Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-9

Материалы к урокам по теме:

“Метод математической индукции. Прогрессии”

Харьков, 2013 г.

Поурочное планирование (22 часа)

Урок 1. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция.

Урок 2. Метод математической индукции.

Урок 3. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств.

Урок 4. Применение метода математической индукции при решении задач на делимость.

Урок 5. Применение метода математической индукции для доказательства неравенств.

Урок 6. Различные схемы метода математической индукции.

Урок 7. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим для n чисел.

Урок 8. *Самостоятельная работа* по теме: "Метод математической индукции".

Урок 9. Числовые последовательности и способы их задания. Нахождение общего члена рекуррентных последовательностей.

Урок 10. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена.

Урок 11. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Урок 12. Сумма первых n членов арифметической прогрессии.

Урок 13. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена. Характеристическое свойство. Сумма первых n членов геометрической прогрессии.

Урок 14. Решение задач на геометрическую прогрессию.

Урок 15. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

Урок 16. Решение комбинированных задач на арифметическую и геометрическую прогрессии.

Урок 17. *Самостоятельная работа* по теме: "Арифметическая и геометрическая прогрессии".

Урок 18. Задачи на суммирование.

Урок 19. Решение задач на суммирование.

Урок 20. Обобщающее занятие по теме.

Урок 21. Контрольная работа.

Урок 22. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция

Домашнее задание

1) Верно ли, что число n^2+n+17 является простым при любом натуральном n? Проверьте справедливость этого утверждения при $n = 1, 2, 3, \ldots, 15, 16$.

2) Пусть $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots + (-1)^n n$. Вычислив S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, угадайте, чему равняется S_{316} и S_{327}.

3) Пусть $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)\,n}$. Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для S_n.

4) Пусть $S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$. Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для S_n.

5) Пользуясь методом неполной индукции, угадайте, на сколько частей делят плоскость n прямых общего положения (*прямыми общего положения* называют множество прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке).

6) На окружности взяли n точек и соединили их всевозможными хордами. При этом никакие три из этих хорд не пересекаются в одной точке. Пользуясь методом неполной индукции, угадайте, на сколько частей они делят круг.

Урок 2. Метод математической индукции

Домашнее задание

1) Отличница Маша умеет доказывать, что любые n точек лежат на одной прямой. Делает она это так: При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение безусловно верно. Пусть утверждение верно для любых $n = k$ точек. Докажем, что оно верно для любых $n = k+1$ точек. Рассмотрим произвольные точки A_1, A_2, …, A_k, A_{k+1}. По предположению индукции точки A_1, A_2, …, A_k лежат на некоторой прямой l, а точки A_2, …, A_k, A_{k+1} – на некоторой прямой l'. Поскольку прямые l и l' проходят через точки A_2 и A_k, то эти прямые совпадают, т. е. все точки A_1, A_2, …, A_k, A_{k+1} лежат на одной прямой. Найдите ошибку в Машином рассуждении.

2) Докажите, что любую сумму, начиная с 8 тугриков, можно выплатить купюрами по 3 тугрика и 5 тугриков.

3) Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки”, состоящие из трех клеток.

4) Рассматриваются всевозможные положительные обыкновенные дроби с числителем 1. Докажите, что при любом $n \geqslant 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида.

Урок 3. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств

1) Метод математической индукции применяется в различных областях математики. Чаще всего он используется при

   - решении логических задач;
   - доказательстве тождеств, содержащих суммы и произведения;
   - решении задач на делимость;
   - доказательстве неравенств.

   Мы последовательно рассмотрим эти области применения.

2) Доказательство тождеств, содержащих суммы и произведения, – наиболее стандартная сфера применения метода математической индукции.

   Упражнения. Пользуясь методом математической индукции, докажите следующие тождества:

   (1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

   (2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (3) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

   Замечание. Легко видеть, что это тождество равносильно равенству
   $$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

   (4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

   (5) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$;

   (6) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

Домашнее задание

Пользуясь методом математической индукции, докажите следующие тождества:

1) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n\,(3n-1)}{2}$;

2) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$;

3) $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\ldots+(4n+1)\,5^{n-1}=n5^n$;

4) $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$;

5) $\dfrac{1}{5\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 19}+\ldots+\dfrac{1}{(7n-2)\,(7n+5)}=\dfrac{n}{5\,(7n+5)}$;

6) $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)}=\dfrac{n\,(n+1)}{n+2}$;

7) $\dfrac{1\cdot 2}{3!}+\dfrac{2\cdot 2^2}{4!}+\ldots+\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}=1-\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$;

8) $1\cdot 3+2\cdot 5+\ldots+n\,(2n+1)=\dfrac{n\,(n+1)\,(4n+5)}{6}$.

Урок 4. Применение метода математической индукции при решении задач на делимость

1) Метод математической индукции часто используют для доказательства того, что некоторое выражение, зависящее от одной натуральной переменной, делится на некоторое число.

2) **Упражнения**. Докажите, что

   (1) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9 при любом целом неотрицательном n;
   (2) $6^{2n}-1$ делится на 35 при любом натуральном n;
   (3) 3^n+7 делится на 8 при любом четном натуральном n;
   (4) $4^n+15n-1$ делится на 9 при любом натуральном n;
   (5) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n;
   (6) $2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$ делится на 17 при любом натуральном n;
   (7) $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1} при любом натуральном n;
   (8) $\underbrace{11\ldots1}_{3^n}$ делится на 3^n при любом натуральном n.

Домашнее задание

1) Докажите, что $7^{2n} - 1$ кратно 24 при любом натуральном n.

2) Докажите, что при делении на 6 число $n^3 + 9n^2 + 26n + 8$ дает остаток 2 при любом целом неотрицательном n.

3) Докажите, что $3^{2n+3} - 24n + 37$ делится на 64 при любом целом неотрицательном n.

4) Докажите, что $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ делится на 8 при любом натуральном n.

5) Докажите, что $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ делится на 37 при любом натуральном n.

6) Докажите, что при любом четном натуральном n число $4^n - 3^n - 7$ делится на 84.

7) Докажите, что $5^{2^n} + 6^{2^n} + 11^{2^n}$ делится на 7 при любом натуральном n.

8) Докажите, что при нечетном натуральном n число $3 \cdot 5^n + 8n^2 + 44n - 67$ делится на 256.

Урок 5. Применение метода математической индукции для доказательства неравенств

1) Метод математической индукции часто используют для доказательства неравенств, обе части которых зависят от одной натуральной переменной.

2) **Упражнения**. Докажите, что:

   (1) $2^n > 2n + 1$ при всех натуральных $n > 2$;

   (2) $n! > 2^n$ при всех натуральных $n \geqslant 4$;

   (3) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при всех натуральных n и произвольном $x \geqslant -1$ *(неравенство Бернулли)*.

   (4) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$ при всех натуральных $n \geqslant 3$;

   (5) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{n}{2}$ при всех натуральных n;

   (6) $\dfrac{4^n}{n+1} \leqslant \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ при всех натуральных n;

Домашнее задание

1) При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n > n^2$?

2) Докажите, что:

(1) $3^n > n \cdot 2^n$ при всех натуральных n;

(2) $4^n - 3^n \geqslant n^2$ при всех натуральных n;

(3) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$ при всех натуральных n;

(4) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n$ при всех натуральных $n \geqslant 2$;

(5) $\dfrac{1}{4n} \leqslant \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ при всех натуральных n.

Замечание. Символом $(2n+1)!!$ обозначают произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n+1$, а символом $(2n)!!$ обозначают произведение всех четных чисел от 1 до $2n$.

Урок 6. Неравенства, содержащие корни. Различные схемы индукции

1°. Неравенства, содержащие корни

1) Докажите, что для всех неотрицательных действительных a и произвольного натурального n справедливо неравенство:

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

2) Докажите, что $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$ при всех натуральных n.

3) Докажите, что $n^n > (n+1)^{n-1}$ при всех натуральных $n > 1$.

2°. Различные схемы индукции

1) Известно, что $x + \dfrac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что тогда при любом натуральном n число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ – тоже целое.

2) Докажите, что любое натуральное число может быть записано в двоичной системе счисления (т. е. в виде суммы нескольких различных степеней двойки, включая, возможно, и нулевую).

Домашнее задание

1) Докажите, что для всех натуральных n справедливо неравенство:

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}}_{n\ \text{корней}}<2.$$

2) Докажите, что $2^{n(n-1)/2}>n!$ при всех натуральных $n\geqslant 3$.

3) Докажите, что $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\leqslant 3-\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ при всех натуральных n.

4) Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для

$$S_n=\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}.$$

Докажите свою гипотезу, пользуясь методом математической индукции.

5) Пользуясь методом неполной индукции, угадайте формулу для
$$S_n=1+3+6+\ldots+\frac{n\,(n+1)}{2}.$$
Докажите свою гипотезу, пользуясь методом математической индукции.

Урок 7. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

1) Имеет место очень важное неравенство:

Теорема (Неравенство Коши между средними).

Среднее арифметическое n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\,,$$

причем равенство достигается т. и т. т., когда все числа равны.

Доказательство теоремы:

1-й способ: Метод подъема и спуска.

1° *(база индукции)*. При $n=2$ доказываемое неравенство тривиально, поскольку

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}\iff(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0.$$

2° *(подъем)*. Докажем, что если неравенство Коши верно для k чисел, то оно верно и для $2k$ чисел. Рассмотрим произвольные $2k$ неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$. Применяя неравенство Коши для k чисел к наборам $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{2k}$, получаем:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{2k} =$$
$$= \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{k}}{2} \geqslant \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}}{2}.$$

Но в силу неравенства Коши для двух чисел $\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$ и $\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}$ справедливо неравенство

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}\ \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{2k}}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2k} \geqslant \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}\,,$$

что и требовалось доказать. Итак, неравенство Коши доказано для степеней двойки $(n = 2^m)$.

3° *(спуск)*. Докажем, что если неравенство Коши справедливо для k чисел, то оно верно и для $k-1$ числа. Действительно, рассмотрим произвольные $k-1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Добавим к ним число $a_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$ и применим неравенство Коши к набору $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}.$$

Подставляя выражение для a_k в это неравенство, получаем:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}.$$

Но

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}{k} =$$
$$= \frac{(k-1)\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})}{k\,(k-1)} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}}.$$

Возводя обе части этого неравенства в степень k и сокращая на $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$, получаем:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1} \geqslant a_1 a_2 \ldots a_{k-1}.$$

Осталось извлечь корень $k-1$ степени из обеих частей:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}\,,$$

что и требовалось доказать.

4°. Пусть теперь n – произвольное натуральное число. Если $n = 2^m$, то согласно 2°, для него неравенство справедливо. Если же $n \neq 2^m$, то найдем такое m, чтобы n было меньше 2^m, и тогда, спускаясь, на основании 3° утверждаем, что неравенство Коши верно и для $n = m$. Теорема доказана.

2-й способ: Доказательство при помощи леммы Коши.

(1) Докажем сперва частный случай неравенства Коши:

Лемма (Коши).

Если произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно единице, то их сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не меньше n.

Доказательство леммы: Доказательство проведем по индукции.

1° *(база индукции)*. При $n = 1$ имеем, по условию, $a_1 = 1$ и, очевидно, неравенство $a_1 \geqslant 1$ выполняется.

2° *(шаг индукции)* Предположим, что лемма Коши верна для k чисел. Выведем отсюда справедливость леммы для $k+1$ числа. Для этого рассмотрим произвольные $k+1$ положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, причем $a_1 a_2 \ldots a_{k+1} = 1$. Если все числа a_i $(i = 1, \ldots, k+1)$ равны единице, то лемма, очевидно, верна. Рассмотрим случай когда среди a_i есть отличное от единицы число. Тогда из них можно выбрать два числа, одно из которых меньше единицы, а другое больше. Без ограничения общности можно считать, что это a_k и a_{k+1} соответственно. Тогда выполнено неравенство $(1 - a_k)(a_{k+1} - 1) > 0$, или, раскрывая скобки,

$$a_k + a_{k+1} - a_k a_{k+1} > 1. \tag{$*$}$$

Теперь применим лемму Коши для k чисел (которая верна по предположению) к числам

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ \ldots,\ b_{k-1} = a_{k-1},\ b_k = a_k a_{k+1}$$

(их произведение равно $b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k = a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k a_{k+1} = 1$, поэтому условие леммы выполнено).

Имеем:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k a_{k+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1} + b_k \geqslant k. \tag{$**$}$$

Складывая неравенства $(*)$ и $(**)$, получаем, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} > k + 1,$$

а это и есть лемма Коши для $k+1$ числа.

□

(2) Опираясь на доказанную лемму, легко доказать неравенство Коши:

Рассмотрим произвольные неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если хотя бы одно из них равно нулю, то доказываемое неравенство очевидно. В противном случае определим числа $b_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \ldots, b_n = \dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$. Нетрудно видеть, что $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$, поэтому к ним применима лемма Коши: $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant n$. Отсюда $\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant n$.

Домножая на $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, получаем неравенство Коши.

■

2) Итак, мы доказали неравенство Коши двумя способами. Заметим, что существует еще много разных доказательств. С некоторыми из них мы уже познакомились на кружке. О других речь пойдет позднее.

3) Из неравенства Коши легко получить следующие полезные следствия:

Следствие 1.

Сумма n неотрицательных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ с постоянным произведением принимает наименьшее значение, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Следствие 2.

Произведение n неотрицательных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ с постоянной суммой принимает наибольшее значение, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Урок 9. Числовые последовательности и способы их задания. Нахождение общего члена рекуррентных последовательностей

1°. Числовые последовательности и способы их задания

1) Дадим определение числовой последовательности:

> *Если задано отображение множества натуральных чисел на некоторое подмножество множества действительных чисел* ($\mathbb{N} \to \mathbb{R}$), *то говорят, что задана* ***числовая последовательность****.*

Обозначают последовательности чаще всего так: $\{a_n\}$.

2) Последовательность можно задать при помощи *формулы общего члена*, т. е. формулы, позволяющей найти n-й член последовательности непосредственно по его номеру. Напр., $a_n = n^2$, $x_n = 2^n - n + 1$ и т. п.

3) Часто последовательности задают при помощи метода математической индукции. Действительно, если мы определим первый член последовательности, и, допуская, что k-й член уже определен, выразим через него $(k+1)$-й член последовательности, то в соответствии с методом математической индукции вся последовательность будет определена.

Примеры.

(1) Пусть a и d – некоторые действительные числа. Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n + d, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.1}$$

Эту последовательность называют **арифметической прогрессией**.

(2) Пусть b и $q \neq 0$ – некоторые действительные числа. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом:

$$\begin{cases} b_1 = b, \\ b_{n+1} = b_n \cdot q, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.2}$$

Эту последовательность называют **геометрической прогрессией**.

4) Описанный только что способ задания последовательностей легко обобщается. А именно, можно задать не один, а несколько (напр., k) членов последовательности, а все члены, начиная с $(k+1)$-го, выражать через k предыдущих.

Пример. Определим последовательность $\{f_n\}$ следующим образом:

$$\begin{cases} f_1 = 1, \\ f_2 = 1, \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.3}$$

Эту последовательность называют **последовательностью Фибоначчи** в честь Леонардо Пизанского, итальянского ученого XIII столетия.

Определение.

> *Последовательности, задаваемые при помощи метода математической индукции, называют* ***рекуррентными*** *или* ***возвратными***.

5) При изучении последовательностей часто приходится находить сумму первых n ее членов. Эту сумму обычно обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Очевидно, для любой последовательности справедлива формула

$$a_n = S_n - S_{n-1}. \tag{9.4}$$

Упражнение. Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ вычисляется по формуле $S_n = 6n - n^2$. Найдите шестой член этой последовательности.

2°. Нахождение общего члена рекуррентных последовательностей

1) Одной из основных задач, возникающих при изучении рекуррентных последовательностей, является нахождение формулы общего члена. Для широкого класса рекуррентных последовательностей (т. н. линейных рекуррентных последовательностей) существует общий метод, позволяющий решить поставленную задачу. Мы познакомимся с этим методом на кружке. Сейчас же рассмотрим несколько примеров.

2) Если формула общего члена присутствует в условии задачи, то проще всего воспользоваться методом математической индукции.

Упражнения.

(1) Докажите, что если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ при $n \geqslant 1$, то $a_n = 3n - 2$.

(2) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 3x_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n = \dfrac{1}{2}\left(5 \cdot 3^{n-1} - 1\right)$.

(3) Последовательность $\{u_n\}$ задана рекуррентно: $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что

$$u_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

3) Если формула общего члена в условии не фигурирует, то можно попробовать с помощью метода неполной индукции сперва выдвинуть гипотезу.

Упражнение. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Найдите формулу общего члена.

Домашнее задание

1) При любом n сумма первых n членов некоторой последовательности равна $S_n = 4n^2 - 3n$. Найдите три первых члена этой последовательности.

2) Последовательность $\{c_n\}$ задана рекуррентно: $c_1 = 6$, $c_{n+1} = 2c_n - 3n + 2$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что $c_n = 2^n + 3n + 1$.

3) Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентно: $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$ при $n \geqslant 1$. Найдите формулу общего члена.

4) Последовательность $\{d_n\}$ задана рекуррентно: $d_1 = 7$, $d_2 = 27$, $d_{n+2} = 6d_{n+1} - 5d_n$ при $n \geqslant 1$. Найдите формулу общего члена.

5) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 8n$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что любой член последовательности является квадратом целого числа.

6) Последовательность $\{u_n\}$ задана рекуррентно: $u_1 = 3$, $u_2 = 15$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что

   а) все члены последовательности кратны 3;

   б) все члены последовательности с четными номерами кратны 15.

Урок 10. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена

1) На прошлом уроке мы познакомились с последовательностью, называемой арифметической прогрессией (см. (9.1)). Дадим словесное определение:

Определение.

> ***Арифметической прогрессией*** *называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называемым* ***разностью*** *прогрессии.*

2) Арифметическую прогрессию обычно обозначают $\{a_n\}$, а ее разность – d (первой буквой латинского слова *differentia* – разность). Если хотят коротко записать, что последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то пишут $\div\{a_n\}$.

3) В математической литературе часто можно встретить такие слова "n чисел образуют арифметическую прогрессию". Вообще говоря, конечный набор чисел не является последовательностью. Тем не менее, термин прижился, т. е. можно говорить и о конечной арифметической прогрессии.

   Упражнение. Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если переставить ее члены в обратном порядке?

4) Поскольку арифметическая прогрессия задается рекуррентно, то изучение ее свойств необходимо начать с вывода формулы общего члена. Она имеет следующий вид:
$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,d.} \tag{10.1}$$
   Для доказательства достаточно воспользоваться методом математической индукции.

5) Иногда бывает необходимо выразить $(n+k)$-й член арифметической прогрессии через ее n-й член и разность. Соответствующая формула, очевидно, имеет следующий вид:
$$\boxed{a_{n+k} = a_n + kd.} \tag{10.2}$$

6) **Упражнения**.

   (1) Найдите разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = 2$, $a_8 = -47$.

   (2) Является ли число 214 членом арифметической прогрессии $\{6;\ 14;\ 22;\ \ldots\}$? В случае положительного ответа укажите его номер.

   (3) Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия $\{-4,1;\ -3,6;\ -3,1;\ \ldots\}$?

(4) Найдите первый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_5 = 11$, $a_{11} = -7$.

(5) Сумма второго, четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно -168. Найдите первый член и разность прогрессии.

(6) Могут ли числа 1, $\sqrt{3}$, 3 быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными)?

(7) Пусть $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Домашнее задание

1) Является ли последовательность $\{x_n\}$ арифметической прогрессией, если она задана следующей формулой общего члена

   а) $x_n = 2n^2 - n$; б) $x_n = \dfrac{2n-1}{5}$?

   В случае положительного ответа найдите разность прогрессии.

2) Найдите первый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_{21} = 2$, а разность прогрессии $d = 0,5$.

3) Найдите разность и формулу общего члена арифметических прогрессий:

   а) $\left\{2\,\dfrac{1}{6},\ 2\,\dfrac{1}{3},\ 2\,\dfrac{1}{2}, \ldots\right\}$; б) $\{a^2, 2a^2, 3a^2, \ldots\}$.

4) Найдите номер члена арифметической прогрессии $\{12,4;\ 13;\ 13,6; \ldots\}$, который равен $20,8$.

5) Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии $\{10,2;\ 9,5;\ 8,8;\ \ldots\}$.

6) Чему равна разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_8 = 58$, $a_{15} = 16$?

7) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если

   а) $a_3 + a_7 = 30$, $a_6 + a_{16} = 60$; б) $a_4 + a_{10} = 36$, $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

8) В каких случаях для членов арифметической прогрессии выполнено равенство $a_1a_4 = a_2^2$?

9) Докажите, что если положительные числа a, b и c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

Урок 11. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

1°. Упражнения на использование формулы общего члена

1) Между числами -6 и 3 вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовывали арифметическую прогрессию.

2) Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 7x + a = 0$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 19x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

3) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, в которой $a_k = m$, $a_m = k$ $(k \neq m)$. Найдите a_{k+m}.

2°. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

1) Справедливо следующее утверждение:

Теорема 11.1 (характеристическое свойство арифметической прогрессии).

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, и, наоборот, если каждый член последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то последовательность является арифметической прогрессией:

$$\{a_n\} - \textit{арифметическая прогрессия} \;\Leftrightarrow\; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\; n \geqslant 2.$$

Замечание. Если речь идет о конечной арифметической прогрессии, то в формулировке теоремы 11.1 слова “каждый член, начиная со второго” должны быть заменены на слова “каждый член, кроме первого и последнего”.

Доказательство теоремы:

Необходимость: Если $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, то, с одной стороны, $a_n = a_{n-1} + d$, а с другой стороны, $a_n = a_{n+1} - d$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

Достаточность: Пусть $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Тогда $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Обозначим эту величину d. Из полученного равенства следует, что d не зависит от номера n. Но, очевидно, $a_{n+1} = a_n + d$. Следовательно, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

■

2) Доказанное нами характеристическое свойство объясняет, почему арифметическая прогрессия получила такое название.

3) Теорема 11.1 может быть обобщена. А именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 11.2.

Пусть k, m, p, q – натуральные числа, причем $k+m=p+q$. Тогда $$a_k+a_m=a_p+a_q.$$ *В частности,* $$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots=a_{i+1}+a_{n-i}.$$

Указание: Для доказательства проще всего воспользоваться формулой общего члена (10.1).

Замечание. В случае конечной арифметической прогрессии эту теорему часто формулируют так: *"суммы членов, равноотстоящих от концов, равны"*.

4) **Упражнения**.

(1) При каких x значения выражений x^2-4, $5x+3$ и $3x+2$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

(2) При каких y значения выражений y^2-2y, $3y+5$, $4y+13$ и $2y^2-y+25$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

(3) Числа a_k, a_n, a_m являются членами арифметической прогрессии (не обязательно последовательными). Известно, что $n=\dfrac{k+m}{2}$. Докажите, что

$$3\left(a_k^2+a_n^2+a_m^2\right)=\left(a_k+a_n+a_m\right)^2+6\left(a_k-a_n\right)^2.$$

Домашнее задание

1) Восьмой и десятый члены арифметической прогрессии равны соответственно $3,5$ и $2,7$. Найдите девятый член этой прогрессии.

2) Докажите, что значения выражений $(a+b)^2$, a^2+b^2, $(a-b)^2$ при любых a и b являются последовательными членами арифметической прогрессии.

3) При каких y значения выражений y^2+1, y^2+y и $8y-10$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

4) При каких x значения выражений $3x+4$, $2x+3$, x^2 и $2x^2+x$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

5) Какие четыре числа надо вставить между числами 4 и -5, чтобы они вместе с данными числами образовывали арифметическую прогрессию?

6) Докажите, что если $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, разность которой отлична от нуля, то при $n > 2$

$$a_1 a_n < a_2 a_{n-1}.$$

7) Докажите, что если корни уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ образуют арифметическую прогрессию, то $q = 0,09\,p^2$.

Урок 12. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

1) При решении задач на арифметическую прогрессию часто бывает необходима формула для суммы первых членов прогрессии:

Теорема 12.1.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n.$$

Доказательство: По условию, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$. Перепишем это соотношение в виде $S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$. Складывая почленно эти равенства, получим, что

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)\,.$$

Отсюда с учетом теоремы 11.2 сразу же получаем, что $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$.

■

Замечание. С этим методом доказательства мы познакомились еще в 5-м классе, когда находили сумму первых n натуральных чисел. Тогда мы называли его "методом Гаусса".

2) **Упражнения**.

(1) Первый член арифметической прогрессии равен 12, а разность равна -2. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равна -264?

(2) Найдите сумму всех натуральных чисел, меньших 700, которые кратны 8.

(3) Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии $\{4,6;\ 4,2;\ 3,8;\ \ldots\}$.

(4) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_5 = 14$, $a_8 = 23$.

(5) Тринадцатый член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых 25 ее членов.

(6) В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна 25, а сумма членов с нечетными номерами равна 10. Найдите a_7.

(7) В арифметической прогрессии $S_n = S_m$ $(n \neq m)$. Найдите S_{n+m}.

(8) Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии в пять раз меньше суммы следующих восьми членов. Найдите отношение суммы первых восьми членов прогрессии к сумме ее первых четырех членов.

Домашнее задание

1) Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 9.

2) Чему равна сумма всех отрицательных членов арифметической прогрессии $\{-4,7;\ -4,3;\ -3,9;\ \ldots\}$?

3) Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 10, а сумма ее первых четырнадцати членов равна 1050.

4) Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_5 = -0,8$, $a_{11} = -5$.

5) Известно, что сумма первых девятнадцати членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 76. Найдите a_{10}.

6) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Известно, что $a_4 + a_8 + a_{19} + a_{23} = 30$. Найдите S_{26}.

7) В арифметической прогрессии сумма восьми первых членов равна 32, а сумма двадцати первых членов равна 200. Найдите S_{28}.

8) В нестационарной арифметической прогрессии сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найдите отношение суммы первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов.

Урок 14. Геометрическая прогрессия

1°. Определение геометрической прогрессии

1) Мы уже знаем каким соотношением задается геометрическая прогрессия. Дадим теперь ее словесное определение:

Определение.

> ***Геометрической прогрессией*** *называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю, называемым* ***знаменателем*** *прогрессии.*

2) Геометрическую прогрессию обычно обозначают $\{b_n\}$, а ее знаменатель – q (первой буквой французского слова *qwoti* – частное).

2°. Свойства геометрической прогрессии

1) Несложно по индукции доказать формулу общего члена геометрической прогрессии

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.} \tag{14.1}$$

2) Как и у арифметической прогрессии, у геометрической прогрессии есть характеристическое свойство:

Теорема 14.1 (характеристическое свойство геометрической прогрессии).

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией т. и т. т., когда абсолютная величина любого ее члена, начиная со второго, равна среднему геометрическому предыдущего и последующего членов:

$$\{b_n\} - \textit{геометрическая прогрессия} \ \Leftrightarrow \ |b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}, \ n \geqslant 2.$$

Замечание 1. *Теперь понятна связь между понятиями геометрической прогрессии и среднего геометрического.*

Замечание 2. *В случае конечной геометрической прогрессии нужно говорить об абсолютной величине всех членов, кроме первого и последнего.*

3) Из характеристического свойства можно получить такое следствие:

Следствие.

Если натуральные числа p, r, k, m таковы, что $p+r = k+m$, то выполнено соотношение:

$$b_p \cdot b_r = b_k \cdot b_m.$$

4) Продолжая аналогию с арифметической прогрессией, можно получить формулу для произведение первых n членов геометрической прогрессии:

Теорема 14.2.

Пусть $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$. *Тогда* $P_n^2 = (b_1 b_n)^n$.

5) Нужно отметить, что формула для произведения первых n членов геометрической прогрессии используется очень редко. Зато часто бывает нужно посчитать сумму первых n ее членов:

Теорема 14.3.

Пусть $\{b_n\}$ *– геометрическая прогрессия, причем ее знаменатель* $q \neq 1$. *Обозначим* $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. *Тогда*

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

3°. Простейшие задачи на геометрическую прогрессию

1) Пусть $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии, если $b_4 - b_1 = -9$ и $b_2 + b_3 + b_4 = -6$.

2) Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если $b_4 = 24$ и $q = -2$.

3) При каких значениях x числа $2x-3$, $x-4$ и $x+2$ будут последовательными членами геометрической прогрессии ? Найдите эти числа.

4) Между числами 2 и 162 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию.

Домашнее задание

1) Найдите первый член геометрической прогрессии, которая состоит из шести членов, если сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних равна 21.

2) Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если $b_3 = 12$ и $b_6 = 324$.

3) При каких значениях x числа $3x-2$, $x+2$ и $x+8$ будут последовательными членами геометрической прогрессии ? Найдите эти числа.

4) Между числами 3 и 96 вставьте четыре таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию.

5) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член, начиная со второго, равен разности двух соседних (следующего и предыдущего).

6) Известно, что a, b и c – три последовательных члена геометрической прогрессии. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{a} = \dfrac{b^2+c^2}{c}$.

Урок 15. Решение задач на геометрическую прогрессию

1°. Решение задач на геометрическую прогрессию

1) Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами (не обязательно последовательными) одной геометрической прогрессии?

2) Пусть $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия со знаменателем q. Выразите через b_1 и q сумму $Q_n = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$.

3) Седьмой член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых 13 ее членов.

4) В конечной геометрической прогрессии сумма первого и последнего ее членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего равна 324. Найдите последний член прогрессии.

5) Найдите сумму членов геометрической прогрессии с пятнадцатого по двадцать первый включительно, если сумма первых семи членов прогрессии равна 14, а сумма первых 14 ее членов равна 18.

6) Известно, что x_1 и x_3 – корни уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$, x_2 и x_4 – корни уравнения $x^2+bx+16 = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

Домашнее задание

1) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 357, а третий член прогрессии на 255 больше первого.

2) Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 3, а сумма их квадратов равна 21. Найдите эти числа.

3) В геометрической прогрессии с четным числом членов сумма сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

4) Числа a_1, a_2, a_3, a_4 составляют геометрическую прогрессию. Найдите произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$ и $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \dfrac{1}{a_4} = 1,875$.

5) Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2-12x+b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

6) Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

Урок 16. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

1°. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

1) Найдите четыре числа, если известно, что первые три из них образуют геометрическую прогрессию, последние три – арифметическую, сумма крайних чисел равна 21, сумма средних –18.

2) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Если затем третье число увеличить на 9, то вновь получится геометрическая прогрессия. Найдите исходные числа.

3) Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел – геометрическую прогрессию. Найдите a_1, a_2, a_3, если $a_1+a_2+a_3 = 21$.

4) Даны две арифметические прогрессии: a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$, а числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

Домашнее задание

1) Три различных числа a, b, c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа $a + b$, $b + c$ и $a + c$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

2) Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 14. Если от первого числа отнять 15, а второе и третье увеличить соответственно на 11 и 5, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найдите исходные три числа.

3) Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите первый член арифметической прогрессии.

4) Три отличных от нуля числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел образуют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные знаменатели последней прогрессии.

5) Найдите трехзначное положительное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, отличным от единицы, а цифры числа, меньшего на 200, образуют арифметическую прогрессию.

6) Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если их уменьшить соответственно на 2, 1, 7 и 27, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.