**Теоретичний тур, 9-й клас**
**Умова задачі № 1**

В електрочайник потужністю 2 кВт налили літр води. Після того, як вода почала інтенсивно кипіти, чайник автоматично вимикається, але кипіння продовжується ще 15 с, поступово зменшуючи інтенсивність утворення бульбашок пари. Ще через 30 с температура води у чайнику зменшується на 1°С. Вважаючи, що інтенсивність кипіння після вимкнення чайника зменшувалась рівномірно, визначте середню температуру нагрівального елементу чайника у момент вимкнення. Чому дорівнює ККД чайника при температурах води, близьких до 100°С? Запропонуйте формулу залежності ККД чайника від температури води. Маса нагрівального елементу $m = 200$ г, його питома теплоємність $c = 500$ Дж/(кг·°С), питома теплоємність води $c_в = 4200$ Дж/(кг·°С).

**Розв'язання задачі № 1**

Під час нагрівання води у чайнику кількість теплоти, що виділяє нагрівальний елемент, йде на нагрів води і на теплові втрати. Теплові втрати пропорційні різниці температур води $T$ і навколишнього середовища $T_0$. Інші чинники (площа поверхні чайника, місце розташування, наявність протягу, кількість води у чайнику) вважаємо незмінними. Отже, потужність теплових втрат $P_{втрат} = k(T - T_0)$, де $k$ – деякий коефіцієнт пропорційності. Нехай за невеликий проміжок часу $\Delta t$ температура води у чайнику збільшується з $T_1$ до $T_2$. Тоді

$$P\Delta t = c_в m_в (T_2 - T_1) + k(T - T_0)\Delta t, \qquad (1)$$

де $P$ – потужність електрочайника, $T$ – середня температура в проміжку від $T_1$ до $T_2$. Це рівняння теплового балансу, у якому ми знехтували втратами теплоти на нагрів корпусу чайника у порівнянні з нагрівом води, яка має велику теплоємність.

За кипіння температура води залишається сталою $T_{100} = 100^\circ\text{C}$. Вся енергія, що виділяє нагрівальний елемент, йде на випаровування води та на теплові втрати:

$$P = L\frac{\Delta m_в}{\Delta t} + k(T_{100} - T_0). \qquad (2)$$

Тепер дамо відповідь на перше питання задачі. Коли чайник автоматично вимикається кипіння ще продовжується час $t_1 = 15$ с. Цей час енергія на підтримання кипіння та теплові втрати йде з нагрівального елементу, температура якого більша за $T_{100} = 100^\circ\text{C}$. За умовою, кількість води, що випаровувалась в одиницю часу, рівномірно зменшується з початкового значення $\frac{\Delta m_в}{\Delta t}$ до нуля. Отже, візьмемо середнє значення $\frac{1}{2}\frac{\Delta m_в}{\Delta t}$ і запишемо рівняння теплового балансу:

$$cm(T_х - T_{100}) = \frac{1}{2}L\frac{\Delta m_в}{\Delta t}t_1 + k(T_{100} - T_0)t_1, \qquad (3)$$

Нарешті, на етапі охолодження на $\Delta T = T_{100} - T_{99} = 1^\circ\text{C}$ за час $t_2 = 30$ с, різниця температур $T_{100} - T_0$ змінюється на дуже малий відсоток (температура навколишнього середовища $T_0$ значно менша за $T_{100} = 100^\circ\text{C}$), тому вважатимемо потужність теплових втрат сталою. Рівняння теплового балансу під час охолодження:

$$c_в m_в \Delta T + cm\Delta T = k(T_{100} - T_0)t_2. \qquad (4)$$

З рівняння (4) виражаємо коефіцієнт $k$, з рівняння (2) $\frac{\Delta m_в}{\Delta t}$ і підставляємо в рівняння (3):

$$cm(T_н - T_{100}) = \frac{1}{2}Pt_1 + \frac{1}{2}\frac{t_1}{t_2}(c_в m_в + cm)\Delta T, \qquad (5)$$

звідки й знаходимо, що

$$T_н = \frac{Pt_1t_2 + t_1(c_в m_в + cm)\Delta T}{2t_2cm} + T_{100};\ T_н \approx 260\ ^\circ\text{C}. \qquad (6)$$

З рівняння (1) корисна кількість теплоти $c_{\text{в}}m_{\text{в}}(T_2 - T_1)$, а витрачена $P\Delta t$. Отже ККД $\eta = \dfrac{c_в m_в (T_2 - T_1)}{P\Delta t}$ або з урахуванням рівняння теплового балансу:

$$\eta = \frac{P\Delta t - k(T - T_0)\Delta t}{P\Delta t} = 1 - \frac{k}{P}(T - T_0). \qquad (7)$$

Виходить, що зі збільшенням температури, ККД зменшується за рахунок збільшення теплових втрат. Якщо у чайник налити холодну воду, температура якої нижча за температуру навколишнього повітря, ККД згідно формули (1) на початку нагріву може виявитись навіть більшим за одиницю. Це пов'язано з тим, що теплообмін з навколишнім середовищем призведе не до втрати теплоти, а до її «придбання»: разом вода отримає більше джоулів, ніж їй передасть нагрівальний елемент.

Також коефіцієнт $k$ з рівняння (4) підставимо у вираз для ККД при $T_{100} \approx 100^{\circ}\text{C}$:

$$\eta = 1 - \frac{k}{P}(T_{100} - T_0) = 1 - \frac{(c_{\text{в}}m_{\text{в}} + cm)\Delta T}{Pt_2} = \frac{557}{6}\% \approx 93\%.$$

Зазначимо, що даний ККД дещо завищений, оскільки ми не враховували нагрівання самого чайника, а також те, що під час нагрівання, особливо за високих температур, вода, хоча й не кипить, але досить інтенсивно випаровується.

Отже, реальний ККД має бути дещо нижчим за $93\%$.

**Відповідь:**

1. $T_{\text{н}} = \dfrac{Pt_1t_2 + t_1(c_{\text{в}}m_{\text{в}} + cm)\Delta T}{2t_2cm} + T_{100}$; $T_{\text{н}} \approx 260\ ^{\circ}\text{C}$.
2. $\eta = 1 - \dfrac{k}{P}(T_{100} - T_0) = 1 - \dfrac{(c_{\text{в}}m_{\text{в}} + cm)\Delta T}{Pt_2} = \dfrac{557}{6}\% \approx 93\%$
3. $\eta = \dfrac{P\Delta t - k(T - T_0)\Delta t}{P\Delta t} = 1 - \dfrac{k}{P}(T - T_0)$.

Критерии оценивания:

- правильная запись уравнений теплового баланса – 1 балл (по 0,5 за каждое)
- правильное значение температуры нагревателя – 2 балла
- правильная формула зависимости КПД нагревателя от температуры – 1 балл
- правильное значение КПД нагревателя при температуре кипения – 1 балл

**Теоретичний тур, 9-й клас**
**Умова задачі № 2**

Тонка паличка *AB* суміщена із головною оптичною віссю збірної лінзи так, що точка *A* збігається з точкою подвійної фокусної відстані лінзи, а точка *B* знаходиться на відстані *2,5 F* від лінзи. Паличка починає рухатися з швидкістю $\upsilon = const$ в напрямку оптичного центра лінзи. Визначте відношення середніх швидкостей руху зображень точок *A* і *B* за час, протягом якого точка *B* переміститься в точку подвійної фокусної відстані лінзи. Визначте також відношення розмірів зображення до розмірів палички в момент часу, коли точка *B* проходить подвійну фокусну відстань.

**Розв'язання**

За формулою лінзи визначимо відстань від зображення $B_1$ до лінзи (очевидно, що зображення точки A отримаємо у точці подвійної фокусної відстані $2F$ (точка A) справа від лінзи.

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F} \qquad (1)$$

$$f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F}. \qquad (2)$$

$$f_1 = \frac{2,5F \cdot F}{2,5F - F} = \frac{2,5F}{1,5} = \frac{5}{3}F. \qquad (3)$$

Аналогічно розрахуємо положення зображення палички AB (точок A і B) в момент часу, коли точка B кінця палички досягне подвійної фокусної відстані.

Зауважимо, що зображення точки B буде у точці подвійної фокусної відстані (точка $B_2$) справа від лінзи.

Зображення точки A правого кінця палички буде на відстані 3F від осі лінзи. Дійсно,

$$AB = 2,5F - 2F = 0,5F \qquad (4)$$

$$d_2 = 1,5F \qquad (5)$$

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F}; \quad f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F}.$$

$$f_2 = \frac{1,5F \cdot F}{1,5F - F} = \frac{1,5F}{0,5} = 3F. \qquad (6)$$

Час руху палички буде рівний $t = \dfrac{0,5F}{\upsilon}$. (7)

Відстань, яку пройде зображення точки A за цей час $l_{\text{A}} = 3F - 2F = F$ (8),

середня швидкість руху точки A $\upsilon_{\text{A}} = \dfrac{l_{\text{A}}}{t} = \dfrac{F \cdot \upsilon}{0,5F} = 2\upsilon.$ (9)

Відстань пройдена зображенням точки B за цей самий час

$$l_{\text{B}} = 2F - f_1 = 2F - \frac{5}{3}F = \frac{1}{3}F. \qquad (10)$$

Середня швидкість руху зображення точки B упродовж визначеного часу

$$\upsilon_{\text{B}} = \frac{l_{\text{B}}}{t} = \frac{\frac{1}{3}F}{0,5F}\upsilon = \frac{2}{3}\upsilon. \qquad (11)$$

Відношення середніх швидкостей руху зображень точок A і B дорівнює

$$\frac{\upsilon_{\text{A}}}{\upsilon_{\text{B}}} = \frac{2\upsilon}{\frac{2}{3}\upsilon} = 3.$$

Відношення розмірів зображення палички в кінцевий момент часу до розмірів скляної палички

$$\frac{A_2 B_2}{AB} = \frac{F}{0,5F} = 2.$$

**Відповідь:**

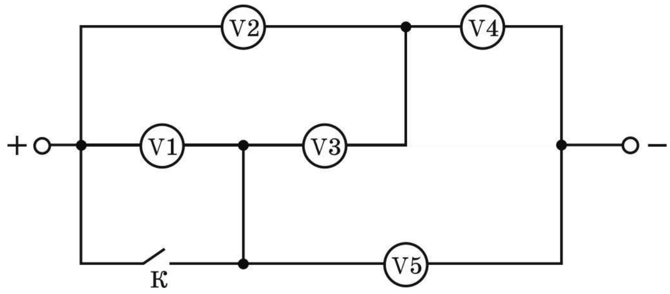
1) $\dfrac{v_{\text{A}}}{v_{\text{B}}} = \dfrac{2v}{\dfrac{2}{3}v} = 3;$ 2) $\dfrac{A_2B_2}{AB} = \dfrac{F}{0,5F} = 2.$

Критерии оценивания:

- правильное использование формулы тонкой линзы – 2 балла
- нахождение средних скоростей точек – 1 балл
- нахождение отношения скоростей – 1 балл
- нахождение отношения размеров изображений – 1 балл

**Теоретичний тур, 9-й клас**
**Умова задачі № 3**

Учень склав із п'яти вольтметрів показане на рисунку коло та приєднав його до джерела постійної напруги. Відомо, що вольтметри V1 і V4 однакові. У таблиці 1 наведені покази деяких вольтметрів залежно від положення ключа К. Визначте, у скільки разів відрізняються опори вольтметрів V1 і V3 від опору вольтметра V2.

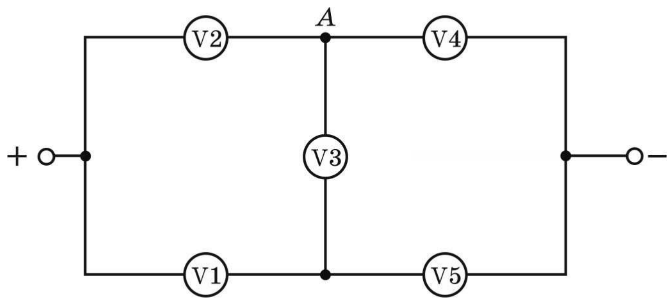



**Таблиця 1**

| **Покази вольтметрів** | **Ключ К розімкнено** | **Ключ К замкнено** |
|---|---|---|
| V1 | 3 В | 0 |
| V2 | 2 В | 1 В |
| V4 | 3 В | 4 В |

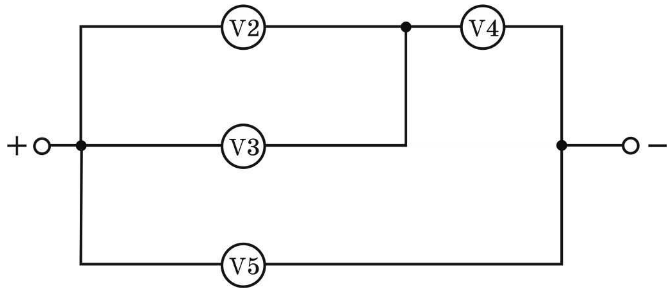
**<u>Розв'язання</u>**

Перш за все зазначимо, що напруга джерела струму є сталою (в обох випадках $U = U_2 + U_4 = 5$ В). Коли ключ розімкнено, маємо незбалансований міст. На рис. 1 наведено його еквівалентну схему.




Із другого правила Кірхгофа отримаємо напругу на вольтметрі V3 ($U_3 = 1$ В). Застосовуючи тепер перше правило Кірхгофа до вузла $A$ кола, отримаємо співвідношення $\frac{U_2}{r_2} = \frac{U_3}{r_3} + \frac{U_4}{r_4}$, звідки отримуємо $r_4 = \frac{3r_2r_3}{2r_3 - r_2}$.

Після замикання ключа еквівалентна схема кола має вигляд, показаний на рис. 1:



Тепер відношення напруг $U_2$ до $U_4$ дорівнює відношенню опору ділянки кола V2 з V3 до опору вольтметра V4: $\frac{1}{4} = \frac{r_2 r_3}{r_4(r_2 + r_3)}$. Підставивши вираз для $r_4$, отримаємо $r_3 = 1,4r_2$. Звідси $r_4 = 7r_2/3$. За умовою, таким самим є й опір вольтметра V1, а саме: $r_1 = r_4 = 7r_2/3$

**<u>Відповідь:</u>** $\frac{r_1}{r_2} = \frac{7}{3}$, $\frac{r_3}{r_2} = \frac{7}{5}$.

Критерии оценивания:

- эквивалентная схема в случае 1 – 0,5 балла
- использование 2-го правила Кирхгофа для нахождения напряжений – 1 балл
- использование 1-го правила Кирхгофа – 1,5 балла
- эквивалентная схема в случае 2 – 0,5 балла
- правильные отношения сопротивлений – 1,5 балла

**Теоретичний тур, 9-й клас**
**Умова задачі № 4**

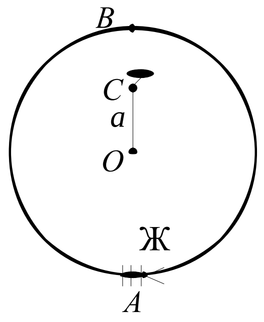



Рис. 1

Невагомий диск радіуса $R$ = *8 см*, який може вільно обертатися, підвішений на осі, що проходить на відстані $a$ = *4 см* від його центру (рис. 2). У нижню точку диска $A$ сідає важкий жук і починає повзти по краю диска зі швидкістю $V$ = *12 мм/хв* на протилежний край диска, в точку В.

Через який час жук набере максимальну швидкість (відносно нерухомої системи відліку)?

Чому вона дорівнюватиме?

Чому дорівнює швидкість жука щодо нерухомої системи координат в той момент, коли він проповзе половину шляху?

***Розв'язок***

1) Оскільки, жук набагато важчий диску, то при русі він весь час залишається під точкою підвісу. Тому, в нерухомій системі координат його рух являє собою піднімання вертикальною лінією вгору (рис. 2).

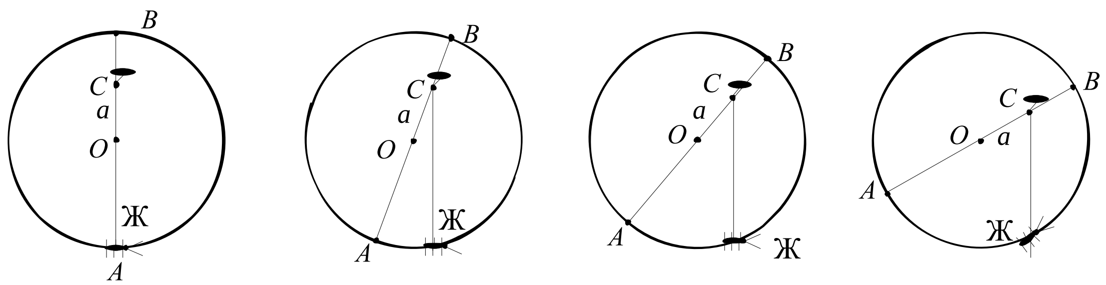



Рис. 2

Такий рух виникає як результат двох рухів: зміщення жука по краю диску і обертання диску відносно точки підвісу.

2) В системі відліку, яка пов'язана з диском все вище зазначене можна представити у вигляді, що точки О і С залишаються на місці, жук повзе вздовж краю диску, а «вертикальна» лінія СЖ (точка підвісу С – жук Ж) обертається відносно точки С (рис. 3, *а*).

Швидкість жука у нерухомій системі координат $u$ – це швидкість скорочення лінії СЖ (точка підвісу С – жук Ж). Вона дорівнює

$$u = V\cos(90° - \beta) = V\sin\beta = \frac{a}{R}\cdot V\sin\alpha\,.$$

Пояснення: перпендикулярна відрізку СЖ складова швидкості жука на довжину відрізку СЖ не впливає; перехід до кута $\alpha$ виконаємо за допомогою теореми синусів $\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta}$.

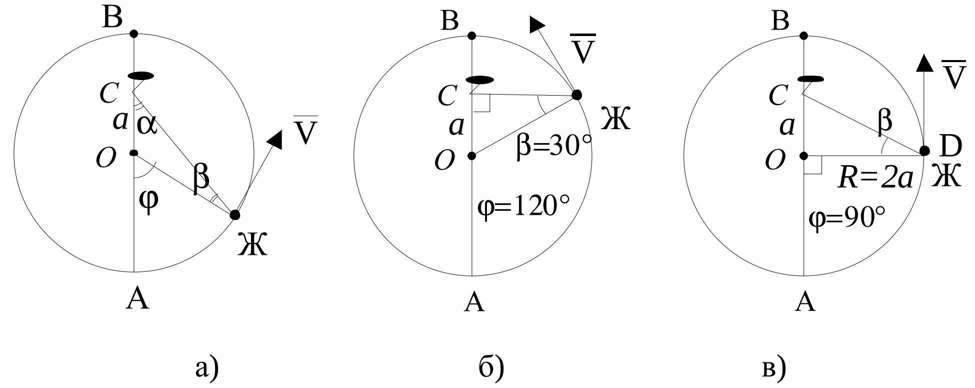



Рис. 3

Отримаємо розв'язки:

а) Максимальна швидкість жука у нерухомій системі відліку становитиме ($\sin\alpha = 1$):

$$u_{\max} = \frac{a}{R} \cdot V = 6\ мм/хв\ .$$

б) Коли кут $\alpha = \pi/2$, кут $\varphi = 120°$ (рис. 3, *б*), а довжина пройденого жуком шляху дорівнюватиме третині кола $S = \frac{2\pi R}{3}$. Звідси отримаємо відповідь для часу:

$$t = S/V = \frac{2\pi R}{3V} = 14\ хв$$

в) Коли жук проповзе половину шляху і опиниться у точці D (рис. 3, *в*), для $\sin\beta$ будемо мати $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Звідси отримаємо:

$$u = V\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot V = 5{,}4\ мм/хв$$

***Відповідь**:* $u_{\max} = \frac{a}{R} \cdot V = 6\ мм/хв$; $t = S/V = \frac{2\pi R}{3V} = 14\ хв$; $u = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot V = 5{,}4\ мм/хв$.

Критерии оценивания:

- описание модели движения – 1 балл
- выбор системы отсчета, уравнение скорости – 1,5 балла
- правильная максимальная скорость – 1 балл
- правильное соответствующее время – 1 балл
- скорость в момент половины пути, отсчитанном в СО диска – 0,5 балла

**Теоретичний тур, 9-й клас**
**Умова задачі № 5**

Три провідних кульки однакового розміру, але зроблені з різних матеріалів, підвісили на трьох нитках однакової довжини, закріплених в одній точці. Після надання цим кулькам деякого заряду, кульки за рахунок кулонівського відштовхування розійшлися, утворивши рівнобедрений трикутник (рис. 3). При цьому нитки першої так другої кульки утворили з вертикаллю кут $20°$, а нитка третьої кульки – кут $14°$.

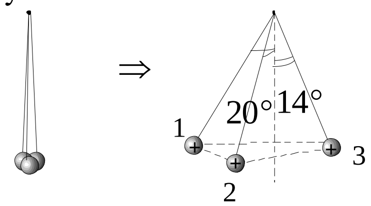



Рис. 3

Які кути з вертикаллю утворять нитки, якщо у новому досліді кулькам надати заряд, у 2014 разів більший від попереднього?

***Розв'язок***

**Інформація, яку можна вилучити з першого досліду:**

1) оскільки розміри провідних кульок однакові, то заряд між ними поділиться на три рівні частини;

2) перша та друга кулька мають однакові маси;

3) третя кулька масивніша за першу та другу;

4) кулонівскі сили, що діють між кульками, та сили тяжіння, що діють на них, мають однаковий порядок величини.

**Що зміниться при збільшенні первинного заряду у 2014 разів?**

1) Кулонівські сили збільшаться у $2014^2 = 4056196$ разів! Отже, навіть якщо відстань між кульками зросте у 4 рази (з $0{,}5\ell$ до $2\ell$), то все одне, кулонівські сили будуть у 250000 разів більше за сили тяжіння!

2) Це значить, що ми можемо у першому наближенні вважати, що між кульками діють тільки кулонівські сили. Які положення вони при цьому займуть?

Звичайно, вони утворять конфігурацію, при якій знаходитимуться якомога далі одна від одної, тобто вони знаходитимуться у вершинах правильного трикутника (рис. 2, *б*).

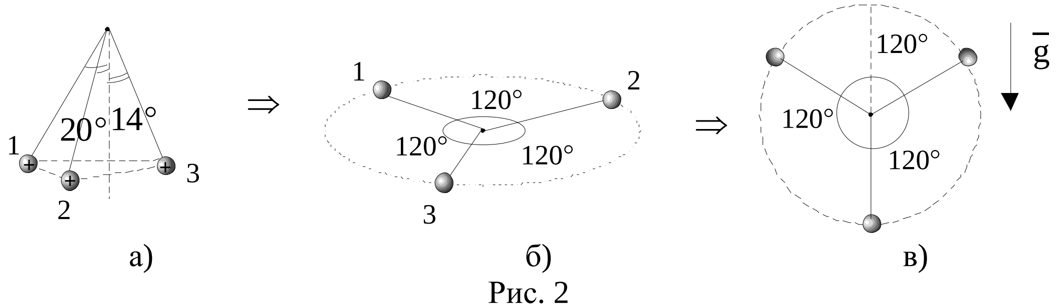



Рис. 2

У цієї системи (із зарядами, що «жорстко» закріплені у вершинах правильного трикутника) залишаються три степені свободи – вона може обертатися. «Включимо» силу тяжіння, і тоді система повернеться так, щоб її центр ваги був якомога нижче. А це значить, що третя, наймасивніша кулька, розміститься знизу, а перша та друга кульки, займуть симетричні положення (рис. 2, *в*).

***Відповідь:*** нитка третьої кульки утворюватиме з вертикаллю кут $0°$, а нитки першої та другої кути $120°$ (або, якщо кути відраховувати по-іншому, кути $60°$).

Критерии оценивания:

– заряды распределяются поровну между шариками – 0,5 балла
– массы шариков 1 и 2 одинаковы – 0,5 балла
– шарик 3 тяжелее – 0,5 балла
– силами тяжести по сравнению с кулоновскими можно пренебречь – 2 балла
– углы между нитями станут равны $120°$ – 0,5 балла
– правильный ответ – 1 балл