Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-11

Материалы к урокам по теме:

“Показательные и логарифмические неравенства”

Харьков, 2015 г.

Поурочное планирование (14 часов)

Урок 1. Простейшие показательные неравенства.

Урок 2. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Урок 3. Решение показательных неравенств методом замены переменной.

Урок 4. Решение показательных неравенств методом интервалов. Нестандартные методы решения показательных неравенств.

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: "Показательные неравенства".

Урок 6. Простейшие логарифмические неравенства.

Урок 7. Решение логарифмических неравенств методом замены переменной.

Урок 8. Решение логарифмических неравенств методом интервалов. Нестандартные методы решения логарифмических неравенств.

Урок 9. Метод логарифмирования. Неравенства вида $(f(x))^{g(x)} \lesseqgtr a$.

Урок 10. Неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) \lesseqgtr 1$.

Урок 11. *Самостоятельная работа* по теме: "Логарифмические неравенства".

Урок 12. Обобщающий урок по теме.

Урок 13. Контрольная работа.

Урок 14. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Простейшие показательные неравенства вида $a^{f(x)} \geqslant b$

1) Решение практически всех показательных неравенств основано на использовании монотонности показательной функции $f(x) = a^x$: при $a > 1$ функция $f(x)$ возрастает на всей числовой оси, а при $0 < a < 1$ – убывает.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

   (1) $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geqslant 4$;

   (2) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3} < (0,36)^{0,5x^2-3}$;

   (3) $6^{\frac{x+5}{x^2-9}} > 1$;

   (4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left|\frac{x-1}{x+3}\right|} < 0,25$;

   (5) $\dfrac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

   (6) $4^{\sin x} \leqslant 2$;

   (7) $2^{3x} \cdot 3^x \geqslant \dfrac{1}{24}$;

   (8) $3^{-x} \cdot 5^{0,5x} < 1$;

   (9) $3^{5x} \leqslant 5^{3x}$;

   (10) $3^{x^2-3x+6} > 25$;

   (11) $\left(\dfrac{\log_2 3}{\log_3 5}\right)^{1-x^2} \geqslant 1$.

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$;

2) $8 \cdot 2^{x^2-3x} < (0,5)^{-1}$;

3) $(0,4)^{\frac{6-x}{x^2-2x-3}} > 1$;

4) $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{4+1/x} \leqslant \left(2\sqrt{2}\right)^{-1,5}$;

5) $\dfrac{16-4^x}{9x^2+12x+4} \geqslant 0;$

6) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\cos x} > 3;$

7) $5^{-4x} \cdot 7^{3x} \leqslant 2^{-x};$

8) $\left(\dfrac{\pi+0,36}{3e-5}\right)^{1-x} > 1;$

9) $7^{-x^2+6x-7} \geqslant 50.$

Урок 2. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

1°. Неравенства, непосредственно приводящиеся к виду $a^{f(x)} \gtrless b$

1) Решим несколько неравенств, которые легко приводятся к виду $a^{f(x)} \gtrless b$.

2) **Упражнения**. Решите следующие неравенства:

   (1) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leqslant 9;$

   (2) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1} > \dfrac{3}{16};$

   (3) $7^x - 2^{x+2} \geqslant 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}.$

2°. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

1) Легко видеть, что неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ решаются по следующей схеме:

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), & \text{если } a > 1, \\ f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}}$$

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

   (1) $(0,3)^{\frac{x}{x-2}} < (0,3)^{\frac{6}{x-1}};$

   (2) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\sqrt{x+2}} > 6^{-x};$

   (3) $25 \cdot (0,04)^{2x} \geqslant (0,2)^{x(3-x)};$

   (4) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(7\,\dfrac{7}{20}\right)^x \leqslant \left(\dfrac{81}{625}\right)^x;$

   (5) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+5x+3} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}.$

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}\leqslant 315;$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leqslant 3;$

3) $3^{x}-2^{x+4}>3^{x-1}-55\cdot 2^{x-2}.$

4) $7^{2-\frac{x-3}{x+2}}>7^{\frac{x-2}{x+1}};$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}};$

6) $4\cdot(0,5)^{x(x+3)}\leqslant(0,25)^{2x};$

7) $\left(\frac{1}{11}\right)^{|x|}<\left(\frac{1}{121}\right)^{|x+2|};$

8) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\geqslant\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

Урок 3. Решение показательных неравенств методом замены переменной

1) Одним из самых часто используемых методов решения показательных неравенств является метод замены переменной.

2) **Упражнения**. Решите следующие неравенства:

   (1) $0,25^{x}-12\cdot 0,5^{x}+32\geqslant 0;$
   (2) $4^{1-x}-0,5^{1-2x}>1;$
   (3) $9\cdot 14^{1/x}\leqslant 2\cdot 49^{1/x}+7\cdot 4^{1/x};$
   (4) $\dfrac{4^{x}}{4^{x}-3^{x}}<4;$
   (5) $4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\leqslant 8;$
   (6) $4^{x}+2^{x+2}\geqslant 19-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x};$
   (7) $\sqrt{8\cdot 16^{x}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x}}\leqslant 3\cdot 4^{x}-3^{x};$

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $6^{x+2} + 6^{-x} \geqslant 37$;

3) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leqslant 8 \cdot 15^x$;

4) $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + 1 < 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x$;

5) $7 \cdot \dfrac{4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} < 1 + 3 \cdot (1,25)^x$;

6) $3^{1-x} + 9^x - 3 \cdot 3^x \geqslant 6 - 9^{-x}$;

7) $\sqrt{9^x + 12^x - 2^{4x+1}} > \sqrt{3 \cdot 4^{2x+1} + 12^x - 9^x}$.

Урок 4. Метод интервалов. Нестандартные методы решения показательных неравенств

1°. Применение метода интервалов при решении показательных неравенств

1) Поскольку показательная функция непрерывна, то для решения показательных неравенств можно использовать метод интервалов.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

   (1) $\dfrac{5^x - 0,04}{5 - x} \geqslant 0$;

   (2) $\dfrac{2^x + 4x}{2x+1} > 2$;

   (3) $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$.

2°. Нестандартные методы решения показательных неравенств

1) Иногда для решения показательных неравенств необходимо использовать нестандартные методы – соображения монотонности, метод “минимакса” и т. п.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

   (1) $2^{x^2} + 5^{x^4} \leqslant 2 - \operatorname{tg}^2 x$.

   (2) $5^x > 6 - x$;

(3) $7^x + 24^x \geqslant 25^x$;

(4) $x \cdot 2^x > 8$;

(5) $\left(x^2+2\right) \cdot e^{x^2-3x+2} < 3x$;

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $\dfrac{2^x-1}{x-1} > 0$;
2) $3x \cdot 2^x + 12 \leqslant 2^{x+2} + 9x$;
3) $\sqrt{2-5x-3x^2} - 2 > 2 \cdot 3^x \cdot \sqrt{2-5x-3x^2} - 4 \cdot 3^x$;
4) $3^{x^2+1} + 7^{|x|} > 4 - \sin^2 x$.
5) $10^{4-x} > 7 + x$;
6) $5^x + 12^x < 13^x$;
7) $x \cdot 3^x < 18$;
8) $x^x > 27$;

Урок 5. Самостоятельная работа №1: “Показательные неравенства”

Домашнее задание

Сканави: 9.051, 9.066, 9.083, 9.086, 9.109, 9.241, 9.265, 9.273.

Урок 6. Простейшие логарифмические неравенства

1°. Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

1) Решение логарифмических неравенств основано на свойстве монотонности логарифмической функции. При этом необходимо постоянно следить за областью определения входящих в неравенство выражений.

   В частности, простейшие логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ решаются по схеме

$$\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, & \text{если } a > 1, \\ 0 < f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}}$$

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $\log_2(5x+1) > 4$;

(2) $\log_{1/3}(2x-3) \geqslant -2$;

(3) $\sqrt{\log_2 \dfrac{3x-1}{2-x}} < 1$;

(4) $\log_{0,7}\left(x^2-2x-3\right) \leqslant \log_{0,7}(9-x)$;

(5) $\ln\left(x^2-2\right) \geqslant \ln(4x+3)$;

(6) $\log_{1/2} \dfrac{2x-1}{3x+1} > 1$;

(7) $\lg\left(2x^2-9x+4\right) \leqslant 2\lg(x+2)$.

2°. Неравенства вида $\log_a \log_b f(x) \gtrless c$

1) Иногда приходится иметь дело с неравенствами, в которые входят т. н. "логарифмы от логарифмов". При их решении необходимо последовательно освобождаться от логарифмов (начиная с внешнего), внимательно следя за ОДЗ.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $\log_{1,6} \log_{0,5}\left(x^2-x-6\right) \geqslant 0$;

(2) $\log_{0,5} \log_4\left(2x^2+x-1\right) < 1$.

3°. Неравенства, содержащие суммы логарифмов

1) При решении неравенств, содержащих суммы логарифмов, обычно переходят к логарифму произведения. Но при такой операции, вообще говоря, расширяется область определения выражения. Поэтому надо внимательно следить за равносильностью переходов.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $\log_2(-x) + \log_2(1-x) \leqslant 1$;

(2) $\log_{0,7} x + \log_{0,7}(x-1) \leqslant \log_{0,7}(8-x)$.

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $\log_{0,5}(2x+1) \geqslant -2$;

2) $\log_9(5x+6) \leqslant 2$;

3) $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x+1}{3-x}} < 1$;

4) $\log_{0,1}(10-2x) \geqslant \log_{0,1}\big(x^2-x-2\big)$;

5) $\log_3 \dfrac{2x+5}{x+1} \leqslant 1$;

6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2) \geqslant 2\log_3 2+1$;

7) $\log_{2/3}(x-1)+\log_{2/3}(x-5) \leqslant \log_{2/3}(11-x)$.

8) $\log_{7/4}\log_5\big(x^2-2x-3\big) \leqslant 0$;

9) $\log_{0,8}\log_2 \dfrac{3x-1}{2-x} > 0$.

Урок 7. Решение логарифмических неравенств методом замены переменной

1) Во многих случаях логарифмические неравенства можно свести к алгебраическим с помощью замены переменной.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

   (1) $2\cdot\log^2_{1/9} x - 5\cdot\log_{1/9} x + 2 \geqslant 0$;

   (2) $\log^2_2(4x)+2\cdot\log_2 x - 11 < 0$;

   (3) $\dfrac{\log^2_3 x - 6\cdot\log_3 x + 8}{\log_3 x - 1} \geqslant 0$;

   (4) $\dfrac{1}{1-\lg x} < \dfrac{2\lg x - 5}{1+\lg x}$;

   (5) $\log_9 x^2 + \log^2_3(-x) < 2$;

   (6) $\log_{(x+1)^2} 8 + 3\cdot\log_4(x+1) \geqslant 9\,\dfrac{1}{4}$;

   (7) $\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)}+1 > \log_3\big(3x^2-4x+2\big)$;

   (8) $3\cdot\log^2_2(x+1) - \dfrac{1}{4}\cdot\log^2_2(3x+5)^2 + 2\cdot\log_2(x+1)\cdot\log_2(3x+5) > 0$;

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $2\log^2_4 x - \log_4 x - 1 < 0$;

2) $\log_6^2 \dfrac{x}{216} + 8\log_6 x - 12 \leqslant 0$;

3) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} \geqslant 0$;

4) $\log_4 x^2 + \log_2^2 (-x) > 6$;

5) $\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{1/2} \left(2^{x+1} - 2\right) > -2$;

6) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 (4x) > 1$;

7) $\sqrt{1 - \log_5 (x^2 - 2x + 2)} < \log_5 \left(5x^2 - 10x + 10\right)$;

8) $\dfrac{1}{3} \cdot \log_5^2 (x-2)^3 + 2 \cdot \log_5 (x-2) \cdot \log_5 (3x-4) < \log_5^2 (3x-4)$;

Урок 8. Решение логарифмических неравенств методом интервалов. Нестандартные методы решения логарифмических неравенств

1°. Решение логарифмических неравенств методом интервалов

1) Как мы видели на прошлом уроке, многие логарифмические неравенства можно решать методом интервалов. При этом особое внимание надо уделять области определения рассматриваемых функций. И, конечно, надо следить за кратностью корней (в отличие от алгебраических неравенств, не всегда сразу видно, что корень кратный).

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

   (1) $\dfrac{1 - \log_{0,5} (-x)}{x^2 + 5x + 6} < 0$;

   (2) $\dfrac{\left(\left|\log_2 x\right| - 1\right) \cdot \left(2x^2 + x - 1\right)}{4^x - 2^{x+3} + 16} \geqslant 0$;

   (3) $\log_{1/(1-x^2)} 2 < \log_{2x^2} \dfrac{1}{2}$;

   (4) $\dfrac{\log_5 \left(x^2 - 4x - 11\right)^2 - \log_{11} \left(x^2 - 4x - 11\right)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geqslant 0$.

2°. Нестандартные методы решения логарифмических неравенств

1) При решении логарифмических неравенств достаточно широко используются нестандартные методы решения (соображения монотонности, метод минимакса, наблюдение за областью определения и т. п.).

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $\log_5 x + x > 6$;

(2) $x \cdot \log_3 x \geqslant 18$;

(3) $\left|\sqrt{2}\,|x| - 1\right| \cdot \log_2\left(2 - 2x^2\right) \geqslant 1$;

(4) $\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \cdot \log_5 \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{x} \cdot \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leqslant 0$.

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $\dfrac{\left(2x^2 - x - 1\right) \cdot \log_{0,5}(x + 2)}{4^x - 2^x - 2} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{(2\sqrt{x} - x) \cdot \log_2(5 - x)}{\left|\log_{0,5} x\right| - 2} \geqslant 0$;

3) $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1 + 2x)} < \dfrac{\log_2 \sqrt[3]{1 + 2x}}{\log_2 x}$;

4) $\dfrac{1}{\log_2 x} < \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}}$;

5) $\log_3(4 - x) \leqslant x$;

6) $\left(4x - x^2 - 3\right) \cdot \log_2\left(\cos^2 \pi x + 1\right) \geqslant 1$;

Урок 9. Метод логарифмирования. Неравенства вида $(f(x))^{g(x)} \leqslant 1$

1°. Решение неравенств методом логарифмирования

1) Иногда удается решить неравенство (показательное или логарифмическое), взяв логарифм по какому-нибудь основанию от обеих частей.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $2^x < 3^{1/x}$;

(2) $3^x \cdot 2^{3/x} > 24$;

(3) $x^{\log_3 x + 2} \geqslant 27$;

(4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{\left(x^2 - 2x - 15\right)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1$.

2°. Неравенства вида $\boldsymbol{(f(x))^{g(x)} \leqslant 1}$

1) Возможны два подхода к решению неравенств вида $(f(x))^{g(x)} \leqslant 1$. Первый предполагает рассмотрение отдельно случаев $f(x) > 1$, $f(x) = 1$ и $0 < f(x) < 1$. Второй способ состоит в том, что логарифмируя обе части неравенства, получаем неравенство
$$g(x) \cdot \ln f(x) \leqslant 0,$$
которое затем решается с помощью метода интервалов.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $(x+3)^{2x^2-7x} < 1$;
(2) $x^{x^2-2x} > x^3$;
(3) $|x|^{x^2-x-2} \leqslant 1$;
(4) $\left(\sqrt{x^2-4}\right)^{x^2-2x} \geqslant x^2-4$.

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $2^x \cdot 3^{2/x} < 1$;
2) $x^{\log_5 x+3} \leqslant 625$;
3) $(x+4)^{3x^2-x-4} \leqslant 1$;
4) $(x+2)^{x^3-x} > (x+2)^x$;
5) $\left(x^2-2,5x+1\right)^{x+1} \leqslant 1$;
6) $\left|x^2-2x-3\right|^{x^2+2x} < 1$.

Урок 10. Неравенства вида $\boldsymbol{\log_{f(x)} g(x) \leqslant a}$

1) При решении неравенств вида $\log_{f(x)} g(x) \leqslant a$ обычно рассматривают два случая: $f(x) > 1$ и $0 < f(x) < 1$.

   Можно также перейти к натуральным логарифмам и решать получившееся неравенство $\dfrac{\ln g(x)}{\ln f(x)} \leqslant a$ методом интервалов. Однако этот способ обычно сложнее.

2) **Упражнения**. Решите неравенства:

(1) $\log_x(x+2) \leqslant 2$;

(2) $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right) > 1$;

(3) $\log_{\frac{2x-1}{x}} 5 < \log_{\frac{2x-1}{x}} x$;

(4) $\log_{1/x} \dfrac{2x-1}{x-1} \leqslant -1$;

(5) $\log_3 \sqrt{5-2x} \cdot \log_x 3 < 1$;

(6) $\log_{x-1}\left(x^2-8x+16\right) + 2 \cdot \log_{4-x}\left(-x^2+5x-4\right) > 6$;

(7) $\log_{\sin x+\cos x}(\sin x - \cos x) > 1$.

Домашнее задание

1) $\log_{3x-2} x < 1$;

2) $\log_x \dfrac{12-4x}{4-x} \leqslant 1$;

3) $\log_{x^2} \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant \dfrac{1}{2}$;

4) $\log_{\frac{2x}{x-1}} \dfrac{2}{x} < \log_{\frac{x-1}{2x}} 3$;

5) $\dfrac{\log_5\left(2x-\dfrac{8}{3}\right)}{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} > 1$;

6) $\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right) > 1$;

7) $\log_{x+1}\left(x^2-2x-2\right) - \log_{1/(x+1)}(7-x) < 1$;

8) $\log_{x^2}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Урок 11. Самостоятельная работа №2: “Логарифмические неравенства”

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $\dfrac{1}{\log_2(4/x)} \geqslant \log_2(x/8) - 1$;

2) $\log_{1/4}\left(\sqrt{x+3}-x+3\right) \geqslant -2 + \log_{1/4} \dfrac{3}{8}$;

3) $\log_{1/3}\left(x^2-6\right)+\log_{27}x^3\geqslant 0$;

4) $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$;

5) $(x-1,1)^2(x+1)^2\cdot\log_2\left(4x^3-4x^2-x+1\right)\geqslant 0$.

6) $\dfrac{\log^2_{x+2,5}(1,5-x)}{2x^2-x-1}\geqslant 0$.

7) $\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x\left(2x^3\right)}$;

Урок 12. Обобщающий урок

Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $8^x\geqslant 6\cdot 9^{|x-1|}$;

2) $\sqrt{\log_5(x+2)}>\log_{1/5}\dfrac{5}{x+2}$;

3) $\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right)\leqslant 1$;

4) $\sqrt[4]{1-\cos^4\dfrac{x^2+x}{4}\pi}+2^{\sqrt{1-x^4}}-1>0$;

5) $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\log_{13-3\cdot 2^x}4\leqslant 1$;

6) $x^{\sqrt{x}}\leqslant 16$;

7) $9^{3x/2+\sqrt{x}}<8\cdot 3^{2x+3\sqrt{x}}+3^{x+4\sqrt{x}+2}$;