Задача №5

9, 11 клас

Випадок І. Нехай центр лінзи знаходиться у певній точці на лінії, яка проходить через точки А, В, С. Взагалі можливі наступні розташування лінзи, джерела та його зображень (див. Рис. 1). Нехай промінь від джерела світла потрапляє у точку *К* першої лінзи. Після заломлення у ній промінь КА дає зображення А. Якщо розмістити щільно з цією лінзою другу, то за умовою задачі зображення джерела буде у точці С (промінь КС). Знайдемо побудовою фокальну площину другої лінзи. Скористаємось властивістю зворотності променів. Джерелом у цьому випадку буде світна точка А, а її зображення є точка С. Перетин променя КС з побічною оптичною віссю, яка паралельна до променя АК буде у фокальній площині другої лінзи (F_2). Проведемо симетричну фокальну площину ($-F_2$). Забираємо першу лінзу і отримаємо зображення джерела світла від другої лінзи в точці *B*. Знову використаємо правило зворотності ходу променів з точки *B* в точку *К* (промінь ВК). Після заломлення він перетинається з побічною оптичною віссю у цій фокальній площині у точці Е. Перетин променя *EK* до вісі АВС дає питоме положення джерела. Див. рисунки 1 і 2.

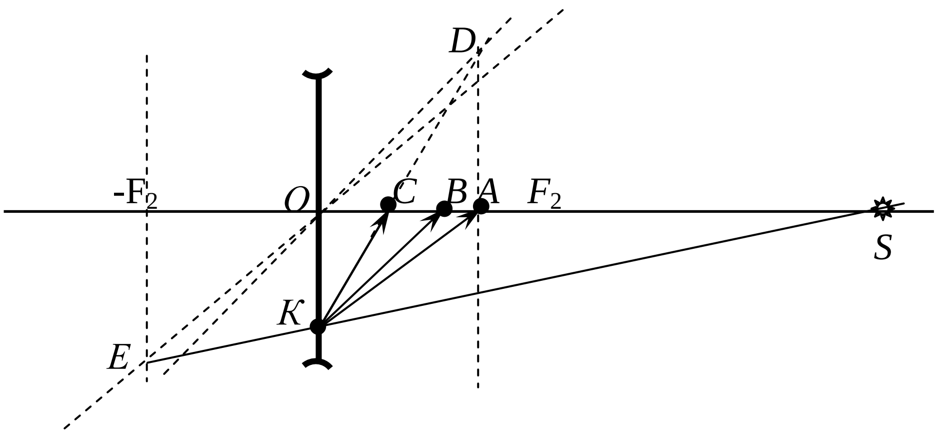
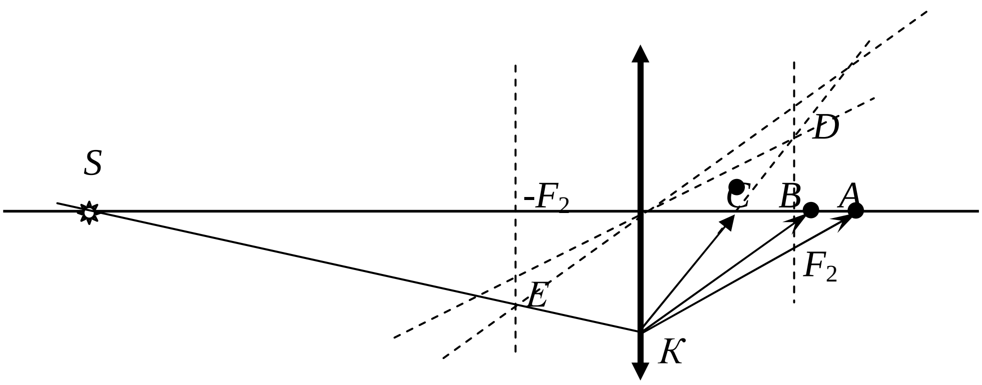


Рис. 1. Утворення зображень у випадку двох розсіювальних лінз.

Рис. 2 Демонструє випадок утворення дійсних зображень джерел світла.



Речь идет о задаче № 1 в 11 классе и задаче № 5 в 9 классе.

В приведенном решении (не знаю, авторском или жюри) все начинается с того, что мы где-то ставим линзу и от нее начинаем построения. Но положение линзы не задано! Надо бы еще доказать, что от перемещения линзы результат построения не изменится. Этот вопрос даже не обсуждается!

А доказать это просто невозможно: если не задать положение линзы, задача имеет бесчисленное множество решений (т.е. попросту не имеет смысла).

Рассмотрим даже упрощенную задачу: пусть заданная прямая совпадает с главной оптической осью, а про линзы известно, что они собирающие. Пусть S — источник, O — оптический центр линзы. Пусть точки расположены в порядке $S-O-C-B-A$. Обозначим $SO=d$, $OC=f$, $CB=a$, $BA=b$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f+a+b}=D_1, \\ \dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f+a}=D_2, \\ \dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=D_1+D_2. \end{cases}$$

Исключая оптические силы, получаем одно уравнение с двумя неизвестными: $\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{f+a+b}-\dfrac{1}{f+a}$. Иначе: $d=\dfrac{f(f+a+b)(f+a)}{a(a+b)-f^2}$.

Очевидно, изменяя f, мы получаем различные значения d, причем сумма этих величин никак не получается постоянной, т.е. функцией от a, b. Например, задав $f_0=\sqrt{a(a+b)}$, мы получим $d\to\infty$ (т.е. при любом соотношении заданных отрезков годится бесконечно удаленный источник, дающий пучок параллельных лучей). От заданных значений a, b при этом зависят только оптические силы линз:

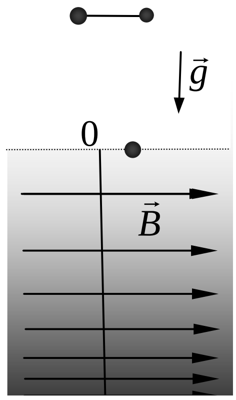
$$D_1=\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}+a+b},\ D_2=\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}+a}.$$

При изменении f от нуля до f_0 значение d изменяется от нуля до бесконечности…

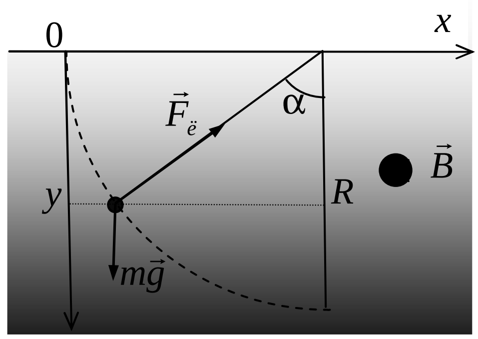
Подойдем иначе. Пусть мы ***хотим*** поставить источник на расстоянии L перед точкой C. Получится ли это? Другими словами, найдется ли корень в промежутке $[0;L]$ у уравнения $\dfrac{1}{L-f}+\dfrac{1}{f+a+b}+\dfrac{1}{f+a}=\dfrac{1}{f}$? При $f\to 0$ правая часть стремится к бесконечности, а левая — конечна; при $f\to L$ получается как раз наоборот. Таким образом, корень существует при любом L и источник можно поставить где угодно!

<u>Задача кажется более чем странной. Неужели никто из детей этого не заметил? Или их рассуждения не оценили?</u>

Задача № 2



Магнітне поле, лінії якого паралельні і горизонтальні, обмежене зверху горизонтальною площиною. З границі поля відпускають заряджену частинку. Виявилось, що вона рухається вздовж кола радіуса *R*. Знайдіть залежність магнітної індукції *B* від координати *y* (позначення див. на рис.). Якими будуть максимальна швидкість і прискорення двох таких частинок, з'єднаних легкою нерозтяжною ниткою, якщо їх одночасно відпустити з висоти $h = 6R$ над границею поля. Вважати, що залежність *B*(*y*) виконується у магнітному полі на всіх висотах руху частинок. Опором повітря знехтувати.



Розв'язок. Сила кулонівського відштовхування між зарядженими частинками компенсується силою натягу нитки і, оскільки частинки відпускають одночасно з однакової висоти, нитка протягом руху буде горизонтальною і не вплине на синхронний рух частинок. Отже далі будемо розглядати рух однієї частинки. Для зручності візуалізації припустимо, що лінії магнітної індукції напрямлені від нас перпендикулярно до площини рисунку, а частинка має додатній заряд. Спроектуємо другий закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_ё + m\vec{g}$ на радіальний напрямок і скористаємось законом збереження енергії (сила Лоренца роботи не здійснює):

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = qvB - mg\cos\alpha, \\ \dfrac{mv^2}{2} = mgy. \end{cases}$$

Враховуючи, що $\cos\alpha = y/R$, виключаємо із системи кут і швидкість і знаходимо залежність магнітної індукції від координати:

$$B(y) = k\sqrt{y},$$

де $k = \dfrac{3m}{qR}\sqrt{\dfrac{g}{2}}$. Якщо тепер частинку відпустити з висоти *h* над границею поля, її рух у магнітному полі вже не буде відбуватися по колу (у цьому можна переконатися з аналогічної системи рівнянь, припустивши, що рух все ж таки відбувається по колу іншого радіусу). Отже радіус кривизни траєкторії у першому рівнянні системи змінюється і тому замість цього рівняння використаємо проекцію другого закону Ньютона на горизонтальний напрямок осі абсцис, на який проекція сили тяжіння дорівнює нулю:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = qv_y B(y) = kq\dfrac{dy}{dt}\sqrt{y}, \\ \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{2} = mg(y+h). \end{cases}$$

Перше рівняння системи після скорочення на dt легко інтегрується:

$$v_x - v_{0x} = \frac{2}{3}\frac{kq}{m}y^{3/2},$$

де $v_{0x} = 0$ ì /ñ – горизонтальна швидкість входу частинки у зону поля ($y = 0$). Із другого рівняння системи (закону збереження енергії), по-перше, виходить, що максимальна швидкість буде у найнижчій точці траєкторії, де максимального значення набуває координата y (отже $v_y = 0$), а, по-друге, що

$$v_y^2 = 2g(y+h) - v_x^2 = 2g(y+h) - \frac{2g}{R^2} y^3.$$

Максимальне y знайдемо, застосувавши умову $v_y = 0$ до останнього рівняння. Після введення безрозмірної координати $\xi = y/R$ і врахування $h = 6R$ отримуємо наступне кубічне рівняння:

$$\xi^3 - \xi - 6 = 0.$$

Рівняння має єдиний дійсний розв'язок $\xi = 2$. Отже $y = \xi R = 2R$. Тоді максимальна швидкість

$$v_{\max} = \sqrt{2g(y+h)} = 4\sqrt{gR}.$$

Щоб переконатися, що найбільше прискорення буде саме у цей момент часу проходження частинкою найнижчого положення, запишемо обидві проекції другого закону Ньютона на кординатні осі:

$$\begin{cases} ma_x = qv_y B(y), \\ ma_y = -qv_x B(y) + mg \end{cases}$$

і запишемо квадрат прискорення:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \frac{q^2}{m^2} B^2(y) v^2 - 2\frac{q}{m} v_x B(y) + g^2 = g^2 + 3\frac{g^2}{R^2}\left(y^2 + 3hy\right).$$

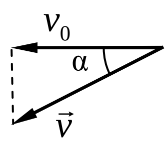
Для додатних y маємо монотонно зростаючу функцію. Підставимо $h = 6R$, $y = 2R$ і отримаємо $a_{\max} = 11g$. З проекції другого закону Ньютона на вертикальну вісь отримуємо теж саме $a_y = -\frac{q}{m} v_x B(y) + g = -11g$. Знак «–» вказує не те, що прискорення спрямоване вгору.

Заряджені частинки будуть рухатись поряд. Після пірнання у магнітне поле винирнуть і знову злетять вертикально вгору до висоти $h = 6R$ і так далі. Такі властивості земного магнітного поля – відбивати заряджені частинки, вже сотні мільйонів років служать земній біосфері. На цьому шляху лежать ідеї використання магнітів у прискорювачах і майбутніх термоядерних реакторах.

Задача № 3

З мосту над річкою горизонтально кидають кульку у напрямку проти течії. Початкова висота кульки над рівнем води 5 м, початкова швидкість 10 м/с. Побудуйте графік залежності модуля швидкості кульки від кута α між цією швидкістю та горизонтом. Знайдіть модуль швидкості кульки, коли швидкість напрямлено вертикально. Опором *повітря* знехтуйте. Вважайте, що швидкість річки усюди однакова і дорівнює 2 м/с. Густина матеріалу кульки дорівнює густині води, $g = 10$ м/с^2.

<u>Розв'язок.</u> Оскільки опором повітря нехтуємо, рухатись вертикально вниз кулька буде вже під водою. Розглянемо спочатку перший етап руху кульки – рух у повітрі. Горизонтальна складова швидкості $v_x = v_0 = 10$ м/с не змінюється, вертикальна v_y (вісь ординат спрямуємо вниз) зростає. Швидкість $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ збільшується, утворюючи з горизонтом кут α, який знаходимо із співвідношення $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v}$. Перед моментом входження у воду кулька набула швидкості $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 10\sqrt{2}$ м/с, яку можна знайти із закону збереження енергії. Кут з горизонтом у момент входження у воду $\alpha_1 = 45^\circ$. Отже, на першому етапі руху $\alpha \in [0;45^\circ)$ графік залежності швидкості від кута задає вираз

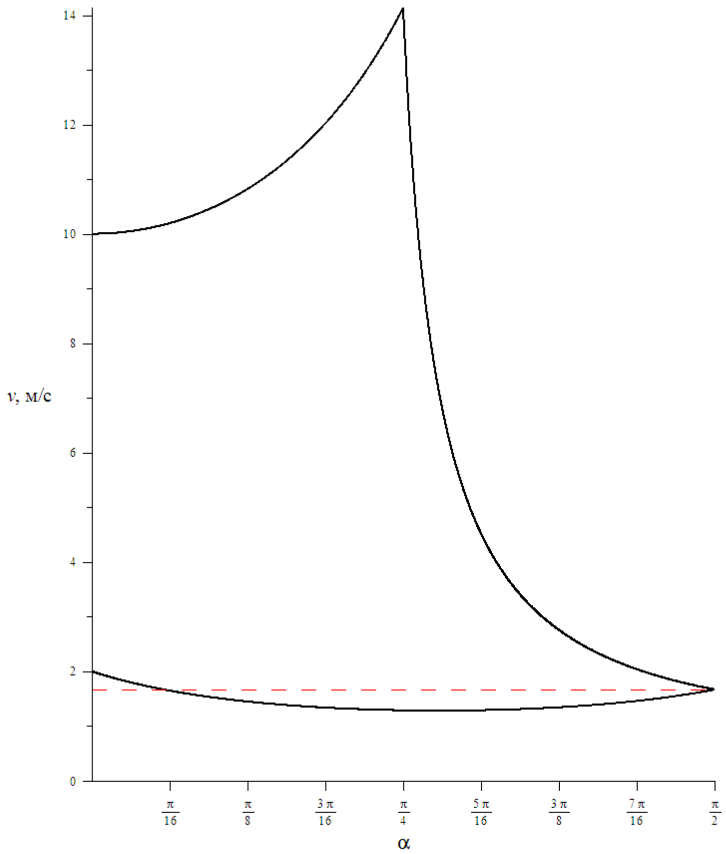


$$v = \frac{v_0}{\cos\alpha}. \tag{1}$$

Далі тіло влітає у воду. Відзначимо, що за умовою задачі під водою сили тяжіння і Архімеда повністю компенсують одна одну. Перейдемо у систему відліку «вода» (швидкість течії позначимо $\vec{u}$). Відносно води швидкість кульки $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, її проекції $(v_x + u,\ v_y)$. Очевидно, сила опору води напрямлена протилежно $\vec{w}$. Тому прискорення кульки та зміна її швидкості за будь-який час напрямлені теж протилежно $\vec{w}$. Траєкторія руху кульки в системі відліку «вода» є прямолінійною. Отже, за *малий* проміжок часу $\frac{\Delta w_x}{w_x} = \frac{\Delta w_y}{w_y}$. Звідси випливає, що за *будь-який* проміжок часу проекції w_x, w_y змінюються в однакову кількість разів: $v_x + u = k(v_0 + u)$, $v_y = kv_0$. Тут k поступово зменшується від 1 до 0. Коли швидкість $\vec{V}$ напрямлена вертикально, $k = \frac{u}{v_0 + u}$, при цьому $v_y = \frac{uv_0}{u + v_0} = \frac{5}{3}$ (м/с).

Для побудови графіка виразимо через кут α (врахувавши, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$) коефіцієнт k і модуль швидкості. Підставивши числові значення швидкостей у м/с, отримаємо $v = \frac{10}{6\sin\alpha - 5\cos\alpha}$. Мінімальне значення швидкості відповідає максимальному значенню виразу $f(\alpha) = 6\sin\alpha - 5\cos\alpha$, яке досягається при $\alpha_0 \approx 130^\circ$. Мінімальне значення швидкості дорівнює 1,28 м/с. Ці результати можна отримати, наприклад, дослідивши $f(\alpha)$ за допомогою похідної або перетворивши $f(\alpha)$ у форму $f(\alpha) = \sqrt{61}\cos(\alpha - 130^\circ)$.

Будуємо графік згідно формули $v = \frac{10}{\cos\alpha}$ для інтервалу $\alpha \in [0;45^\circ)$ і згідно формули $v = \frac{10}{6\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ для інтервалу $(45^\circ;180^\circ)$, потім праву частину другого графіку дзеркально відбиваємо відносно $\alpha = 90^\circ$ (кут α на інтервалі $\left(90^\circ;180^\circ\right)$ не може вважатися кутом між вектором швидкості та площиною горизонту).



Зазначимо, що графік $v(\alpha)$ може бути побудований, незважаючи на невідому залежність сили опору води від швидкості. Кожна точка на графіку відповідає конкретному значенню швидкості та куту, хоч ми й не можемо сказати (для руху у воді), в який саме момент часу це відбулося. Графік слід проходити за годинниковою стрілкою, починаючи зі швидкості 10 м/с.

Зазначимо також, що ми знехтували явищами, які відбувалися у процесі входу кульки у воду. І це не тільки можлива не горизонтальність поверхні за рахунок хвиль, але й те що сила опору протягом невеликого проміжку часу входження кульки у воду матиме напрямок дещо відмінний від протилежного до відносної швидкості кульки і води.

Розв'язок задачі № 4
11 клас

Розглянемо сферу радіуса R, всередині якої знаходяться галактики. Маса такої сфери дорівнює її об'єму, помноженому на шукану космічну густину маси ρ:

$$M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}. \qquad (1)$$

Потенціальна енергія будь-якої типової галактики на поверхні даної сфери

$$E_p = -\frac{m\,MG}{R} = -\frac{4\pi m R^2 \rho G}{3}, \qquad (2)$$

де m – маса галактики; G – гравітаційна стала, $G = 6{,}67\cdot 10^{-8}\,см^3/(г\cdot c^2)$. Швидкість даної галактики визначається законом Хаббла у вигляді

$$V = HR, \qquad (3)$$

де H – параметр Хаббла. Відповідно, кінетична енергія галактики дорівнює

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m(H(t))^2 (R(t)^2)}{2}. \qquad (4)$$

Повна енергія галактики є сумою кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = E_p + E_{\cdot k} = m(R(t))^2\left(\frac{1}{2}(H(t))^2 - \frac{4}{3}\pi\rho(t)G\right). \qquad (5)$$

Ця величина повинна залишатися сталою в процесі еволюції Всесвіту.

Якщо повна енергія E від'ємна, то галактика ніколи не зможе відлетіти на нескінченність, оскільки на дуже великих відстанях потенціальна енергія стає малою, і в такому випадку повна енергія дорівнює кінетичній, яка завжди додатня. Якщо ж повна енергія E додатня, галактика може досягнути нескінченності, маючи залишкову кінетичну енергію. Таким чином, умова того, що галактика ніколи не покине поверхню сфери, на якій знаходиться зараз,– це умова $E = 0$, що дає

$$\frac{1}{2}(H(t))^2 = \frac{4}{3}\pi\rho(t)\,G.$$

Таким чином, для того щоб радіус Всесвіту не змінювався з часом, густина повинна мати значення

$$\rho(t) = \frac{3(H(t))^2}{8\pi G}. \qquad (6)$$

Враховуючи, що H дорівнює в даний момент значенню 15 км/с на мільйон світлових років, а світловий рік відповідає $9{,}46\cdot 10^{12}$ кілометрів отримуємо що в даий момент густина матерії Всесвіту повинна бути рівною

$$\rho_{кр} = \frac{3}{8\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-8}\,см^3/(г\cdot c^2)}\left(\frac{15 км/с}{10^6\cdot 9{,}46\cdot 10^{12}\,км}\right)^2 = 4{,}5\cdot 10^{-30}\,г/см^3. \qquad (7)$$

Це і є шукане сучасне значення критичної густини. Якщо значення густини у Всесвіті є більшим, ніж критичне, то розширення Всесвіту зміниться стисненням (радіус Всесвіту почне зменшуватись) і навпаки, якщо значення густини виявиться меншим, ніж критичне, то це буде означати, що Всесвіт буде розширбватись вічно. Зауважимо, що хоча даний результат отриманий із використанням принципів ньютонівської фізики, він насправді справедливий навіть тоді, коли вся матерія Всесвіту є ультрарелятивістською)

Якщо в одному грамі матерії міститься $6{,}02 \cdot 10^{23}$ ядерних частинок, то тоді для знайденого значення теперішньої критичної густини маємо приблизно $2{,}7 \cdot 10^{-6}$ ядерних частинок в 1 см^3.

Характерний час розширення Всесвіту знаходимо, враховуючи що $H = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt}$, і $R \sim t^n$, тобто час розширення (вік Всесвіту) є обернено пропорційним до значення параметру Хаббла в цей момент часу, тобто

$$t_{розш}(t) = \frac{n}{H(t)} = n\sqrt{\frac{3}{8\pi\rho(t)G}}. \qquad (8)$$

Тоді, використовуючи сучасне значення параметру Хабла знаходимо нинішній вік Всесвіту

$$t_{розш} = 1.86 \quad 10^{10}\ років$$

В момент часу, коли густина маси Всесвіту дорівнювала 3 тисяч мільйонів грам на кубічний сантиметр, вік Всесвіту тоді дорівнював (при n=2/3)

$$t_{розш} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8\pi \cdot 3{,}8 \cdot 10^{9}(г/см^3) \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} см^3/(г{\cdot}с^2)}} = 0{,}0147 с.$$

Задача №5

11 клас

У вертикально розміщеній, відкритій з одного кінця в атмосферу трубці легенький теплонепроникний поршень відділяє водень від рідини, налитої поверх поршня (рис. 3). Водень повільно нагрівають, і поршень повільно переміщується. До моменту, коли поршень перемістився настільки, що вся рідина з трубки вилилася, водень одержав кількість теплоти Q=100 Дж. Визначити об'єм водню в початковому стані, якщо відомо, що він удвічі більший, ніж об'єм рідини, який, у свою чергу, дорівнює об'єму атмосферного повітря в трубці. Атмосферний тиск $P_0=10^5$Па. Додатковий тиск, створений стовпом рідини, спочатку налитої в трубку, дорівнює $P_0/9$. Тертям поршня об трубку знехтувати.

Рис. 1

Розвязок. Нехай початковий об'єм водню дорівнює V_0. Графік залежності тиску P водню від його об'єму V показано на Рис. 2

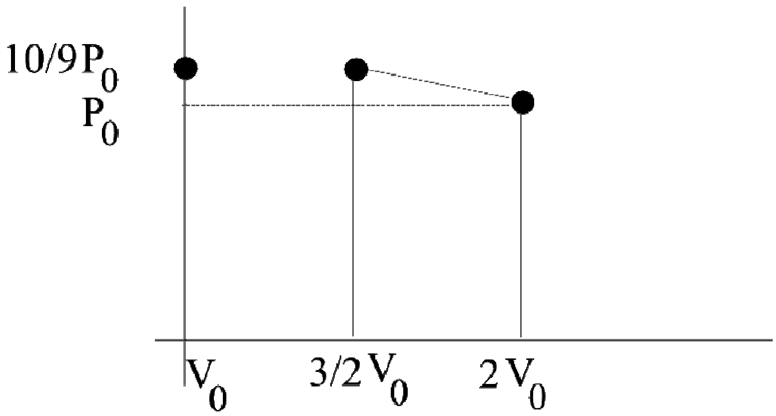


Рис. 2

Для всього процесу 1-2-3 за законом збереження енергії

$$Q = \nu C_V (T_3 - T_1) + A_{1-2-3}$$

тут ν - число молей газу, $C_V = 5/2R$, T_3, T_1 - температури газу в кінці і на початку розширення, $A_{1-2-3} = \frac{13}{12} P_0 V_0$ - робота газу, яка дорівнює площі під графіком залежності $P(V)$. Скориставшись рівнянням стану знаходимо

$$\nu R T_3 = 2 P_0 V_0, \ \ \nu R T_1 = \frac{10}{9} P_0 V_0$$

З урахуванням записаних рівностей Q дорівнює

$$Q = \frac{119}{36} P_0 V_0$$

звідки $V_0 = \frac{39}{119} \frac{Q}{P_0} \approx 303 \ см^3$.

<u>Зауваження:</u> Можна показати, що теплоту (при заданих в умові параметрах задачі) необхідно неперервно підводити під час всього процесу.