

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

13 января 2015 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
 - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*;
 - Черновые листы;
 - Неиспользованные листы;
 - Отпечатанные условия задачи

Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

Задача 1 (7 баллов)

Для решения каждой части используйте специальные, выданные вам бланки, на которых выполните требуемые построения.

Описание этих построений, а также расчеты проведите на этих же бланках.

Задача 1.1 (2.0 балла)

Три небольших положительно заряженных шарика (величины зарядов различны) массы которых равны m , $2m$, $3m$, связаны нерастяжимыми непроводящими нитями, так, что шарики находятся в вершинах правильного треугольника A_1, A_2, A_3 (см. бланк №1.1). После того как нити, связывающие шарики, пережгли (возможно, не одновременно) шарики стали разлетаться, оставаясь в одной плоскости. На бланке №1.1 показаны положения B_1 и B_2 двух шариков в некоторый момент времени. С помощью геометрических построений найдите положение B_3 третьего шарика в тот же момент времени.

Задача 1.2 (2.0 балла)

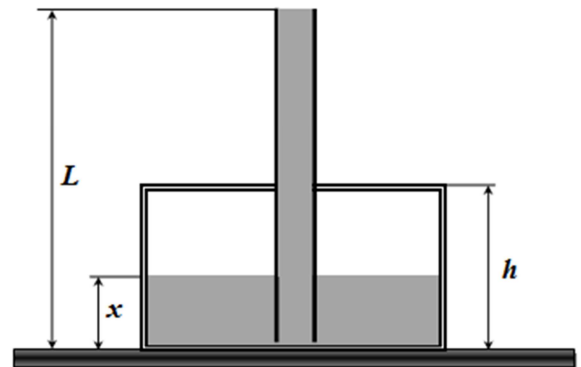
На бланке № 1.2 в логарифмическом масштабе (P_0, V_0 — некоторые постоянные величины) приведены прямолинейные графики двух процессов, совершаемых идеальным двухатомным газом. Постройте график циклического процесса, лежащего между этими прямыми, который имеет максимальный КПД. На бланке указаны крайние точки этого цикла A_1 — точка минимального объема, A_3 — точка максимального объема. Найдите КПД этого цикла.

Задача 1.3 (3.0 балла)

На бланке №1.3 показаны положения точечного источника света S и его изображения в тонкой линзе S' . OO_1 — главная оптическая ось этой линзы. Постройте изображение точечного источника S_1 , создаваемое этой же линзой.

Задача 2 Сосуд с водой (7 баллов)

В цилиндрический сосуд поперечного сечения $S = 0.500 \text{ м}^2$ и высотой $h = 0,500 \text{ м}$ через герметичную крышку вертикально вставлена открытая с обоих концов трубка длиной $L = 2,00 \text{ м}$, так что нижний конец немного не доходит до дна сосуда. В сосуд через трубку наливают воду плотностью $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ как показано на рисунке. Площадь сечения трубки много меньше площади сечения сосуда, а материал стенок сосуда хорошо проводит тепло. Атмосферное давление равно $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура окружающего воздуха равна $T_0 = 293 \text{ К}$, ускорение свободного падения равно $g = 9.80 \text{ м/с}^2$.



1. [2,0 балла] Найдите высоту уровня воды в сосуде $x = x_0$ в тот момент, когда трубка будет полностью заполнена водой. Ответ выразите через p_0, ρ, g, h, L и найдите его численное значение.

Стенки сосуда и трубки покрывают материалом, который не проводит тепло. Воздуху внутри сосуда начинают сообщать тепло достаточно быстро, так что вода не успевает прогреться.

2. [0,5 балла] Найдите зависимость давления воздуха в сосуде $p(x)$ как функцию от x . Ответ выразите через p_0, ρ, g, L, x .

3. [1,0 балла] Найдите зависимость температуры воздуха в сосуде $T(x)$ как функцию от x . Ответ выразите через p_0, ρ, g, L, x .
4. [1,0 балла] Найдите до какой температуры T_m необходимо нагреть воздух, чтобы он полностью вытеснил воду из сосуда. Ответ выразите через p_0, ρ, g, L, T_0 и найдите его численное значение.
5. [2,5 балла] Найдите количество теплоты Q , которое надо сообщить воздуху, чтобы он полностью вытеснил воду из сосуда. Ответ выразите через p_0, ρ, g, h, L, S и найдите его численное значение.

Задача 3. Запаздывание и затухание (16 баллов)

В этой задаче не следует учитывать конечность скорости распространения электромагнитного взаимодействия.

Часть 1. Магнитная

1.1 Теоретическое введение

Магнитное поле, создаваемое однородно намагниченным ферромагнитным цилиндром (постоянным магнитом) на больших расстояниях эквивалентно полю, создаваемому круговым витком с постоянным электрическим током.

Как описанный цилиндрический магнит, так и виток с током характеризуются магнитным моментом p_m , который для витка с током определяется как произведение силы тока на площадь витка

$$p_m = IS.$$

Такой источник магнитного поля также называют *магнитным диполем*. На рисунке показаны силовые линии магнитного поля такого диполя.

1.1.1. [0,75 балла] Покажите, что магнитное поле B_z на оси диполя на больших расстояниях определяется формулой

$$B_z = b \frac{p_m}{z^\beta}$$

где z – координата, отсчитываемая вдоль оси диполя от его центра. Найдите значения параметров b и β в этой формуле.

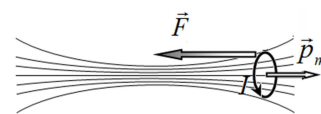
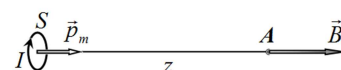
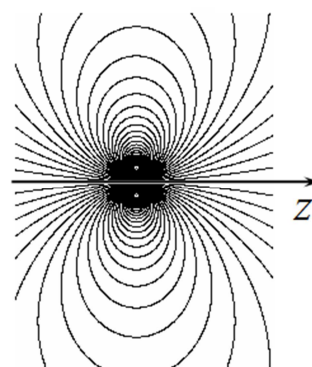
1.1.2. [1 балл] Пусть виток с током (магнитный диполь) с магнитным моментом p_m находится в неоднородном осесимметричном поле, индукция которого на оси z зависит от координаты z по закону $B_z(z)$. Ось диполя совпадает с осью симметрии поля. Покажите, что сила, действующая на диполь со стороны магнитного поля, определяется формулой

$$F_z = -p_m \frac{dB_z}{dz}$$

1.2 Колебания магнита

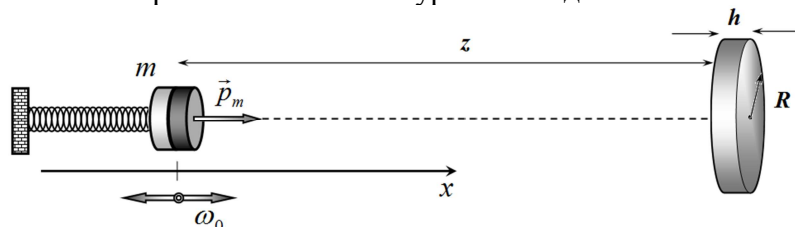
Цилиндрический магнит массы m , имеющий магнитный момент p_m , прикреплен к пружине жесткостью k и способен совершать колебания вдоль горизонтальной оси, направленной вдоль магнитного момента.

1.2.1. [0,25 балла] Найдите частоту собственных колебаний магнита ω_0 в отсутствие всех внешних полей.



На расстоянии z от положения равновесия магнита закрепляют небольшой металлический диск так, что его ось совпадает с осью магнита. Радиус диска R , его толщина h ($h \ll R \ll z$), удельное электрическое сопротивление материала диска равно ρ , магнитную проницаемость считайте равной $\mu = 1$. Магнит выводят из положения равновесия и он начинает совершать малые колебания, описываемые некоторой функцией $x(t)$, причем $x \ll z$.

1.2.2. [2 балла] Найдите силу $F(x, v)$, действующую со стороны диска на магнит, как функцию его координаты x и скорости v . Запишите уравнение движения магнита.



1.2.3. [0,75 балла] Найдите относительное изменение частоты колебаний магнита $\Delta\omega/\omega_0$ из-за влияния диска.

1.2.4. [0,25 балла] Считая затухание колебаний слабыми, найдите характерное время затухания колебаний шарика.

1.2.5. [1,5 балла] Покажите, что потери механической энергии магнита равны количеству теплоты, выделившемуся в диске за то же время.

Математическая подсказка

Уравнение затухающих колебаний

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

имеет решение

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — частота затухающих колебаний, $\tau = 1/\beta$ — характерное время затухания, параметры A, φ определяются начальными условиями.

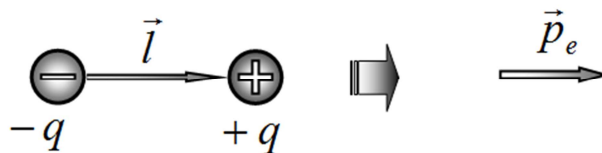
При $x \ll 1$ можно приближённо считать, что $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

Часть 2 Электрическая

2.1 Теоретическое введение

Система из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов $(-q, +q)$, находящихся на фиксированном расстоянии l друг от друга называется *электрическим диполем* и характеризуется дипольным моментом

$$p_e = ql.$$



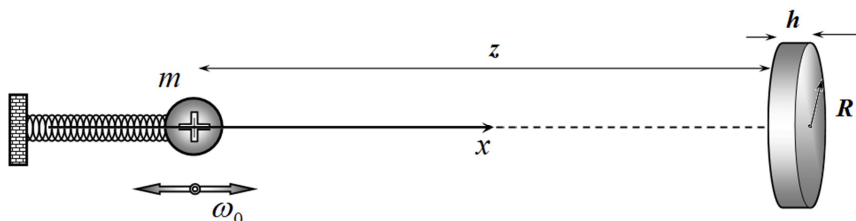
2.1.1. [0,75 балла] Напряженность электрического поля, создаваемого диполем на его оси на расстоянии $z \gg l$, определяется формулой

$$E = a \frac{p_e}{z^\alpha}.$$

Определите параметры a, α в этой формуле.

2.2 Колебания заряженного шарика.

Маленький шарик массы m , несущий электрический заряд q прикреплен к непроводящей пружине жесткости k и может совершать колебания вдоль горизонтальной оси x . На расстоянии z от положения равновесия шарика закрепляют небольшой металлический идеально проводящий диск так, что его ось совпадает с осью x . Радиус диска R , его толщина h ($h \ll R \ll z$).



2.2.1. [0,75 балла] Найдите, насколько сместится положение равновесия шарика из-за влияния диска.

2.2.2. [0,75 балла] Найдите относительное изменение частоты колебаний шарика $\Delta\omega/\omega_0$ из-за влияния диска.

Пусть теперь удельное электрическое сопротивление материала диска равно ρ .

2.2.3. [1,5 балла] Получите уравнение, описывающее изменение во времени индуцированного дипольного момента диска (т.е. связывающее дипольный момент диска p и скорость его изменения во времени dp/dt).

2.2.4. [0,25 балла] Считая диск конденсатором, пластины которого соединены резистором, найдите характерное время такой RC -цепочки. Ответ выразите через удельное сопротивление ρ материала диска.

Далее будем считать, что характерное время, полученное в пункте 2.2.4, много меньше периода колебаний шарика.

2.2.5. [0,25 балла] Запишите следующее из этого условия соотношение между ω и ρ .

Так как при идеальной проводимости диска колебания шарика будут незатухающими, при малом удельном сопротивлении материала диска затухание колебаний также должно быть малым, и такие колебания можно приближённо считать гармоническими.

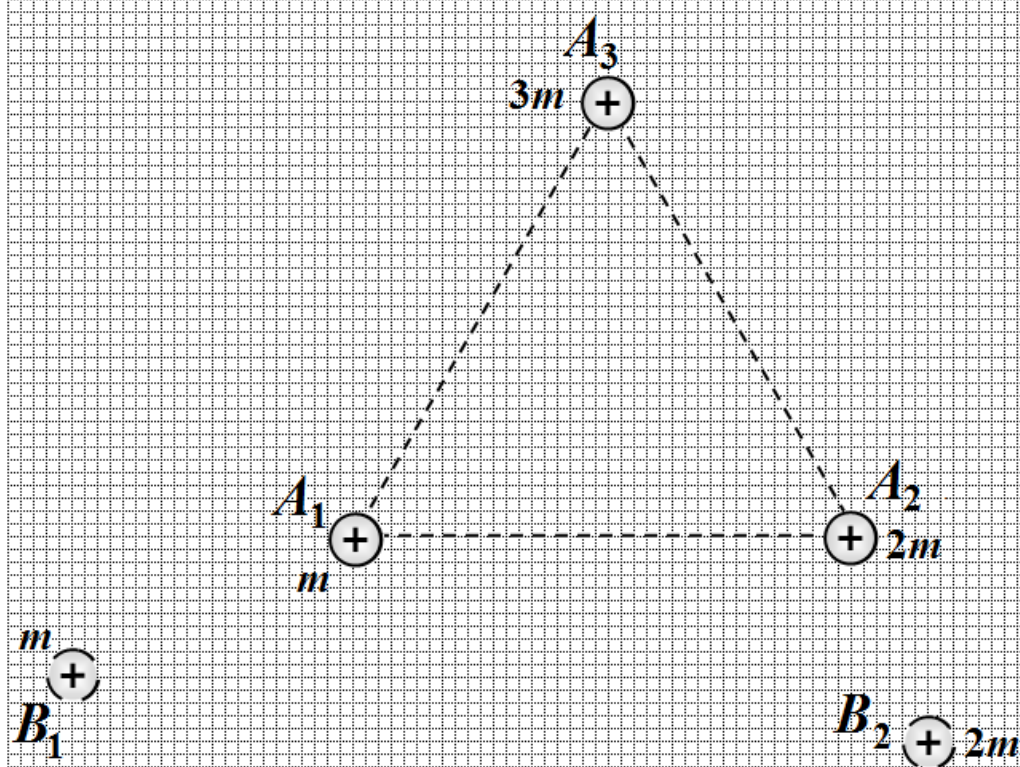
2.2.6. [2 балла] Получите в этом приближении из уравнения, полученного в пункте 2.2.3, выражение дипольного момента диска p через координату шарика x и его скорость v .

2.2.7. [1,5 балла] Найдите выражение для силы, действующей на шарик со стороны диска. Запишите уравнение движения шарика.

2.2.8. [0,25 балла] Найдите характерное время затухания колебаний шарика.

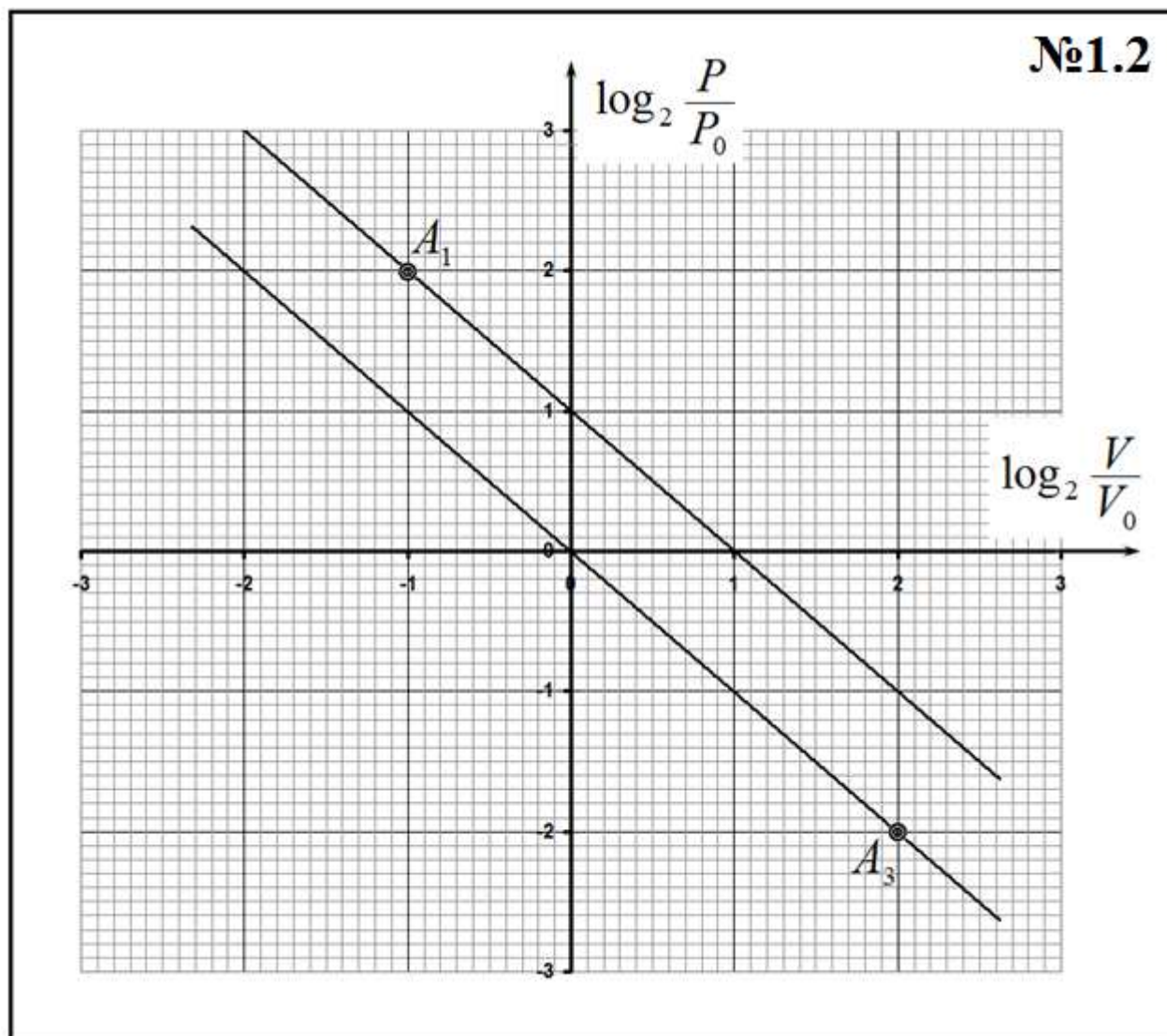
2.2.9. [1,5 балла] Покажите, что потери механической энергии шарика равны количеству теплоты, выделившемуся в диске то же время.

Country	Student Code	Question Number	Page Number	Total Number of Pages
_____	_____	_____	_____	_____

К задаче 1.1**№ 1.1**

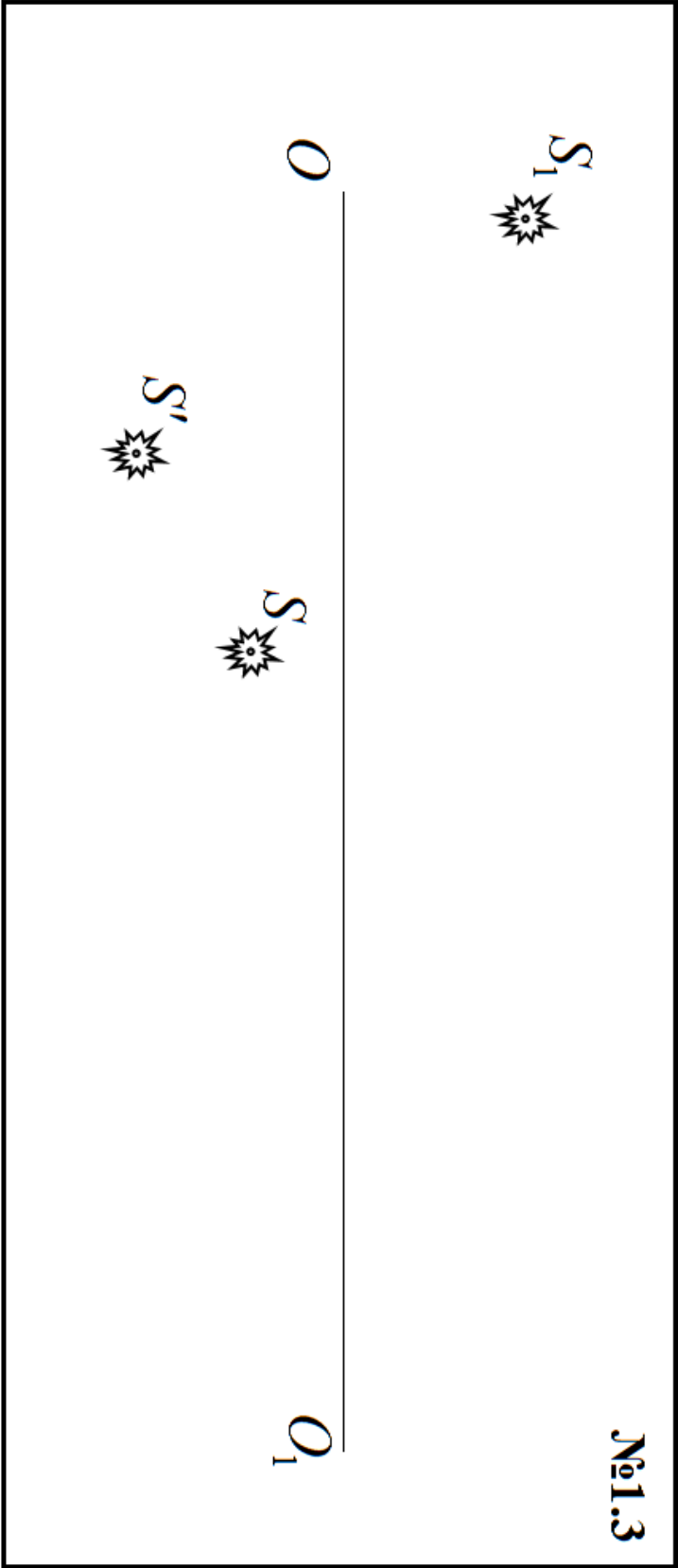
Do not write outside the boxed area

Country	Student Code	Question Number	Page Number	Total Number of Pages
_____	_____	_____	_____	_____

К задаче 1.2

Country	Student Code	Question Number	Page Number	Total Number of Pages

К задаче 1.3



Do not write outside the boxed area