Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме:

"Касательная к графику функции. Теоремы о среднем значении"

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (14 часов)

Урок 1. Уравнение касательной к графику функции.

Урок 2. Решение задач, связанных с касательной к графику функции.

Урок 3. Решение задач, связанных с касательной к графику функции.

Урок 4. Решение задач, связанных с касательной к графику функции.

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: “Касательная к графику функции”.

Урок 6. Возрастание и убывание функции в точке. Понятие локального экстремума. Теорема Ферма. Теорема Дарбу.

Урок 7. Теорема Ролля.

Урок 8. Решение задач на теорему Ролля. Корни многочлена и дифференцирование.

Урок 9. Теорема Коши о среднем значении. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений) и ее следствия.

Урок 10. Применение теоремы Лагранжа к доказательству неравенств.

Урок 11. *Самостоятельная работа* по теме: “Теоремы Ролля и Лагранжа”.

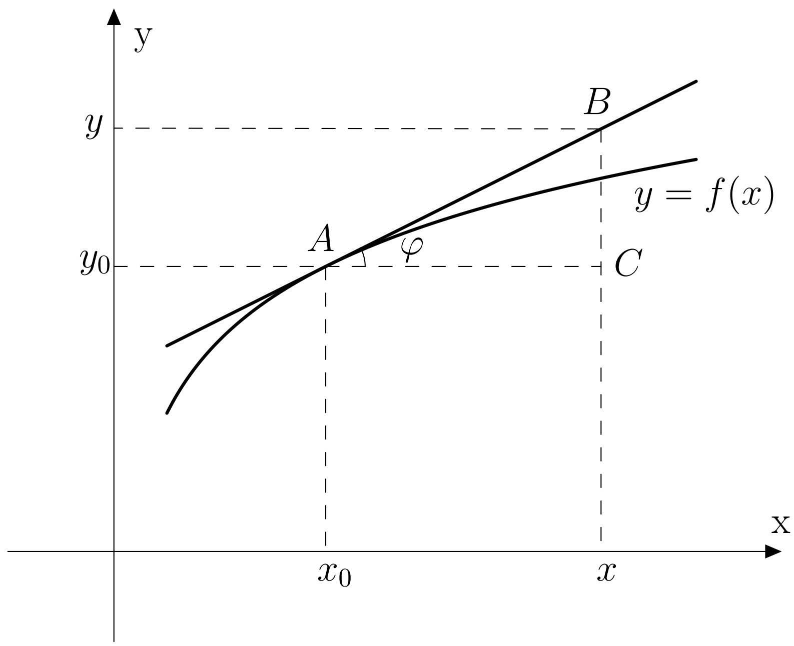
Урок 12. Обобщающий урок по теме.

Урок 13. Контрольная работа.

Урок 14. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Уравнение касательной к графику функции

1) Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть в точке ее графика $A(x_0; y_0)$ существует касательная. Найдем ее уравнение.



Возьмем на касательной произвольную точку $B(x; y)$. Рассмотрим также точку плоскости C, имеющую координаты $(x; y_0)$. Тогда тангенс угла φ наклона касательной равен $\dfrac{BC}{AC}$. Но мы уже знаем, что $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Следовательно, $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$, откуда

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.} \tag{1.1}$$

Это и есть уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

2) Уравнение (1.1) записано в форме прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку $(x_0; y_0)$. Следовательно, угловой коэффициент k касательной в точке графика с абсциссой x_0 равен значению производной в этой точке:

$$\boxed{k = f'(x_0).} \tag{1.2}$$

Этот факт часто будет использоваться в дальнейшем.

3) Уравнение (1.1) может быть переписано в виде

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.} \tag{1.3}$$

С равенством (1.3) мы уже сталкивались ранее. А именно, мы использовали его для приближенного нахождения значения функции при малых отклонениях аргумента. Теперь понятно, что мы заменяли точку на графике функции на точку касательной с той же абсциссой.

Замечание. Правая часть (1.3) – это первые два члена разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора, о котором мы будем говорить позднее.

4) **Упражнения.**

(1) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 3x - x^3$ в точке $x_0 = -2$.

(2) Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \operatorname{ctg} 3x$ в точке $x_0 = -\dfrac{\pi}{12}$.

(3) Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$ в точке $x_0 = 2$.

(4) Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - x^2$ в точке пересечения с осью абсцисс.

(5) В каких точках касательная к графику функции $y = \sin 2x$ параллельна прямой $y = k - 3$?

(6) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, которая параллельна прямой $y + 3x - 3 = 0$.

(7) На параболе $y = 4 - x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. Найдите уравнение касательной к данной параболе, которая параллельна этой секущей.

(8) Найдите все общие точки графика функции $y = x^3 + 2x^2$ и касательной к этому графику в точке графика с абсциссой $x_0 = 0$.

Домашнее задание

1) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 e^{-x}$ в точке $x_0 = 1$.

2) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точке пересечения с осью абсцисс.

3) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{1-x^2}$ в точке пересечения с прямой $y = 1$.

4) Касательная к кривой $y = \left(x^2 + 1\right)(x - 1)$ параллельна прямой $y = 2x + 1$. Найдите координаты точки касания.

5) На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна секущей? Найдите уравнение этой касательной.

6) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+4}{x-4}$, параллельной прямой, проходящей через точки $A(0;4)$ и $B(2;0)$.

Урок 2. Решение задач, связанных с касательной к графику функции

1) В каких точках графика функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x^3 - 4x\right)$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$?

2) Под какими углами парабола $y = x^2 + 2x - 8$ пересекает ось абсцисс?

3) Найдите угол между параболой $y = x^2 - 4x$ и прямой $x = 4$.

4) На ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ задана точка $M(x_0; y_0)$. Найдите площадь треугольника, образованного касательной к гиперболе, проведенной через точку M, и осями координат, если $y_0 = \dfrac{4}{5}x_0$.

5) К графику функции $f(x) = -8x - x^2$ проведены две касательные в точках с абсциссами $x_1 = -6$ и $x_2 = 1$. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

6) Прямая $y = 6x - 7$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в т. $K(2;5)$. Найдите уравнение параболы.

7) При каком значении параметра a прямая $y = x + a$ касается графика функции $y = 2\sqrt{x}$?

8) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, проходящей через точку $M(-1;-1)$.

9) Найдите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = x^2 - 2x + 5$ и $g(x) = x^2 + 2x - 1$.

Домашнее задание

1) Под каким углом пересекает ось x кривая $y = \sin x$ в точке $x_0 = \pi$?

2) Под каким углом кривая $y = e^{0,5x}$ пересекает прямую $x = 2$?

3) Найдите площадь треугольника, образованного прямой $y = 2 - x$, осью абсцисс и касательной к параболе $y = 1 + 2x - x^2$ в точке ее пересечения с осью ординат.

4) Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $M\,(3; 2)$.

5) Парабола с вершиной на оси абсцисс и осью, параллельной оси ординат, касается прямой, проходящей через точки $A\,(-1; -1)$ и $B\,(4; 4)$, в точке A. Найдите уравнение параболы.

6) При каких значениях a, b, c график функции $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ касается прямой $y = 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ и проходит через точку $A\,(1; 0)$?

7) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+9}{x+5}$, проходящей через начало координат.

8) Найдите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ и $g(x) = -x^2 + 3x - 2$.

Урок 3. Решение задач, связанных с касательной к графику функции - 2

1) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 3$, перпендикулярной прямой $y - x - 3 = 0$.

2) Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ в точках с абсциссами $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$.

3) Найдите угол между касательными к графику функции $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

4) Найдите точки касания графиков функций $f(x) = x^3 - 7x - 2$ и $g(x) = (x-1)^2$.

5) Найдите угол, под которым пересекаются параболы $f(x) = (x-2)^2$ и $g(x) = -4 + 6x - x^2$.

Домашнее задание

1) На графике функции $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$.

2) Найдите координаты точки пересечения двух касательных к графику функции $y = \cos x$ в точках с абсциссами $x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

3) Найдите угол, под которым из точки $A\,(2; -1)$ видна парабола $y = x^2$.

4) В каких точках касаются графики функций $f(x) = \sin x$ и $\varphi(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$?

5) Найдите угол, под которым пересекаются графики функций $y = e^x$ и $y = e^{3x}$.

Урок 4. Решение задач, связанных с касательной к графику функции - 3

1) Составьте уравнение нормали к графику функции $y = e^{(x-1)/x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

2) Напишите уравнение такой касательной к графику функции $y = (2x+3)\sqrt{2x+3} + x^2$, которая не пересекает прямую $y = x$.

3) При каких значениях параметра a прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^2 + ax + 2$?

4) Найдите углы, образованные параболой $y = 2x - x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

5) Напишите уравнения всех касательных к графику функции $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$, проходящих через точку $A(2; 3)$.

6) Найдите уравнения всех общих касательных к графикам функций $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 4x^2 - 2$.

Домашнее задание

1) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, где $x > 0$, если касательная отсекает на осях координат треугольник площадью $2\,\dfrac{1}{4}$.

2) Найдите уравнения всех касательных к графику функции $f(x) = x^3 - 2x + 7$, параллельных прямой $y = x$.

3) При каких значениях a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$?

4) При каких значениях a касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 + ax^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$, проходит через точку $N(3; 2)$?

5) Найдите все общие точки графика функции $f(x) = 3x - x^3$ и касательной, проведенная к нему через точку $N(0; 16)$.

6) На прямой $y = 2x - 1$ найдите все такие точки, что через каждую из них проходит ровно две касательные к графику функции $f(x) = x^2$, а угол между этими касательными равен $\dfrac{\pi}{4}$.

Урок 5. Самостоятельная работа №1: "Касательная к графику функции"

Домашнее задание

1) Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = x^2 + |7 - 4x|$ в точках с абсциссами $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$.

2) Найдите кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = \dfrac{4}{3}x - 2$.

3) Найдите геометрическое место вершин всех парабол вида $y = x^2 + ax + b$, касающихся прямой $y = 4x - 1$.

4) Найдите площадь и периметр треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = a\sin x$ $(a > 0)$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{4\pi}{3}$.

5) При каких значениях параметра a прямая $y = ax + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$?

6) Найдите все a, при которых касательная к графику функции $y = \sin\dfrac{x+11}{2} + \dfrac{3}{2}a - a^2$ в его точке с абсциссой a не пересекает график ни одной из двух функций $y = 0,5x + 2$ и $y = -\dfrac{2}{x}$.

Урок 6. Возрастание и убывание функции в точке. Понятие локального экстремума. Теорема Ферма. Теорема Дарбу

1°. Возрастание и убывание функции в точке

1) Мы уже знакомы с функциями, монотонными на промежутке. Оказывается, можно определить и такое понятие, как монотонность функции в точке.

Определение.

> *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, включая и саму эту точку. Говорят, что* ***функция $f(x)$ возрастает в точке x_0****, если $\exists\, \delta > 0 : \forall x' \in (x_0 - \delta; x_0), \forall x'' \in (x_0; x_0 + \delta)$*
>
> $$f(x') < f(x_0) < f(x'').$$

Аналогично определяется функция, **убывающая в точке x_0**.

2) В δ-окрестности точки x_0, о которой говорится в определении возрастающей (убывающей) функции, можно рассмотреть приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$. Очевидно, что для возрастающей функции приращения Δy и Δx имеют одинаковые знаки, а для убывающей – разные. Следовательно, для возрастающей в точке x_0 функции $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, а для убывающей – $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

3) Пусть теперь функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную. Тогда существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Если $f'(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 выражение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ сохраняет знак. Но это означает, что функция $f(x)$ является в точке x_0 либо возрастающей (при $f'(x_0) > 0$), либо убывающей (при $f'(x_0) < 0$). Т. о., нами доказана следующая важная теорема:

   Теорема.

   Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительную производную, то она возрастает в этой точке, а если отрицательную – то убывает.

4) Условие, сформулированное в теореме, является достаточным, но не необходимым. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$.

2°. Локальные экстремумы. Теорема Ферма

1) Введем еще одно определение:

Определение.

> *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, включая и саму эту точку, и для любого x' из этой окрестности $f(x') \leqslant f(x_0)$. Тогда говорят, что* ***функция $\boldsymbol{f(x)}$ достигает в точке $\boldsymbol{x_0}$ локального максимума****.*

Аналогично определяется **локальный минимум** функции.

Для локальных минимума и максимума существует общее название – **локальный экстремум**.

2) Очевидно, что для того, чтобы $f(x)$ имела в точке x_0 локальный максимум (минимум), н. и д., чтобы $\Delta y \leqslant 0$ ($\Delta y \geqslant 0$) для всех значений аргумента из некоторой окрестности точки x_0.

3) Из доказанной выше теоремы сразу вытекает необходимое условие экстремума для дифференцируемой в точке x_0 функции:

Теорема (Ферма[1]).

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и в этой точке существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство теоремы: Другие возможности исключены предыдущей теоремой.

■

4) Теорема Ферма дает лишь необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Действительно, функция $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную нулю, но не имеет экстремума. Более того, если $f'(x_0) = 0$, то точка x_0 может не быть ни точкой экстремума, ни точкой возрастания (убывания) функции $f(x)$. В качестве примера можно взять функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

[1] Сам Ферма не знал производных. Эта теорема воспроизводит лишь сущность использованного им приема.

3°. Теорема Дарбу

1) В дальнейшем в формулировках многих теорем нам будут встречаться слова "функция, дифференцируемая на отрезке". Определим это понятие.

Определение.

> *Будем говорить, что* ***функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$****, если она дифференцируема в любой точке интервала $(a;b)$ и в точках a и b существуют соответственно правая и левая производные.* При этом вместо $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ будем просто писать $f'(a)$ и $f'(b)$.

2) Имеет место следующая теорема:

Теорема (Дарбу о промежуточном значении производной[2]).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то $f'(x)$ принимает все промежуточные значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

Замечание. Теорема Дарбу не является следствием теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении, т. к. $f'(x)$ может быть и разрывной (пример – все та же функция (6.1)).

Доказательство теоремы:

а) Пусть сперва $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Докажем, что на интервале $(a;b)$ найдется точка, в которой производная обращается в нуль. Для этого заметим, что поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на $[a;b]$, то она непрерывна на этом отрезке. Следовательно, по теореме Вейерштрасса найдется точка $\xi \in [a;b]$, в которой $f(x)$ достигает своего максимального значения. Легко видеть, что ξ не совпадает ни с a, ни с b. Действительно, поскольку $f'(a) > 0$, то в правой полуокрестности точки a найдется такая точка x', что $f(x') > f(a)$. А поскольку $f'(b) < 0$, то в левой полуокрестности точки b найдется такая точка x'', что $f(x'') > f(b)$. Поэтому $\xi \in (a;b)$. Но тогда по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$.

Если $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$, то надо рассмотреть точку, в которой $f(x)$ достигает своего минимального значения.

б) Теперь уже легко доказать теорему Дарбу в общем случае. Без ограничения общности можно считать, что $f'(b) < f'(a)$. Возьмем произвольное число c такое, что $f'(b) < c < f'(a)$ и рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - cx$. Очевидно, $\varphi'(a) = f'(a) - c > 0$, $\varphi'(b) = f'(b) - c < 0$. По доказанному выше найдется точка $\xi \in (a;b)$, в которой $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - c = 0$. Но тогда $f'(\xi) = c$, ч. т. д.

■

[2] Жан Гастон Дарбу (1842 – 1917) – выдающийся французский математик, профессор College de France. Известен благодаря своим результатам в математическом анализе (теория интегрирования, дифференциальные уравнения в частных производных) и дифференциальной геометрии. Дарбу был биографом Анри Пуанкаре. Интересно, что когда Дарбу умер, немецкие математики во главе с Гильбертом выразили соболезнование в связи с его кончиной, за что были обвинены чуть ли не в измене Германии (шла Первая мировая война, и Германия воевала с Францией).

Урок 7. Теорема Ролля

1) Сформулируем и докажем следующую интересную теорему:

Теорема 7.1 (Ролля[1]).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям: *1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;* *2) $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$;* *3) $f(a)=f(b)$.* *Тогда на интервале $(a;b)$ найдется такая точка ξ, что $f'(\xi)=0$.*

Доказательство теоремы: Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке и достигает на этом отрезке наибольшего значения M и наименьшего значения m. Если $M=m$, то $f(x)$ – константа и утверждение теоремы очевидно. Если же $M \neq m$, то хотя бы одно из этих значений не равно $f(a)=f(b)$. Следовательно, либо наибольшее, либо наименьшее значение функции $f(x)$ достигается во внутренней точке отрезка $[a;b]$. Это означает, что на интервале $(a;b)$ есть точка, в которой достигается локальный экстремум. Но тогда по теореме Ферма в этой точке производная равна нулю. Теорема доказана. ■

2) Нетрудно убедиться, что все три условия теоремы существенны: если опустить любое из них, то теорема перестанет быть верной.

   Упражнение. Приведите примеры функций, для которых выполнены два условия теоремы Ролля из трех, но при этом неверно заключение.

3) Теорема Ролля допускает геометрическую интерпретацию: на отрезке гладкой кривой с равными значениями функции на концах есть точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

4) На практике чаще применяется не сама теорема Ролля, а очевидное следствие из нее:

Следствие.

Между двумя корнями дифференцируемой функции лежит, по крайней мере, один корень ее производной.

5) **Упражнения.**

   (1) Решите уравнение: $\left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} = 1$.

[1]М.Ролль (1652 – 1719) – французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.

(2) Докажите, что если $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$, то многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

имеет по крайней мере один действительный корень.

(3) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; a]$, дифференцируема на интервале $(0; a)$ и $f(0) = 0$. Докажите, что существует точка $\xi \in (0; a)$, такая, что

$$af(\xi) = (a - \xi)\, f'(\xi).$$

6) Теорема Ролля может быть обобщена на случай бесконечного промежутка $[a; b]$. А именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 7.2.

Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на всей числовой оси и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Тогда, что найдется такая точка ξ, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство теоремы: Пусть $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C$. Если $f(x)$ – константа, то утверждение очевидно. В противном случае найдется точка x_0, в которой $f(x) \neq C$. Без ограничения общности можно считать, что $f(x_0) < C$. Возьмем достаточно маленькое число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим прямую $l : y = C - \varepsilon$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = C$, то график $f(x)$ пересечет l в какой-нибудь точке $a < x_0$. Значит, $f(a) = C - \varepsilon$. Аналогично доказывается, что найдется точка $b > x_0$, для которой $f(b) = C - \varepsilon$. Т. о., для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ выполнены условия теоремы Ролля. Следовательно, найдется такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$.

■

Домашнее задание

1) Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3),$$

т. е. убедитесь в том, что $f'(x)$ имеет корни на каждом из интервалов $(1; 2)$ и $(2; 3)$.

2) Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объясните кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

3) Докажите, что уравнение $x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x - a = 0$ при любом значении параметра a имеет не более одного корня.

4) Докажите, что уравнение $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x - 2 + \cos x = 0$ имеет ровно один действительный корень.

5) Докажите, что уравнение $5x^4 + 4ax^3 + 3(a-2)x^2 + (6a+2)x - 5a = 0$ при любом значении параметра a имеет действительные корня.

6) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, дифференцируема на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $f(0) = 0$. Докажите, что существует точка $\xi \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, такая, что
$$f'(\xi) = \operatorname{tg} \xi \cdot f(\xi).$$

Урок 8. Решение задач на теорему Ролля. Корни многочлена и дифференцирование

1°. Решение задач на теорему Ролля

Решим несколько задач, в которых требуется получить необходимые условия на коэффициенты многочлена, если известно количество его корней.

Упражнения.

1) Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + d$ имеет четыре различных действительных корня. Докажите, что $a^2 > \dfrac{32}{9}\, b$.

2) Пусть теперь дан полный многочлен четвертой степени
$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
также имеющий четыре различных действительных корня. Какое условие на коэффициенты $f(x)$ можно получить в этом случае?

3) Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + cx + d$ имеет четыре различных действительных корня. Докажите, что $ac < 0$.

2°. Корни многочлена и дифференцирование

1) Пусть x_0 – корень кратности k многочлена $f(x)$, т. е.
$$f(x) = (x - x_0)^k\, g(x), \quad g(x_0) \neq 0. \tag{8.1}$$
Вычислим $f'(x)$:
$$f'(x) = (x - x_0)^{k-1} \left(k\, g(x) + (x - x_0)\, g'(x)\right).$$

Обозначим $g_1(x) = k\,g(x) + (x - x_0)\,g'(x)$. Очевидно, $g_1(x_0) \neq 0$. Следовательно, x_0 – корень кратности $(k-1)$ производной $f'(x)$. Т. о., мы доказали следующее утверждение:

Утверждение.

При дифференцировании кратность корня $f(x)$ уменьшается на единицу.

Замечание. Понятие кратности корня с помощью (8.1) можно ввести не только для многочленов, а и для произвольной функции. Доказанное утверждение будет справедливо для любой дифференцируемой функции.

2) Опираясь на следствие из теоремы Ролля, можно сразу заключить, что если дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет n различных корней, то ее производная $f'(x)$ имеет на этом отрезке по крайней мере $(n-1)$ корней. Теперь мы можем обобщить это утверждение:

Теорема 8.1.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет n корней (с учетом кратности) на отрезке $[a;b]$. Тогда ее производная $f'(x)$ имеет на этом отрезке по крайней мере $(n-1)$ корней.

Доказательство: Пусть $f(x)$ имеет m различных корней на отрезке $[a;b]$. Тогда по следствию из теоремы Ролля производная $f'(x)$ будет иметь по крайней мере $(m-1)$ "новых" корней, расположенных между корнями $f(x)$.

Как было показано выше, при дифференцировании кратность корня уменьшается на 1. Поэтому $f'(x)$ будет иметь еще $(n-m)$ корней (с учетом кратности), совпадающих с корнями функции $f(x)$. Т. о., суммарное количество корней будет не меньше, чем $n - m + m - 1 = n - 1$.

■

3) **Упражнение**. Многочлен $x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет шесть действительных корней (с учетом кратности). Найдите коэффициенты a, b, c, d.

Домашнее задание

1) Докажите, что если все корни многочлена n-й степени $P_n(x)$ вещественны, то его производные $P_n'(x), P_n''(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

2) Докажите, что уравнение $x^n + ax^2 + bx + c = 0$ имеет не более четырех различных действительных корней.

3) Докажите, что справедливо следующее обобщение теоремы Ролля:

Теорема 8.2.

Пусть дан отрезок $[a;b]$. Возьмем некоторое разбиение этого отрезка $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и рассмотрим функцию $f(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно;

2) $f(x)$ имеет производную n-го порядка на интервале $(a;b)$;

3) $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ найдется такая точка ξ, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Урок 9. Теоремы Коши и Лагранжа о среднем значении

1) При решении различных задач часто бывает полезна следующая теорема:

Теорема (**Коши о среднем значении**).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$;

3) $f'(x)$ и $g'(x)$ не обращаются одновременно в нуль на интервале $(a;b)$;

4) $g(a) \neq g(b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ существует такая точка ξ, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{9.1}$$

Доказательство теоремы: Рассмотрим функцию

$$F(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x).$$

Очевидно, что функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Кроме того, $F(a) = F(b) = -f(a)\, g(b) + f(b)\, g(a)$. Тогда, согласно теореме Ролля, существует точка $\xi \in (a;b)$, в которой $F'(\xi) = 0$. Но $F'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$. Поэтому

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Очевидно, $g'(\xi) \neq 0$ (если $g'(\xi) = 0$, то и $f'(\xi) = 0$, что противоречит условию). Осталось разделить обе части полученного равенства на $(g(b) - g(a))\, g'(\xi)$. Теорема доказана.

■

2) **Упражнение**. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, $b > a > 0$. Докажите, что существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi\, f'(\xi).$$

3) Полагая в условии теоремы Коши о среднем значении $g(x) = x$, получаем очень важную теорему-следствие:

Теорема (Лагранжа о среднем значении).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:
1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$.
Тогда на интервале $(a;b)$ существует такая точка ξ, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a)\,. \tag{9.2}$$

4) Теорема Лагранжа о среднем значении настолько важна, что мы приведем ее непосредственное доказательство, не опирающееся на теорему Коши. Впрочем, это доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы Коши.

Доказательство теоремы Лагранжа: Рассмотрим функцию $F(x) = (f(b) - f(a))\,x - (b-a)\,f(x)$. Очевидно, что функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Кроме того, $F(a) = F(b)$. Тогда, согласно теореме Ролля, существует точка $\xi \in (a;b)$, в которой $F'(\xi) = 0$, т. е. $f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(\xi)$. Теорема доказана.

■

5) Геометрический смысл формулы (9.2) становится ясен, если переписать ее в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Теорема Лагранжа утверждает, что на графике гладкой функции $f(x)$ существует точка, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей концы графика.

6) Очевидно, что теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа при $f(b) = f(a)$.

7) Если $\xi \in (a;b)$, то найдется такое число $t \in (0;1)$, что $\xi = a + t\,(b-a)$. Поэтому формулу (9.2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(a + t\,(b-a))\,(b-a)\,, \quad 0 < t < 1.$$

В таком виде формула верна и при $a > b$.

8) Поменяем обозначения в полученной формуле. А именно, заменим a на x, b – на $x + \Delta x$. Тогда

$$\boxed{f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + t \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \quad 0 < t < 1.} \tag{9.3}$$

Эта формула очень похожа на приближенную формулу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x,$$

с которой мы уже неоднократно встречались. Поэтому формулу (9.2) часто называют **формулой конечных приращений**.

9) Из теоремы Лагранжа сразу же следуют важнейшие утверждения, касающиеся поведения дифференцируемых функций:

Следствие 1.

Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$, имеющая на интервале $(a; b)$ неотрицательную (положительную) производную, не убывает (возрастает) на $[a; b]$.

Следствие 2.

Непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ постоянна на нем т. и т. т., когда ее производная равна нулю в любой точке интервала $(a; b)$.

Эти следствия неоднократно будут использоваться нами в дальнейшем, в частности, при исследовании и построении графиков функций.

Домашнее задание

1) Вычислите значение ξ в теореме Лагранжа для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0; 1]$.

2) Найдите на графике функции $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

3) Верна ли формула конечных приращений для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[a; b]$, если $ab < 0$?

4) Объясните, почему не верна теорема Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на отрезке $[-1; 1]$.

5) Найдите функцию $t = t\,(x, \Delta x)$, $0 < t < 1$ такую, что

$$f\,(x + \Delta x) - f(x) = f'\,(x + t \cdot \Delta x)\,\Delta x,$$

если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0;$ б) $f(x) = e^x.$

6) Найдите значение ξ из формулы конечных приращений на отрезке $[0; 2]$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

7) Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[1; 2]$, то существует такая точка $\xi \in (1; 2)$, что $f(2) - f(1) = \dfrac{\xi^2}{2}\, f'(\xi)$.

Урок 10. Применение теоремы Лагранжа к доказательству неравенств

1) Докажите неравенство: $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

2) Докажите, что при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ справедливо неравенство:

$$(x - y)\cos x \leqslant \sin x - \sin y \leqslant (x - y)\cos y.$$

3) Докажите неравенство: $\cos\dfrac{1}{4} - \cos\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{36}$.

4) Докажите неравенство: $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1} > \ln n,\ \ n \geqslant 2$.

5) Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ сходится.

6) Докажите, что если натуральное число n не является точным квадратом, то

$$\left\{\sqrt{n}\right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Здесь $\{\cdot\}$ *– дробная часть числа.*

Домашнее задание

1) Докажите неравенство: $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|$.

2) Докажите, что при $0 < a < b$ и $p > 1$ справедливо неравенство:

$$p\,(b-a)\,a^{p-1} < b^p - a^p < p\,(b-a)\,b^{p-1}.$$

3) Докажите, что при $x > 0$, $y > 0$ справедливо неравенство:

$$\frac{x-y}{x} \leqslant \ln\frac{x}{y} \leqslant \frac{x-y}{y}.$$

4) Докажите неравенство: $\sin\dfrac{1}{5} - \sin\dfrac{1}{10} > 0{,}098$.

5) Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

6) Докажите, что если натуральное число n не является точным кубом, то

$$\left\{\sqrt[3]{n}\right\} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}.$$

Урок 12. Обобщающий урок

Домашнее задание

1) Найдите расстояние между кривой $f(x) = \sqrt{x}$ и прямой $y = x + 3$.

2) Найдите уравнение касательной к графику функции $y = (2+3x)^{-1/3}$, высекающей на осях координат равнобедренный треугольник.

3) Касательная к кривой $y = e^x$ в точке с абсциссой a проходит через точку $(b; 0)$. Найдите разность $b - a$.