Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме: “Непрерывные функции”

Харьков, 2013 г.

Поурочное планирование (16 часов)

Урок 1. Свойства функций, непрерывных в точке. Теоремы об арифметических операциях с непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции.

Урок 2. Непрерывность функции в точке справа и слева. Разрывы функции и их классификация.

Урок 3. Исследование функции на непрерывность, определение типов разрывов.

Урок 4. Исследование функции на непрерывность, определение типов разрывов.

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: "Непрерывность функции в точке".

Урок 6. Функции, непрерывные на множестве. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении.

Урок 7. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении и ее следствия. Метод половинного деления.

Урок 8. *(доп.)* Решение задач и упражнений на применение теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении.

Урок 9. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

Урок 10. *Самостоятельная работа* по теме: "Функции, непрерывные на отрезке".

Урок 11. *(доп.)* Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

Урок 12. *(доп.)* Решение функциональных уравнений в классе непрерывных функций.

Урок 13. *(доп.)* Метод Коши решения функциональных уравнений в классе непрерывных функций. Уравнения Коши.

Урок 14. Обобщающий урок по теме.

Урок 15. Контрольная работа.

Урок 16. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Непрерывность функции в точке

Домашнее задание

1) Докажите, что функция Дирихле $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не является непрерывной ни в одной точке.

2) Докажите, что функция $f(x) = x\,\mathcal{D}(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

3) Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и непрерывной ровно в двух точках.

4) Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и непрерывной только в счетном количестве точек.

5) Приведите пример функции $y = f(x)$, определенной на $\mathbb{R}$, разрывной в каждой точке, и такой, что функция $y = f^2(x)$ непрерывна в каждой точке.

6) Что можно утверждать о непрерывности функции $f + g$ в точке x_0, если:

   а) функции f и g в точке x_0 непрерывными не являются;

   б) функция f непрерывна в точке x_0, а функция g в этой точке непрерывной не является?

7) Что можно утверждать о непрерывности функции $f \cdot g$ в точке x_0, если:

   а) функции f и g в точке x_0 непрерывными не являются;

   б) функция f непрерывна в точке x_0, а функция g в этой точке непрерывной не является?

Урок 2. Непрерывность функции в точке справа и слева

Домашнее задание

1) Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 6x}{x^2}, & \text{если } x < 0, \\ 18, & \text{если } x \geqslant 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

2) Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0:

   (1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

   (2) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

(3) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } x \neq \pi/2 + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{если } x = \pi/2 + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad x_0 = -\dfrac{\pi}{2}.$

3) Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{если } x < 1, \\ -x, & \text{если } x \geqslant 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a^2 - a, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

(3) $f(x) = \begin{cases} a \cos \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a^2 - 4a, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(a^2 - 1\right) |x|}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a^2 + a, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Урок 3. Исследование функций на непрерывность – 1

Домашнее задание

1) Определите точки разрыва функции и исследуйте характер этих точек, если:

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2};$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x};$

(3) $f(x) = \operatorname{sign} \left(\sin \dfrac{\pi}{x} \right);$

(4) $f(x) = e^{x + \frac{1}{x}}.$

2) *(доп.)* Исследуйте на непрерывность функцию $f(x) = \left[\dfrac{1}{x^2} \right] \operatorname{sign} \left(\sin \dfrac{\pi}{x} \right).$

3) *(доп.)* Докажите, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}, \text{ НОД}\,(m, n) = 1, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна во всех рациональных точках и непрерывна во всех иррациональных точках.

Урок 4. Исследование функций на непрерывность – 2

Домашнее задание

1) Определите точки разрыва функции $f(x) = \left(1 - e^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}$ и исследуйте характер этих точек.

2) Исследуйте на непрерывность следующие функции:

   (1) $f(x) = (-1)^{\left[x^2\right]}$;

   (2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$;

   (3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

3) Пусть $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < 0, \\ a + x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$ При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

4) Функция $f(x) = \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ теряет смысл при $x = 0$. Определите число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$.

5) Исследуйте на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, $0 < x < 1$, если

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 < u \leqslant 1, \\ 2 - u & \text{при } 1 < u < 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 2 - x & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Урок 6. Теоремы Вейерштрасса

Домашнее задание

1) Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{НОД}\,(m,n) = 1, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

не ограничена в окрестности любой точки $x \in \mathbb{R}$.

2) а) Докажите, что всякая определенная на отрезке $[a;b]$ локально ограниченная (т. е. ограниченная в окрестности любой точки отрезка) функция $f(x)$ ограничена на всем отрезке.

   б) Останется ли верным утверждение пункта а), если заменить отрезок $[a;b]$ интервалом $(a;b)$?

3) Теорему Вейерштрасса о максимальном значении можно получить как следствие теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке, рассмотрев функцию $F(x) = 1/\left(f - \sup f\right)$. Проведите это рассуждение подробно.

4) Дайте определение непрерывности для функции двух переменных, определенной на подмножестве плоскости. Докажите, что всякая непрерывная на замкнутом квадрате функция ограничена и достигает своего максимального и минимального значения.

Урок 7. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

Домашнее задание

1) Докажите, что уравнения: а) $x^6 + 2x - 13 = 0$; б) $2^x = \dfrac{1}{3}\sin x + 2$ имеют по крайней один действительный корень.

2) Пусть $f(x) = -x^3 + 7x + 2$. Вычислите $f(-1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(3)$. На каких интервалах функция имеет корни ? На каких интервалах функция сохраняет знак ?

3) Докажите, что уравнение $x^5 + x - \dfrac{1}{x} = 0$ имеет корень на интервале $[0,5; 1]$. Найдите этот корень с точностью до $0,1$.

4) Докажите, что всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

5) Докажите, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, для которого $a + b + c > 0$ и $a - b + c < 0$, имеет действительный корень.

6) Докажите, что уравнение $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$ при $a < b < c$ имеет два различных действительных корня.

Урок 8. Применение теоремы Больцано-Коши

Домашнее задание

1) Докажите, что уравнение $2\cos x = x^2 + 4x - 6$ имеет по крайней мере один действительный корень.

2) Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0; 1]$. Известно, что $f(0) < g(0)$ и $f(1) > g(1)$. Докажите, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет действительные корни.

3) Непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой прямой. Число 1 является их общим периодом. Докажите, что существуют такие числа x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$, что $f(x_1)\, g(x_2) = f(x_2)\, g(x_1)$.

4) Непрерывная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Известно, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет решение. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ также имеет решение.

5) Докажите, что данную плоскую фигуру F, ограниченную простой замкнутой кривой, можно разделить на четыре равновеликие части двумя прямолинейными перпендикулярными разрезами.

Урок 9. Непрерывность обратной функции

Домашнее задание

1) Вычислите пределы:

   (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x)$;

   (2) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg} \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$;

   (3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

   (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;

   (5) а) $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$.

2) а) Найдите функцию, обратную к дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$.

   б) В каком случае обратная функция совпадает с данной?

3) Может ли немонотонная функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ иметь однозначную обратную функцию?

4) В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

5) Определите однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

   (1) $f(x) = 2x - x^2$;

   (2) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Урок 11. Равномерная непрерывность

Домашнее задание

1) Покажите, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

2) Покажите, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена в интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

3) Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна в этой области.

4) Покажите, что неограниченная функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

5) Исследуйте на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

   (1) $f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1)$;

   (2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi)$.

6) Докажите, что сумма и произведение конечного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

7) Докажите, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то эта функция равномерно непрерывна на этом интервале.

Урок 12. Решение функциональных уравнений в классе непрерывных функций

Домашнее задание

Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям:

1) $f(x) = -f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$;

2) $f(x) = f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)$;

3) $3\,f\,(2x+1) = f\,(x) + 5x$;

4) $f\,(x) + f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{5}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 2$.

Урок 13. Метод Коши решения функциональных уравнений

Домашнее задание

1) Докажите, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению $f(x+y) = f(x) + f(y)$, есть линейная однородная.

2) Найдите все непрерывные функции $f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие уравнению $f\,(xy) = f\,(x)\,f\,(y)$.

3) Покажите, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ удовлетворяет уравнению $f\,(xy) = f\,(x)\,f\,(y)$.

Вопросы к зачету

1. Непрерывность функции в точке. Теоремы об арифметических операциях с непрерывными функциями. Предел и непрерывность сложной функции.

2. Непрерывность функции в точке справа и слева. Разрывы функции и их классификация.

3. Функции, непрерывные на множестве. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении.

4. Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении и ее следствия. Метод половинного деления.

5. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций. Пределы, связанные с обратными тригонометрическими функциями.

6. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

7. Метод Коши решения функциональных уравнений в классе непрерывных функций. Уравнения Коши.

Дополнительные задачи

1. Приведите пример функции, определенной на всей прямой, непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.

2. Известно, что определенная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, достигает на $[a;b]$ своей точной нижней и верхней граней (m и M соответственно), принимает все промежуточные значения из отрезка $[m;M]$. Верно ли, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$?

3. Существует ли определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $f(x)$, принимающая в рациональных точках иррациональные значения, а в иррациональных – рациональные?

4. Существует ли определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $f(x)$ такая, что число $f(x)$ рационально тогда и только тогда, когда число $f(x+1)$ иррационально?

5. Докажите, что для любого счетного множества действительных чисел можно построить возрастающую функцию, разрывную во всех точках этого множества и непрерывную во всех остальных.

6. Может ли функция быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных?

7. Докажите, что любое монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками непрерывно (в обе стороны).

8. а) Дайте определение непрерывности для функций, определенных на плоскости.

б) Докажите, что любой многочлен на комплексной плоскости непрерывен.

в) Докажите, что для любого многочлена найдется точка на комплексной плоскости, где его абсолютная величина минимальна.

г) Докажите, что в этой точке многочлен неизбежно равен нулю (основная теорема алгебры).

9. *(Показательная функция)* Функция $x \mapsto a^x$ (при любом $a > 0$) обладает такими свойствами: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Кроме того, при $a > 1$ она монотонно возрастает, при $a = 1$ постоянна, а при $a < 1$ убывает.

а) Считая эти свойства известными, докажите, что показательная функция непрерывна

(1) в точке 0; (2) во всех точках прямой.

б) Докажите, что указанные выше свойства определяют показательную функцию однозначно.

в) Пользуясь лишь этими свойствами, докажите, что $6^x = 2^x \cdot 3^x$ при всех x.

10. Дайте определение непрерывной на окружности функции. Докажите, что для любой непрерывной на окружности функции найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых она принимает равные значения.

11. Определенная на отрезке функция называется *выпуклой вниз*, если хорда, соединяющая любые две точки графика, лежит выше графика. Докажите, что всякая выпуклая вниз функция непрерывна.

12. Докажите, что если непрерывная на отрезке функция удовлетворяет неравенству

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

то она выпукла вниз.

13. Найдите все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие уравнению $f(x) = -f(\sin x)$.

14. Найдите все непрерывные на положительной полуоси функции f, удовлетворяющие уравнению $f(x) = f(1 - e^{-x})$.

15. Найдите все непрерывные на $(0;1)$ функции f, удовлетворяющие уравнению $f(x) = -f(\varphi(x))$, где $\varphi(x) = 2x$ при $0 < x \leqslant 0,25$, $\varphi(x) = 0,5$ при $0,25 < x < 0,75$ и $\varphi(x) = 2x - 1$ при $0,75 \leqslant x < 1$.