Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ГЕОМЕТРИЯ-11

Конспекты уроков по теме: "Векторы и координаты-3"

Харьков, 2016 г.

Поурочное планирование (15 часов)

Урок 1. Уравнения прямой.

Урок 2. Переход от одной формы записи уравнений прямой к другой.

Урок 3. Угол между прямыми.

Урок 4. Условия пересечения прямых.

Урок 5. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.

Урок 6. Общий перпендикуляр к двум данным прямым. Расстояние между прямыми.

Урок 7. *Самостоятельная работа* по теме: "Уравнения прямой".

Урок 8. Взаимное положение прямой и плоскости.

Урок 9. Прямая, перпендикулярная плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Урок 10. Уравнение сферы. Взаимное положение прямой и сферы.

Урок 11. Взаимное положение плоскости и сферы. Плоскость, касательная к сфере.

Урок 12. *Самостоятельная работа* по теме: "Прямая и плоскость в пространстве. Сфера".

Урок 13. Обобщающее занятие по теме.

Урок 14. Контрольная работа.

Урок 15. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Уравнения прямой

1°. Общие уравнения прямой

1) Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух плоскостей. Следовательно, уравнение прямой может быть записано в виде:

$$l : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

при условии непропорциональности коэффициентов при неизвестных.

Иногда уравнения (1) называют *общими уравнениями прямой.*

2) Направляющий вектор $\overrightarrow{a}$ прямой (1) может быть задан соотношением

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2},$$

где $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ – нормали плоскостей, образующих прямую.

2°. Упражнения

1) Укажите особенности в расположении следующих прямых:
а) $l : \begin{cases} a_1x + d_1 = 0, \\ b_2y + d_2 = 0; \end{cases}$ б) $l : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$

2) При каком значении параметра d прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + d = 0, \end{cases}$ пересекает ось OZ?

3) При каких значениях параметров b и d прямая $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + by + z + d = 0, \end{cases}$ лежит в плоскости (XOY)?

3°. Другие формы записи уравнения прямой

1) Прямую можно задать и другим способом. Пусть $A_(\overrightarrow{r_0})$ – некоторая фиксированная точка прямой l с напрвляющим вектором $\overrightarrow{a}$, $A(\overrightarrow{r})$ – произвольная точка этой прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$ и $\overrightarrow{a}$ – коллинеарны. Отсюда получаем, что уравнение прямой можно записать в виде

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{a} = 0. \tag{2}$$

Это – векторное уравнение прямой с данным направляющим вектором, проходящей через данную точку.

2) Уравнение (2) можно переписать в виде: $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{r_0} \times \overrightarrow{a}$. Обозначая $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{r_0} \times \overrightarrow{a}$, приходим к т. н. *общему векторному уравнению прямой*:

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}, \quad (\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \neq 0). \tag{3}$$

3) Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$ и $\overrightarrow{a}$ можно записать по-другому, воспользовавшись леммой о коллинеарных векторах: $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = t\overrightarrow{a}$, откуда получаем *параметрическое уравнение прямой*:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

4) Пусть $A_1(\overrightarrow{r_1})$ и $A_2(\overrightarrow{r_2})$ – две произвольные точки прямой l. Тогда направляющий вектор этой прямой можно записать в виде, $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$. Поэтому параметрическое уравнение прямой, проходящей через две данные точки, имеет вид:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \text{ или } \overrightarrow{r} = (1-t)\overrightarrow{r_1} + t\overrightarrow{r_2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

5) Заметим, что отрезок A_1A_2 прямой l задается уравнением (5), где $t \in [0, 1]$.

6) Запишем уравнения (4) и (5) в координатах. Пусть $\overrightarrow{a} = (m, n, p)$, $\overrightarrow{r_0} = (x_0.y_0, z_0)$, $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$. Тогда из (4)

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений t, получаем *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{6}$$

Замечание. *В уравнении (6) (m, n, p) – координаты направляющего вектора прямой. При выводе (6) подразумевалось, что $mnp \neq 0$. Однако обычно принято писать каноническое уравнение прямой и в том случае, когда некоторые координаты направляющего вектора равны 0. Так запись*

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{1}$$

означает, что $x = 1$, $y = -2 + 4y$, $z = 3 + t$.

7) Аналогично предыдущему преобразовывая уравнение (5), приходим к уравнению прямой, проходящей через точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}. \tag{7}$$

Домашнее задание

1) Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$
для того, чтобы прямая:

а) проходила через начало координат;

б) была параллельна оси OX;

в) пересекала ось OY;

г) совпадала с осью OZ;

д) была параллельна плоскости YOZ;

е) лежала в плоскости XOZ?

2) При каких значениях α и β точка $M(1;5;8)$ лежит на прямой
$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 7 - \alpha t, \\ z = 8 + \beta t\,? \end{cases}$$

3) Составьте уравнения прямой, проходящей через начало координат и точку $P(a;b;c)$.

4) Лежат ли на одной прямой точки $A(3;0;1)$, $B(0;2;4)$ и $C\left(1;\dfrac{4}{3};3\right)$?

5) Прямая l пересекает две координатные плоскости в точках $A(x_1;y_1;0)$ и $B(x_2;0;z_2)$. Найдите координаты точки пересечения прямой l с третьей координатной плоскостью.

Урок 2. Переход от одной формы записи уравнений прямой к другой

1°. Повторение и проверка д.з.

1) Какие формы записи уравнения прямой вы знаете?

2) Как записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки?

2°. Переход от одной формы записи уравнений прямой к другой

При решении различных задач часто бывает необходимо перейти от одной формы записи уравнений прямой к другой. Обсудим, как это делается.

1) Совсем просто перейти от параметрических уравнений прямой к каноническим и обратно. Действительно, если

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \text{, то } l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

   Обратный переход также очевиден.

2) Простота описанного перехода объясняется тем, что для записи уравнений обоих типов достаточно знать радиус-вектор (координаты) одной точки прямой l и направляющий вектор этой прямой. По этой же причине легко перейти от параметрических уравнений или канонических уравнений к общему векторному уравнению. Пусть $\overrightarrow{a} = (m, n, p)$, $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$. Тогда $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{a} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, где $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{r_0} \times \overrightarrow{a}$.

   Упражнение: От параметрических уравнений $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$ перейти к общему векторному уравнению.

3) Несколько сложнее осуществить обратный переход. Итак, поставим задачу научиться переходить от общего векторного уравнения $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ к параметрическому или каноническому уравнению. Понятно, что $\overrightarrow{a}$ – направляющий вектор прямой. Следовательно, необходимо найти радиус-вектор $\overrightarrow{r_0}$ какой-нибудь точки прямой $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. Будем искать $\overrightarrow{r_0}$ в виде $\overrightarrow{r_0} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$. Тогда $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, где $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. Легко убедиться, что вектор $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{b}$, откуда $\lambda > 0$. С другой стороны, $|\lambda| \cdot |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$, откуда $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|^2}$. Т. е.

$\lambda = \dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|^2}$. (Случай $\overrightarrow{b} = 0$ сразу же приводит к $\overrightarrow{r_0} = 0$). Т. о., $\overrightarrow{r_0} = \dfrac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}$ и, окончательно,

$$\overrightarrow{r} = \frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} + \overrightarrow{a} \cdot t.$$

Упражнение: Запишите каноническое уравнение прямой $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, где $\overrightarrow{a} = (2; 6; -3)$, $\overrightarrow{b} = (3; 0; 2)$.

Замечание. *Переход от общего векторного уравнения к каноническому или параметрическому можно выполнить и по-другому. Пусть* $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{a} = (m, n, p)$, $\overrightarrow{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (py - nz)\overrightarrow{i} + (mz - px)\overrightarrow{j} + (nx - my)\overrightarrow{k} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k} \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \begin{cases} py - nz = \alpha, \\ mz - px = \beta, \\ nx - my = \gamma. \end{cases} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Если, например, $p \neq 0$, *то* $\begin{cases} y = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{n}{p} \cdot z, \\ x = -\dfrac{\beta}{p} + \dfrac{m}{p} \cdot z, \\ z = z. \end{cases}$ *(третье уравнение есть следствие первых двух). Окончательно получаем:*

$$\frac{x + \frac{\beta}{p}}{m} = \frac{y - \frac{\alpha}{p}}{n} = \frac{z}{p}.$$

4) Пусть теперь прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Как в этом случае найти канонические или параметрические уравнения?

Пусть $l \ : \ \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$ Обозначим $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Тогда направляющий вектор $\overrightarrow{a}$ прямой l можно задать в виде $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Для того, чтобы найти координаты (x_0, y_0, z_0) какой-нибудь точки прямой, положим, например, $x_0 = 0$. Получим систему $\begin{cases} b_1y_0 + c_1z_0 = -d_1, \\ b_2y_0 + c_2z_0 = -d_2. \end{cases}$ Если эта система совместна, то находим из нее y_0 и z_0. Если же нет (т. е. рассматриваемая прямая параллельна плоскости (YOZ)), полагаем $y_0 = 0$ и делаем аналогичные операции.

Упражнение: Запишите параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 2x - y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

5) Пусть опять прямая задана двумя плоскостями: $\begin{cases} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} = p_1, \\ \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} = p_2. \end{cases}$ Как записать общее векторное уравнение прямой? Направляющий вектор определить легко: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Поэтому уравнение имеет вид $\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}) = \overrightarrow{b}$. Но по формуле для двойного векторного произведения $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$. Поэтому

$$\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}) = \overrightarrow{n_1}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2}) - \overrightarrow{n_2}(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1}) = p_2 \cdot \overrightarrow{n_1} - p_1 \cdot \overrightarrow{n_2}.$$

Это и есть искомое уравнение.

6) В заключение заметим, что нет необходимости переходить от, например, канонического уравнения к уравнению прямой как линии пересечения двух плоскостей, поскольку мы на прошлом уроке отмечали, что каноническое уравнение – частный случай общего уравнения.

Домашнее задание

1) Зная канонические уравнения прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+5}{2}$, напишите ее общее векторное уравнение.

2) Зная общее векторное уравнение прямой $\overrightarrow{r} \times \left(2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{k}\right) = 21\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$, напишите ее параметрические уравнения.

3) Приведите уравнения прямых к каноническому виду:

   а) $\begin{cases} 2x - 3y - z + 3 = 0, \\ 5x - y + z - 8 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 3z - 2 = 0, \\ -3x + 4y - 6z + 21 = 0. \end{cases}$

4) Напишите параметрические уравнения каждой из прямых, по которым плоскость $3x + 8y + z - 11 = 0$ пересекается с координатными плоскостями.

5) Напишите общее векторное уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости $5x + 3y - 2z - 1 = 0$ и $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Урок 3. Угол между прямыми

1°. Угол между прямыми

Угол между прямыми l_1 и l_2 либо равен углу между их направляющими векторами, либо дополняет его до 180°. Поэтому:

1) Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их направляющие векторы. Например, если прямые заданы каноническими уравнениями
$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$
то $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

2) **Упражнения:**

   (1) Через точку $M(2; -5; 3)$ проведите прямую,
   а) параллельную оси OZ;
   б) параллельную прямой $\dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y - 2}{-6} = \dfrac{z + 3}{9}$;
   в) параллельную прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

   (2) Определите взаимное расположение прямых
   $$l_1 : \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z - 2}{7} \text{ и } l_2 : \frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 6}{2} = \frac{z + 5}{-14}.$$

3) Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы ортогональны. Если l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями, то $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

4) **Упражнения:**

   (1) Напишите каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 3; -2)$ и перпендикулярной оси ординат и прямой $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$.

   (2) Даны точка $N(1; 1; 1)$ и прямая $l : \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$ Найдите на прямой l такую точку M, что $MN \perp l$.

5) В общем случае угол между прямыми с направляющими векторами $\overrightarrow{a_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overrightarrow{a_2} = (m_2, n_2, p_2)$ может быть найден из соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}|}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

6) **Упражнение:** Найдите угол между прямыми

$$\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = 0 \text{ и } \overrightarrow{r} \times (2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}) = 6\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}.$$

Домашнее задание

1) Через точку $Q(2; 1; -3)$ проведите прямую, параллельную прямой
$$\overrightarrow{r} \times \left(4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) = 7\overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

2) Через точку $K(1; 2; 5)$ проведите прямую, перпендикулярную двум прямым $\overrightarrow{r} \times \left(5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}\right) = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{r} \times \left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$.

3) В плоскости XOZ найдите прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{1}$.

4) Какому условию должны удовлетворять числа α и β, чтобы прямые
$$\begin{cases} x = 3 - 5t, \\ y = 2 + t, \\ z = \alpha t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = u, \\ y = 5 - \beta u, \\ z = 2 - u \end{cases}$$
были взаимно перпендикулярны?

5) Найдите угол между осью аппликат и прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$.

6) Определите угол между двумя прямыми
$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Урок 4. Условия пересечения прямых

1°. Условия пересечения прямых

1) Пусть даны две прямые

$$l_1 : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a_1} = 0 \text{ и } l_2 : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{a_2} = 0.$$

Для того, чтобы прямые l_1 и l_2 лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ были компланарны, т. е.

$$(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = 0. \tag{9}$$

Т. о., если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то выполнение условия (9) является необходимым и достаточным для того, чтобы l_1 и l_2 пересекались.

2) В координатной форме имеем следующее: пусть

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Тогда прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3) **Упражнение:** Определите, пересекаются ли прямые $l_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ и $l_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{4}$. Если да, то в какой точке?

4) А что делать, если прямые заданы как линии пересечения двух плоскостей? Решение предыдущего упражнения подсказывает самый простой путь: находим точку пересечения трех из четырех плоскостей и проверяем, принадлежит ли точка пересечения четвертой.

2°. Упражнения

1) Проверьте, пересекаются ли следующие прямые

$$l_1 : \begin{cases} 4x + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \text{ и } l_2 : \begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$$

Если да, то найдите их точку пересечения.

2) Найдите все такие тройки чисел (α, β, γ), что прямые $l_1 : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = -t \end{cases}$ и $l_2 : \begin{cases} x = 1 + \alpha u, \\ y = \beta u, \\ z = 5 - \gamma u \end{cases}$ пересекаются.

3) Через точку $A(4; 0; -1)$ проведите прямую так, чтобы она пересекала бы две данные прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3} \text{ и } \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Домашнее задание

1) Пересекаются ли прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$?

2) Определите взаимное расположение прямой AB и прямых, соответствующих осям координат, если $A(-1; 2; 4)$ и $B(8; 3; 6)$.

3) Определите взаимное расположение прямых
$$\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = 1 - t, \\ z = t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 5 + u, \\ y = 7 - 5u, \\ z = u. \end{cases}$$

4) Найдите геометрическое место таких точек $M(x_0; y_0; z_0)$, что прямые
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \text{ и } \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{-1}$$
пересекаются.

5) Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите прямую, пересекающую прямые
$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3, \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Урок 5. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

1°. Перпендикуляр из данной точки на данную прямую

1) Пусть даны прямая $l: (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a} = 0$ и точка $M_0(r_0) \notin l$. Опустим из M_0 перпендикуляр на l. Очевидно, этот перпендикуляр есть линия пересечения плоскости, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной l, и плоскости, проходящей через M_0 и l. Тогда

$$h: \begin{cases} \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0 \text{ – плоскость, перпендикулярная } l, \\ (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{a}) = 0 \text{ – плоскость, проходящая через } M_0 \text{ и } l. \end{cases}$$

Замечание. *В случае $M_0 \in l$ второе уравнение обращается в тождество. Действительно, существует бесконечно много перпендикуляров, восставленных к l в точке M_0.*

2) Пусть прямая задана каноническим уравнением $l: \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$, а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l имеет вид:

$$\begin{cases} m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

3) **Упражнение:** Найдите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(1; 0; 1)$ на прямую $\begin{cases} x - 3z - 2 = 0, \\ y - 2z = 0. \end{cases}$

4) Теперь легко найти и основание H перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на l. Для этого надо найти точку пересечения l и плоскости α, проходящей через M_0 и перпендикулярной l:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a} = 0, \\ (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{a} = 0. \end{cases}$$

Пример: В условиях предыдущего упражнения нужно решить систему:

$$\begin{cases} x - 3z = 2, \\ y - 2z = 0, \\ 3x + 2y + z = 4. \end{cases}$$

2°. Расстояние от точки до прямой

Предположим, что нам нужно найти расстояние от $M_0(\overrightarrow{r_0})$ до прямой $l : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a} = 0$. Существует несколько способов решения этой задачи.

1) Поскольку мы уже умеем находить основание перпендикуляра H, опущенного из точки M_0 на l, то достаточно просто найти M_0H.

   Пример: В условиях предыдущего упражнения $M_0(1;0;1)$ и $H\left(\frac{11}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$. Следовательно, $M_0H = 2\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

2) Пусть прямая l задана уравнением $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a} = 0$. Тогда модуль левой части этого уравнения – это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{M_1M}$. Следовательно, длина перпендикуляра, опущенного из M_0 на l, есть $d = \dfrac{|(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}$. Особенно простой вид эта формула принимает, если $|\overrightarrow{a}| = 1$. Тогда $d = |(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{a}| = 1$.

3) В случае, если прямая задана общим векторным уравнением $l : \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 0$ и $|\overrightarrow{a}| = 1$, то говорят, что прямая задана *нормальным уравнением*. Выше мы доказали, что расстояние от точки до прямой равно модулю левой части нормального уравнения прямой, в котором текущий радиус-вектор заменен радиус-вектором данной точки:

$$d = |\overrightarrow{r_0} \times \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|, |\overrightarrow{a}| = 1.$$

4) Из полученной формулы сразу следует, что если $|\overrightarrow{a}| = 1$, то $|\overrightarrow{b}|$ равен расстоянию от начала координат до l.

5) **Упражнения:**

   (1) Найдите расстояние от начала координат до прямой $\overrightarrow{r} \times \left(2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$.

   (2) Найдите расстояние от точки $M(12;5;0)$ до прямой $\overrightarrow{r} \times \left(\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right) = 0$.

Домашнее задание

1) Найдите расстояние от точки $A(3;-1;1)$ до прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 - 8t, \\ z = 5 - 4t. \end{cases}$$

2) Найдите основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $\overrightarrow{r} \times \left(\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}\right) = 5\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

3) Найдите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;3;1)$ на прямую $\overrightarrow{r} \times \left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}\right) = 2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

4) Найдите, на каком расстоянии от начала координат проходят прямые

   а) $\overrightarrow{r} \times \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{i} - \frac{4}{5}\overrightarrow{k}\right) = 4\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$;

   б) $\overrightarrow{r} \times \left(7\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}\right) = 0$.

5) Найдите расстояние от точки

   а) $A(4;3;10)$ до прямой $\overrightarrow{r} \times \left(2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}\right) = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$;

   б) $B(5;-6;8)$ до оси абсцисс.

6) На прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = t, \\ z = 3 \end{cases}$$

найдите точки, равноудаленные от осей координат.

Урок 6. Общий перпендикуляр к двум данным прямым. Расстояние между прямыми

1°. Уравнение общего перпендикуляра

Пусть у нас заданы две прямые l_1 и l_2. Мы хотим написать уравнение общего перпендикуляра к этим прямым.

1) Рассмотрим сначала случай, когда $l_1 \parallel l_2$. В этом случае существует бесконечно много общих перпендикуляров. Для того, чтобы написать уравнение одного из них достаточно выбрать точку $M_1 \in l_1$ и опустить из нее перпендикуляр на прямую l_2.

2) Пусть теперь прямые заданы уравнениями $l_1 : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{a_1} = 0$ и $l_2 : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{a_2} = 0$ причем $\overrightarrow{a_1} \nparallel \overrightarrow{a_2}$. Очевидно, что направляющий вектор общего перпендикуляра – это вектор $\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}$. Тогда можно рассмотреть плоскости α_1 и α_2, параллельные $\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}$ и проходящие через прямые l_1 и l_2 соответственно. Тогда общий перпендикуляр будет прямой, по которой пересекаются плоскости α_1 и α_2:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = 0 \text{ – плоскость, проведенная через } l_1 \parallel \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}, \\ (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = 0 \text{ – плоскость, проходящая через } l_2 \parallel \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}. \end{cases}$$

3) **Упражнения:**

   (1) Напишите уравнение общего перпендикуляра к двум прямым, заданным каноническими уравнениями:

   $$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1} \text{ и } l_2 : \frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}.$$

   (2) Напишите уравнение общего перпендикуляра к двум прямым, заданным параметрическими уравнениями:

   $$l_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = t \end{cases} \text{ и } l_2 : \begin{cases} x = 5 + 2u, \\ y = 4 + 2u, \\ z = 1 + u. \end{cases}$$

2°. Расстояние между прямыми

Еще в прошлом году нами было доказано, что расстояние между двумя прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

1) В случае, когда $l_1 \parallel l_2$ нужно просто найти расстояние от произвольной точки $M \in l_1$ до прямой l_2.

2) Пусть теперь $l_1 \not\parallel l_2$. У нас есть уравнение общего перпендикуляра к этим прямым. Находим H_1, H_2 – его основания, а затем H_1H_2.

   Пример: Найдите расстояние между прямыми

$$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1} \text{ и } l_2 : \frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}.$$

3) Однако, есть гораздо более простой способ нахождения расстояния между прямыми. Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$. Очевидно, что H_1H_2 – его высота, $|\overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{a_2}|$ – площадь основания, $|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})|$ – объем параллелепипеда. Поэтому:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})|}{|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}|}.$$

4) **Упражнения:**

   (1) Даны точки $A(-3;0;1)$, $B(2;1;-1)$, $C(-2;2;0)$, $D(1;3;2)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

   (2) Найдите расстояние между прямыми

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \text{ и } \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

Домашнее задание

1) Составьте каноническое уравнение общего перпендикуляра к прямым
$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

2) Найдите расстояния от прямой
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3 \end{cases}$$
   до каждой из осей координат.

3) Даны точки $A(1;0;1)$, $B(-2;2;1)$, $C(2;0;3)$ и $D(0;4;-2)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

4) Найдите расстояние между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра со стороной a.

5) Найдите расстояние между прямыми $\overrightarrow{r} \times \left(2\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}\right) = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{r} \times \left(5\overrightarrow{i} + 15\overrightarrow{j} - 10\overrightarrow{k}\right) = 5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Урок 8. Взаимное положение прямой и плоскости

1°. Точка пересечения прямой и плоскости

1) Пусть даны прямая $l : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ и плоскость $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. Для того, чтобы найти их точку пересечения нужно просто решить систему из трех уравнений.

   Пример: Найдите точку пересечения прямой $l : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ и плоскости $\alpha : x + 2y - 1 = 0$.

2) Особенно удобно искать точку пересечения в случае, когда прямая задана параметрическим или каноническим уравнением.

   Пример: Найдите точку пересечения прямой $l : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ и плоскости $\alpha : 2x + y + z - 9 = 0$.

2°. Прямая, лежащая в плоскости

1) Попробуем теперь найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$ с плоскостью $3x + y - 4z = 0$. Перепишем уравнение плоскости в параметрической форме: $\begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = 3 - t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$. Подставим x, y и z в уравнение плоскости $3(3t-5) + (3-t) - 4(2t-3) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Т. е., системе удовлетворяет бесконечно много решений. Это означает, что $l \subset \alpha$.

2) Как в явном виде написать уравнение того, что прямая $l : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{a} = 0$ лежит в плоскости $\alpha : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = \delta$? Очевидно, $A_0(r_0) \in \alpha$ $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{n}$. Т. е. $\begin{cases} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} - \delta = 0, \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n} = 0. \end{cases}$ В скалярном виде: $\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0, \\ am + bn + cp = 0. \end{cases}$.

   Пример: Проверьте, лежит ли прямая $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$ в плоскости $4x + 3y - z + 3 = 0$.

3°. Прямая, параллельная плоскости

1) Найдем теперь точку пересечения прямой $l : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ и плоскости $\alpha : 3x - 3y + 2z - 5 = 0$. Снова перепишем уравнение прямой в виде

$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = 3t \end{cases}$ Тогда $3(-1 + 2t) - 3(3 + 4t) + 2 \cdot 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow -17 = 0$, т. е. система не имеет решений. Полученный результат означает, что прямая l параллельна плоскости α.

2) Как записать условие параллельности прямой и плоскости в общем виде? Ясно, что оно записывается так:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n} = 0, \\ A_0 \notin \alpha \end{cases} \text{или} \begin{cases} am + bn + cp = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0. \end{cases}$$

3) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 1)$ и параллельной прямым

$$l_1 : \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \text{и} l_2 : \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

4) Напишите уравнение плоскости, параллельной прямой $l : \begin{cases} x = 8 + t, \\ y = 1 - 8t, \\ z = 3t \end{cases}$ и содержащей ось Oz.

Домашнее задание

1) Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

2) Определите взаимное положение прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{1}$ и плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$.

3) Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и содержащей прямую $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 5 - t, \\ z = t. \end{cases}$

4) При каком значении коэффициента a плоскость $ax + 3y - 5z + 1 = 0$ будет параллельна прямой $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{1}$?

5) Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$ и параллельной прямой $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{2}$.

6) Через точку $P(1;0;7)$ параллельно плоскости $3x-y+2z-15=0$ проведите прямую так, чтобы она пересекала прямую $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Урок 9. Прямая, перпендикулярная плоскости. Угол между прямой и плоскостью

1°. Прямая, перпендикулярная плоскости

1) Пусть дана прямая $l : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{a} = 0$ и плоскость $\alpha : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} - \delta = 0$. Тогда
$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{n}.$$
В скалярных обозначениях: пусть $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{a} = (m, n, p)$. Тогда
$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}.$$

Упражнения:

(1) При каких значениях a и b плоскость $ax+by+6z-7=0$ перпендикулярна прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$?

(2) Через точку $M(-1; -5; 8)$ проведите плоскость, перпендикулярную прямой $l : \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{5}$.

(3) Через точку $M(0; 3; 4)$ проведите прямую, перпендикулярную плоскости $5x + 2y - z - 5 = 0$.

2°. Угол между прямой и плоскостью

1) Угол ψ между прямой l с направляющим вектором $\overrightarrow{a}$ и плоскостью α с нормалью $\overrightarrow{n}$ может быть найден по формуле $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, где φ – угол между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{n}$. Поэтому:
$$\sin\psi = \frac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

2) **Пример:** Найдите угол между прямой $l : \begin{cases} 3x - 2y = 24, \\ 3x - z = -4 \end{cases}$ и плоскостью $\alpha : 6x + 15y - 10z + 31 = 0$.

3°. Плоскость, проходящая через заданные прямые

1) Пусть нужно провести плоскость через точку $M_1(\overrightarrow{r_1})$ и прямую $l : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{a} = 0$. Очевидно, что $M(\overrightarrow{r}) \in \alpha$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{a}$ – компланарны. Следовательно,
$$M(\overrightarrow{r}) \in \alpha \text{ и } l \subset \alpha \Leftrightarrow (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a}) = 0.$$

Пример: Проведите плоскость через точку $M_1(5;2;3)$ и прямую $l: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-5}{3}$.

2) А как провести плоскость плоскость через две заданные прямые l_1 и l_2? Очевидно, это можно сделать только тогда, когда $l_1 \parallel l_2$ или l_1 пересекает l_2.

   Пример: Определите, существует ли плоскость, проходящая через прямые

$$\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 2 + 7t, \\ z = 1 - t \end{cases} \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 1 \end{cases}$$

   Если да, то напишите ее уравнение.

Домашнее задание

1) Из точки $M(3;-2;4)$ опустите перпендикуляр на плоскость $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

2) Через начало координат проведите плоскость, перпендикулярную прямой $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-1}{-2}$.

3) Найдите угол между прямой $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ и плоскостью $2x - 3y + z - 1 = 0$.

4) Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3;1;-2)$ и через прямую $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

5) Проверьте, что прямые $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{4}$ и $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{-2}$ пересекаются, и напишите уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

6) Проведите плоскость через перпендикуляры, опущенные из точки $M(-3;2;5)$ на плоскости $4x + y - 3z + 13 = 0$ и $x - 2y + z - 11 = 0$.

Урок 10. Уравнение сферы. Взаимное положение прямой и сферы

1°. Уравнение сферы

1) Рассмотрим сферу с центром в точке $O(\overrightarrow{r})$ радиуса R. Очевидно, ее уравнение $|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| = R$. В скалярной форме, если $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

2) Раскроем в полученном равенстве скобки:
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$
Следовательно, сфера – поверхность второго порядка. Действительно, поверхностью второго порядка называется поверхность, задаваемая уравнением:
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + kz + l = 0.$$
Данное уравнение будет являться уравнением сферы, если $a = b = c$, $d = e = f = 0$. Несложно показать, что если $g^2 + h^2 + k^2 - 4al > 0$, то сфера будет вещественная (иначе либо точка, либо мнимая сфера).

3) **Упражнение:** Найдите центр и радиус сферы, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

2°. Взаимное расположение прямой и сферы

Если расстояние от центра сферы S до прямой l больше радиуса сферы, то прямая и сфера не пересекаются. Если расстояние от центра сферы до прямой, то прямая пересекает сферу в двух точках. Если же расстояние от центра до прямой равно радиусу, то прямая касается сферы.

3°. Упражнения

1) Определите взаимное расположение прямой $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + t. \end{cases}$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

2) Найдите все точки на оси Oz, через которые проходит хотя бы одна прямая, касающаяся сферы $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 9$ в точке $P(3; -1; -4)$.

3) Дана прямая $l : \dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 5}{0}$. Найдите уравнение сферы с центром в начале координат, касающейся прямой l.

Домашнее задание

1) Определите координаты центра и величину радиуса каждой из следующих сфер:

   а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;

   б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$;

   в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 2z + 41 = 0$.

2) Определите взаимное расположение прямой
$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 7 - t, \\ z = 15 + 9t. \end{cases}$$
и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) Определите взаимное расположение прямой $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{-12} = \dfrac{z-12}{5}$ и сферы $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 169$.

Урок 11. Взаимное положение плоскости и сферы

1°. Плоскость, пересекающая сферу

1) Ясно, что плоскость будет пересекать сферу в случае, когда расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы. Если плоскость пересекает сферу, то линия пересечения есть окружность. Мы уже умеем объяснять это, пользуясь геометрическими соображениями. Докажем теперь это аналитически.

   Пусть центр сферы расположен в точке $O(0;0;d)$, а плоскость задана уравнением $\alpha : z = 0$. Тогда уравнение сферы $S : x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2$. Точки, лежащие в пересечении S и α, удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2, \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - d^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{– это ур-е окружности.}$$

2) Пусть плоскость $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ пересекает сферу $S : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$. Как найти центр O_1 и радиус R_1 окружности, по которой пересекаются α и S? Понятно, что O_1 – основание перпендикуляра, опущенного из $O(x_0, y_0, z_0)$ на α. Уравнение этого перпендикуляра:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

   Поэтому координаты точки $O_1(x_1, y_1, z_1)$ определяются из систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}, \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{cases}$$

   Такую систему легче всего решать, переписав уравнение прямой в параметрической форме. Радиус R_1 окружности находится по теореме Пифагора: $R_1 = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$.

3) **Упражнение:** Докажите, что сфера $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$ и плоскость $4x + 2y + 2z + 3 = 0$ пересекаются, и найдите центр и радиус окружности, являющейся их линией пересечения.

2°. Плоскость, касающаяся сферы

1) Понятно, что плоскость будет касаться сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы. Пусть на сфере $S : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ выбрана точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Напишем уравнение плоскости α, касающейся S в точке A_1. Ясно, что вектор $\overrightarrow{OA_1}$

будет вектором нормали к искомой плоскости. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) + (z_1 - z_0)(z - z_1) = 0. \qquad (10)$$

2) Уравнение (10) можно записать в другой форме, если заметить, что $x - x_1 = x - x_0 + x_0 - x_1$ и т. д. Тогда

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)+(z_1-z_0)(z-z_0) = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2.$$

Но $A_1(x_1, y_1, z_1) \in S \Rightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = R^2$. Т. о., уравнение (10) переписывается в виде

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = R^2. \qquad (11)$$

3) Если точка касания неизвестна, то ее находят из системы уравнений. В этом случае уравнение (11) удобнее, поскольку оно линейно относительно x_1, y_1, z_1.

4) **Упражнение:** Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $(x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 + z^2 = 1$, если известно, что эта плоскость проходит через ось аппликат.

Домашнее задание

1) Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения плоскости $ax + by + cz + d = 0$, чтобы эта плоскость касалась сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$?

2) Докажите, что плоскость $2x + y - 2z + 3 = 0$ касается сферы $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Найдите координаты точки касания.

3) Через ось абсцисс проведите касательные плоскости к сфере $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 + (z + 1)^2 = 16$.

4) К сфере $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 225$ проведите касательные плоскости, параллельные плоскости $10x - 11y - 2z + 3 = 0$.