Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Одеської обласної державної адміністрації
Одеський обласний інститут удосконалення вчителів
Одеський національний університет ім.. І.І.Мечникова

Всеукраїнська Інтернет-олімпіада з математики
ІІ (заочний) тур 2013рік
9 клас

Завдання виконують учні, які перейшли в 9 клас (також дане завдання можуть виконувати учні 6, 7, 8 класів). Роботи учнів, які перейшли в 10-і, 11-і класи, не приймаються

1. На одній основі побудовано множину трикутників з однаковим кутом при вершині. Знайти геометричне місце точок перетину медіан цих трикутників.
2. На площині задані коло з центром у точці О і точка А зовні нього. За допомогою циркуля і лінійки провести через точку А до цього кола січну ВС так, щоб АВ=ВС.
3. Числа a,b,c,d належать проміжку [2;4]. Довести нерівність
$$25(ab+cd)^2 \geq 16(a^2+d^2)(b^2+c^2).$$
4. Довести, що для кожного натурального числа n>2
$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)^2 > n^n.$$
5. Проїжджаючи повз кінотеатр учень встиг побачити лише години (а не хвилини) початків чотирьох сеансів:

1-й сеанс – 12год. … хв.

2-й сеанс – 13 год. … хв.

………………………..

7-й сеанс – 23 год. … хв.

8-й сеанс – 24 год. … хв.

Як за цими даними відновити початок кожного з восьми сеансів? Мається на увазі, що тривалість всіх сеансів однакова і виражається числом хвилин, кратним 5.

Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Одеської обласної державної адміністрації
Одеський обласний інститут удосконалення вчителів
Одеський національний університет ім.. І.І.Мечникова

Всеукраїнська Інтернет-олімпіада з математики
ІІ (заочний) тур 2013 рік
10 клас

Завдання виконують учні, які перейшли в 10 клас
(також дане завдання можуть виконувати учні 6, 7, 8, 9 класів)
Роботи учнів, які перейшли в 11-і класи, не приймаються

1. Скільки існує пар цілих чисел x та y між 1 та 1000, таких, що x^2+y^2 ділиться націло на 49?
2. Нехай $x_0=1$, $x_{n+1}=x_n-(x_n^2/2002)$. Довести, що $x_{2002} <1/2$.
3. Відрізки AM та BH — відповідно медіана та висота гострокутного трикутника ABC. Відомо, що AH=1, кут MAC у два рази менше за кут MCA. Знайти довжину сторони BC.
4. Чи існує квадратний тричлен f(x) з додатними коефіцієнтами такий, що для будь-якого додатного числа x має місце рівність $[f(x)]=f([x])$, де [x] — ціла частина числа x.
5. Довести, що якщо k — будь яке задане натуральне число більше за одиницю, c — будь яка цифра десяткової системи числення, то існує натуральне число n таке, що k-та з кінця цифра у десятковому записі числа 2^n є цифра c.

Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Одеської обласної державної адміністрації
Одеський обласний інститут удосконалення вчителів
Одеський національний університет ім.. І.І.Мечникова

Всеукраїнська Інтернет-олімпіада з математики
ІІ (заочний) тур 2013 рік
11 клас

Завдання виконують учні, які перейшли в 11 клас (також дане завдання можуть виконувати учні 6-10 класів).

1. Знайти всі розв′язки рівняння:
$x^2+2x+16xy+33=16\sqrt[4]{x^3y+2x^2y+xy}$

2. Для кожного значення параметра a розв′яжіть нерівність:
$8a\sin^3 x+2\left(a^2+a+1\right)\sin x>4\left(a^2+a+1\right)\sin^2 x+a$

3. Розв′язати рівняння:
$\log_2 x^2\cdot\log_{\sqrt{2}} x+6=\log_{\sqrt{2}} x^4+\log_{\sqrt{x}} 2+\log_x 32\cdot\log_{\sqrt[4]{x}} 2$

4. Нехай сторона ромба $ABCD$ дорівнює 100. Бісектриси кутів $\angle BAC$ та $\angle ABD$ перетинаються в точці E, а бісектриси кутів $\angle DAC$ та $\angle ADB$ в точці F, відрізок EF перетинає діагональ AC в точці G. Довжини відрізків $\mathrm{CG}:\mathrm{BD}=1:6$. Знайдіть площу ромба.

5. Нехай $a_0=\sqrt{3}$ та $b_0=1$. Визначте, чи рекурентна при $n>0$ ситема $\begin{cases} a_{n+1}=a_n^2-b_n^2 \\ b_{n+1}=2a_nb_n \end{cases}$. Знайти $2a_{2013}$.