Теоретичний тур 2013 рік, 11 клас задача №1.

Розв'язок

1. За обох умов нагріву газу передається однакова кількість теплоти відповідно закону Джоуля-Ленца , $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q$
2. Але різні умови нагріву приводять до різних значень кінцевої температури ($\Delta T_1 \neq \Delta T_2$) за рахунок різних теплоємностей газу в цих процесах
   $\Delta Q = C_v \Delta T_1 = C_p \Delta T_2$,
3. Відповідно відношення молярних теплоємностей визначається відношенням різниць температур, отриманих у двох процесах нагріву газу
   $\gamma = C_p / C_v = \Delta T_1 / \Delta T_2$
4. При ізохоричному нагріванні (V = const) з рівняння $PV=\nu RT$ маємо
   $\Delta T_1 = V(P_1 - P)/\nu R$
5. При ізобаричному нагріванні (P= const) з рівняння $PV=\nu RT$ маємо
   $\Delta T_2 = P(V_2 - V)/\nu R$
6. Остаточно отримуємо $\gamma = C_p / C_v = \Delta T_1 / \Delta T_2 = V(P_1 - P)/ P(V_2 - V)$

11 клас . Задача№ 2

Визначити, як рухатиметься розріджена повністю іонізована плазма, вміщена в електричне та магнітне поля, спрямовані взаємно перпендикулярно. Чи можна вважати, що плазма рухатиметься як єдине ціле? Швидкості усіх частинок плазми вважати набагато меншими за швидкість світла. Зіткненнями між частинками плазми знехтувати.

Розв’язок

Розглянемо спершу рух окремої зарядженої частинки. Нехай магнітне поле спрямоване вздовж осі z, електричне - вздовж осі x.

Нехай початкова швидкість зарядженої частинки спрямована довільно, її проекція на напрямок магнітного поля - $v_{//}$, перпендикулярна до поля компонента - $v_{\perp}$. За відсутності електричного поля рух частинки складатиметься з рівномірного руху вздовж магнітного поля зі швидкістю $v_{//}$і циклотронного обертання в площині *xOy* з частотою $\omega_c = eB/m$ по колу ларморівського радіусу $R_L = mv_{\perp}/eB$.

Наявність електричного поля приведе до того, що в протилежних (у напрямку x) точках орбіти швидкість зарядженої частинки відрізнятиметься на величину $2\Delta v = (eE/m)(\pi/\omega_c) = \pi E/B$. Якщо прийняти, що точка $x = 0$ суміщена з центром орбіти, то можна спрощено вважати, що половини орбіти, що відповідають додатнім і від’ємним x, частинка пролітає зі швидкостями $v_{\perp} + \Delta v$ та $v_{\perp} - \Delta v$. В результаті орбіта не замикається, і з’являється середня швидкість у напрямку y:

$$v_{\text{äð}} = \frac{\omega_{\tilde{n}}}{2\pi} 2\left[R_L(v_{\perp} + \Delta v) - R_L(v_{\perp} - \Delta v)\right] = \frac{eB}{\pi m}\frac{m}{eB}\frac{\pi E}{B} = \frac{E}{B}.$$

Видно, що ця швидкість - швидкість дрейфу в схрещених полях - не залежить ні від швидкості, ні від маси, ні від заряду частинки.

Отже, електрони та позитивні іони дрейфуватимуть з однаковою швидкістю. Значить, плазма рухатиметься як ціле з дрейфовою швидкістю $v_{äð} = E/B$ (можна чекати, що ця формула справедлива з точністю до числового коефіцієнту порядку одиниці, але, як показує більш акуратний розрахунок, вона є точною).

11 клас

Задача № 3

Умова задачі

Штучний супутник Землі рухається коловою орбітою, яка проходить над полюсами. Виникла необхідність перевести його на іншу колову орбіту такого самого радіусу, яка теж проходить над полюсами. Площини орбіт мають утворювати двогранний кут α. Як можна змінити орбіту, вмикаючи двигун на короткий час, щоб витратити якнайменше пального? Розгляньте випадки: $\alpha_1 = 15°$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 90°$. Зміну маси супутника через витрату пального не враховуйте.

Розв'язання. Позначимо радіус орбіти r, маси Землі та супутника відповідно M і m. Тоді початкова швидкість супутника

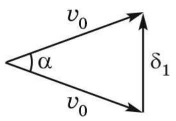
$$v_0 = \sqrt{G\frac{M}{r}}; \qquad (1)$$

Якщо ж збільшити цю швидкість у $\sqrt{2}$ разів, то супутник подолає тяжіння Землі та віддалиться від неї на необмежену відстань.

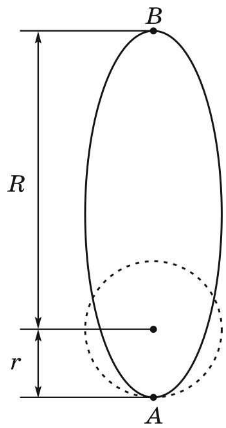
Витрата пального під час кожного вмикання двигуна прямо пропорційна імпульсу, який отримує супутник, тобто модулю зміни швидкості δ.

Можна запропонувати два способи зміни орбіти.

1) Треба увімкнути двигун один раз над полюсом, щоб «повернути» швидкість на кут α. На рисунку показано відповідний рівнобедрений трикутник (зазначено модулі швидкостей), з якого отримуємо $\delta_1 = 2v_0 \sin\frac{\alpha}{2}$.



2) Треба спочатку над одним полюсом (у точці A, див. рисунок) надати супутнику додаткової швидкості u, щоб перевести його на витягнуту еліптичну орбіту; тоді над іншим полюсом (у точці B) швидкість v_1 супутника буде меншою і її легше буде «повернути» на кут α. Після половини оберту новою еліптичною траєкторією треба зменшити швидкість супутника знов-таки на u, щоб орбіта стала коловою. Таким чином, витрата пального буде пропорційна зміні швидкості $\delta_2 = 2u + 2v_1 \sin\frac{\alpha}{2}$.



Щоб виразити v_1 через u, скористаємося законами збереження енергії та моменту імпульсу:

$$-G\frac{Mm}{r} + \frac{m(v_0+u)^2}{2} = -G\frac{Mm}{R} + \frac{mv_1^2}{2},\ m(v_0+u)r = mv_1 R.$$

Із цих співвідношень, урахувавши формулу (1), отримуємо квадратне рівняння відносно v_1:

$$v_1^2 - 2\frac{v_0^2}{v_0+u}v_1 + v_0^2 - u^2 - 2uv_0 = 0.$$

Формула для коренів квадратного рівняння нам не потрібна: два його корені відповідають *максимальному* та *мінімальному* значенням швидкості супутника на еліптичній орбіті. Отже, один із коренів має дорівнювати $v_0 + u$ (це легко перевірити), а другий, тобто v_1, знайдемо з теореми Вієта: $v_1 = \frac{v_0^2 - u^2 - 2uv_0}{v_0 + u}$.

Таким чином,

$$\delta_2 = 2u + 2\frac{v_0^2 - u^2 - 2uv_0}{v_0 + u}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Очевидно, досить розглядати значення u в інтервалі $(0;\, (\sqrt{2}-1)v_0)$. Якщо $u \to 0$, отримуємо $\delta_2 \to \delta_1$. Якщо $u \to v_0(\sqrt{2}-1)$ (швидкість $v_0 + u$ — це аналог другої космічної швидкості для даної орбіти), другий доданок у формулі (2) прямує до нуля (поворот площини орбіти відбуватиметься майже за нульової швидкості). Цей варіант вигідніший за варіант 1, якщо $\sin\frac{\alpha}{2} > \sqrt{2}-1$ (тобто якщо $\alpha > 49°$). Проте час такого руху прямує до нескінченності…

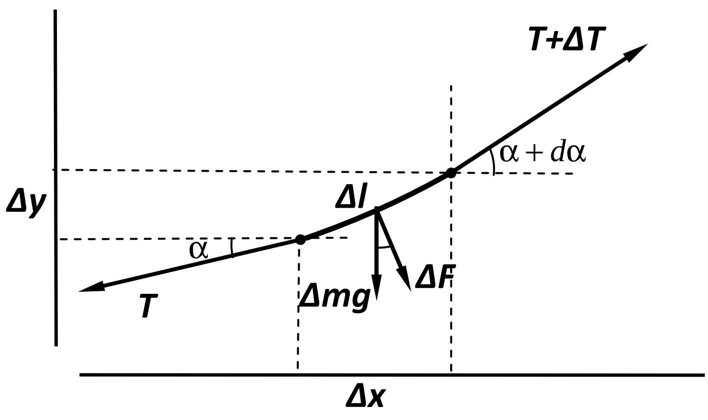
Дослідження залежності $\delta_2(u)$ можна провести, наприклад, визначивши відповідну похідну. Це дослідження показує, що за умови $\frac{1}{3} < \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$ (тобто $39° < \alpha < 60°$) функція $\delta_2(u)$ має мінімум всередині інтервалу $(0;\, (\sqrt{2}-1)v_0)$, при $u_{\min} = v_0\left(\sqrt{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}} - 1\right)$. Якщо $\alpha = \alpha_2 = 45°$, отримуємо $u_{\min} = 0,11v_0$ і $\delta_2 = 0,75v_0$.

Відповідь. 1) Слід увімкнути двигун один раз над полюсом, змінивши напрям швидкості на 15°. 2) Слід увімкнути двигун над полюсом, збільшивши швидкість супутника на 11 %, над іншим полюсом змінити напрям швидкості на 45° і ще через половину оберту зменшити швидкість до початкового значення. 3) Слід увімкнути двигун над полюсом, збільшивши швидкість супутника трохи менше ніж на 41 %, над іншим полюсом змінити напрям швидкості на 90° і ще через половину оберту зменшити швидкість до початкового значення.

11 клас

Задача № 4 До двох контактів, що знаходяться один від одного на відстані s по горизонталі і h по вертикалі, підвісили за краї тонкий немагнітний металевий ланцюжок довжиною l з великою кількістю ланок. Ланцюжок висить в однорідному магнітному полі, перпендикулярному площині ланцюжка. Коли через ланцюжок почали пропускати деякий сталий струм, його форма змінилася так, що біля нижчого контакту він став горизонтальним, а біля вищого – вертикальним. Знайдіть відношення сили Ампера до сили тяжіння, що діють на кожну ланку ланцюжка, а також на весь ланцюжок в цілому.

Розв'язок. Оскільки за умовою ланок у ланцюжку дуже багато, розглянемо ланцюжок у вигляді дуги кривої. Спроектуємо сили, що діють на маленький фрагмент ланцюжка довжиною Δl, на горизонтальний і вертикальний напрямки (Δl має горизонтальну і вертикальну проекції $\Delta x = \Delta l\cos\alpha$ і $\Delta y = \Delta l\sin\alpha$, див. рис.1). Почнемо з сили тяжіння. Горизонтальна проекція дорівнює нулю, а вертикальна $\Delta mg = \tau g\Delta l$, де $\tau = m/l$ лінійна густина ланцюжка. Отже сума всіх вертикальних складових

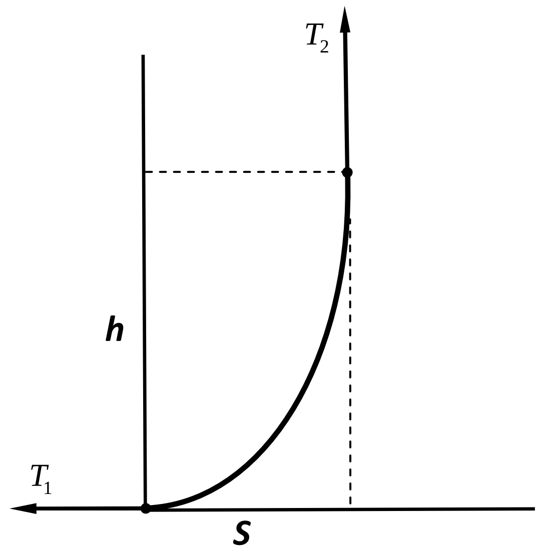


дасть спрямовану вниз силу $\sum\Delta mg = \tau g\sum\Delta l = \tau gl = mg$ - очікуваний результат, до якого ми добре звикли. Розглянемо тепер проекції сили Ампера $\Delta F = IB\Delta l$. Горизонтальна проекція: $\Delta F_x = IB\Delta l\sin\alpha = IB\Delta y$.

Вертикальна проекція: $\Delta F_б = -IB\Delta l\cos\alpha = -IB\Delta x$. Горизонтальна складова сили Ампера, що діє на весь ланцюжок:

$$F_x = \sum \Delta F_x = IB\sum \Delta y = IBh \ . \qquad (1)$$

Проекція сили Ампера на вертикальний напрямок дає



$$F_y = \sum \Delta F_y = -IB\sum \Delta x = -IBS \ . \qquad (2)$$

Отже, у нашому випадку для всього ланцюжка (рис.2) маємо

$$\begin{cases} T_1 = IBh, \\ T_2 = IBS + mg. \end{cases} \qquad (3)$$

Ми ще не використали задану в умові довжину ланцюжка l. Найпростіше це зробити або за допомогою аналізу роботи сил натягу при невеликому уявному зміщенні на Δl ланцюжка вздовж його довжини ($(T_2 - T_1)\Delta l = \Delta mgh$), або, спроектувавши сили, що діють на маленький фрагмент ланцюжка (рис.1), на його напрям: $\Delta T = \Delta mg\sin\alpha = \tau g\Delta l\sin\alpha = \tau g\Delta y$. Тоді

$$T_2 - T_1 = \sum \Delta T = \tau g\sum \Delta y = \tau gh = mgh/l \ . \qquad (4)$$

Отже, ми отримали три рівняння (система (3) і (4)). Необхідно знайти відношення сили Ампера до сили тяжіння, що діють на ланку ланцюжка, тобто, безрозмірну величину $a = \dfrac{IB\Delta l}{\Delta mg} = \dfrac{IB}{\tau g}$.

Запишемо всі отримані рівняння у безрозмірному вигляді ($t_1 = T_1/mg$, $t_2 = T_2/mg$):

$$\begin{cases} t_1 = a\dfrac{h}{l}, \\ t_2 = a\dfrac{S}{l} + 1, \\ t_2 - t_1 = \dfrac{h}{l} \end{cases} \tag{5}$$

і знайдемо

$$a = \frac{l-h}{h-S}.$$

Рівнодійна сила Ампера, що діє на весь ланцюжок, дорівнює $F_A = IB\sqrt{h^2 + S^2}$. Відношення сили Ампера до сили тяжіння, що діють на весь ланцюжок в цілому:

$$\frac{F_A}{mg} = \frac{IB\sqrt{h^2+S^2}}{\tau g l} = \frac{IB}{\tau g}\frac{\sqrt{h^2+S^2}}{l} = a\frac{\sqrt{h^2+S^2}}{l} = \frac{l-h}{h-S}\frac{\sqrt{h^2+S^2}}{l}.$$

11 клас

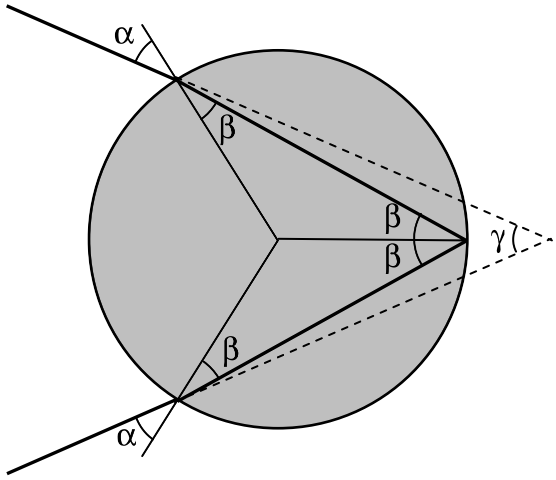
Задача № 5

Вивчаючі дисперсію світла, Коші запропонував наближену формулу $n = a + b/\lambda^2$ залежності показника заломлення світла n від довжини хвилі λ у вакуумі. Визначте коефіцієнти a і b для води, якщо відомо, що показник заломлення фіолетового світла довжиною 390 нм дорівнює 1,341, а червоного довжиною 730 нм – 1,326. Завдяки дисперсії світла ми спостерігаємо веселку. Проілюструйте, хід променів через краплю води, який обумовлює це явище, і визначте, під якими кутами до напрямку сонячних променів спостерігаються граничні смуги веселки. За сприятливих умов крім основної, первинної веселки можна спостерігати вторинну. Якби ми могли бачити у більш широкому діапазоні, чи знайшлася б така довжина λ' електромагнітної хвилі, для якої первинна і вторинна веселки співпали? Якщо так, оцініть λ', якщо ні, поясніть чому.

Розв'язок. Знайдемо коефіцієнти a і b із системи двох рівнянь для фіолетового і червоного променів:

$$\begin{cases} n_{ô} = a + b/\lambda_{ô}^2, \\ n_{÷} = a + b/\lambda_{÷}^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1{,}320008 \approx 1{,}32 \\ b = 3192{,}782 \text{ íì}^2 \approx 3200 \text{ íì}^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Хід променя через краплю води зображений на рисунку. Оскільки показник заломлення фіолетового променя більший, кут γ для нього буде меншим. Це означає, що фіолетова смуга у райдузі нижча, а червона вища. За рисунком $\gamma = 4\beta - 2\alpha$, де кут β можна виразити із закону заломлення світла $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$:



$\beta = \arcsin(\sin\alpha / n)$. Отже кут γ залежить від кута падіння променя α.

$$\gamma = 4\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) - 2\alpha . \qquad (2)$$

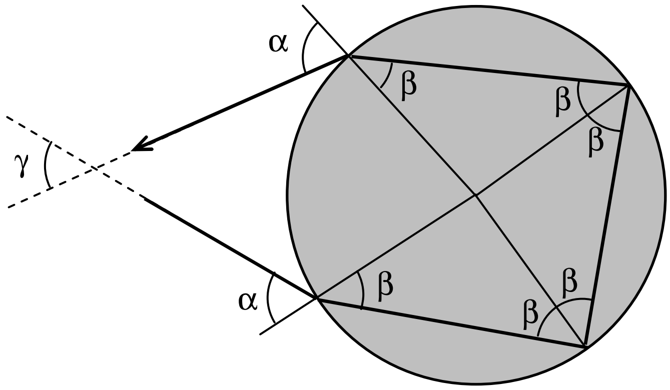
Промені падають на краплю під різними кутами α і ми бачимо їх, відповідно, під різними кутами γ. Підсилення променів відбудеться тоді, коли порівняно широкому діапазону $\Delta\alpha$ відповідатиме вузький діапазон $\Delta\gamma$, тобто, коли $\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$. Візьмемо похідну від (2) і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 2\frac{2\cos\alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} 0 .$$

Знаходимо, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$ і, підставивши у (2), формулу для кута γ:

$$\gamma = 4\arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right). \qquad (3)$$

Підставимо показники заломлення 1,341 для фіолетового і 1,326 для червоного світла: $\gamma_{ô} = 40{,}9^\circ \approx 41^\circ$, $\gamma_{÷} = 43{,}1^\circ \approx 43^\circ$.



Для відповіді на останнє питання необхідно знайти кут γ для вторинної веселки. У вторинній веселці, промінь двічі відбивається всередині краплі від її поверхні. На відміну від первинної веселки, промінь обходить краплю проти годинникової стрілки (рис.2). Саме тому кольори у вторинній веселці йдуть у зворотній послідовності: нижчий – червоний, вищий – фіолетовий. Кут $\gamma = 180^\circ + 2\alpha - 6\beta$ або $\gamma = 180^\circ + 2\alpha - 6\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right)$.

Аналогічно первинній веселці знаходимо екстремальне значення γ:

$$\gamma = 180^\circ + 2\arcsin\sqrt{\frac{9-n^2}{8}} - 6\arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\right) \tag{4}$$

Для червоного кольору (n=1,326) знаходимо $\gamma_{\div} = 49{,}03^\circ \approx 49^\circ$. Червоні кольори обох веселок найближчі один до одного (43° і 49°). Смуги інфрачервоного випромінювання будуть ще ближчі. Однак, згідно формули Коші $n = a + b/\lambda^2$ показник заломлення обмежений знизу. Навіть при $\lambda \to \infty$ (що взагалі достатньо безглуздо внаслідок дифракції світла на краплях води) коефіцієнт заломлення має кінцеву межу $n = a = 1{,}32$. Розрахуємо для $n = 1{,}32$ кути γ у первинній та вторинній райдугах: $\gamma_1 \approx 44{,}01^\circ \approx 44^\circ$, $\gamma_2 \approx 47{,}42^\circ$. Як бачимо, $\gamma_2 > \gamma_1$. Отже, злиття першої і другої райдуг не відбувається ні в якому діапазоні.

Щоправда, зазначимо, що для вичерпної відповіді слід врахувати залежність показника заломлення від температури і користуватися точною формулою замість наближеної. Все це за певних умов може ще зблизити значення γ_1 і γ_2.

Игорь, данная задача рассчитана на 11 класс. Два первых простых вопроса позволят набрать некоторые баллы тем, кто не справится в дальнейшем с производными (или не догадается, что их надо брать – хотя, думаю, большинство о Ньютоне и радуге слышало или читало, а продвинутые олимпийцы угол для первичной радуги наверняка рассчитывали). Последний вопрос о слиянии радуг я нигде не встречал. Ответ на него будто бы требует приравнять углы из формул (3) и (4), и либо умереть, пытаясь решить это уравнение, либо муторно анализировать его численно, перебирая разные длины волн, либо, как в приведенном решении, подставить граничное значение показателя преломления и быстро во всем убедиться. Мой прогноз – человек десять увидят этот изящный путь. В любом случае калькуляторы для вычислений нужны.