Задача 1, 11 клас

Як відомо, ядро атому дейтерію (ізотопу атому водню) складається з протона та нейтрона. В одній з найпростіших моделей, побудованої на основі механіки Ньютона та електростатики, це ядро розглядають як систему з двох частинок маси m_1 та m_2, які з'єднані між собою еластичним шнуром змінної довжини. Вважається, що частинка маси m_1 має електричний заряд $q > 0$, а частинка маси m_2 електронейтральна і що в деякий момент часу в такій системі вмикається електростатичне поле, потенціал якого $\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\lambda x}$. Під дією цього поля заряджена частинка починає рухатися з прискоренням. При цьому на неї починає також діяти сила опору з боку шнура, яку можна змоделювати за допомогою співвідношення $F_{оп} = -\gamma(t)v_1(t)$, де $v_1(t)$ – швидкість частинки, $\gamma(t) = A\sqrt{E(t)}$, $E(t)$ – повна енергія зарядженої частинки після включення електричного поля.

1) Знайдіть розмірність констант λ і A. 2) На основі законів Ньютона та електростатики обгрунтуйте і запишіть рівняння руху зарядженої і незарядженої частинок. 3) Знайдіть, як будуть залежати від часу координати $x_1(t)$ та $x_2(t)$ частинок після ввімкнення електричного поля (вважати, що до включення електричного поля система рухається прямолінійно з постійною швидкістю v_0, напрямленою вздовж шнура у додатному напрямку осі Ox, а довжина шнура є сталою і рівна l_0, а також що завжди справедливо $0 < \dfrac{m_1\lambda^2}{2A^2} < 1$). 4) Знайдіть момент часу t_0, коли в системі вмикається електричне поле. 5) При перевищенні довжини $2l_0$ або при скороченні її до 0 шнур розривається і частинки рухаються незалежно (ядро дейтерію розпалось). З'ясуйте, чи реалізується якась із цих ситуацій, і якщо "так", то в який момент часу.

Підказка: залежність від часу координати зарядженої частинки шукайте у вигляді $x_1(t) = \dfrac{1}{\lambda}\ln[Bt^{\beta}]$, *де B і β – невідомі параметри.*

Розв'язання

1) Константа A має розмірність $[A]$ = кг$^{1/2}$ · м$^{-1}$, а константа λ - $[\lambda]$ = м$^{-1}$.

2) Другий закон Ньютона для першої частинки має вигляд:

$$m_1 a_1 = -\gamma(t)v_1 - q\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=x_1} \qquad (1)$$

Відповідно до третього закону Ньютона, рівняння руху другої частинки матиме вигляд:

$$m_2 a_2 = \gamma(t)v_1(t) \qquad (2)$$

3) Підставляючи до рівняння руху зарядженої частинки явний вираз для коефіцієнта опору і враховуючи, що $v = \dot{x}$, $a = \ddot{x}$, отримаємо наступне рівняння:

$$\ddot{x}_1 + \frac{A}{m_1}\sqrt{\frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + q\varphi_0 e^{-\lambda x_1}}\,\dot{x}_1 = (q/m_1)\lambda\varphi_0 e^{-\lambda x_1} \qquad (3)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння руху у вигляді $x_1(t) = \dfrac{1}{\lambda}\ln[Bt^{\beta}]$. Тоді $\dot{x}_1(t) = \dfrac{\beta}{\lambda t}$, $\ddot{x}_1(t) = -\dfrac{\beta}{\lambda t^2}$, $e^{-\lambda x_1} = \dfrac{1}{Bt^{\beta}}$. Підставимо все це до рівняння та виконаємо спрощення:

$$-\frac{\beta}{\lambda t^2} + \frac{A}{m_1}\frac{\beta}{\lambda t}\sqrt{\frac{m_1\beta^2}{2\lambda^2 t^2} + \frac{q\varphi_0}{Bt^{\beta}}} = \frac{q\lambda\varphi_0}{m_1 Bt^{\beta}} \qquad (4)$$

Звідси очевидним чином $\beta = 2$, а величину B знайдемо зі співвідношення:

$$-1+\frac{A\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{m_1}}\sqrt{1+\frac{q\varphi_0\lambda^2}{2m_1B}}=\frac{q\varphi_0\lambda^2}{2m_1B},\Rightarrow B=\frac{A^2q\varphi_0}{m_1^2}\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon},\varepsilon=\frac{m_1\lambda^2}{2A^2}<1 \qquad (5)$$

Знайдемо тепер, як залежить від часу коефіцієнт опору:

$$\gamma(t)=A\sqrt{\frac{m_1}{2}\frac{4}{\lambda^2t^2}+\frac{q\varphi_0}{Bt^2}}=\frac{m_1}{\varepsilon t} \qquad (6)$$

Враховуючи, що $v_1(t)=\frac{2}{\lambda t}$, рівняння руху другої частинки набуде вигляду:

$$\ddot{x}_2=\frac{m_1}{m_2}\frac{2}{\varepsilon\lambda}\frac{1}{t^2} \qquad (7)$$

Інтегруючи двічі по часу, знайдемо швидкість та координату другої частинки:

$$v_2(t)=-\frac{m_1}{m_2}\frac{2}{\varepsilon\lambda t}+C_1, \qquad x_2(t)=-\frac{m_1}{m_2}\frac{2}{\varepsilon\lambda}\ln\frac{t}{t_0}+C_1t+C_2 \qquad (8)$$

де невідомі константи $C_{1,2}$ можна знайти з початкових умов:

$$v_2(t_0)=v_0; \quad x_2(t_0)=x_1(t_0)-l_0 \qquad (9)$$

Звідси

$$C_1=v_0\left(1+\frac{m_1}{m_2\varepsilon}\right); \qquad C_2=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{4B}{\lambda^2v_0^2}-l_0-\frac{2}{\lambda}\left(1+\frac{m_1}{m_2\varepsilon}\right) \qquad (10)$$

4) Оскільки координата першої частинки змінюється з часом як $x_1(t)=\frac{1}{\lambda}\ln[Bt^2]$, то її швидкість має вигляд $v_1(t)=\frac{2}{\lambda t}$. Враховуючи, що в початковий момент часу $v_1 = v_0$, отримаємо момент включення електричного поля:

$$t_0=\frac{2}{\lambda v_0} \qquad (11)$$

5) Довжина шнура

$$l(t)=x_1(t)-x_2(t)=l_0+\frac{2}{\lambda}\left(1+\frac{m_1}{m_2\varepsilon}\right)\left[\ln\frac{t}{t_0}-\frac{t}{t_0}+1\right] \qquad (12)$$

Неважко впевнитися, що це є спадна функція часу. Тому у певний момент часу друга частинка наздожене першу і зв'язок між ними зникне. Час, коли це відбудеться, визначається з трансцендентного рівняння $\frac{\lambda l_0}{2}\left(1+\frac{m_1}{m_2\varepsilon}\right)^{-1}=y-1-\ln y$, $y = t/t_0$.

11-й клас

Задача 2.

Визначить, якою мінімально може бути температура T у циліндрі поршневого двигуна водного скутера із водометом, к.к.д. якого η, якщо скутер рухається зі сталою швидкістю, вода втікає у водомет зі швидкістю руху скутера і температура вихлопних газів T_0. Площа перерізу вхідного отвору труби водомету – S_1, а вихідного - S_2.

Розв'язок. Позначимо V – швидкість скутера відносно води, u - швидкість викиду води відносно скутера, $\mu=\Delta m/\Delta t$ - маса води, що проходить через водомет за одиницю часу. Очевидно, що $u>V$ (тобто вода прискорюється), тому потужність двигуна P витрачається на створення сили тяги: $F=\Delta m\cdot\dfrac{u-V}{\Delta t}=\mu\cdot(u-V)$, отже: $P=F\cdot V=\mu\cdot(u-V)\cdot V$. Цю потужність вважатимемо корисною потужністю водомета, в той час як за його повну потужність приймемо зміну кінетичної енергії води, що проходить за одиницю часу: $P_{\text{витр}}=\mu\cdot(u^2-V^2)/2$. Тоді к.к.д. водомету: $\eta_{\text{вдмт}}=P/P_{\text{витр}}=2V/(u+V)$, а з врахуванням неперервності потоку води $V\cdot S_1=u\cdot S_2$, що проходить крізь водомет: $\eta_{\text{вдмт}}=2S_2/(S_1+S_2)$.
Мінімально можливу температуру в циліндрі можна оцінити з припущення про роботу двигуна в режимі цикла Карно, в цьому випадку к.к.д.: $\eta_{\text{Крн}}=(T-T_0)/T$, а загальний к.к.д. всієї системи $\eta=\eta_{\text{вдмт}}\cdot\eta_{\text{Крн}}=[(T-T_0)/T]\cdot[2S_2/(S_1+S_2)]$, звідки остаточний вираз для температури: $T=\dfrac{2T_0\,S_2}{2S_2-\eta\cdot(S_1+S_2)}$.

Задача 3

На шляху променів від віддаленого джерела світла поставили увігнуто-опуклу лінзу. У променях, відбитих від увігнутої поверхні лінзи, отримали дійсне зображення джерела на відстані a = 5 см. Знайдіть радіус кривини увігнутої поверхні лінзи. Перевернувши лінзу, у відбитих променях, на подив, також отримали дійсне зображення джерела, але на відстані b = 6 см. Знайдіть оптичну силу лінзи. Приймаючи коефіцієнт заломлення речовини лінзи n = 1.5, визначіть радіус опуклої поверхні лінзи.

Розв’язок

У першому варіанті розташування лінзи його увігнута поверхня слугує увігнутим дзеркалом, фокусна відстань якого дорівнює a = 5 см. Отже, радіус увігнутої поверхні $R_y = 2a$ = 10 см.

У другому варіанті розташування лінзи промені відбиваються від тієї ж самої увігнутої поверхні, але попередньо пройшовши крізь речовину лінзи. Таким чином,

$$\frac{1}{b} = 2D - \frac{1}{a}.$$

«Мінус» у формулі пов’язаний з тим, що у даному випадку увігнута поверхня лінзи слугує опуклим дзеркалом. Звідси оптична сила лінзи:

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{100}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \approx 18 \text{ дптр.}$$

Користуючись формулою для оптичної сили лінзи $D = (n-1)(1/R_o - 1/R_y)$, знайдемо радіус її опуклої поверхні:

$$R_o = \left(\frac{1}{R_y} + \frac{D}{n-1}\right)^{-1} = \frac{R_y(n\quad 1)}{R_y D + (n-1)} = \frac{2ab(n-1)}{a+bn} = \frac{2\cdot 5\cdot 6\cdot 0{,}5}{5+6\cdot 1{,}5} \approx 2 \text{ (см).}$$

Задача 4

У лісі, оточеному непроникним парканом, живе N_1 зайців та N_2 лисиць. Зайці їдять траву, її кількість вважається достатньою для годівлі всіх зайців. За відсутності лисиць швидкість зростання кількості зайців $dN_1/dt = K_1N_1$, $K_1>0$. Лисиці харчуються тільки зайцями. За відсутності зайців кількість лисиць спадає у відповідності до рівняння $dN_2/dt = -K_2N_2$, $K_2>0$. Зустрічі лисиць і зайців мають наслідком зменшення кількості зайців і збільшення кількості лисиць. Вважати, що ймовірність зустрічі зайця й лисиці пропорційна добутку $N_1 \cdot N_2$ (відповідні коефіцієнти пропорційності введіть самостійно). 1) Знайдіть рівноважні кількості зайців N_{10} та лисиць N_{20}. 2) Вважаючи, що $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ та $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, причому $|n_{1,2}(t)| << N_{10,20}$, знайдіть частоту коливань величин n_1 та n_2. 3) Який зсув фаз між коливаннями кількості зайців та лисиць та яке відношення амплітуд цих коливань?

Розв'язок

Ймовірність зустрічі зайця й лисиці пропорційна добутку N_1N_2. Тому рівняння для швидкостей зміни кількості лисиць та зайців з урахуванням їхніх зустрічей мають вигляд:

$$dN_1/dt = K_1N_1 - A_1N_1N_2\,, \tag{1}$$

$$dN_2/dt = -K_2N_2 + A_2N_1N_2\,, \tag{2}$$

де $A_{1,2}$ – додатні константи.

Рівноважні кількості зайців та лисиць знайдемо, прирівнявши ліві частини рівнянь (1)-(2) до нуля:

$$N_{10}\left(K_1 - A_1N_{20}\right) = 0\,, \tag{3}$$

$$N_{20}\left(-K_2 + A_2N_{10}\right) = 0\,, \tag{4}$$

Розв'язок $N_{10} = N_{20} = 0$ не відповідає умові задачі, тому надалі працюватимемо з розв'язком $N_{10} = K_2/A_2$, $N_{20} = K_1/A_1$.

Підставивши до рівнянь (1)-(2) розв'язки у формі $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ та $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, отримаємо з урахуванням (3)-(4):

$$dn_1/dt = K_1n_1 - A_1N_{20}n_1 - A_1N_{10}n_2 - A_1n_1n_2\,, \tag{5}$$

$$dn_2/dt = -K_2n_2 + A_2N_{20}n_1 + A_2N_{10}n_2 + A_2n_1n_2\,. \tag{6}$$

В силу умови $|n_{1,2}(t)| << N_{10,20}$ знехтуємо в рівняннях (5)-(6) доданками, пропорційними n_1n_2, поруч із доданками, лінійними за n_1 та n_2. Крім того, врахуємо явний вигляд N_{10} та N_{20}. Отримаємо:

$$dn_1/dt = -\left(A_1K_2/A_2\right)n_2\,, \tag{7}$$

$$dn_2/dt = \left(A_2\,K_0/A_1\right)n_1\,. \tag{8}$$

З рівнянь (7)-(8) можна отримати одне диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$d^2n_1/dt^2 + \omega^2 n_1 = 0\,, \tag{9}$$

де

$$\omega = \sqrt{K_1K_2}\ - \tag{10}$$

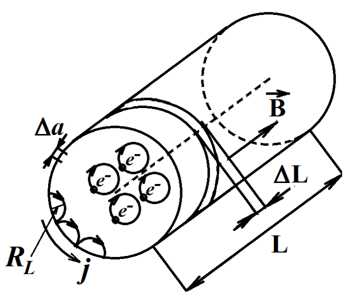
шукана частота.

Підставимо розв'язок для n_1 у формі $n_1 = C_1\cos\omega t$ до рівняння (7) (за початок відліку часу прийнято максимальне значення популяції зайців). Отримаємо, що $n_2 = C_2\sin\omega t$, де $C_2/C_1 = A_2\sqrt{K_1}\big/A_1\sqrt{K_2}$, а зсув фаз між коливаннями n_1 та n_2 складає $\pi/2$ (чверть періоду). Звернути увагу: до відповіді входять величини, не задані в умові.

Задача 5

Довгий плазмовий циліндр із концентрацією електронів n і температурою T вміщений у поздовжнє магнітне поле з індукцією B. 1) Знайдіть густину поверхневого струму стовпа й поясніть механізм його виникнення. 2) Знайдіть тиск, зумовлений силою Ампера, що виникає при взаємодії цього струму із зовнішнім магнітним полем. 3) Наскільки зменшиться індукція магнітного поля всередині плазмового стовпа? Іони плазми вважати нерухомими. Вважати, що в плазмі $\mu = 1$.

Розв'язок



В магнітному полі електрони обертаються навколо магнітних силових ліній. У центральних областях плазми створені ними струми компенсуються. Але поблизу поверхні, в шарі товщиною порядку R_L (середній радіус обертання електронів у зовнішньому магнітному полі), струми виявляються нескомпенсованими і формують поверхневий струм стовпа. Швидкість обертання електронів можна оцінити як їхню теплову швидкість v_{Te} з умови $m\mathrm{v}_{Te}^2 \sim k_B T$, де k_B – стала Больцмана, m – маса електрона. В свою чергу, R_L визначимо з умови рівності відцентрової сили й сили Лоренца:

$$m\mathrm{v}_{Te}^2 / R_L = e\mathrm{v}_{Te} B,$$

(e – елементарний заряд), звідки

$$R_L = \frac{mv_{Te}}{eB} \qquad (1)$$

В силу сказаного раніше густина поверхневого струму, спрямованого в азимутальному напрямку (по куту φ циліндричної системи координат, вісь якої збігається з віссю плазмового циліндра), може бути записана у формі

$$j_{пов} = en\mathrm{v}_{Te}, \qquad (2)$$

Нескомпенсований струм у приповерхневому шарі товщиною R_L та довжиною ΔL (в напрямку, паралельному до осі циліндра, див. рис.) дорівнюватиме

$$I_{пов} = j_{пов} R_L \Delta L = en\mathrm{v}_{Te} R_L \Delta L = enmv_{Te}^2 \frac{1}{eB} \Delta L = \frac{nk_B T}{B} \Delta L, \qquad (3)$$

Сила Ампера, зумовлена взаємодією цього струму з магнітним полем, спрямована в радіальному напрямку (до осі циліндра). Виділимо малий прямокутний елемент на поверхні циліндра розміром $\Delta L \times \Delta a$. Тоді сила Ампера, що діє на струм (3) має вигляд

$$F_A = I_{пов} B \Delta a, \qquad (4)$$

а тиск (сила на одиницю площі поверхні) –

$$p = \frac{F_A}{\Delta L \Delta a} = B \frac{nk_B T}{B} \frac{\Delta L \Delta a}{\Delta L \Delta a} = nk_B T. \qquad (5)$$

Як бачимо, вона компенсує газокінетичний тиск електронів плазми.

Для знаходження магнітного поля ΔB, створеного в плазмі поверхневим струмом (2) і спрямованого проти зовнішнього поля B, скористаємося відомою формулою для поля всередині довгого соленоїда (тут враховано, що $\mu = 1$):

$$\Delta B = \mu_0 \frac{I_{пов} N}{L} = \mu_0 \frac{I_{пов}}{\Delta L} = \mu_0 \frac{nk_B T}{B}. \qquad (6)$$

тут L – повна довжина соленоїда, N – загальна кількість витків.

Як бачимо, в плазмовому стовпі поле виявляється меншим від зовнішнього. Це явище відоме як діамагнетизм плазми.