Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-9

Материалы к урокам по теме:

"Метод математической индукции. Прогрессии"

Харьков, 2013 г.

Поурочное планирование (22 часа)

Урок 1. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция.

Урок 2. Метод математической индукции.

Урок 3. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств.

Урок 4. Применение метода математической индукции при решении задач на делимость.

Урок 5. Применение метода математической индукции для доказательства неравенств.

Урок 6. Различные схемы метода математической индукции.

Урок 7. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим для n чисел.

Урок 8. *Самостоятельная работа* по теме: "Метод математической индукции".

Урок 9. Числовые последовательности и способы их задания. Нахождение общего члена рекуррентных последовательностей.

Урок 10. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена.

Урок 11. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Урок 12. Сумма первых n членов арифметической прогрессии.

Урок 13. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена. Характеристическое свойство. Сумма первых n членов геометрической прогрессии.

Урок 14. Решение задач на геометрическую прогрессию.

Урок 15. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

Урок 16. Решение комбинированных задач на арифметическую и геометрическую прогрессии.

Урок 17. *Самостоятельная работа* по теме: "Арифметическая и геометрическая прогрессии".

Урок 18. Задачи на суммирование.

Урок 19. Решение задач на суммирование.

Урок 20. Обобщающее занятие по теме.

Урок 21. Контрольная работа.

Урок 22. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция

Домашнее задание

1) Верно ли, что число n^2+n+17 является простым при любом натуральном n? Проверьте справедливость этого утверждения при $n = 1, 2, 3, \ldots, 15, 16$.

2) Пусть $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots + (-1)^n n$. Вычислив S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, угадайте, чему равняется S_{316} и S_{327}.

3) Пусть $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)\,n}$. Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для S_n.

4) Пусть $S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$. Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для S_n.

5) Пользуясь методом неполной индукции, угадайте, на сколько частей делят плоскость n прямых общего положения (*прямыми общего положения* называют множество прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке).

6) На окружности взяли n точек и соединили их всевозможными хордами. При этом никакие три из этих хорд не пересекаются в одной точке. Пользуясь методом неполной индукции, угадайте, на сколько частей они делят круг.

Урок 2. Метод математической индукции

Домашнее задание

1) Отличница Маша умеет доказывать, что любые n точек лежат на одной прямой. Делает она это так: При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение безусловно верно. Пусть утверждение верно для любых $n = k$ точек. Докажем, что оно верно для любых $n = k + 1$ точек. Рассмотрим произвольные точки A_1, A_2, …, A_k, A_{k+1}. По предположению индукции точки A_1, A_2, …, A_k лежат на некоторой прямой l, а точки A_2, …, A_k, A_{k+1} – на некоторой прямой l'. Поскольку прямые l и l' проходят через точки A_2 и A_k, то эти прямые совпадают, т. е. все точки A_1, A_2, …, A_k, A_{k+1} лежат на одной прямой. Найдите ошибку в Машином рассуждении.

2) Докажите, что любую сумму, начиная с 8 тугриков, можно выплатить купюрами по 3 тугрика и 5 тугриков.

3) Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки”, состоящие из трех клеток.

4) Рассматриваются всевозможные положительные обыкновенные дроби с числителем 1. Докажите, что при любом $n \geqslant 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида.

Урок 3. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств

1) Метод математической индукции применяется в различных областях математики. Чаще всего он используется при

- решении логических задач;
- доказательстве тождеств, содержащих суммы и произведения;
- решении задач на делимость;
- доказательстве неравенств.

Мы последовательно рассмотрим эти области применения.

2) Доказательство тождеств, содержащих суммы и произведения, – наиболее стандартная сфера применения метода математической индукции.

Упражнения. Пользуясь методом математической индукции, докажите следующие тождества:

(1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

Замечание. Легко видеть, что это тождество равносильно равенству

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 .$$

(4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)\,n = \dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}$;

(5) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$;

(6) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

Домашнее задание

Пользуясь методом математической индукции, докажите следующие тождества:

1) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n\,(3n-1)}{2}$;

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$;

3) $5 + 9 \cdot 5 + 13 \cdot 5^2 + \ldots + (4n+1)\,5^{n-1} = n5^n$;

4) $\left(1 - \dfrac{4}{1}\right)\left(1 - \dfrac{4}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{4}{(2n-1)^2}\right) = \dfrac{1+2n}{1-2n}$;

5) $\dfrac{1}{5 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 19} + \ldots + \dfrac{1}{(7n-2)\,(7n+5)} = \dfrac{n}{5\,(7n+5)}$;

6) $\dfrac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} = \dfrac{n\,(n+1)}{n+2}$;

7) $\dfrac{1 \cdot 2}{3!} + \dfrac{2 \cdot 2^2}{4!} + \ldots + \dfrac{n \cdot 2^n}{(n+2)!} = 1 - \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$;

8) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \ldots + n\,(2n+1) = \dfrac{n\,(n+1)\,(4n+5)}{6}$.

Урок 4. Применение метода математической индукции при решении задач на делимость

1) Метод математической индукции часто используют для доказательства того, что некоторое выражение, зависящее от одной натуральной переменной, делится на некоторое число.

2) **Упражнения**. Докажите, что

   (1) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9 при любом целом неотрицательном n;
   (2) $6^{2n} - 1$ делится на 35 при любом натуральном n;
   (3) $3^n + 7$ делится на 8 при любом четном натуральном n;
   (4) $4^n + 15n - 1$ делится на 9 при любом натуральном n;
   (5) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n;
   (6) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17 при любом натуральном n;
   (7) $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1} при любом натуральном n;
   (8) $\underbrace{11\ldots1}_{3^n}$ делится на 3^n при любом натуральном n.

Домашнее задание

1) Докажите, что $7^{2n} - 1$ кратно 24 при любом натуральном n.
2) Докажите, что при делении на 6 число $n^3 + 9n^2 + 26n + 8$ дает остаток 2 при любом целом неотрицательном n.
3) Докажите, что $3^{2n+3} - 24n + 37$ делится на 64 при любом целом неотрицательном n.
4) Докажите, что $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ делится на 8 при любом натуральном n.
5) Докажите, что $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ делится на 37 при любом натуральном n.
6) Докажите, что при любом четном натуральном n число $4^n - 3^n - 7$ делится на 84.
7) Докажите, что $5^{2^n} + 6^{2^n} + 11^{2^n}$ делится на 7 при любом натуральном n.
8) Докажите, что при нечетном натуральном n число $3 \cdot 5^n + 8n^2 + 44n - 67$ делится на 256.

Урок 5. Применение метода математической индукции для доказательства неравенств

1) Метод математической индукции часто используют для доказательства неравенств, обе части которых зависят от одной натуральной переменной.
2) **Упражнения**. Докажите, что:

   (1) $2^n > 2n + 1$ при всех натуральных $n > 2$;

   (2) $n! > 2^n$ при всех натуральных $n \geqslant 4$;

   (3) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при всех натуральных n и произвольном $x \geqslant -1$ *(неравенство Бернулли)*.

   (4) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$ при всех натуральных $n \geqslant 3$;

   (5) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{n}{2}$ при всех натуральных n;

   (6) $\dfrac{4^n}{n+1} \leqslant \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ при всех натуральных n;

Домашнее задание

1) При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n > n^2$?

2) Докажите, что:

   (1) $3^n > n \cdot 2^n$ при всех натуральных n;

   (2) $4^n - 3^n \geqslant n^2$ при всех натуральных n;

   (3) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$ при всех натуральных n;

   (4) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n$ при всех натуральных $n \geqslant 2$;

   (5) $\dfrac{1}{4n} \leqslant \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ при всех натуральных n.

   Замечание. Символом $(2n+1)!!$ обозначают произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n+1$, а символом $(2n)!!$ обозначают произведение всех четных чисел от 1 до $2n$.

Урок 6. Неравенства, содержащие корни. Различные схемы индукции

1°. Неравенства, содержащие корни

1) Докажите, что для всех неотрицательных действительных a и произвольного натурального n справедливо неравенство:

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

2) Докажите, что $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$ при всех натуральных n.

3) Докажите, что $n^n > (n+1)^{n-1}$ при всех натуральных $n > 1$.

2°. Различные схемы индукции

1) Известно, что $x + \dfrac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что тогда при любом натуральном n число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ – тоже целое.

2) Докажите, что любое натуральное число может быть записано в двоичной системе счисления (т. е. в виде суммы нескольких различных степеней двойки, включая, возможно, и нулевую).

Домашнее задание

1) Докажите, что для всех натуральных n справедливо неравенство:

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}}_{n\ \text{корней}} < 2.$$

2) Докажите, что $2^{n(n-1)/2} > n!$ при всех натуральных $n \geqslant 3$.

3) Докажите, что $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant 3-\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ при всех натуральных n.

4) Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для

$$S_n = \frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}.$$

Докажите свою гипотезу, пользуясь методом математической индукции.

5) Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для

$$S_n = 1+3+6+\ldots+\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Докажите свою гипотезу, пользуясь методом математической индукции.

Урок 7. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

1) Имеет место очень важное неравенство:

Теорема (**Неравенство Коши между средними**).

Среднее арифметическое n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\,,$$

причем равенство достигается т. и т. т., когда все числа равны.

Доказательство теоремы:

1-й способ: Метод подъема и спуска.

1° *(база индукции)*. При $n=2$ доказываемое неравенство тривиально, поскольку

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2} \iff (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqslant 0.$$

2° *(подъем)*. Докажем, что если неравенство Коши верно для k чисел, то оно верно и для $2k$ чисел. Рассмотрим произвольные $2k$ неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$. Применяя неравенство Коши для k чисел к наборам $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{2k}$, получаем:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{2k} = \\ = \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{k}}{2} \geqslant \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}}{2}.$$

Но в силу неравенства Коши для двух чисел $\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$ и $\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}$ справедливо неравенство

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}\ \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{2k}}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2k} \geqslant \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}},$$

что и требовалось доказать. Итак, неравенство Коши доказано для степеней двойки $(n = 2^m)$.

3° *(спуск)*. Докажем, что если неравенство Коши справедливо для k чисел, то оно верно и для $k-1$ числа. Действительно, рассмотрим произвольные $k-1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Добавим к ним число $a_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$ и применим неравенство Коши к набору $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}.$$

Подставляя выражение для a_k в это неравенство, получаем:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}.$$

Но

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}{k} = \\ = \frac{(k-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})}{k(k-1)} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}.$$

Возводя обе части этого неравенства в степень k и сокращая на $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$, получаем:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1} \geqslant a_1 a_2 \ldots a_{k-1}.$$

Осталось извлечь корень $k-1$ степени из обеих частей:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}},$$

что и требовалось доказать.

4°. Пусть теперь n – произвольное натуральное число. Если $n = 2^m$, то согласно 2°, для него неравенство справедливо. Если же $n \neq 2^m$, то найдем такое m, чтобы n было меньше 2^m, и тогда, спускаясь, на основании 3° утверждаем, что неравенство Коши верно и для $n = m$. Теорема доказана.

2-й способ: Доказательство при помощи леммы Коши.

(1) Докажем сперва частный случай неравенства Коши:

Лемма (Коши).

> *Если произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно единице, то их сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не меньше n.*

Доказательство леммы: Доказательство проведем по индукции.

1° *(база индукции)*. При $n = 1$ имеем, по условию, $a_1 = 1$ и, очевидно, неравенство $a_1 \geqslant 1$ выполняется.

2° *(шаг индукции)* Предположим, что лемма Коши верна для k чисел. Выведем отсюда справедливость леммы для $k + 1$ числа. Для этого рассмотрим произвольные $k + 1$ положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, причем $a_1 a_2 \ldots a_{k+1} = 1$. Если все числа a_i $(i = 1, \ldots, k + 1)$ равны единице, то лемма, очевидно, верна. Рассмотрим случай когда среди a_i есть отличное от единицы число. Тогда из них можно выбрать два числа, одно из которых меньше единицы, а другое больше. Без ограничения общности можно считать, что это a_k и a_{k+1} соответственно. Тогда выполнено неравенство $(1 - a_k)(a_{k+1} - 1) > 0$, или, раскрывая скобки,

$$a_k + a_{k+1} - a_k a_{k+1} > 1. \qquad (*)$$

Теперь применим лемму Коши для k чисел (которая верна по предположению) к числам

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ \ldots,\ b_{k-1} = a_{k-1},\ b_k = a_k a_{k+1}$$

(их произведение равно $b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k = a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k a_{k+1} = 1$, поэтому условие леммы выполнено).

Имеем:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k a_{k+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1} + b_k \geqslant k. \qquad (**)$$

Складывая неравенства $(*)$ и $(**)$, получаем, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} > k + 1,$$

а это и есть лемма Коши для $k + 1$ числа.

□

(2) Опираясь на доказанную лемму, легко доказать неравенство Коши:

Рассмотрим произвольные неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если хотя бы одно из них равно нулю, то доказываемое неравенство очевидно. В противном случае определим числа $b_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \ldots, b_n = \dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$. Нетрудно видеть, что $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$, поэтому к ним применима лемма Коши: $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant n$. Отсюда $\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant n$.

Домножая на $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, получаем неравенство Коши.

■

2) Итак, мы доказали неравенство Коши двумя способами. Заметим, что существует еще много разных доказательств. С некоторыми из них мы уже познакомились на кружке. О других речь пойдет позднее.

3) Из неравенства Коши легко получить следующие полезные следствия:

Следствие 1.

> *Сумма n неотрицательных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ с постоянным произведением принимает наименьшее значение, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Следствие 2.

> *Произведение n неотрицательных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ с постоянной суммой принимает наибольшее значение, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*