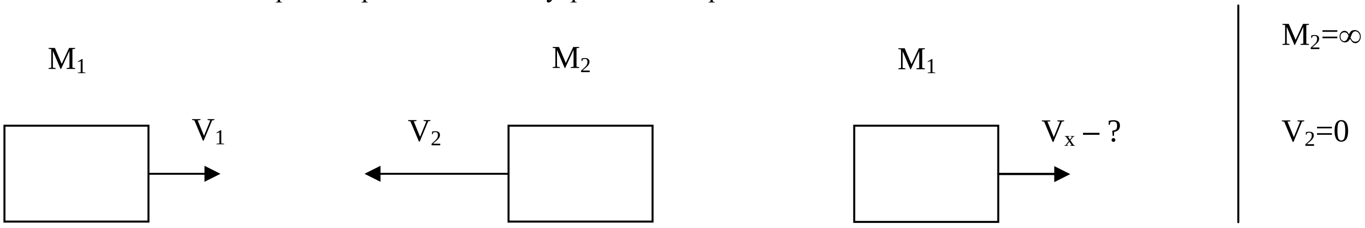
Решения задач, 11 класс, 2011 г.

Задача 1

С какой скоростью V_x должен врезаться в стенку автомобиль с массой M_1, чтобы столкновение было полностью аналогичным столкновению этого автомобиля с автомобилем массой M_2, если первый автомобиль ехал со скоростью V_1 , а второй ехал ему навстречу скоростью V_2? Предполагаем, что соударения всегда неупругие. Рассмотрите частный случай равных масс M_1 и M_2 и равных по величине скоростей V_1 и V_2. Степень разрушения определяем количеством на единицу массы кинетической энергии перешедшей во внутреннюю энергию.



Решение

1. Степень разрушения определяем количеством на единицу массы кинетической энергии перешедшей во внутреннюю энергию.

Выпишем закон сохранения импульса

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \ .$$

Отсюда для величины V имеем

$$V = \frac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Определим изменение кинетической энергии

$$\Delta E = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2}$$

$$\Delta E = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\left(\frac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2(m_1 + m_2)}\left[m_1m_2V_1^2 + 2m_1m_2V_1V_2 + m_1m_2V_2^2\right] = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}\left[V_1 + V_2\right]^2$$

Удельная энергия

$$\frac{\Delta E}{m_1 + m_2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)^2}\left[V_1 + V_2\right]^2$$

2. Во втором случае удельная энергия равна всей кинетической энергии автомобиля:

$$\frac{\Delta E}{m_1} = \frac{m_1V_x^2}{2m_1} = \frac{V_x^2}{2}$$

то есть

$$\frac{V_x^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)^2}\left[V_1 + V_2\right]^2 .$$

3. В частном случае

$$V_x = V_1 = V_2 \ .$$

Задача 2

В замкнутом сосуде при температуре 20 С находится 1 кг воды в равновесии с паром.

В какой-то момент пар начинают откачивать со скоростью 1 грамм в секунду.

Оцените время, через которое жидкой воды не останется в сосуде.

Считать, что плотность насыщенного пара не зависит от температуры, и процесс замерзания не мешает процессу испарения.

Теплоемкость воды – 4,1868 кДж/кг·град , дельная теплота парообразования – 2250 кДж/кг, удельная теплота плавления и 333,55 кДж/кг.

Решение

1. Оценим, сколько воды нужно испарить, чтобы охладить оставшуюся воду на 20 ^{0}C в приближении, что остывает неизменная масса воды.

$$C\Delta TM \approx \lambda\Delta M_1 \Rightarrow \frac{\Delta M_1}{M} = \frac{C\Delta T}{\lambda} = \frac{20\cdot 4.1868}{2250} = 0.037$$

Эта величина достаточно мала, поэтому предположение об охлаждении неизменной массы воды достаточно правомерно.

2. Вычислим, сколько воды нужно испарить, при 0 ^{0}C, чтобы заморозить оставшуюся массу воды.

$$q(M-\Delta M_2)=\lambda\Delta M_2 \Rightarrow \frac{\Delta M_2}{M}=\frac{q}{q+\lambda}=\frac{333.55}{2250+333.5}=0.129$$

Эта величина не очень мала, поэтому вычисляем с условием, что замерзает масса меньшая, чем начальная.

3. В итоге придется откачать массу равную

$$\Delta M=M\left(\frac{C\Delta T}{\lambda}+\frac{q}{q+\lambda}\right)$$

Для этого потребуется такое время;

$$t=\frac{\Delta M}{v}=\frac{M}{v}\left(\frac{C\Delta T}{\lambda}+\frac{q}{q+\lambda}\right).$$

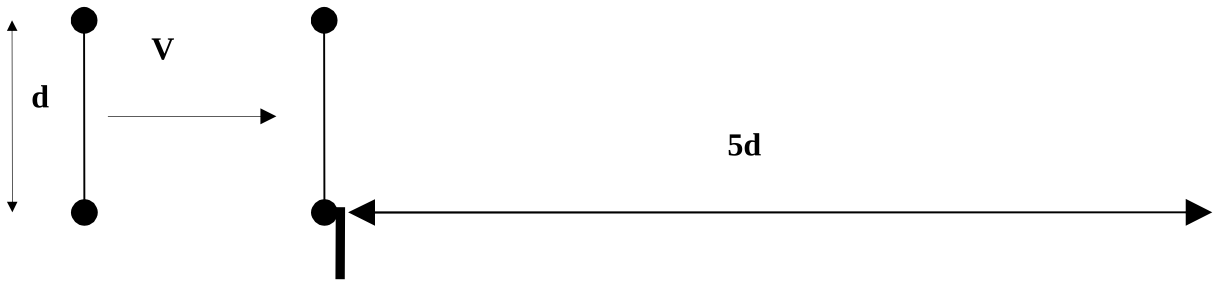
Вычислим его:

$$t=1\cdot\frac{0.037+0.129}{10^{-3}}=\frac{0.166}{10^{-3}}=166 \text{ секунд.}$$

Задача 3

Космический корабль в форме гантели летит не вращаясь и сталкивается с маленьким , но тяжелым плоским препятствием. Опишите дальнейшее движение корабля. Через какое время после соударения центр тяжести корабля сместится на расстоянии в 5 диаметров?

Рассмотреть случай абсолютно упругого удара и случай, когда во время удара нижний шар останавливается.



Решение

1. Упругое столкновение

Сразу после удара нижний шар приобретает скорость –V . Корабль начинает вращаться с линейной скоростью вращения шаров равной V. Центр тяжести будет неподвижным. Через половину оборота произойдет второе столкновение, и корабль опять станет двигаться поступательно со скоростью V.

$$t=\frac{\pi d}{2V}+\frac{5d}{V}.$$

2. Неупругое столкновение.

После него нижний шар останавливается. Верхний продолжает движение со скоростью V, а центр тяжести движется со скоростью V/2. Следовательно

$$t=\frac{5d}{V/2}.$$

Задача 4

С одинаковой высоты и начальной скоростью равной нулю на неподвижный равнобедренный клин падают маленькие шарики и упруго отскакивают от его наклонной поверхности. С какой минимальной высоты должны падать шарики, чтобы ни один из них дважды не попал на клин. Столкновениями шариков между собой пренебречь. На какое наибольшее расстояние от клина улетят шарики?

Решение

Скорость в момент соударения: $v=\sqrt{2g(h-x)}$.

Время движения по вертикали от точки удара: $t=\sqrt{x/g}$.

Расстояние по горизонтали, пройденное после удара: $l=vt$.

Расстояние от точки падения до клина (до точки O) :

$$L=l-x=\sqrt{2g(h-x)2x/g}-x=2\sqrt{x(h-x)}-x.$$

Максимум этой функции находится в точке

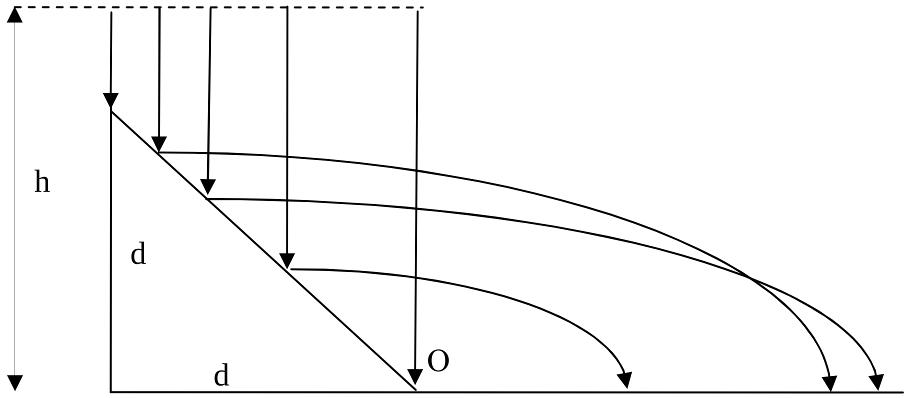
$$x_{\max} = h\frac{1-1/\sqrt{5}}{2},$$

и равен

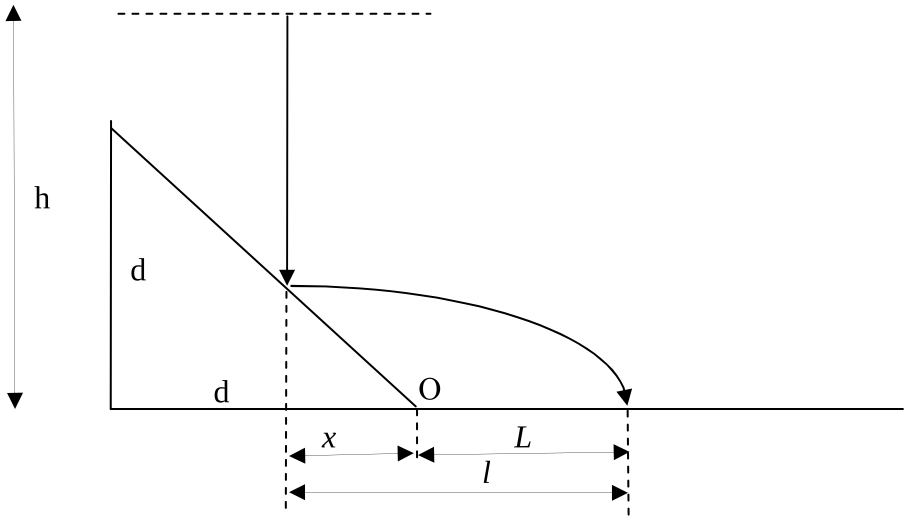
$$L_{\max} = h\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Высота, с которой должны падать шарики, чтобы ни один из них дважды не попал на клин, определяется из соотношения

$$L(x=d) = 2\sqrt{d(h-d)} - d = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{4}d\ .$$

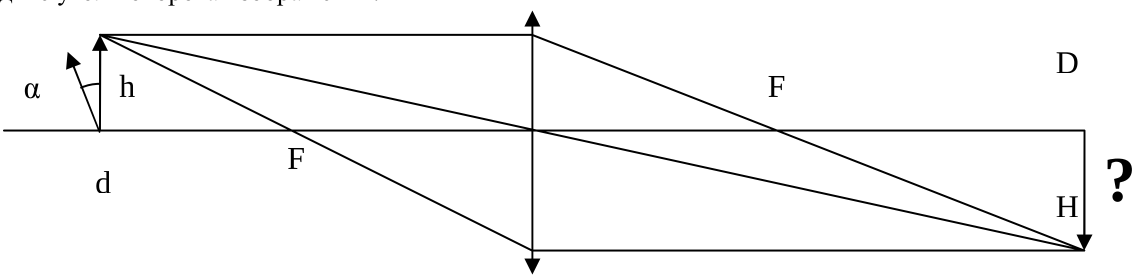


Решение

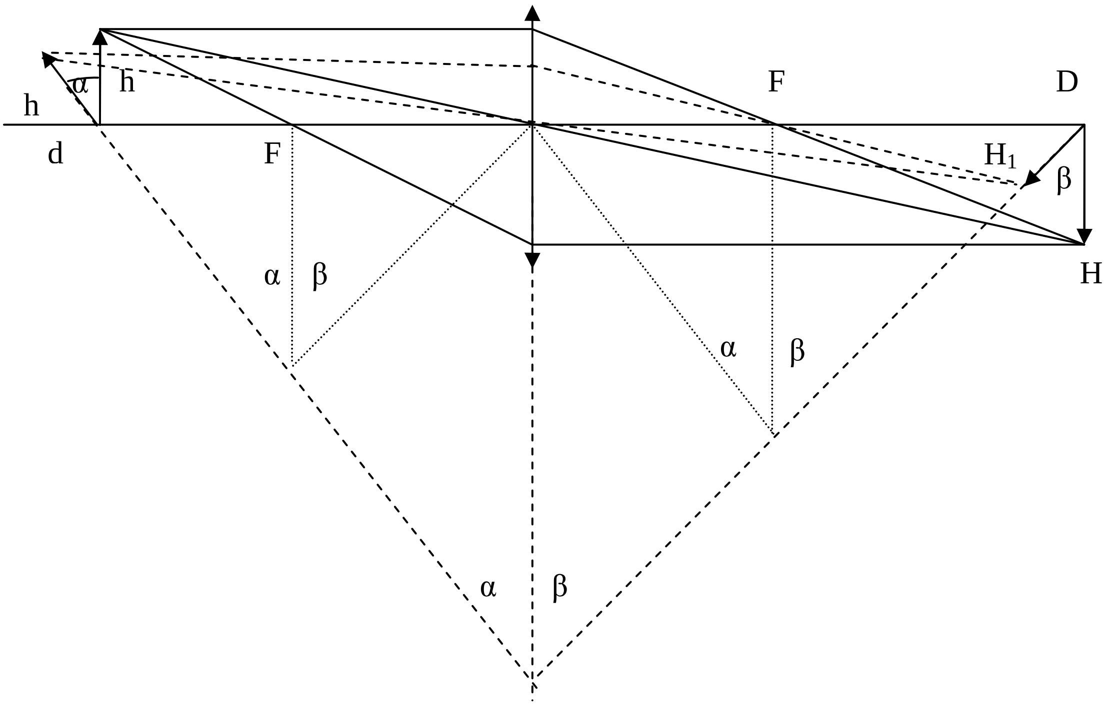


Задача 5

Как изменится изображение объекта в линзе, если объект повернуть на заданный угол. Найдите угол поворота изображения.



Решение



До поворота $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{D}$. После поворота $\frac{1}{F}=\frac{1}{d+h\sin\alpha}+\frac{1}{D-H_1\sin\beta}$.

Отсюда $D-H_1\sin\beta=\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}$ и $H_1\sin\beta=D-\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}$

Для вертикальных проекций имеем: $\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}=\frac{H_1\cos\beta}{D-H_1\sin\beta}$

Отсюда $H_1\cos\beta=\left(D-H_1\sin\beta\right)\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}$

Для $ctg\beta$ имеем

$$ctg\beta=\frac{\left(D-H_1\sin\beta\right)\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D-\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}}=\frac{\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D-\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]^{-1}}=\frac{\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]-1}$$

Далее

$$ctg\beta=\frac{\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{D\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]-1}=\frac{\frac{1}{D}\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{\left[\frac{1}{F}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}\right]-\frac{1}{D}}=\frac{1}{D}\frac{\frac{h\cos\alpha}{d+h\sin\alpha}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{d+h\sin\alpha}}=\frac{1}{D}\frac{h\cos\alpha}{h\sin\alpha}d$$

Ответ: $Dctg\beta=dctg\alpha$