Розвязок задачі 1:

так як $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{\mathrm{v}}^2/\mathrm{c}^2}}$ і $\vec{p} = \dfrac{m\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\vec{\mathrm{v}}^2/\mathrm{c}^2}}$, то

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\vec{\mathrm{v}}^2/\mathrm{c}^2} - \frac{m^2\vec{\mathrm{v}}^2c^2}{1-\vec{\mathrm{v}}^2/\mathrm{c}^2} = m^2c^4 \qquad (1)$$

$$\text{і } \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{\mathrm{v}},\ p^2 = \frac{E^2}{c^4}\vec{\mathrm{v}}^2 \qquad (2)$$

Якщо $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{c}}$, то $\vec{p}^2 = \dfrac{E^2}{c^2}$, отже $E^2 - \vec{p}^2c^2 = \ E^2 - \dfrac{E^2}{c^2}c^2 = 0$ звідси з (1) в силу $c \neq 0$ слідує $m = 0$

1.2 Розглянемо для простоти систему з двох частинок масами m_1 і m_2 відповідно. З (1) маємо $m_1 = \sqrt{\dfrac{E_1^2}{c^4} - \dfrac{\vec{p}_1^2}{c^2}}$ і $m_2 = \sqrt{\dfrac{E_2^2}{c^4} - \dfrac{\vec{p}_2^2}{c^2}}$. З іншого боку, враховуючи адитивність імпульсу і енергії в спеціальній теорії відносності, сумарна маса системи визначається $M = \sqrt{\dfrac{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2}{c^4} - \dfrac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{c^2}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - \dfrac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{c^2} + \dfrac{2E_1E_2}{c^4}} \neq m_1 + m_2$, отже властивість адитивності для маси в СТВ не виконується.

1.3 з (1) знаходимо вираз для маси системи з двох фотонів з енергіями E_1 та E_2 : $m^2c^4 = (E_1 + E_2)^2 - c^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - c^2\vec{p}_1^2 - 2c^2\vec{p}_1\vec{p}_2 - c^2\vec{p}_2^2$. Оскільки кожен з фотонів є без масовою частинкою, то $E_1^2 = c^2\vec{p}_1^2$ і $E_2^2 = c^2\vec{p}_2^2$, тому $m^2c^4 = 2E_1E_2 - 2c^2|\vec{p}_1|\cdot|\vec{p}_2|\cos\alpha = 2E_1E_2 - 2c^2\dfrac{E_1E_2}{c^2}\cos\alpha = 2E_1E_2(1-\cos\alpha) = 4E_1E_2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

Отже, маса системи з двох фотонів, кожен з яких має нульову масу, в заальному відмінна від нуля $m == \dfrac{2}{c^2}\sqrt{E_1E_2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1.4 Якщо $E_1 = E_2 = E$, то у випадку $\alpha = \pi$ (фотони летять в різні сторони) $m = \dfrac{E}{c^2}$, а у випадку $\alpha = 0$ (фотони летять в одну сторону) $m = 0$.

1.5. оскільки $\vec{p} = \gamma m\vec{\mathrm{v}}$, то з $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ отримуємо

$$\vec{F} = \gamma m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + m\vec{\mathrm{v}}\frac{d\gamma}{dt} = \gamma m\vec{a} + m\vec{\mathrm{v}}\left(-\frac{1}{2}\frac{(-2)\vec{\mathrm{v}}\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}}{(1-\mathrm{v}^2/c^2)^{3/2}}\right) = \gamma m\vec{a} + \gamma^3 m\vec{\mathrm{v}}(\frac{\vec{\mathrm{v}}\vec{a}}{c^2}) \qquad (3)$$

Помножимо скалярно отримане векторне співвідношення на $\vec{\mathrm{v}}$:

$\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{v}} = \gamma m\vec{a}\vec{\mathrm{v}} + \gamma^3 m\vec{\mathrm{v}}^2(\dfrac{\vec{\mathrm{v}}\vec{a}}{c^2})$, звідки знаходимо $\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{m\gamma(1+\gamma^2\vec{\mathrm{v}}^2/c^2)} = \dfrac{\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{m\gamma^3}$ і тоді підставивши це співвідношення в (3), знаходимо релятивістське узагальнення 2-го закону Ньютона:

$$\vec{F} - \frac{(\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{v}})\vec{\mathrm{v}}}{c^2} = m\gamma\vec{a} \qquad (4)$$

з якого слідує, що в релятивістському випадку прискорення в загальному не спрямовано за напрямком діючої сили, а має ще складову по швидкості. Якщо $\vec{F} \perp \vec{\mathrm{v}}$, то $\vec{F} = \gamma m\vec{a}$. Якщо $\vec{F} \parallel \vec{\mathrm{v}}$, то $\vec{F} = \gamma^3 m\vec{a}$.

Розвязок задачі 2

2.1 Запишемо вирази для довжини шляху $L^{\pm}$ в лабораторній (нерухомій) системі відліку (знак «+» відповідає хвилі, напрямок руху якої співпадає з напрямком обертання, знак «-» - хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку) :

$L^{\pm} = 2\pi R + R\Omega t^{\pm}$, де R – радіус кільця, Ω – кутова швидкість обертання, $t^{\pm}$ - час, який витрачають хвилі на обхід кільця. Якщо V_{φ} – швидкість хвилі відносно нерухомого кільця, то відносно рухомого кільця будемо мати в лабораторній системі відліку згідно релятивістському закону додавання швидкостей

$$V_{\varphi}^{\pm} = \frac{V_{\varphi} \pm R\Omega}{1 \pm \frac{V_{\varphi} R\Omega}{c^2}}$$, де c – швидкість світла.

Тоді часи t^{+} і t^{-} визначаються, як відношення $\frac{L^{+}}{V_{\varphi}^{+}}$ і $\frac{L^{-}}{V_{\varphi}^{-}}$ відповідно:

$$t^{\pm} = \frac{e^{\pm}}{V_{\varphi}^{\pm}} = \frac{2\pi R(1 \pm \frac{V_{\varphi} R\Omega}{c^2})}{V_{\varphi}(1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}$$, звідки знаходимо шукану різницю розповсюдження зустрічних хвиль

$$\Delta t = t^{+} - t^{-} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}.$$

2.2) 2.3) зі знайденого виразу слідує, що різниця не залежить від швидкості розповсюдження хвилі, а отже не залежить від того, чи заповнений оптичним середовищем інтерферометр чи ні і не залежить від природи хвиль, які генеруються джерелом.

2.4) для обчислення різниці фаз зустрічних хвиль на виході кільця, зручно перейти в систему відліку k', яка супроводжує обертання кільцевого інтерферометра, в силу того, що інтерференційна картина, фіксується приймачем, який є нерухомим відносно системи, що обертається. Згідно перетворенням Лоренца різниця часів розповсюдження зустрічних хвиль в системі відліку k' є

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$$, а різниця фаз зустрічних хвиль на виході з кільця

$$\Phi_S = \omega \Delta t' = \frac{4 S \Omega \omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$$ (S – площа кільця). А якщо визначити в ЛСВ? $\omega_{+} t_{+} - \omega_{-} t_{-}$???

Розв'язок задачі 3: Оскільки кулі не можуть прилягати одна до одної без щілин, то завжди в об'ємі, який займає якась кількість куль будуть порожні частини. Якщо радіус ядра R, радіус кульки r, тоді об'єм кулі (нуклона) дорівнює $V_{Í} = \frac{4}{3}\pi r^3$, об'єм ядра у вигляді кулі - $V_{ß} = \frac{4}{3}\pi R^3$, об'єм в ядрі, зайнятий нуклонами складає $V_{Ç} = A \cdot V_{Í}$, де А – кількість нуклонів (масове число). Щільність упаковки (або коефіцієнт упаковки) можна визначити як $\eta = \frac{A \cdot V_H}{V_{ß}}$

В цьому випадку очевидно, що кожна куля вписана в куб зі сторонами 2·r і коефіцієнт упаковки визначається як відношення об'єму кулі до об'єму куба.

$$\eta = \frac{V_{\hat{E}\acute{O}\ddot{E}^{2}}}{V_{\hat{E}\acute{O}\acute{A}\grave{A}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2\cdot r)^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$$

<u>Масова густина ядра</u> визначається як

$$\rho = \frac{M_{ß}}{V_{ß}} = \frac{A\cdot m_{\acute{i}}}{A\cdot V_{\acute{i}}\ /\eta} = \eta\cdot\frac{m_{\acute{i}}}{V_{\acute{i}}} = \eta\cdot\frac{m_{\acute{i}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \eta\cdot\frac{1.67\cdot 10^{-27}\ \hat{e}\tilde{a}}{1.33\cdot 3.14\cdot(0.84\cdot 10^{-15}\ \grave{i}\ )^3} =$$

$$= \eta\cdot 0.675\cdot 10^{18}\ \hat{e}\tilde{a}/\grave{i}^{\ 3} = 0.52\cdot 0.675\cdot 10^{18}\ \hat{e}\tilde{a}/\grave{i}^{\ 3} = 3.51\cdot 10^{17}\ \hat{e}\tilde{a}/\grave{i}^{\ 3}$$

де m_H – маса нуклона, $M_Я$ - маса ядра.
Оскільки кількість заряджених нуклонів дорівнює половині від кількості усіх нуклонів, <u>зарядова густина ядра</u> визначається як

$$\rho_Q = \frac{\frac{1}{2}A\cdot e}{V_{ß}} = \frac{1}{2}\frac{A\cdot e}{A\cdot V_{\acute{i}}\ /\eta} = \eta\cdot\frac{e}{2\cdot V_{\acute{i}}} = \eta\cdot\frac{e}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \eta\cdot\frac{1.6\cdot 10^{-19}\ \hat{E}\ddot{e}}{1.33\cdot 3.14\cdot(0.84\cdot 10^{-15}\ \grave{i}\ )^3} =$$

$$= \eta\cdot 0.323\cdot 10^{26}\hat{E}\ddot{e}/\grave{i}^{\ 3} = 0.74\cdot 0.323\cdot 10^{26}\hat{E}\ddot{e}/\grave{i}^{\ 3} = 1.68\cdot 10^{25}\hat{E}\ddot{e}/\grave{i}^{\ 3}$$

де е – заряд електрона
Для <u>радіуса ядра</u> маємо

$$R = \sqrt[3]{V_{ß}\ \frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{A\cdot V_{\acute{i}}}{\eta}\ \frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{A\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\eta}\ \frac{3}{4\pi}} = r\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\eta}}\cdot\sqrt[3]{A} = 0.84\cdot 10^{-15}\ \grave{i}\ \cdot\frac{1}{0.804}\sqrt[3]{A} =$$

$$= 1.04\cdot 10^{-15}\ \grave{i}\ \cdot\sqrt[3]{A}$$

Ця формула непогано співпадає із отриманою з експериментальних даних величиною $R = (1.2 \div 1.4)\cdot 10^{-15}\ \grave{i}\ \cdot\sqrt[3]{A}$, невелике перевищення вказує на те що упаковка нуклонів в ядрі менш щільна ніж максимально можлива.

Висновки:

Із результатів розрахунків слідує, що:

1) Масова густина та зарядова густина ядра не залежать від кількості нуклонів А.
2) Радіус ядра залежить від кількості нуклонів А як $A^{1/3}$
3) При щільності упаковки (коефіцієнті упаковки) $\eta = 0.52$
   a. Масова густина ядра $\rho = 3.51\cdot 10^{17}\ \hat{e}\tilde{a}/\grave{i}^{\ 3}$;
   b. Зарядова густина ядра $\rho_Q = 1.68\cdot 10^{25}\hat{E}\ddot{e}/\grave{i}^{\ 3}$
   c. Радіус ядра $R = 1.04\cdot 10^{-15}\ \grave{i}\ \cdot\sqrt[3]{A}$

Розвязок задачі 4

Розглянемо сферу радіуса R, всередині якої знаходяться галактики. Маса такої сфери дорівнює її об'єму, помноженому на шукану космічну густину маси ρ :

$$M = \frac{4\pi R^3\rho}{3}. \qquad \textbf{(1)}$$

З ньютонівської теорії гравітації випливає, що потенціальна енергія будь-якої типової галактики на поверхні даної сфери

$$П.Е.= -\frac{mMG}{R} = -\frac{4\pi mR^2\rho G}{3}, \quad (2)$$

де m **– маса галактики;** G **– ньютонівська гравітаційна стала,** $G = 6{,}67\cdot 10^{-8}\,см^3/(г\cdot с^2)$**. Швидкість даної галактики визначається законом Хаббла у вигляді**

$$V = HR, \quad (3)$$

де H **– параметр Хаббла. Відповідно, кінетична енергія галактики дорівнює**

$$К.Е.= \frac{mV^2}{2} = \frac{m(H(t))^2(R(t)^2)}{2}. \quad (4)$$

Повна енергія галактики є сумою кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = П.Е. + К.Е.= m(R(t))^2\left(\frac{1}{2}(H(t))^2 - \frac{4}{3}\pi\rho(t)G\right). \quad (5)$$

Ця величина повинна залишатися сталою в процесі еволюції Всесвіту.

Якщо повна енергія E **від'ємна, то галактика ніколи не зможе відлетіти на нескінченність, оскільки на дуже великих відстанях потенціальна енергія стає малою, і в такому випадку повна енергія дорівнює кінетичній, яка завжди додатня. Якщо ж повна енергія** E **додатня, галактика може досягнути нескінченності, маючи залишкову кінетичну енергію. Таким чином, умова того, що галактика ніколи не покине поверхню сфери, на якій знаходиться зараз,– це умова** $E = 0$**, що дає**

$$\frac{1}{2}(H(t))^2 = \frac{4}{3}\pi\rho(t)\, G.$$

Таким чином, для того щоб радіус Всесвіту не змінювався з часом, густина повинна мати значення

$$\rho(t) = \frac{3(H(t))^2}{8\pi G}. \quad (6)$$

Враховуючи, що H **дорівнює в даний момент значенню** 15 **км/с на мільйон світлових років, а світловий рік відповідає** $9{,}46\cdot 10^{12}$ **кілометрів отримуємо що в даий момент густина енергії Всесвіту повинна бути рівною**

$$\rho_{кр} = \frac{3}{8\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-8}\,см^2/(г\cdot с^2)}\left(\frac{15км/с/10^6\,св.років}{9{,}46\cdot 10^{12}\,км/св.років}\right)^2 = 4{,}5\cdot 10^{-30}\,г/см^3. \quad (7)$$

Це і є шукане сучасне значення критичної густини. Якщо значення густини у Всесвіті є більшим, ніж критичне, то розширення Всесвіту зміниться стисненням (радіус Всесвіту почне зменшуватись) і навпаки, якщо значення густини виявиться меншим, ніж критичне, то це буде означати, що Всесвіт буде розширбватись вічно. Зауважимо, що хоча даний результат отриманий із використанням принципів ньютонівської фізики, він насправді справедливий навіть тоді, коли вся матерія Всесвіту є ультрарелятивістською)

Якщо в одному грамі матерії міститься $6{,}02\cdot 10^{23}$ **ядерних частинок, то тоді для знайденого значення теперішньої критичної густини маємо приблизно** $2{,}7\cdot 10^{-6}$ **ядерних частинок в 1 см**^{3}**, або 0,0027 частинки в одному літрі.**

Характерний час розширення Всесвіту знаходимо, враховуючи що $H = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt}$**, і** $R \sim t^n$**, тобто час розширення (вік Всесвіту) є обернено пропорційним до значення параметру Хаббла в цей момент часу, тобто**

$$t_{розш}(t) = \frac{n}{H(t)} = n\sqrt{\frac{3}{8\pi\rho(t)G}}. \quad (8)$$

Тоді, використовуючи сучасне значення параметру Хабла знаходимо нинішній вік Всесвіту

$$(t_{розш}(t) = \frac{n}{H(t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{15км/с/10^6\,св.років}{9{,}46\cdot 10^{12}\,км/св.років}} = 1.4 \quad 10^{10}\,років$$

В момент часу, коли густина маси Всесвіту дорівнювала 3 тисяч мільйонів грам на кубічний сантиметр, вік Всесвіту тоді дорівнював (при n=1/2)

$$t_{розш} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8\pi\cdot 3{,}8\cdot 10^{9}\,(г/см^{3})\cdot 6{,}67\cdot 10^{-8}\,см^{3}/(г{\cdot}с^{2})}} = 0{,}011с.$$

Розглянемо тепер як змінюються середня густина енергії Всесвіту з плином часу. Припустимо, що в момент часу t типова галактика масою m знаходиться на відстані $R(t)$ від довільно вибраної центральної галактики, наприклад нашої власної. Враховуючи, що повна (кінетична плюс потенціальна) енергія цієї галактики дорівнює

$$E = mR^{2}(t)\left[\frac{1}{2}H^{2}(t) - \frac{4}{3}\pi\rho(t)G\right], \qquad \textbf{(9)}$$

де $H(t)$ і $\rho(t)$ – значення параметру Хаббла і середньої густини енергії в момент часу t. Енергія повинна бути завжди сталою. Щоб зберегти енергію E сталою, два члени в дужках повинні скорочуватися, тож маємо співвідношення, яке звязує між собою радіус Всесвіту з густиною Всесвіту і яке носить назву першого рівняння Фрідмана

$$\frac{1}{2}H^{2}(t) \quad = \quad \frac{4}{3}\pi\rho(t)G. \qquad \textbf{(10)}$$

Далі встановимо як змінюється $\rho(t)$ зі зміною $R(t)$ Якщо середня густина енергії визначається енергіями ядерних частинок, тоді повна маса всередині відповідної сфери радіуса $R(t)$ просто пропорційна масі ядерних частинок всередині цієї сфери і, відповідно, повинна залишатися сталою:

$$\frac{4\pi}{3}\rho(t)R^{3}(t) = const. \qquad \textbf{(11)}$$

Звідси $\rho(t)$ обернено пропорційна $R^{3}(t)$:

$$\rho(t) \sim \frac{1}{R^{3}(t)} = \frac{1}{t^{3n}} \qquad \textbf{(12)}$$

Для n=1.2 маємо $\rho(t) \sim \dfrac{1}{t^{3/2}}$

Розвязок задачі 5

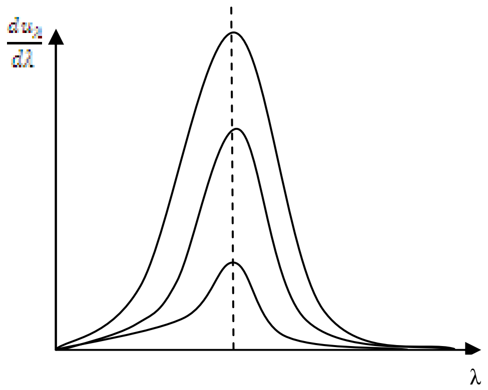
Розв’язок 5.1: при λ>>1 $e^{\left(\frac{\hbar c}{kT\lambda}\right)} \cong 1 + \dfrac{\hbar c}{kT\lambda}$ тому $du\,|_{\lambda>>1} = \dfrac{8\pi\hbar c}{\lambda^{5}}\dfrac{d\lambda}{\hbar c/kT\lambda} = \dfrac{8\pi kT}{\lambda^{4}}d\lambda$ (формула Релея-Джинса)

Розв’язок5.2: у випадку $\lambda \to 0$ $\dfrac{du}{d\lambda} = \dfrac{8\pi kT}{\lambda^{4}} \to \infty$, отже повна енергія випромінювання чорного тіла буде рівна нескінченності, що свідчить про неможливість застосування формули Релея-Джинса для всього інтервалу довжин хвиль.

Розв’язок5.3: положення максимуму визначаємо прирівнюючи до нуля першу похідну

$$\left(\frac{du_{\lambda}}{d\lambda}\right)_{\lambda}' = 0 \to -\frac{5}{\lambda^{6}}\frac{\lambda}{e^{\frac{\hbar c}{kT\lambda}} - 1} + \frac{1}{\lambda^{5}}\frac{\frac{\hbar c}{kT}\frac{1}{\lambda^{2}}e^{\frac{\hbar c}{kT\lambda}}}{\left(e^{\frac{\hbar c}{kT\lambda}} - 1\right)^{2}} = 0 \to$$

$$\to \frac{5kT}{\hbar c}\lambda = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar c}{kT\lambda}}} \to e^{-\frac{\hbar c}{kT\lambda}} = 1 - \frac{\hbar c}{5kT\lambda}$$



З підвищенням температури доля короткохвильового випромінювання в спектрі збільшується. Тому колір випромінювання може служити характеристикою температури випромінювання.

Розв'язок5.4: $dN = \frac{du}{E} = \frac{du}{\left(\frac{\hbar c}{\lambda}\right)} = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{d\lambda}{e^{\frac{\hbar c}{kT\lambda}}-1}$

закон зміщення Віна $\lambda_{\max} = \frac{1}{4{,}97}\frac{\hbar c}{kT}$

Розв'язок5.5:
5.5.1 вважаємо, ще гребні хвиль покидають джерело випромінювання в регулярні моменти часу, розділені періодом T. Якщо джерело рухається від спостерігача зі швидкістю v, тоді за час випромінювання двох послідовних гребенів джерело проходить відстань vT. Це збільшує час, необхідний на те, щоб гребінь хвилі дійшов від джерела до спостерігача, на величину $\frac{vT}{c}$, тому час, який проходить між появою двох послідовних хвильових гребенів в точці спостереження, дорівнює $T' = T + \frac{vT}{c}$, довжина хвилі після випромінювання $\lambda = cT$, а довжина хвилі в момент прийому $\lambda' = cT'$. тому $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{T'}{T} = 1 + \frac{v}{c}$
5.5.2 довжини хвиль змінюються пропорційно розміру Всесвіту і будуть мати нове значення $\lambda' = f\lambda$. Після розширення густина енергії du'_λ, в новому інтервалі хвиль від λ' до $\lambda' + d\lambda'$ менша від початкової густини енергії du в старому інтервалі довжин хвиль λ до $\lambda + d\lambda$ по двом різним причинам
а) об'єм Всесвіту збільшився в f^3 раз, тому число фотонів в одиниці об'єму зменшилось в f^3 раз, тобто змінилось на множник f^{-3}
б) енергія кожного фотону обернено пропорційна його довжині хвилі і тому зменшилась на множник f^{-1}
Таким чином, густина енергії зменшилась на загальний множник f^{-4}:

$$du' = f^{-4}du = \frac{8\pi\hbar c}{\lambda^5}\frac{1}{f^4}d\lambda\left[e^{\frac{\hbar c}{kT\lambda}}-1\right]^{-\lambda} = \frac{8\pi\hbar c}{\lambda'^5}d\lambda'\left[e^{\frac{\hbar cf}{kT\lambda'}}-1\right]^{-\lambda}$$

випромінювання абсолютно чорного тіла у Всесвіті, який розширюється, продовжує описуватись формулою Планка, але з температурою, яка падає обернено пропорційно масштабу розширення.

Рішення 6.1 Із закону збереження 4-імпульсу витікає, що

$$\vec{\mathrm{P}}_e + \vec{\mathrm{P}}_\gamma =' \vec{P}'_e + \vec{\mathrm{P}}'_\gamma$$

(Індекс γ відноситься до фотону, штрихами відмічені величини після розсіяння). Оскільки 4-імпульс електрону після розсіяння для нас нецікавий, скористаємось загальновідомим способом і виключимо його:

$$(\vec{\mathrm{P}}_e + \vec{\mathrm{P}}_\gamma - \vec{\mathrm{P}}'_\gamma)^2 = \vec{\mathrm{P}}^2{}_{e'} = -m_e^2,$$

Або, оскільки
$$\vec{\mathrm{P}}_\gamma^2 = 0,$$
$$-m_e^2 + 2\vec{\mathrm{P}}_e \cdot \vec{\mathrm{P}}_\gamma - 2\vec{\mathrm{P}}_e \cdot \vec{\mathrm{P}}'_\gamma - 2\vec{\mathrm{P}}_\gamma \cdot \vec{\mathrm{P}}'_\gamma = -m_e^2.$$

В лабораторній системі відліку

$$\vec{\mathrm{P}}_e = (m_e, \vec{0}),$$

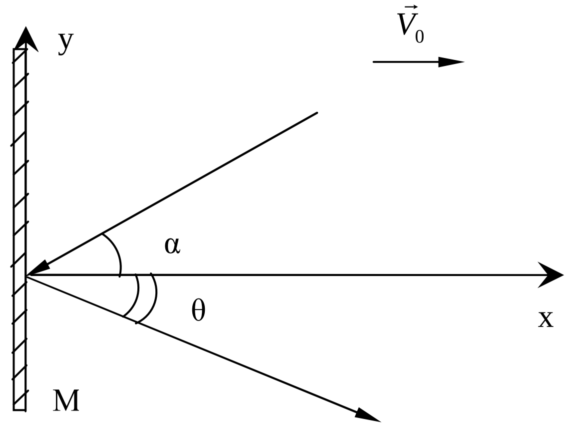
$\vec{\mathrm{P}}\gamma = (h/\lambda, h/\lambda\vec{e}_i), \vec{e}_i$ - одиничний 3-вектор в напрямку нелітаючого фотону

$\mathrm{P}'_\gamma = (h/\lambda'', h/\lambda'\vec{e}_0)\vec{e}_0$ - одиничний 3-вектор в напрямку випущеного фотону

Тому $$-\frac{m_e h}{\lambda} + \frac{m_e h}{\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda\lambda'} - \frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\vartheta = 0.$$

Множимо на $\lambda\lambda'$, отримуємо $\lambda' - \lambda = (h/m_e)(1-\cos\vartheta)$.

Розв'язок задачі № 9.



а) До зіткнення в нерухомій системі координат (СК) хвильовий 4-вектор має компоненти

$$k^\mu = \left\{\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right\} = \left\{\frac{\omega}{c}; -\frac{\omega}{c}\cos\alpha, -\frac{\omega}{c}\sin\alpha, 0\right\}$$

В силу $\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$ переходимо в СК, пов'язану з рухомим дзеркалом.

б) До зіткнення з дзеркалом в цій СК хвильовий вектор має компоненти:

$$k'^\mu_{до} = \begin{bmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & -\beta\kappa & 0 & 0 \\ -\beta\kappa & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega/c \\ -(\omega/c)\cos\alpha \\ -(\omega/c)\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(\omega/c)(1+\beta\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{(\omega/c)(\beta+\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -(\omega/c)\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

в) Після зіткнення в цій же СК маємо (кут падіння = куту відбивання)

$$k'^\mu_{після} = \begin{bmatrix} \dfrac{(\omega/c)(1+\beta\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{(\omega/c)(\beta+\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -(\omega/c)\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

г) Переходимо в СК, в якій дзеркало має швидкість $\vec{V} \neq 0$. Після зіткнення в цій СК

$$k^\mu_{після} = \begin{bmatrix} \kappa & \beta\kappa & 0 & 0 \\ \beta\kappa & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{(\omega/c)(1+\beta\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{(\omega/c)(\beta+\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -(\omega/c)\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega}{c}\dfrac{1+\beta\cos\alpha+\beta(\beta+\cos\alpha)}{1-\beta^2} \\ \dfrac{\omega}{c}\dfrac{\beta+\cos\alpha+\beta(1+\beta\cos\alpha)}{1-\beta^2} \\ -(\omega/c)\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega'}{c} \\ \dfrac{\omega'}{c}\cos\theta \\ -\dfrac{\omega'}{c}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

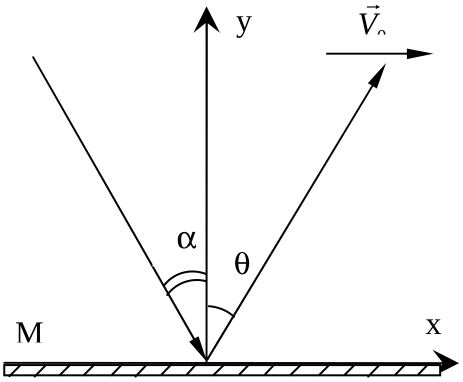
Порівняємо відповідні компоненти хвильового вектора після зіткнення:

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c}\frac{1+\beta^2+2\beta\cos\alpha}{1-\beta^2}; \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1+2\beta\cos\alpha+\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\frac{\omega'}{c'}\cos\theta = \frac{\omega}{c}\frac{\beta(1+\beta\cos\alpha)+(\beta+\cos\alpha)}{1-\beta^2};$$

$$\cos\theta = \frac{\omega}{\omega'}\frac{\beta(1+\beta\cos\alpha)+(\beta+\cos\alpha)}{1-\beta^2} = \frac{2\beta+\beta^2\cos\alpha+\cos\alpha}{1+2\beta\cos\alpha+\beta^2}$$

<u>Розв'язок задачі № 9 у випадку паралельного руху.</u>



Ідея розв'язку є ідентичною до ідеї розвязку задачі № 5 – тобто записуємо 4-вектор k^{μ} в не рухомій СК, потім переходимо в СК, зв'язану з дзеркалом, а потім повертаємось знову в нерухому СК.
Перейдемо в нерухому СК: до зіткнення в нерухомій СК 4-вектор імпульсу є

$$k^{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \frac{\omega}{c}\sin\alpha \\ -\frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

До зіткнення в ЛСК

$$k'^{\mu}_{до} = \begin{bmatrix} \kappa & -\beta\kappa & 0 & 0 \\ -\beta\kappa & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \frac{\omega}{c}\sin\alpha \\ -\frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c}\frac{1-\beta\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\omega}{c}\frac{\sin\alpha-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Після зіткнення в ЛСК

$$k'^{\mu}_{після} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c}\frac{1-\beta\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\omega}{c}\frac{\sin\alpha-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Після зіткнення в нерухомій СК

$$k^{\mu}_{після} = \begin{bmatrix} \kappa & \beta\kappa & 0 & 0 \\ \beta\kappa & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c}\frac{1-\beta\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\omega}{c}\frac{\sin\alpha-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c}\frac{1-\beta\sin\alpha+\beta\sin\alpha-\beta^2}{1-\beta^2} \\ \frac{\omega}{c}\frac{\beta(1-\beta\sin\alpha)+\sin\alpha-\beta}{1-\beta^2} \\ \frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \frac{\omega}{c}\frac{\sin\alpha(1-\beta^2)}{1-\beta^2} \\ \frac{\omega}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega'}{c'} \\ \frac{\omega'}{c'}\sin\theta \\ \frac{\omega'}{c'}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega' = \omega \Rightarrow \frac{E_{після}}{E_{до}} = 1.$$

Порівнюючи $k_x = \frac{\omega}{c}\sin\alpha$ до зіткнення з $k_x = \frac{\omega'}{c}\sin\theta$ після зіткнення приходимо до висновку $\alpha = \theta$.

Розв'язок задачі 8

1a) Для електрона та фотона маємо наступні співвідношення:

$$E^2 = \mathrm{p}^2\mathrm{c}^2 + \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4 \quad \text{та} \quad E_\gamma = \mathrm{kc}, \tag{1}$$

де k – імпульс фотона. Запишемо закони збереження енергії та імпульсу.

Закон збереження енергії.

$$E_0 = E_1 + E_\gamma, \quad \text{або} \quad E_0^2 = E_1^2 + k^2c^2 + 2E_1kc.$$

З врахуванням (1) останню рівність можна переписати у вигляді

$$p_0^2c^2 = p_1^2c^2 - k^2c^2 + 2E_0kc. \tag{2}$$

Закон збереження імпульсу.

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{p}_0 - \vec{k} = \vec{p}_1$$

Підносячи останню рівність до квадрата, отримаємо

$$p_0^2c^2 + k^2c^2 - 2(\vec{p}_0 \cdot \vec{k})\mathrm{c}^2 = p_1^2c^2. \tag{3}$$

Віднімаючи рівності (2) та (3), знаходимо:

$$(\vec{p}_0 \cdot \vec{k}) = \frac{kE_0}{c},$$

або, враховуючи, що $E = \frac{c^2p}{v}$,

$$\cos\theta = \frac{c}{v}. \tag{4}$$

Для електрона $\frac{c}{v} > 1$ і тому випромінювання фотона не можливе.

1b) В системі відліку, де початковий електрон знаходиться у спокої він має енергію $E_0 = mc^2$. Після випромінювання фотона електрон отримує імпульс віддачі і починає рухатись. В результаті його енергія збільшується. Закон збереження енергії, очевидно, не виконується.

2a) З рівняння $\mathrm{E} = \sqrt{\mathrm{p}^2\mathrm{c}^2 - \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4}$ знаходимо швидкість руху тахіона

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{\mathrm{p}^2\mathrm{c}^2 - \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4}} > c.$$

2b) Рівняння (2) та (3) залишаються в сили і для тахіона. При цьому, рівняння (4) вже не суперечить умові $\cos\theta < 1$, оскільки для тахіона $v > c$. Для тахіона не існує системи відліку де він покоїться і тому доведення типу 1b) не проходить.

Розв'язок 11.

Природна система одиниць часто використовується для спрощення запису. Вона відповідає вимірюванню швидкості в одиницях швидкості світла *c*, в той час як величини з розмірністю дії вимірюються в одиницях $\hbar$. В такому випадку одиниці виміру будь якої величини можна звести до лише одної: енергії, що зазвичай вимірюється в *eV*.

$$M = M\frac{c^2}{c^2} = \frac{eV}{c^2} = eV$$

$$L = L\frac{\hbar c}{\hbar c} = L\frac{\hbar L/T}{ML^2/T\,c} = (eV)^{-1}\hbar c = (eV)^{-1}$$

$$T = T\frac{c}{c} = \frac{L}{c} = (eV)^{-1}\hbar = (eV)^{-1}$$

$$v = \frac{L}{T} = (eV)^0$$

$$F = \frac{mL}{T^2} = (eV)^2\frac{1}{\hbar c} = (eV)^2$$

$$F_e = \frac{e^2}{L^2} \Rightarrow e^2 = F_e L^2 = (eV)^0\hbar c = (eV)^0$$

$$E = \frac{F_e}{e^2} = (eV)^2$$

$$F_m = evB \Rightarrow B = \frac{F_m}{ev} = (eV)^2\hbar^{-3/2}c^{-5/2}$$

Відмітимо, що розмірність часу та довжини можна отримати якщо розглянути наприклад хвилю з енергією *E*. Відповідна частота (що є величиною оберненою до часу) визначається з $E = \hbar\omega$ і аналогічно, довжина хвилі є величиною оберненою до енергії.

Природна система одиниць дозволяє проводити розрахунки просто відкидаючи всі $\hbar$ і *c* в рівняннях. Однак, якщо необхідно порівняти отриманий результат з чисельними даними, то потрібно повернутися до звичайних одиниць, як сантиметри, грами, секунди. Як можна побачити, ці співвідношення є однозначними

$$1s \rightarrow \frac{1s}{\hbar} = \frac{1}{0.66}10^{15}eV = 1.51\cdot 10^{15}eV$$

І навпаки, маючи час заданий в $(eV)^{-1}$ можна отримати еквівалент в стандартних одиницях

$$T(eV)^{-1} \rightarrow T(eV)^{-1}\hbar = T\cdot 0.66\cdot 10^{-15}s$$

Аналогічним чином

$$1cm \rightarrow 1cm\frac{1}{\hbar c} = \frac{1}{197}10^7(eV)^{-1} = 5.08\cdot 10^4(eV)^{-1}$$

І навпаки, маючи довжину задану в $(eV)^{-1}$ можна отримати еквівалент в стандартних одиницях

$$L(eV)^{-1} \rightarrow L(eV)^{-1}\hbar c = L\cdot 1.97\cdot 10^{-7}c$$

Для електричного заряду

$$1esu=\sqrt{erg\cdot cm}\Rightarrow q^2=1\to \hbar c=1.05\cdot 3\cdot 10^{10-27}=3.15\cdot 10^{-17}(esu)^2$$

Використовуючи 1eV = 1.602·10^{-19} J, M_{proton} = 0.938 GeV/c^2 знаходимо швидкість протонів, що виходять з протонного синхротрону:

$$M_P\gamma c^2=450GeV\Rightarrow \frac{1}{1-\beta^2}=\frac{(450GeV)^2}{M_P^2c^4}\Rightarrow \beta=\sqrt{\frac{\frac{(450)^2}{(0.938)^2}-1}{\frac{(450)^2}{(0.938)^2}}}=0.99998.$$

0,9999978?