Задача 1. 9 клас

1. Нехай товщина крижини — H, і вона виступає над водою на висоту x (без додаткової маси). Умова плавання (S - площа крижини):

$$\rho_{льоду} gHS = \rho_{води} g(H-x)S,$$

звідки

$$\frac{\rho_{льоду}}{\rho_{води}} = 1 - \frac{x}{H}, \quad \frac{x}{H} = 1 - \frac{\rho_{льоду}}{\rho_{води}} = 0,1, \quad x = \frac{H}{10}.$$

З іншого боку,

$$\rho_{льоду} gxS = Mg,$$

звідки маса крижини

$$M_{льоду} = \rho_{льоду} SH = 10M.$$

2. Умова плавання крижини з масою m посередині (h – додаткова зміна висота, обумовлена масою m):

$$\rho_{води} ghS = gm,$$

звідки

$$h = \frac{m}{\rho_{води} S}.$$

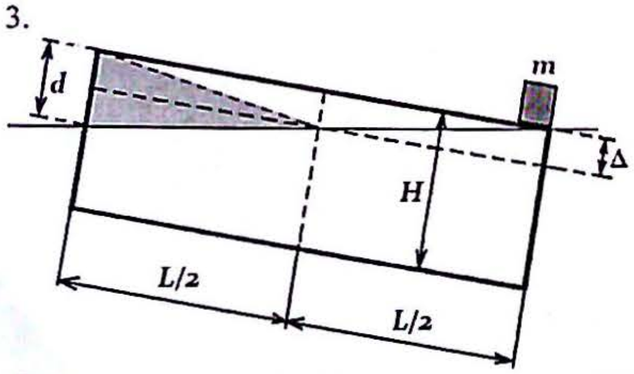
Якщо $m = M$, то $h = x$, звідки

$$h = \frac{m}{M} x = \frac{m}{M} \frac{H}{10}.$$

У цьому випадку висота поверхні крижини над водою буде $\Delta = x - h$, тобто

$$\Delta = \frac{H}{10}\left(1 - \frac{m}{M}\right).$$

3.



Якщо маса m розташована на краю крижини, на середині ребра, крижина нахиляється на малий кут (Вважаємо, що H значно менше від інших характерних розмірів крижини). В силу умови $m << M_{льоду}$ вважаємо, що центр мас крижини не змінив свого положення. Тоді момент сили $mgL/2$, створений масою m, повинен урівноважитися моментом, обумовленим вагою заштрихованої (в перерізі) частини крижини. Маса цієї частини буде пропорційною відношенню площі заштрихованого трикутника до площі перерізу крижини:

$$M' = M_{льоду} \frac{\frac{1}{2} d \frac{L}{2}}{HL} = M_{льоду} \frac{d}{4H} = \frac{5}{2} \frac{d}{H} M$$

4. Знайдемо тепер, на якій віддалі від вершини знаходиться центр ваги зображеного трикутника. Центр ваги трикутника — це точка перетину його медіан. Ця точка ділить кожну з медіан у відношенні 2:1. Отже, центр мас заштрихованого трикутника лежить на віддалі

$$\frac{2}{3}\frac{L}{2}=\frac{L}{3}$$

від осі симетрії перерізу крижини.

5. Таким чином, умова рівноваги крижини набуває вигляду:

$$M'g\frac{L}{3}=\frac{5}{6}\frac{dL}{H}M=m\frac{L}{2}.$$

Врахувавши, що $d=2\Delta$, отримуємо:

$$\frac{m}{M}=\frac{5}{3}\frac{d}{H}=\frac{10}{3}\frac{\Delta}{H}=\frac{1}{3}(1-\frac{m}{M}),$$

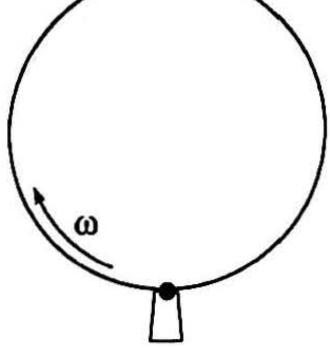
звідки

$$\frac{4}{3}\frac{m}{M}=\frac{1}{3},\ \frac{m}{M}=\frac{1}{4}.$$

Видно, що умова $m<<M_{льоду}$ добре виконується.

9кл №2

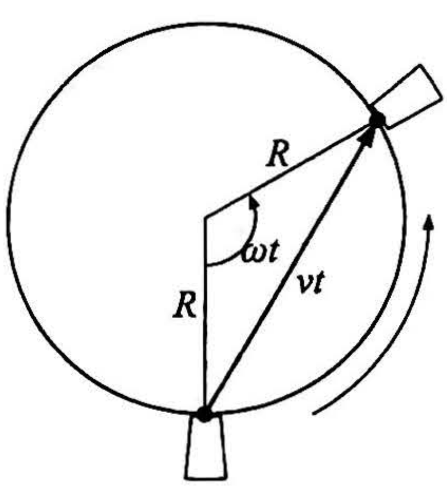
"Найкоротшим шляхом" Атракціон зроблений у вигляді горизонтальної круглої платформи радіусом $R=4$ м, яка обертається з періодом $T=8$ с на деякій висоті над басейном з водою. На платформу є тільки один вхід, яким, у разі потреби, можна скористатися як виходом. Між дітьми виникло змагання – хто найменше часу проведе на платформі, стартувавши від входу і найшвидше туди ж повернувшись. Максимальна швидкість, з якою можна достатньо впевнено пересуватися відносно платформи, не дуже велика і дорівнює $v=2$ м/с.



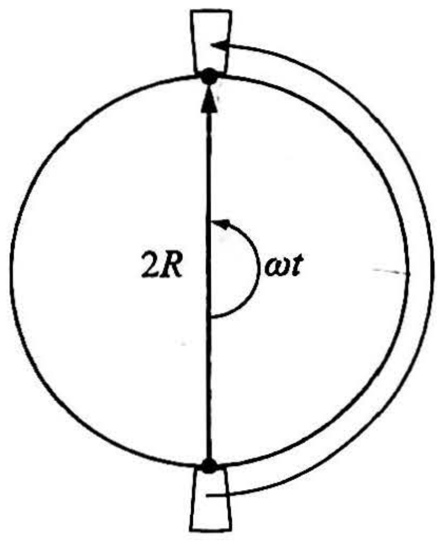
• Знайдіть, найменший час, через який можна повернутися до входу на платформу. • Як при цьому слід рухатись? • Схематично нарисуйте траєкторію руху.

Розв'язок. Щоб зрозуміти, чому не можна відразу повернутися з платформи, знайдемо швидкість її зовнішніх частин: $\omega R=\frac{2\pi R}{T}=\pi\frac{\text{м}}{\text{с}}\approx 3{,}14\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Це в 1,57 разів більше, ніж $v=2$ м/с. Тому намагатися бігти проти руху платформи біля входу – марна справа.

Оскільки швидкість $v=2$ м/с задана відносно платформи, спробуємо розглянути задачу в системі відліку, що обертається разом з платформою. Платформа нерухома, а вхід на неї (разом із басейном) рухається навколо центру у напрямку, протилежному напрямку обертання платформи. Необхідно за найменший час перестріти цей вхід. Найкоротша лінія – це пряма, отже і найшвидшим буде рух по прямій відносно платформи (див. Рис.1). З рівнобедреного трикутника, утвореного хордою, вздовж



якої слід рухатись по поверхні платформи (довжина vt), і двома радіусами, які спираються на дугу повороту місця входу, отримуємо рівняння, що визначає потрібний нам час: $2R\sin\frac{\omega t}{2}=vt$. Для зручності перепишемо це рівняння в SI: $\sin\frac{\pi t}{8}=\frac{t}{4}$ і знайдемо його розв'язок: $t=4$ с. Виявляється, кут $\omega t=\pi$, тобто, переміщатися слід вздовж діаметра (див.Рис.2), про що можна було й здогадатися, оскільки швидкість руху 3,14 м/с вздовж дуги кола у стільки ж разів більша за швидкість 2 м/с, у скільки довжина півкола більша за діаметр.



Укл №2 стр 2

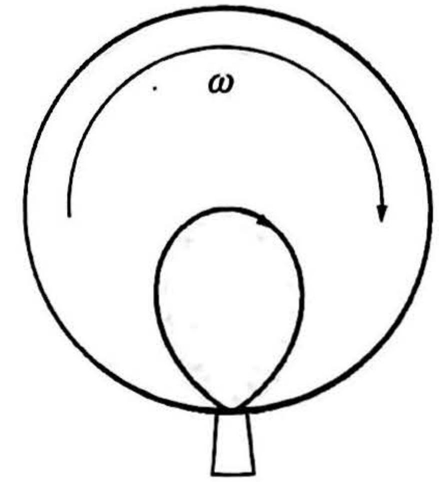
Отже, першу половину часу (2 с) учасник змагання має рухатись у напрямку до центру платформи, а другу половину – продовжувати свій рух, тільки тепер вже від центру.

Оскільки переможець змагання весь час рухався відносно платформи в напрямку до її центру зі сталою швидкістю v, а платформа весь час поверталася разом з ним зі сталою кутовою швидкістю ω, залежності від часу відстані r до центру платформи і кута повороту φ будуть лінійними:

$$\begin{cases} r = R - vt, \\ \varphi = \omega t. \end{cases}$$

Наведена система рівнянь і є рівнянням траєкторії у полярній системі координат для першої половини подорожі. Траєкторія другої половини буде симетричною. Підставляючи t з другого рівняння системи у перше, отримуємо:

$r = R\left(1 - \dfrac{2\varphi}{\pi}\right)$ - частина спіралі Архімеда.



Орлянський О.Ю

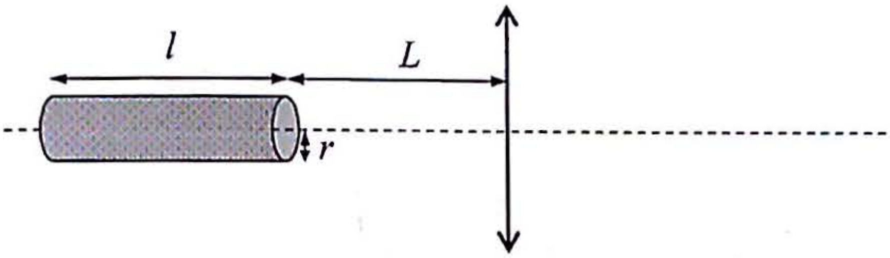
Федоренко А.П

Новосельський М.Н

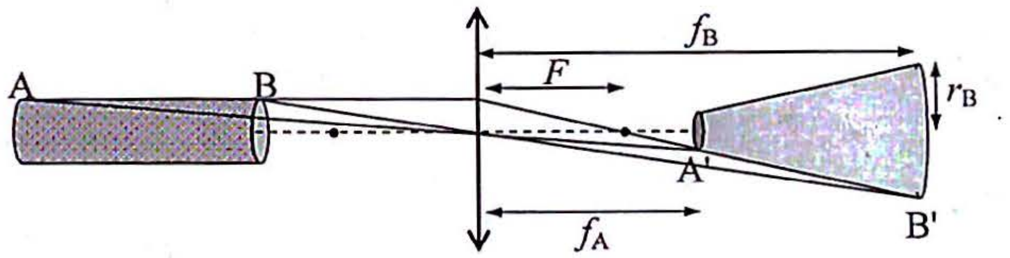
– 9кл. №3

"3D-екран" У цілковитій темряві ззовні блакитним, а всередині жовтим світлом світиться циліндрична трубка. На відстані L = 30 см від трубки розташували збиральну лінзу з фокусною відстанню F = 20 см так, що головна оптична вісь лінзи співпала з віссю симетрії трубки (див. Рис.). Радіус трубки r = 4,5 см, довжина l = 30 см.

Визначте форму екрану для спостереження чіткого зображення всієї трубки і площу зображення на цьому екрані. Яким повинен бути радіус R лінзи, щоб зображення на екрані було і чітким, і максимально освітленим, а кольори не накладалися один на одного? Екран вважати непрозорим.



Розв'язок. • Побудуємо зображення трубки (див. Рис.1). Промінь, зображений паралельним головній оптичній осі, міг би належати і точці А, і точці В, тому зображення А'В' відрізку АВ буде лежати на лінії цього променя після його заломлення у лінзі і проходження фокусу. Виявляється, що у своєму зображенні трубка не тільки деформується, а й наче вивертається. Екран слід зробити у вигляді усіченого конусу, і тоді, його зовнішня частина буде жовтою, а внутрішня – блакитною. Відстані до зображень



точок А і В знаходимо з формули тонкої лінзи. $f = \dfrac{dF}{d-F}$:

$f_A = \dfrac{(l+L)F}{l+L-F} = 30$ см, $\quad f_B = \dfrac{LF}{L-F} = 60$ см. Радіуси основ цього конусу

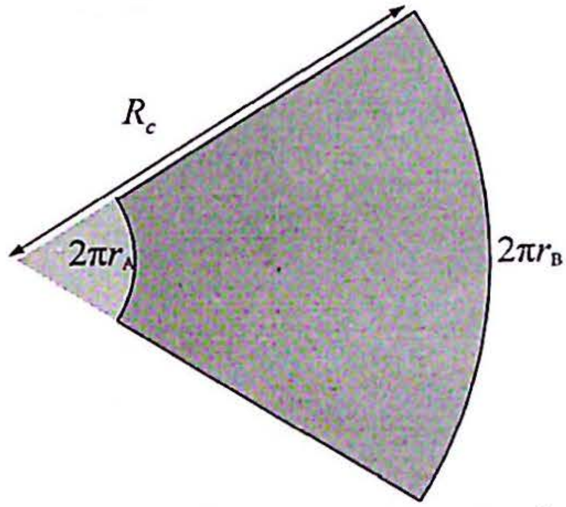
знайдемо з виразу для лінійного збільшення: $\dfrac{r_A}{r} = \dfrac{f_A}{l+L} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{r_B}{r} = \dfrac{f_B}{L} = 2$.

Отже $r_A = \dfrac{Fr}{l+L-F} = \dfrac{1}{2}r$, $r_B = \dfrac{Fr}{.L-F} = 2r$. Викрійка усіченого конусу має вигляд частини кола, а її площа – різниця площ двох подібних секторів (див. Рис.2). Оскільки лінійні розміри секторів відрізняються у 4 рази, їх площі відрізнятимуться у 16 разів.

Отже, площа усіченого конусу, д рівнює 15/16 від площі великого сектору, радіус якого за теоремою Піфагор (див. Рис.1):

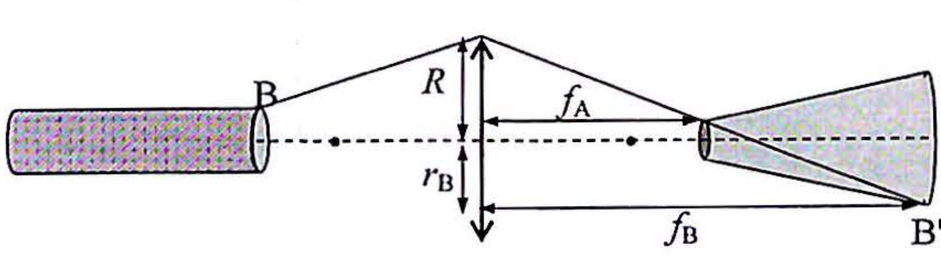
Зкл №3 стр2

$R_c = \sqrt{(f_B - F)^2 + r_B^2} = \dfrac{F}{L-F}\sqrt{r^2 + F^2} = 41$ см. Площа цього сектору менша за площу кола радіуса R_c у стільки разів, у скільки довжина дуги $2\pi r_B$ менша за довжину кола $2\pi R_c$. Тобто, $S = \dfrac{15}{16}\dfrac{r_B}{R_c}\pi R_c^2 = \dfrac{15}{16}\pi\left(\dfrac{F}{L-F}\right)^2 r\sqrt{r^2+F^2}$. Оскільки зображення знаходиться по обидві сторони екрану, його загальна площа дорівнює: $S_{зобр} = 2S = \dfrac{15}{8}\pi\left(\dfrac{F}{L-F}\right)^2 r\sqrt{r^2+F^2} \approx 2200\text{см}^2$.



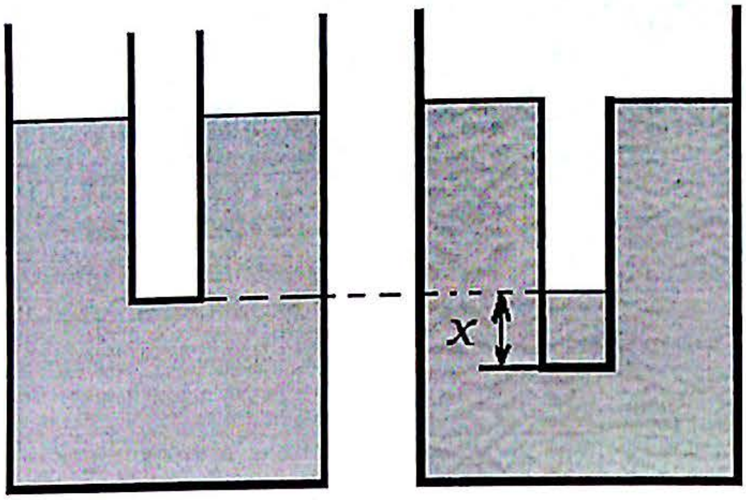
Для збільшення освітленості зображення необхідно просто збільшувати радіус лінзи, доки не почнуть накладуватись кольори. Зазначимо, що коли б лінза була меншою за радіус трубки, ми б взагалі не побачили блакитного кольору на зображенні. При збільшенні радіусу лінзи може виникнути ситуація, коли блакитним променям, які утворюють зображення поблизу B', стане заважати поверхня екрану поблизу A'. Вони освітлять зовнішню жовту поверхню біля вузької частини усіченого конусу, так і не діставшись до місць свого фокусування. Граничний випадок зображений на рисунку 3. Із подібності трикутників знаходимо $\dfrac{R + r_B}{f_B} = \dfrac{R - r_A}{f_A}$ звідки

$R = \dfrac{r_A f_B + r_B f_A}{f_B - f_A} = 3r = 13{,}5$ см.



/Максюк Н.Г./

Укл. №4



1. Розглянемо процеси, накреслимо графік. Очевидно, що $x = h$

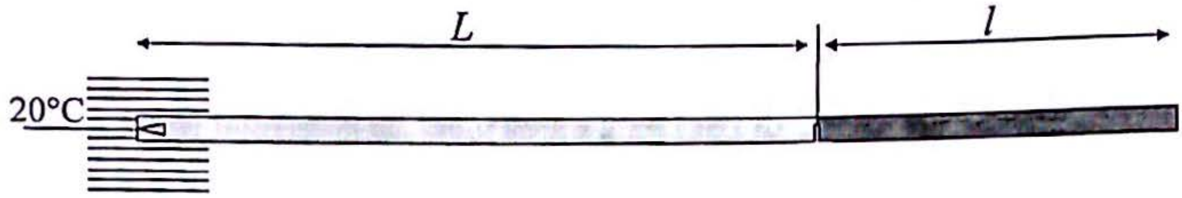
$$A = \frac{1}{2}F_m x = \frac{1}{2}F_m h$$

2. Робота змінної сили
3. Знайдемо h. Умова плавання : $m = \rho S(H-h)$, $M = \rho SH$,

$\rho S = \frac{M}{H}$, $h = \frac{H(M-m)}{M}$

4. Максимальна сила буде тоді, коли вода дійшла до верху пробірки $F_m = Mg - mg$
5. $A = \frac{1}{2}(M-m)g\frac{H(M-m)}{M}$, $A = \frac{1}{2}MgH(1 - m/M)^2$
6. Розв'язок справедливий, коли діаметр посудини з водою значно більший від діаметра пробірки.

"**Металевий термометр**" У шкільній майстерні вирішили виготовити термометр. Для цього взяли алюмінієву та мідну пластини однакової товщини і вирізали з них однакові смужки довжиною $L = 20$ см і шириною $h = 5$ мм. Потім краї смужок частково з'єднали (спеціальним зварюванням) як показано на рис. 1, підвісили на тонесенькій нитці і укоротили мідну смужку до такої довжини l, щоб рівноважне положення термометру при температурі 20°C було горизонтальним (див. Рис.2).

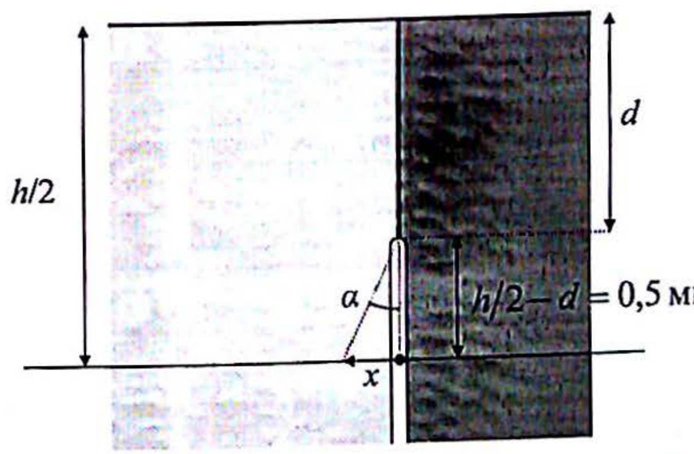


• Знайдіть довжину l мідної смужки. • На яких відстанях необхідно нанести риски на табло біля покажчика на вільному кінці алюмінієвої смужки (див. Рис.2), щоб ціна поділки була 5°C? • Як би Ви вдосконалили цей термометр для збільшення його точності?
Температурні коефіцієнти лінійного розширення алюмінію $\alpha_{Al} = 2{,}3\cdot 10^{-5}$ °C^{-1}, міді $\alpha_{Cu} = 1{,}7\cdot 10^{-5}$ °C^{-1}, густина алюмінію $\rho_{Al} = 2{,}7$ г/см^3, міді $\rho_{Cu} = 8{,}9$ г/см^3, ширина з'єднання смужок $d = 2$ мм (див. Рис.1).

Розв'язок. • З умови статичної рівноваги $m_{Al}\cdot\dfrac{L}{2} = m_{Cu}\cdot\dfrac{l}{2}$ або $\rho_{Al}L^2S = \rho_{Cu}l^2S$,

звідки знаходимо $l = L\sqrt{\dfrac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}}} \approx 11\,\text{см}$.

• Знайдемо, на яку відстань x у горизонтальному напрямку зміститься центр мас всієї конструкції після її нагрівання на $\Delta t = t - 20^\circ\text{C}$ градусів (див. Рис.3). Довжини алюмінієвої та мідної смужок при нагріванні на Δt збільшаться і стануть $L(1+\alpha_{Al}\Delta t)$ і $l(1+\alpha_{Cu}\Delta t)$, відповідно. З умови рівноваги відносно нового центру мас маємо



$$m_{Al}\cdot\left(\frac{L(1+\alpha_{Al}\Delta t)}{2} - x\right) = m_{Cu}\cdot\left(\frac{l(1+\alpha_{Cu}\Delta t)}{2} + x\right),$$ звідки знаходимо, що

$x = \dfrac{lL(\alpha_{Al} - \alpha_{Cu})\Delta t}{2(l+L)} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-5} \Delta t$ см$/{}^\circ C$. Для збільшення температури на 5°С, кут α відхилення центру мас від попереднього напрямку буде дуже малим, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{x}{h/2 - d} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$. На цей кут повернеться вся конструкція (алюмінієвою частиною вниз, мідною вгору), оскільки її центр мас перебуватиме у найнижчому положенні, на одній вертикалі з точкою підвісу. За умовою задачі при зміні температури на 5°С алюмінієва смужка повинна зміститися рівно на одну позначку. З подібного трикутника знаходимо приблизне значення відстані між рисками 20°С і 25°С: $\Delta y \approx 2{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot L = 0{,}42$ мм. Згідно формули для x відстані між подальшими рисками будуть практично такими ж.

Для збільшення точності вимірювань температури найкраще було б закріпити на металевій смужці маленьке дзеркальце, площина якого б нахилялася разом з усією конструкцією, і слідкувати за відбитим від дзеркальця променем світла на віддаленому екрані.

Під час розв'язання задачі ми знехтували зміщенням центру мас у вертикальному напрямку, оскільки воно для реалістичних змін температури є дуже малим і на відповідь задачі не впливає.

О.Ю. Орлянський