

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1
1А (3 балла)

Потенциальная энергия стержня $U = mgl/2 \sin \alpha$ переходит в кинетическую энергию вращения стержня $E = J\omega^2/2$, где $J = ml^2/3$ – момент инерции относительно вертикального подвеса, ω – угловая скорость вращения. Приравнявая эти энергии, находим мгновенную угловую скорость вращения центра масс относительно оси подвеса, и с помощью полученного выражения находим нормальное (центростремительное) ускорение центра масс

$$a_n = \omega^2 \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{3}{2} g \sin \alpha$$

Тангенциальное ускорение находим из уравнения динамики $M = \beta J$, где $M = mgl/2 \cos \alpha$ – момент силы тяжести относительно оси вращения, β – угловое ускорение движения центра масс, связанное с тангенциальным ускорением $a_t = \beta l/2$:

$$a_t = \frac{3}{4} g \cos \alpha$$

Ускорение центра масс **a** определяется уравнением

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$$

где **P** – сила тяжести, **N** – сила реакции опоры. Разлагая это уравнение на вертикальную и горизонтальную компоненты, с учетом

$$a_{n\parallel} = -a_n \cos \alpha, \quad a_{n\perp} = a_n \sin \alpha,$$

$$a_{t\parallel} = a_t \sin \alpha, \quad a_{t\perp} = a_t \cos \alpha,$$

Находим

$$N_{\parallel} = mg \left(\frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right),$$

$$N_{\perp} = \frac{9}{4} mg \cos \alpha \sin \alpha.$$

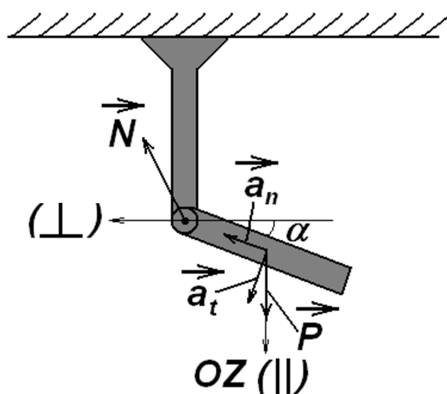


Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1	Составление баланса кинетической и потенциальной энергий и определение угловой скорости вращения центра масс	0.5
2	Определение нормального ускорения	0.5
3	Определение тангенциального ускорения из уравнения динамики вращательного движения	0.75
4	Определение компонент силы реакции опоры из 2-го закона Ньютона	1.25

1В (4 балла)

Найдем сначала изменение плотности жидкости и давления по высоте сосуда:

$$\rho_{\text{жидкости}}(h) = \rho_{\text{max}} \left(1 - \frac{h}{H}\right); \quad (1)$$

$$p(h) = \int_h^H \rho(x) g dx = \frac{1}{2} \rho_{\text{max}} g H \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2. \quad (2)$$

Видно, что в верхней части сосуда давление убывает до нуля. Это значит, что в этой области объем газа превысит объем пробирки, и пузырьки газа будут выходить из нее наружу. Пока газ не выходит из пробирки, происходит его изотермическое расширение, так что

$$p(h) V(h) = \frac{1}{2} \rho_{\text{max}} g H V_1, \quad (3)$$

откуда, с учетом (2),

$$V(h) = \frac{V_1}{\left(1 - \frac{h}{H}\right)^2}. \quad (4)$$

Формула (4) справедлива при $V(h) < V_0$, т.е. при

$$h < H \left(1 - \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}\right). \quad (5)$$

С учетом (4)-(5) можно записать среднюю плотность газа в пробирке с учетом массы ее стенок:

$$\rho_{\text{газа}}(h) = \frac{M}{V(h)} = \begin{cases} \rho_1 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2, & h < H \left(1 - \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}\right); \\ \rho_0, & h \geq H \left(1 - \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}\right), \end{cases} \quad (6)$$

где использованы обозначения $\rho_{0,1} = M/V_{0,1}$.

Различные варианты хода зависимостей ρ/ρ_{max} от h/H представлены на рис.1-3. Кривая 1 всюду соответствует жидкости, кривая 2 – средней плотности газа в пробирке с учетом массы ее стенок.

Кривые 1 и 2 не пересекаются (рис.1), если при $h = H \left(1 - \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}\right)$ выполняется условие

$\rho_{\text{газа}} > \rho_{\text{жидкости}}$, т.е.

$$\frac{\rho_0}{\rho_{\text{max}}} > \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}. \quad (7)$$

В этом случае пробирка всегда будет тонуть. Если одновременно выполняются условия

$$\frac{\rho_0}{\rho_{\text{max}}} < \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}, \quad \rho_1 > \rho_{\text{max}}, \quad (8)$$

кривые пересекаются в двух точках (рис.2):

$$h = H \left(1 - \frac{\rho_{\text{max}}}{\rho_1}\right) \quad (\text{точка А}); \quad (9)$$

$$h = H \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{max}}}\right) \quad (\text{точка В}). \quad (10)$$

Точка А является неустойчивой, поскольку при отклонении от нее вниз пробирка будет тонуть, а при отклонении вверх – всплывать. Точка В на первый взгляд кажется устойчивой.

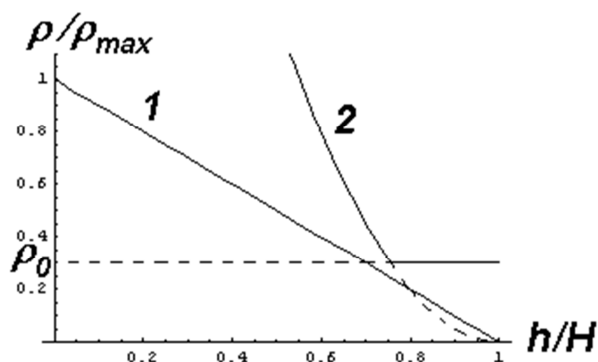


Рис.1

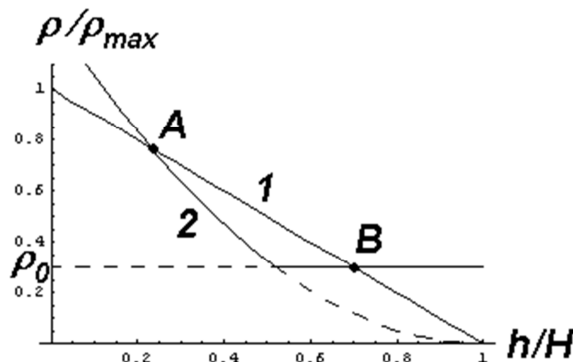


Рис.2

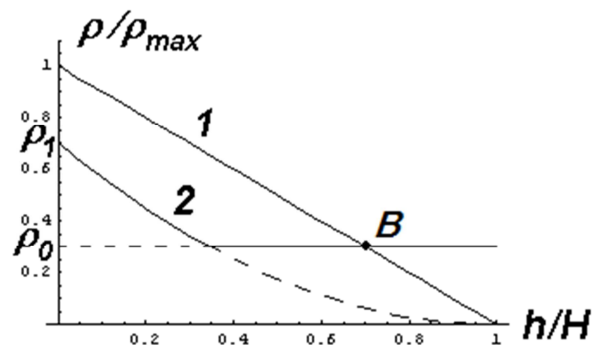


Рис.3

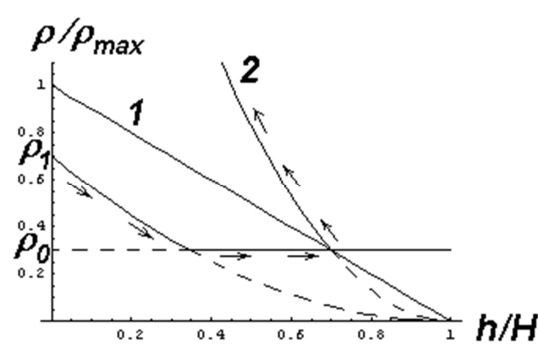


Рис.4

Если выполнены условия

$$\rho_1 < \rho_{\max}, \quad \frac{\rho_0}{\rho_{\max}} < \sqrt{\frac{V_1}{V_0}}, \quad (11)$$

остается только одна точка пересечения В (рис.3). Однако при анализе ее устойчивости надо иметь в виду, что на горизонтальном участке кривой 2 при движении вправо газ все время вытекает из пробирки. Поэтому движение влево будет совсем иным, а именно по параболе вида (б) (верхняя строка), но с новым (большим) значением ρ_1 , соответствующим оставшемуся в пробирке количеству газа.

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1	Распределение давления по высоте сосуда	0,5
2	Зависимость средней плотности газа в пробирке от высоты: а) с учетом выхода газа из пробирки (полный ответ) б) без учета выхода газа из пробирки (неполный ответ)	1,0 0,5
3	Сравнение высотных зависимостей плотности жидкости и газа: а) для трех случаев (полный ответ) б) для двух случаев (неполный ответ) в) для одного случая (неполный ответ)	1,25 0,75 0,5
4	Определение высоты, соответствующей точкам пересечения: а) две точки (полный ответ) б) одна точка (неполный ответ)	0,5 0,25
5	Исследование устойчивости точки А	0,25
6	Исследование устойчивости точки В	0,5

1С (3 балла)

Описанная в условии задачи форма тени объясняется возникновением полной тени (темный прямоугольник) и полутени (внешний более светлый прямоугольник). На рис. 1 показан ход крайних лучей, образующих тень C_1C_2 и полутень (C_1D_1 и C_2D_2) в сечении перпендикулярном одной из сторон источника. Обозначим ширину полной тени C_1C_2 - x_1 , а ширину полутени D_1D_2 - x_2 . Эти величины могут быть выражены через геометрические размеры источника и пластинки.

Из подобия треугольников $A_2B_1B_2$ и $A_2D_1C_2$ следует

$$\frac{x_1 + x_2}{2a} = \frac{L}{L-h}. \quad (1)$$

Из подобия треугольников $A_1A_2B_2$ и $B_2C_2D_2$

$$\frac{x_2 - x_1}{2b} = \frac{h}{L-h} = \frac{L}{L-h} - 1. \quad (2)$$

По рисунку теней определяем требуемые размеры:

$$x_1 = 12 \text{ см}, \quad x_2 = 28 \text{ см}.$$

С помощью формулы (1) находим

$$\frac{L}{L-h} = 2.$$

Отсюда находим $h = \frac{L}{2} = 1,5 \text{ м}$. Из формулы (2) определяем один из поперечных размеров источника $b = 8,0 \text{ см}$. аналогичные расчеты для перпендикулярного сечения дают следующие результаты:

$$x_1 = 18 \text{ см}, \quad x_2 = 22 \text{ см}.$$

Откуда следует, что $c = 2,0 \text{ см}$.

Из полученных результатов следует, что длинная сторона источника расположена горизонтально (если использовать рис.2 из условия задачи).

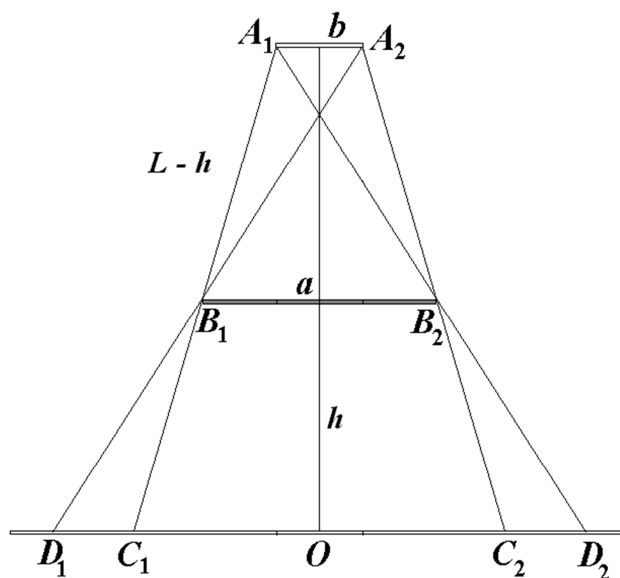


Рис. 1

Схема оценивания

№	Содержание	Баллы
1	Рисунок хода лучей, поясняющих возникновение тени и полутени	0,5
2	Геометрические соотношения между размерами источника, положением и размером пластинки и размерами тени и полутени (1)-(2)	2x0,25
3	Расчет высоты пластинки над полом (с численным значением)	0,5
4	Расчет размеров источника (с численными значениями)	2x0,5
5	Ориентация источника относительно тени	0,5

Задача 2 (10 баллов)

Опыт Толмена и Стюарта

1.[1 балл] Полный момент инерции относительно оси вращения складывается из момента инерции самой катушки и намотанного на нее проводника

$$J = J_0 + mr^2. \quad (1)$$

2. [1 балл] Уравнение вращения катушки как твердого тела имеет вид

$$J\varepsilon = J \frac{d\omega}{dt} = -M, \quad (2)$$

где ε – угловое ускорение катушки.

Из уравнения (2) следует, что катушка остановится в момент времени

$$t_0 = \frac{\omega_0 J}{M}. \quad (3)$$

Отсюда находим зависимость угловой скорости вращения катушки от времени

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0 - \frac{M}{J}t, & t < t_0 = \frac{\omega_0 J}{M} \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}. \quad (4)$$

3. [1 балл] При резком торможении катушки электроны в проволоке продолжают движение по инерции, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать ток. Обозначим через $a = \varepsilon r$ линейное ускорение точек на ободке катушки. При достаточно плотной намотке и тонких проводах можно считать, что это ускорение направлено вдоль проводов. При торможении катушки к каждому свободному электрону приложена сила инерции $-m_e a$, направленная противоположно ускорению. Под ее действием электрон ведет себя в металле так, как если бы на него действовало некоторое эффективное поле

$$E_{\text{eff}} = -\frac{m_e a}{e}. \quad (5)$$

Поэтому эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией свободных электронов, равна

$$\text{Emf} = E_{\text{eff}} \ell = -\frac{m_e}{e} a \ell. \quad (6)$$

Таким образом, закон Ома для замкнутой электрической цепи дает

$$IR = -\text{Emf} = \frac{m_e a \ell}{e}. \quad (7)$$

С учетом решения п.2, получаем окончательный ответ

$$I(t) = \begin{cases} \frac{M m_e r \ell}{e J R}, & t < t_0 = \frac{\omega_0 J}{M} \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}. \quad (8)$$

4. [2 балла] Количество заряда, протекшего через гальванометр, находим из (8). Оно равно

$$Q = I t_0 = \frac{m_e \omega_0 r \ell}{e R}. \quad (9)$$

Отсюда отношение заряда электрона к его массе равно

$$\frac{e}{m_e} = \frac{\omega_0 r \ell}{R Q}. \quad (10)$$

5. [1 балл] В этом случае уравнение (7) переписывается в виде

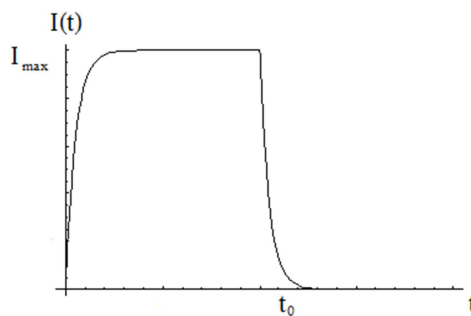
$$L \frac{dI}{dt} + IR = -\text{Emf} = \frac{m_e a \ell}{e}, \quad (11)$$

где $L = \mu_0 n^2 \pi r^2 h$ – индуктивность катушки.

Из (11) следует, что максимальная сила тока в катушке равна

$$I_{\text{max}} = \frac{M m_e r \ell}{e J R}. \quad (12)$$

Качественный график зависимости представлен на рисунке ниже.



6. [1 балл] Максимальная энергия, запасенная в катушке, равна

$$W_0 = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{\mu_0 \pi h}{2} \left(\frac{n M m_e r^2 \ell}{e J R} \right)^2. \quad (13)$$

7. [3 балла] В установившемся режиме магнитное поле

$$B = \mu_0 n I \quad (14)$$

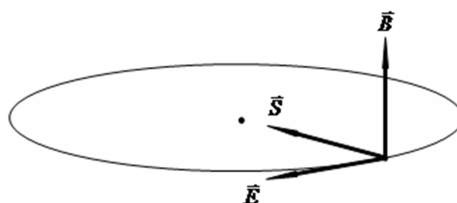
в катушке остается постоянным, а электрическое поле отсутствует. Это несправедливо для начального момента времени, когда сила тока за короткий промежуток времени возрастает от нуля до максимального значения, определяемого формулой (12). В соответствии с (14) переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, и возникает поток электромагнитной энергии через боковую поверхность катушки. Найдем напряженность вихревого электрического поля вблизи поверхности из закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E} = E 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(B \pi r^2), \quad (15)$$

откуда модуль напряженности электрического поля

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dI}{dt}. \quad (16)$$

Направления векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{S} показаны на рисунке ниже.



Подставляя в вектор Пойнтинга выражения (14) и (16) и учитывая взаимную перпендикулярность векторов \vec{E} и \vec{B} , находим

$$S = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} I \frac{dI}{dt}. \quad (17)$$

Таким образом, электромагнитная энергия, проходящая через боковую поверхность соленоида за время нарастания тока, дается интегралом от соотношения (17) и имеет вид

$$W = \frac{\mu_0 n^2 r}{4} I_{\max}^2 2\pi r h = \frac{\mu_0 \pi h}{2} \left(\frac{n M m_e r^2 \ell}{e J R} \right)^2. \quad (18)$$

Такая же энергия будет выходить через боковую поверхность катушки при убывании тока, поэтому

$$W' = \frac{\mu_0 n^2 r}{4} I_{\max}^2 2\pi r h = \frac{\mu_0 \pi h}{2} \left(\frac{n M m_e r^2 \ell}{e J R} \right)^2. \quad (19)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1	Полный момент инерции (1)	1
2	Уравнение движения (2)	0.25
3	Время остановки (3)	0.25
4	Зависимость угловой скорости от времени (4)	0.5
5	Уравнение эффективного поля (5) или (6)	0.25
6	Закон Ома (7)	0.25
7	Зависимость тока от времени (8)	0.5
8	Количество протекшего через гальванометр заряда (9)	1
9	Отношение заряда электрона к его массе (10)	1
10	Уравнение для силы тока (11)	0.25
11	Максимальная сила тока (12)	0.25
12	Качественный график зависимости	0.5
13	Максимальная энергия (13)	1
14	Магнитное поле (14)	0.5
15	Закон электромагнитной индукции (15)	0.5
16	Вихревое электрическое поле (16)	0.5
17	Вектор Пойнтинга (17)	0.5
18	Электромагнитная энергия (18)	0.5
19	Электромагнитная энергия (19)	0.5

Задача 3 (10 баллов)

Реликтовое излучение и космические лучи

1. Наиболее вероятная энергия фотона в спектре абсолютно черного тела при температуре T равна $E_\gamma = h\nu = kT$, а соответствующий ей импульс есть $p_\gamma = E_\gamma/c$. Численно находим

$$\begin{aligned} E_\gamma &= kT_r = 2.3 \times 10^{-4} \text{ eV}, \\ p_\gamma &= 2.3 \times 10^{-4} \text{ eV}/c. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Полная внутренняя энергия системы двух не взаимодействующих частиц Mc^2 определяется суммой полных энергий этих частиц в системе общего центра масс $Mc = \sqrt{m_1^2 c^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 c^2 + q^2}$, где q -импульс частиц в системе центра масс. Для заданной M справедливо следующее соотношение в любой системе отсчета S

$$\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\right)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = M^2 c^2, \quad (5)$$

где E_1, E_2 - полные энергии, а $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ - импульсы этих частиц, заданные в той же системе отсчета

3. Пусть E_0 есть минимальная (пороговая) энергия протона, при которой во взаимодействии протона с реликтовым фотоном рождается Δ - частица. При E большей или равной энергии E_0 реакция (2) идет с большой вероятностью, при этом протон теряет энергию на рождение пи - мезона. Этот процесс многократно повторяют вторичные протоны из реакции (2) до тех пор, пока их энергия не станет меньше E_0 . При $E < E_0$ потери энергии за счет этого основного канала взаимодействия отсутствуют. Поскольку не существует более легких возбужденных состояний, чем Δ - частица, то энергия E_0 должна быть максимальной энергией протонов КЛ.

Направим ось OZ вдоль направления импульса p_p . В силу изотропности реликтового излучения потоки реликтовых фотонов равновероятны вдоль направлений $\pm OZ, \pm OX, \pm OY$.

Легко видеть, что при заданном модуле импульса $|p_\gamma|$, пороговая энергия реакции (2) E_0 минимальна для "лобового" столкновения, при котором фотон движется навстречу протону. Действительно, полная внутренняя энергия сталкивающихся частиц при минимальной начальной энергии (на пороге реакции) равна $M_\Delta c^2$. С другой стороны, из (5) имеем

$$M_\Delta^2 c^4 = (E_p + E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\gamma)^2 c^2. \quad (6)$$

Из этого выражения следует, что при заданной энергии фотона E_γ величина энергии протона E_p минимальна, если импульсы \mathbf{p}_p и \mathbf{p}_γ противоположно направлены.

За. В системе центра масс протона и реликтового фотона (ц.м. $p + \gamma$) имеем $\mathbf{q}_p = -\mathbf{q}_\gamma$, где \mathbf{q}_p – импульс протона КЛ, \mathbf{q}_γ – импульс фотона. $\Delta(1232)$ - частица покоится в системе ц.м. $p + \gamma$. Поэтому реакция (2) имеет место при условии

$$M_\Delta^2 c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q_\gamma^2 c^2} + q_\gamma c, \quad (7)$$

Где M_Δ – масса покоя $\Delta(1232)$, -частицы, m_p – масса покоя протона. Отсюда находим

$$[M_\Delta c^2 - q_\gamma c]^2 = m_p^2 c^4 + q_\gamma^2 c^2$$

Или

$$q_\gamma c = \frac{(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2M_\Delta c^2} \approx 259 \times 10^6 eV. \quad (8)$$

3b. Вариант 1.

Связь между импульсами реликтового фотона в с.ц.м. $p+\gamma$ из(8) и в системе Галактики p_γ дается преобразованием Лоренца:

$$p_{\gamma z} = G \left(q_{\gamma z} + \frac{V_0 E_\gamma^{cm}}{c} \right). \quad (9)$$

Для случая "лобового" столкновения имеем

$$p_\gamma c = \frac{1}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}} \left[|q_\gamma| c - \frac{V_0}{c} E_\gamma^{cm} \right] = \frac{1-V_0/c}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}} |q_\gamma| c, \quad (10)$$

Здесь E_γ^{cm} энергия фотона в системе ц.м. $p+\gamma$: $E_\gamma^{cm} = |q_\gamma| c$.

Исходя из выражения (10), введем отношение

$$k = \frac{p_\gamma}{q_\gamma} = \frac{1-V_0/c}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}}. \quad (11)$$

Численно находим

$$k = \frac{E_\gamma}{q_\gamma} = \frac{kT_r}{q_\gamma c} = \frac{2.3 \cdot 10^{-4}}{257 \times 10^6} = 8.9 \cdot 10^{-13} \ll 1. \quad (12)$$

Вследствие малости величины k , отношение V_0/c также близко к единице, поэтому его можно искать в виде

$$\frac{V_0}{c} = 1 - \varepsilon, \quad (13)$$

где $\varepsilon \ll 1$

Аналогичное преобразование импульса протона из системы ц.м. $p+\gamma$ (\mathbf{q}_p) в систему Галактики (\mathbf{p}_p) для случая "лобового" столкновения ($p_{pz} = \mathbf{p}_p, q_{pz} = \mathbf{q}_p$) имеет вид

$$p_p c = G \left(|q_p| c + \frac{V_0}{c} E_p^{cm} \right) = G \left[|q_p| c + (1 - \varepsilon) \sqrt{m_p^2 c^2 + q_p^2} c \right] =$$

$$G(M_\Delta c^2 - \varepsilon \sqrt{m_p^2 c^2 + |q_\gamma|^2 c}) \approx G M_\Delta c^2$$

Здесь учтено, что $\varepsilon \sqrt{m_p^2 c^2 + |q_\gamma|^2} c \ll M_\Delta c^2$. Осталось найти G- фактор преобразования Лоренца. Из выражения (13) получаем

$$k^2 = \frac{(1 - (\frac{V_0}{c}))^2}{1 - (V_0/c)^2} = \frac{\varepsilon^2}{1 - (1 - \varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}. \quad (15)$$

Отсюда находим

$$\varepsilon = \frac{2k^2}{1 + k^2} \ll 1. \quad (16)$$

Тогда для искомого G-фактора имеем

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 - (V_0/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{2 - \varepsilon}} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{2k^2} \sqrt{2 - \frac{2k^2}{1 + k^2}}} = \frac{1 + k^2}{2k} \approx \frac{1}{2k}. \quad (17)$$

Здесь использовано условие $k^2 \ll 1$.

Окончательно пороговый импульс протона для "лобового" столкновения из (14)-(17) и (8)

$$\begin{aligned} p_p c &= \frac{1}{2k} M_\Delta c^2 = \frac{q_\gamma}{2p_\gamma} M_\Delta c^2 = \frac{(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2M_\Delta c^2} \frac{M_\Delta c^2}{2p_\gamma} = \frac{(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{4p_\gamma} = \\ &= \frac{1232^2 - 938^2}{42.3 \cdot 10^{-4}} \times 10^{12} \text{ eV} = 7 \times 10^{20} \text{ eV} \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, максимальная энергия КЛ есть

$$E^{max} = E_0 = \sqrt{m_p^2 c^4 + p_p c^2} \approx p_p c = 7 \times 10^{20} \text{ eV}.$$

Экспериментальные данные показывают, что протоны более высоких энергий, чем 10^{21} eV , практически отсутствуют в КЛ.

Вариант 2. Можно найти скорость центра масс $x = \frac{V_0}{c}$ из уравнения (11) переписав его в виде

$$k^2(1 - x^2) = (1 - x)^2. \quad (20)$$

Это уравнение имеет два корня: нефизический корень $x=1$ и физический корень

$$x = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}. \quad (21)$$

Последнее выражение совпадает с (13), (16).

Вариант 3. Можно найти пороговую энергию, не используя преобразования Лоренца, но учитывая, что полная внутренняя энергия (масса покоя) любой физической системы M не зависит от системы отсчета. Рассматривая соотношение (6) в системе Галактики, находим на пороге реакции (2) для антипараллельных начальных импульсов ($p_p \uparrow \downarrow p_\gamma$)

$$M_\Delta^2 c^4 = m_p^2 c^4 + 2p_\gamma c(\sqrt{m_p^2 c^2 + p_p^2} + p_p c). \quad (22)$$

Из этого уравнения находим p_p

$$p_p = \frac{(M_\Delta^2 - m_p^2 - 2p_\gamma m_p)(M_\Delta^2 - m_p^2 + 2p_\gamma m_p)}{4p_\gamma(M_\Delta^2 - m_p^2)} c^2. \quad (23)$$

Поскольку для реликтового излучения имеет место соотношение $2p_\gamma m_p \ll (M_\Delta^2 - m_p^2)c$ то выражение (23) сводится к выражению (18).

4. Для конечной системы $\pi + N$ в системе центра масс реакции имеем

$$M_\Delta c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_\pi^2 c^4 + q_\pi^2 c^2}, \quad (24)$$

где m_π — масса покоя пи-мезона. Дважды возводя в квадрат полученное равенство, находим

$$(q_\pi c)^2 = \frac{[(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2 - m_\pi c^2)^2][(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2 + m_\pi c^2)^2]}{4M_\Delta^2 c^4} \quad (25)$$

$$q_\pi \approx 227 \times 10^6 \text{ MeV}/c. \quad (26)$$

Оценим потерю импульса протоном в реакции (2) в системе Галактики, учитывая что в системе центра масс реакции возможны две следующие конфигурации.

А) Пи-мезон вылетает вдоль положительного направления оси OZ, а протон движется в противоположном направлении OZ. При этом импульс конечного протона в сопутствующей системе находим по преобразованию Лоренца:

$$p'_{pz} = G \left(-q_\pi + \frac{v_0}{c} \sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2} \right) = \left| \frac{v_0}{c} = 1 - \varepsilon \right| = G \left(-q_\pi + \sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2} - \varepsilon \sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2} \right) \approx \frac{1}{2k} \left(-q_\pi + \sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2} \right). (27)$$

Здесь использовано (17) для множителя G. Очевидно, что конечный импульс p'_p может быть существенно меньше начального импульса p_p . Принимая начальное значение импульса протона равным максимальному для КЛ, $p_p = 10^{21} \text{ eV}/c$, имеем $q_\pi = 225 \times 10^6 \text{ eV}/c$ из (26), $k = 9 \times 10^{-13}$ из (12), и численно находим из (27): $p'_p = 4 \times 10^{17} \text{ eV}/c$.

В) Пи-мезон вылетает против положительного направления оси OZ, а протон движется в положительном направлении OZ. В этом случае в выражении (27) для импульса конечного протона надо изменить знак перед q_π на противоположный. При этом для максимального начального импульса протона $p_p = 7 \times 10^{20} \text{ eV}/c$ конечный импульс равен $p'_p \approx 6 \times 10^{20} \text{ eV}/c$.

5. Определим потери импульса в комптоновском рассеянии.

Вариант 1. При заданных условиях задачи конечный фотон и конечный протон в комптоновском рассеянии $p + \gamma \rightarrow p' + \gamma'$ вылетают вперед в положительном направлении оси OZ.

А) Сохранение энергии и импульса в системе Галактики в этом случае дает:

$$R_0 = E_p + E_\gamma = E'_p + E'_\gamma, (28)$$

$$R = p_p - p_\gamma = p'_p + p'_\gamma$$

Решая систему уравнений (28) относительно p'_p , находим

$$p'_p c = \frac{m_p^2 c^4 - (R_0 - R c)^2}{2(R_0 - R c)} (29)$$

Зная p'_p , из (28) легко найти p'_γ .

В) При вылете конечного фотона назад в системе Галактики имеем

$$E_p + E_\gamma = E'_p + E'_\gamma,$$

$$p_p - p_\gamma = p'_p + p'_\gamma, (30)$$

Отсюда находим, что $\Delta p_p = p_p - p'_p = -\frac{\Delta E_p}{c} = \frac{E_p - E'_p}{c}$, то есть изменение энергии (E/c) равно по абсолютной величине, но противоположно по знаку изменению импульса. Это возможно только при $\Delta p_p = -\Delta E_p = 0$, что соответствует столкновению без изменения энергии и импульса.

Вариант 2. В системе центра масс реакции вылетающий фотон движется вдоль оси OZ, а конечный протон - против OZ. Применяя преобразование Лоренца для этой конфигурации, находим для импульса конечного фотона в системе Галактики

$$p_{\gamma z} = G \left(q_{\gamma z} + \frac{v_{0z} E_{\gamma}^{cm}}{c} \right) = G \left(q_\gamma + \frac{v_{0z} E_{\gamma}^{cm}}{c} \right) = G q_\gamma \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) = \frac{1+k^2}{2k} \left(1 + \frac{1-k^2}{1+k^2} \right) q_\gamma = \frac{1}{2k} q_\gamma (31)$$

При максимальном импульсе протона КЛ $p_p = 10^{21} \text{ eV}/c$ имеем $q_\gamma = 257 \text{ MeV}/c$ из (8), $k = 9 \times 10^{-13}$ из (12) и численно находим из (31): $p'_\gamma \approx 1.5 \times 10^{20} \text{ eV}/c$. Импульс конечного протона при этом равен $p'_p = p_p - p_\gamma - p'_\gamma \approx 5.5 \times 10^{20} \text{ eV}/c$. Таким образом, импульс вылетающего фотона сравним по порядку величины с импульсом налетающего протона.

В) Если конечный фотон вылетает назад в системе Галактики, то и в системе центра масс он летит в отрицательном направлении оси OZ. В этом случае в формуле (9) надо поменять знак перед $(q_\gamma)_z$. Получаемое выражение для p'_γ совпадает по модулю с начальным импульсом фотона p_γ в (9), то есть процесс идет без изменения импульса фотона и протона.

6. При параллельных одинаково направленных начальных импульсах $p_p \uparrow \uparrow p_\gamma$ реакция возможна только если фотон идет вслед за протоном и, следовательно, догоняет протон (в то время как так как протон, идущий вслед за фотоном, догнать фотон не может). "Догоняющий" фотон должен иметь достаточно высокую энергию, чтобы возбудить Δ - изобару. При $p_p \uparrow \uparrow p_\gamma$ энергия фотона минимальна, если протон покоится, и находится из условия

$$M_\Delta^2 c^4 = (m_p c^2 + E_\gamma)^2 - (p_\gamma)^2 c^2 = m_p^2 c^4 + 2E_\gamma m_p c^2, \quad (32)$$

Что дает

$$E_\gamma = \frac{(M_\Delta^2 - m_p^2) c^4}{2m_p c^2} = 185 \text{ MeV}. \quad (33)$$

Это значительно больше энергии реликтовых фотонов.

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1	Записать аналитическое выражение (1)	0.25
	Получить численное значение в (1)	0.25
2	Записать выражение (5)	0.5
	Утверждение об инвариантности выражения (5)	0.5
3	Показать из выражения (6), что пороговая энергия минимальна при антипараллельных импульсах	0.25
	Получить выражение (8)	1.75
	Получить соотношение (10)	0.25
	Найти (13)(16) или (21)	1.5
	Найти G-фактор (17)	0.25
	Получить (19)	1
4	Получить выражение (25), (26)	0.5
	Получить (27)	0.5
5	Вывод из законов сохранения энергии-импульса (28)-(30)	0.5
	Вывод из преобразования Лоренца (31) пп. А и В	1.0
6	Вывод формулы (33)	1