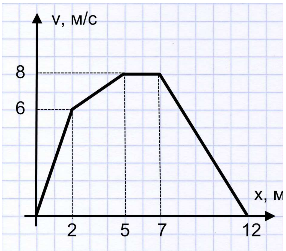
Решения задач 11 класса.

**1.** На рисунке приведен график зависимости скорости тела от его координаты $v(x)$. Найти максимальное ускорение, с которым двигалось данное тело, и указать в какой точке оно достигается.

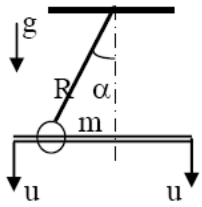



Решение.

Ускорение тела находится по формуле $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Рассмотрим какое приращение получила скорость за промежуток времени $\Delta t$. Зависимость скорости от координаты имеет линейный характер $v(x) = kx + b$, поэтому $\Delta v = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x$. Тогда $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{k\Delta x}{\Delta t} = kv$, где величина $k$ определяется углом наклона графика $v(x)$, $k = \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Вычислив соответствующее произведение $kv$ в критических точках 2, 5 и 7 метров, мы находим, что $a_{\max} = 18\ \text{ì /ñ}^2$ и достигается оно в точке $x = 2\ \text{ì}$ .

**2.** Бусинка массы $m$ привязана к потолку невесомой нитью длины R и надета на горизонтальную спицу. Трения между спицей и бусинкой отсутствует. Спицу опускают с постоянной скоростью $u$, при этом нить не провисает. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда она образует угол $\alpha$ с вертикалью.

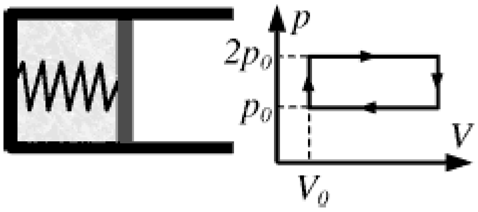



Решение.

Бусинка движется по окружности радиуса $R$. Вертикальная проекция её скорости постоянна и равна скорости спицы $u$. Пусть её скорость в рассматриваемый момент времени равна $v$, тогда $u = v\sin\alpha$, откуда $v = u/\sin\alpha$.

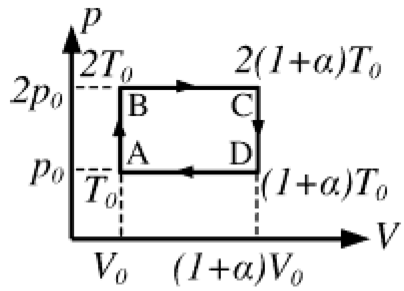
Так как ускорение по вертикали нулевое, то $T\cos\alpha + N = mg$. Здесь $T$ натяжение нити, $N$ сила нормальной реакции со стороны спицы. Центростремительное ускорение $v^2/R$ вызывается силами, поперечными скорости. Запишем проекцию 2-го закона Ньютона на направление нити: $T + N\cos\alpha - mg\cos\alpha = mv^2/R$. После исключения величины $N$ из полученной системы уравнений находим окончательно $T = \frac{mu^2}{R\sin^4\alpha}$.

**3.** Тепловая машина содержит пружину жесткости $k$ и идеальный одноатомный газ. Машина работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (см. рис.). Давление газа в цикле меняется от $p_0$ до $2p_0$. Первоначальный объем газа равен $V_0$, при этом пружина не деформирована, и ее длина равна $x_0$. Известно, что максимальная энергия, запасенная в пружине в $n$ раз меньше, чем теплота, переданная тепловой машине за цикл от нагревателя. Найдите КПД тепловой машины.




Решение.

Пусть максимальная деформация пружины равна $x$. Пропорционально деформации изменится и объем, $\Delta V = \frac{x}{x_0}V_0 = \alpha V_0$. Тогда максимальный объем газа в цикле равен $V_0 + \Delta V = V_0(1+\alpha)$. Если температуру в точке A обозначить $T_0$, то в точках B, C, D из уравнения Менделеева-Клапейрона температуры будут $2T_0$, $2(1+\alpha)T_0$ и $(1+\alpha)T_0$.




Вычисление КПД $\eta$ такого цикла при заданном параметре $\alpha$ – типичная задача, по определению $\eta = A/Q$ 100%, где $A = \alpha p_0 V_0$ – работа, совершенная газом за цикл, численно равная площади прямоугольника ABCD, ограничиваемого циклом; $Q$ – тепло, переданное тепловой машине.

Вычислим теплоту $Q$. При изохорическом нагревании от $T_0$ до $2T_0$ газу передают теплоту $\nu C_V T_0$. При изобарическом нагревании от $2T_0$ до $2(1+\alpha)T_0$ газу передают теплоту $2\alpha\nu C_P T_0$. Так как газ одноатомный, то $C_P = 5R/2$ и $C_V = 3R/2$. Тогда

$$Q = \frac{3}{2}\nu R T_0 + 5\alpha\nu R T_0 = \nu RT(5\alpha + 3/2) = p_0 V_0 (5\alpha + 3/2).$$

Значит $\eta = \frac{A}{Q}\cdot 100\% = \frac{2\alpha}{10\alpha+3}\cdot 100\%$.

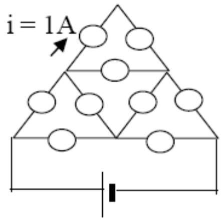
Параметр $\alpha$ найдем, приравняв энергию пружины $\frac{kx^2}{2}$ величине $\frac{Q}{n}$:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{p_0V_0(5\alpha+3/2)}{n} \quad \rightarrow \quad \frac{k(\alpha x_0)^2}{2} = \frac{p_0V_0(5\alpha+3/2)}{n}.$$

Получили квадратное уравнение относительно параметра $\alpha$: $\xi\alpha^2 - 5\alpha - 3/2 = 0$, где $\xi = \frac{nk{x_0}^2}{2p_0V_0}$.

Оно имеет единственный положительный корень $\alpha = \frac{5+\sqrt{25+6\xi}}{2\xi}$. Подставив его в формулу для КПД получим: $\eta = \frac{5+\sqrt{25+6\xi}}{25+5\sqrt{25+6\xi}+3\xi}\cdot 100\%$, где $\xi = \frac{nk{x_0}^2}{2p_0V_0}$.

**4.** Из девяти одинаковых лампочек собрали схему (см. рис.) и подключили к источнику напряжения. Ток в левой верхней лампочке равен 1А. Найдите ток I протекающий через источник напряжения.

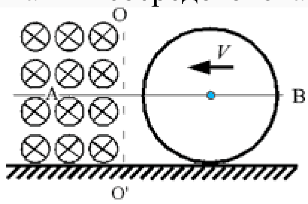



Решение.

Поскольку самая верхняя правая лампочка последовательно соединена с лампочкой с током $i$ = 1А, то и в ней протекает ток $i$. Напряжение на лампе в горизонтальной перемычке равно сумме напряжений на двух самых верхних лампах (параллельное соединение). Тогда при напряжении $2ir$ ток в ней $I_1 = 2i$ (ведь сопротивления всех ламп $r$ одинаково). Из симметрии схемы токи в лампах в наклонных участках, соединённых с серединой основания, равны. Тогда, так как сумма напряжений на них равна напряжению $2ir$ на горизонтальной перемычке, токи в них снова равны $i$. Ток в нижней левой лампе наклонной стороны равен сумме трёх выходящих токов $I_2 = i + I_1 + i = 4i$. Наконец, ток в левой лампе основания находится по суммарному напряжению соединённых с ним ламп $I_3 = 5i$. Ток через источник $I = I_2 + I_3 = 9i$ = 9А.

Возможно также решение с эквивалентной схемой, когда середину основание отделяют, а лампы над ним оставляют соединёнными.

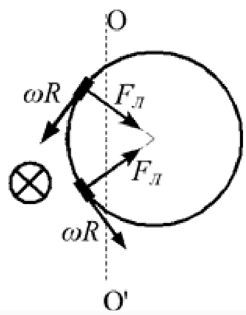
**5.** Колесо радиуса $R$ движется поступательно со скоростью $v_0$. Первоначально колесо не вращается. Ось колеса может свободно двигаться только вдоль направляющих АВ, трение между колесом и поверхностью, а также в оси колеса пренебрежимо мало. Обод колеса равномерно заряжен. Колесо въезжает в протяженную область, где имеется однородное магнитное поле индукции $B$, параллельное оси колеса (см. рис.). Каков должен быть заряд колеса, чтобы на большом расстоянии от границы раздела ОО' колесо покатилось без проскальзывания? Масса колеса равна $M$ и сосредоточена в ободе.



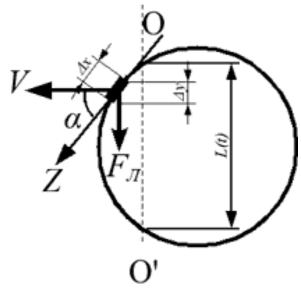

Решение.

Колесо, движущееся поступательно, начинает раскручиваться силой Лоренца, которая действует вертикально вниз на часть колеса, попавшую в поле. Эта сила создает нескомпенсированный момент, за счет которой колесо раскручивается. Из-за вращательной компоненты на колесо действует компонента силы Лоренца, уменьшающая поступательную скорость.

Действительно, рассмотрим два противоположных кусочка колеса (см. рис.). Видно, что вертикальные компоненты сил Лоренца компенсируются, а горизонтальная компонента оказывается тормозящей. Иными словами, вращательная компонента скорости колеса порождает силу Лоренца, которая тормозит колесо, но не влияет на раскручивание. Итак, за счет силы Лоренца поступательная компонента скорости уменьшится, а вращательная увеличится. Так как сила Лоренца работы не совершает, поступательная энергия колеса переходит во вращательную.




Введем заряд единицы длины обода $\sigma$. Обозначим в некоторый момент времени поступательную скорость колеса $v$, а вращательную $u = \omega R$. Рассмотрим, какая сила в этот момент раскручивает колесо. Мы уже доказали, что для исследования раскручивающей силы достаточно рассмотреть лишь компоненту силы Лоренца, соответствующую поступательной компоненте скорости колеса.




Для маленького кусочка колеса $\Delta x$ эта компонента силы Лоренца равна $\sigma \Delta x B v$. Раскручивает же колесо проекция силы на направление OZ, касательное к ободу, т.е. $\sigma \Delta x B v \cos\alpha = \sigma \Delta y B v$. Если просуммировать все эти вклады сумма элементов $\Delta y$ дает длину хорды колеса, лежащей на границе магнитного поля. Обозначим ее $L(t)$. С другой стороны, суммарная сила по второму закону Ньютона пропорциональна ускорению вращательного движения колеса:

$$M \frac{\Delta u}{\Delta t} = \sigma B v(t) L(t).$$

Перепишем последнее уравнение в виде: $M \Delta u = \sigma B v(t) L(t) \Delta t$. Теперь следует заметить, что величина $B v(t) L(t) \Delta t$ в правой части это просто изменение магнитного потока Ф через колесо в данный момент времени. Значит, $M \Delta u = \sigma \Delta \Phi$. Это равенство справедливо в любой момент времени, значит, и полное изменение вращательной компоненты скорости пропорционально полному изменению магнитного потока через колесо, которое, в свою очередь, равно $B \pi R^2$.

Итак, целиком войдя в поле, колесо приобретет вращательную скорость $u_k = \sigma B \pi R^2 / M$. По закону сохранения энергии возникновение вращательной энергии произошло за счет уменьшения поступательной, т.е. величина $v^2 + u^2$ не меняется и равна значению вначале $v_0^2$. Для того, чтобы колесо в конце катилось без проскальзывания, его поступательная и вращательная скорости должны быть равны, т.е. $v_k = u_k = v_0 / \sqrt{2}$. Отсюда найдем заряд колеса: $q = 2\pi R \sigma = 2\pi R \dfrac{M v_0}{\sqrt{2} B \pi R^2} = \dfrac{\sqrt{2} M v_0}{BR}$.