Задача № 3

Условие: Подъемник поднимается и опускается в шахте, глубина которой $L = 400$ м, за $t_0 = 40$ с. Сначала он разгоняется с постоянным ускорением, а затем с тем же по модулю ускорением замедляется. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы подъемника по сравнению с неподвижными часами? Подъемник находится в движении в течение $T = 5{,}0$ ч ежедневно.

Решение: Рассмотрим движение подъемника в шахте. Считаем, что в течение одного цикла разгона-остановки он движется ускоренно ровно половину пути (соответственно, половину времени), а остальную половину движется замедленно. Найдем его ускорение a при таком движении. Подъемник проходит путь $L/2$ за время $t_0/4$, при этом его начальная или конечная скорость равна нулю. По формуле равноускоренного движения

$$\frac{L}{2} = \frac{a\left(\dfrac{t_0}{4}\right)^2}{2},$$

откуда

$$a = \frac{16L}{t_0^2}.$$

В отсутствие перегрузок период колебаний маятника $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Чтобы показать правильное время, за время t_0 маятник должен совершить $n_0 = t_0/T_0$ колебаний. При движении лифта с ускорением удобно перейти в неинерциальную систему отсчета, т.е. произвести замену $g \to g \pm a$. Соответственно, периоды колебаний маятника при двух направлениях ускорения равны

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = T_0\left(1+\frac{a}{g}\right)^{-1/2} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} = T_0\left(1-\frac{a}{g}\right)^{-1/2}.$$

Тогда количество колебаний, совершенных маятником за эти промежутки времени, равны соответственно

$$n_1 = \frac{t_0}{2T_1} = \frac{n_0}{2}\sqrt{1+\frac{a}{g}} \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{t_0}{2T_2} = \frac{n_0}{2}\sqrt{1-\frac{a}{g}}.$$

Найдем отставание ΔT часов за один день. Относительное отставание (отношение абсолютного отставания к промежутку времени, измеренному неподвижным наблюдателем) равно

$$\eta = \frac{n_0 - n_1 - n_2}{n_0} = 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{a}{g}} + \sqrt{1-\frac{a}{g}}\right).$$

Тогда отставание часов в течение одного дня (считаем, что за день произошло целое количество циклов разгона-остановки)

$$\Delta T = \eta T = T\left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{16L}{gt_0^2}} + \sqrt{1-\frac{16L}{gt_0^2}}\,\right]\right).$$

Проверим размерность:

$$[\Delta T] = \text{с}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{с}^2}} + \sqrt{1-\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{с}^2}}\right]\right) = \text{с}.$$

Найдем численное значение:

$$\{\Delta T\} = 5\cdot 3600\left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{16\cdot 400}{9{,}8\cdot 40^2}} + \sqrt{1+\frac{16\cdot 400}{9{,}8\cdot 40^2}}\,\right]\right) = 396; \qquad \Delta T = 396\,\text{с}.$$

Ответ: $\Delta T = T\left(1 - \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\dfrac{16L}{gt_0^2}} + \sqrt{1-\dfrac{16L}{gt_0^2}}\,\right]\right) = 396\,\text{с}.$