

11 класс

1. У Рапунцель волосы растут вдвое быстрее, чем она сама, а у Алисы, которая растет со скоростью волос Рапунцель, – в полтора раза быстрее, чем растет Алиса. Сейчас у Алисы и Рапунцель одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? *Ответ обоснуйте.*

2. Пусть $\{a_n\}$ возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_3 = 13$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}.$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите все пары простых чисел (p, q) , при которых уравнение

$$x^4 + (q - 2)x = p - 4$$

имеет хотя бы один целый корень.

4. В стране 2014 городов, причём любые два из них соединены ровно одной односторонней авиалинией. Известно, что из каждого города можно вылететь хотя бы в один из остальных городов страны. Назовём город *центральным*, если до него можно долететь из любого другого, сделав не более одной пересадки. Найдите максимальное k такое, что, независимо от направления авиалиний, хотя бы k городов будут центральными. *Ответ обоснуйте.*

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E . На стороне AD выбрана точка P такая, что $PE = EC$. Описанная окружность треугольника BCD пересекает отрезок AD в точке Q . Окружность, проходящая через точку A и касающаяся прямой EP в точке P , пересекает отрезок AC в точке R . Оказалось, что точки B, Q, R лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle BCD = 90^\circ$.