусса. Побудуємо прямий циліндр, вісь якого збігається з віссю z, а основи розташовані по обидва боки від електроди на однаковій віддалі від нього.

Якщо вважати електрод нескінченною площиною, то електричне поле навколо нього матиме лише z-компоненту, і потік вектора електричної індукції через бічну поверхню циліндра дорівнюватиме нулю. В результаті теорема Гаусса набуде вигляду

$$2\varepsilon_0 ES = 2S\int_0^z \rho(z)dz. \qquad (1)$$

Диференціюючи обидві сторони (1) і враховуючи, що

$$E = -\frac{d\varphi}{dz}, \qquad (2)$$

отримуємо рівняння для потенціалу у формі:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Нескомпенсований заряд у приелектродній області виникає через те, що заряди одного знаку притягаються до електрода, а заряди іншого знаку, навпаки, відштовхуються. Якщо взяти до уваги тепловий рух зарядів, то розподіл концентрації електронів та іонів (які вважатимемо однозарядними) у полі з потенціалом $\varphi(z)$ визначатиметься формулою Больцмана:

$$n_{e,i}(z) = n_0 \exp\left(\pm\frac{e\varphi}{kT}\right) \qquad (4)$$

(враховано, що за відсутності поля концентрації електронів та іонів у плазмі однакові). Тоді

$$\rho(z) = e(n_i - n_e) = en_0\left[\exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right)\right] \approx 2en_0\frac{e\varphi}{kT} \qquad (5)$$

(експоненти в дужках розклали в ряд Тейлора, скориставшись малізною параметра $e\varphi/kT$).

Підставивши (5) до (3), отримаємо:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 2\frac{e^2 n_0\varphi}{\varepsilon_0 kT}. \qquad (6)$$

Розв'язок рівняння (6) шукаємо в експоненціальній формі:

$$\varphi(z) = A\exp(bz). \qquad (7)$$

Підстановка розв'язку (7) до рівняння (6) дає:

$$b = \pm\sqrt{2\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}} \equiv \pm\frac{1}{r_D}, \qquad (8)$$

де r_D – величина, що має розмірність довжини (так званий радіус екранування Дебая).

Враховуючи, що $\varphi(z=0)=\varphi_0$, а на нескінченності потенціал не повинен необмежено зростати, остаточно можна записати:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_0 \exp(-z/r_D), & z > 0; \\ \varphi_0 \exp(z/r_D), & z < 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Струм, що тече на електрод, має іонну та електронну компоненти. Тому густину струму можна подати у формі

$$j = en_i v_i - en_e v_e \approx en_0 (v_i - v_e), \qquad (10)$$

де v_e та v_i – середні швидкості спрямованого руху електронів та іонів (враховано, що навіть біля електрода $n_i \approx n_e \equiv n_0$ в силу умови $e\varphi_0/kT \ll 1$).

Можна вважати, що електрони та іони набирають спрямовану швидкість на довжині вільного пробігу і втрачають її після зіткнення. Тому можна вважати, що

$$v_{e,i} = \mp\frac{eE\tau_{e,i}}{2}, \qquad (11)$$

де середній час між зіткненнями електронів τ_e та іонів τ_i визначається їхніми тепловими швидкостями v_{Te} та v_{Ti} (які в помірних полях значно більші за відповідні швидкості спрямованого руху) і відповідними довжинами вільного пробігу λ_e та λ_i:

$$\tau_{e,i} = \frac{\lambda_{e,i}}{v_{Te,i}} = \lambda_{e,i}\sqrt{\frac{m_{e,i}}{3kT}} \qquad (12)$$

(теплову швидкість оцінено з умови $mv^2/2=3kT/2$).

Врахувавши, що біля поверхні електрода

$$|E| = \left|\frac{d\varphi}{dz}\right|_{z=0} = \frac{\varphi_0}{r_D} \qquad (13)$$

і підставляючи (11)-(13) до (10), отримаємо:

$$j = \frac{e^2 n_0 \varphi_0}{2r_D\sqrt{3kT}}\left(\lambda_i\sqrt{m_i} + \lambda_e\sqrt{m_e}\right) = \frac{e^3 n_0^{3/2}\varphi_0}{\sqrt{6\varepsilon_0}\,kT}\left(\lambda_i\sqrt{m_i} + \lambda_e\sqrt{m_e}\right). \qquad (14)$$