

Серия 3. Простенькая

1. Последовательность x_1, x_2, x_3, \dots , задана формулой $x_n = 2^n(n+1)$. Какое наибольшее количество подряд идущих ее членов могут быть точными квадратами?
2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O , причем $BC = AO$. Точка F такова, что $CF \perp CD$ и $CF = BO$. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.
3. Дано натуральное число n и простое $p < 2005$. Докажите, что

$$n(n+1)(2n+1)(3n+1)\dots(2002n+1) : p.$$

4. “Ладья-коротышка” — это фигура, которая ходит как обычная ладья, но только на 1 или 2 клетки. Какое максимальное количество не бьющих друг друга “ладей-коротышек” можно поставить на доске 8×8 ?
5. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $|P(3)| = |P(7)| = 1$. Докажите, что $P(x)$ не имеет целых корней.
6. Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите, что $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leq \frac{1}{a^3} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \sqrt{\frac{a}{b}}$.
7. На сторонах AB, BC и CA данного треугольника ABC выбираются такие точки P, Q и R , что $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel BC$. Найдите геометрическое место середин отрезков QR .

Серия 3. Простенькая

8. Последовательность x_1, x_2, x_3, \dots , задана формулой $x_n = 2^n(n+1)$. Какое наибольшее количество подряд идущих ее членов могут быть точными квадратами?
9. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O , причем $BC = AO$. Точка F такова, что $CF \perp CD$ и $CF = BO$. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.
10. Дано натуральное число n и простое $p < 2005$. Докажите, что

$$n(n+1)(2n+1)(3n+1)\dots(2002n+1) : p.$$

11. “Ладья-коротышка” — это фигура, которая ходит как обычная ладья, но только на 1 или 2 клетки. Какое максимальное количество не бьющих друг друга “ладей-коротышек” можно поставить на доске 8×8 ?
12. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $|P(3)| = |P(7)| = 1$. Докажите, что $P(x)$ не имеет целых корней.
13. Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите, что $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leq \frac{1}{a^3} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \sqrt{\frac{a}{b}}$.
14. На сторонах AB, BC и CA данного треугольника ABC выбираются такие точки P, Q и R , что $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel BC$. Найдите геометрическое место середин отрезков QR .