9 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 1 (Розв'язок)

Величина підвищення температури обруча може бути визначена як різниця його повної (поступальної і обертальної) початкової та кінцевої енергій, віднесена до повної теплоємності:

$$\Delta T = \frac{E_{поч} - E_{кін}}{Cm},$$

де m - невідома маса обруча.

Застосуємо вираз для енергії поступального руху у вигляді $\frac{mV^2}{2}$ обертального – $\frac{m\omega^2 R^2}{2}$, отже

$$\Delta T = \frac{1}{C}\left[\frac{V_0^2}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} - \frac{\omega_2^2 R^2}{2}\right],$$

де позначено $R = \frac{D}{2}$; V_2 та ω_2 - поступальна та кутова швидкості обруча після зникнення проковзування, тобто $V_2 = \omega_2 R$.

Рівняння 2-го закону Ньютона:

- для поступального руху $F_{тр} = -m\frac{\Delta V}{t}$, де $F_{тр} = kmg$ - сила тертя ковзання;

- для обертального руху: $kmg \cdot R = mR^2\frac{\Delta\omega}{t}$, де $\Delta\omega$ - зміна кутової швидкості за час t .

Розглядаючи окремо рух з моменту падіння до повної зупинки у найвіддаленішій від гімнастки точці, з цих рівнянь отримаємо: $V_0 = kg\tau$ та $\omega_1 - \omega = -\frac{kg\tau_1}{R}$, де ω_1 - швидкість обертання при зупинці поступального руху.

Позбуваючись часу τ_1 : $\omega_1 = \omega - \frac{V_0}{R}$.

Аналогічно для руху обруча до гімнастки від най віддаленої точки до моменту припинення проковзування, тобто зрівняння поступальної швидкості центра мас і лінійної швидкості точок обруча:

$$kmg = -m\frac{V_2}{\tau_2};$$

$$kmg \cdot R = mR^2\frac{\omega_2 - \omega_1}{\tau_2}.$$

Звідки отримуємо: $V_2 = kg\tau_2$ і $\omega_2 = \omega_1 - \frac{kg\tau_2}{R} = \omega - \frac{V_0}{R} - \omega_2$, або $\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\omega - \frac{V_0}{R}\right)$;

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(\omega R - V_0\right).$$

Підставляючи отримані V_2 або ω_2 в рівняння для ΔT отримаємо остаточну відповідь:

$$\Delta T = \frac{1}{C}\left[\frac{V_0^2}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{2} - \frac{(\omega R - V_0)^2}{4}\right] = \frac{1}{4C}\left[V_0^2 + V_0\omega D + \frac{(\omega D)^2}{4}\right] \approx 0.16 \text{ K}$$

Відповідь: $\Delta T \approx 0.16$ K .

9 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 2 (Розв'язок)

Так як швидкість руху стала, а прискорення не дорівнює нулю, робимо висновок, що мова йде про нормальну складову прискорення. Поки нормальне прискорення стале, відповідна ділянка траси є частиною кола радіуса $R_i = \frac{v^2}{a_i}$. За допомогою графіка легко встановити, що $R_1=2R_2=4R_3=4R_4$.

Довжина кожної ділянки $S_i=\alpha_i R_i=vt_i$, тому відповідно її центральний кут дорівнює:

$$\alpha_1 = \frac{vT}{2R_1};\ \alpha_2 = \frac{v(\frac{3T}{4}-\frac{T}{2})}{R_2} = \frac{vT}{2R_1};\ \alpha_3 = \frac{v(\frac{7T}{8}-\frac{3T}{4})}{R_3} = \frac{vT}{2R_1};\ \alpha_4 = \frac{vT}{2R_1}.$$

Отже, за модулем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$.

Зміна напрямку нормального прискорення (зміна знаку) означає, що на третій ділянці має місце правий поворот.

Враховуючи, що за повне коло автомобіль робить повний оберт на кут 2π і при цьому на третій ділянці повертається в протилежному напрямку, одержимо:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi.$$

Тому $\alpha_i = \pi$.

Так як $v = \frac{\pi R_1}{t_1}$ та $a_1 = \frac{v^2}{R_1}$, то

$$R_1 = a_1 (\frac{T}{2\pi})^2.$$

Отже, швидкість руху

$$v = \frac{a_1 T}{2\pi}.$$

Довжина траси $S = vT = \frac{a_1 T^2}{2\pi}$.

Профіль траси складається з чотирьох півкіл, що зображені на рис. 2.

$A_0A_1=2R_1$; $A_1A_2=R_1$; $A_2A_3=A_3A_0=0.5\ R_1$.

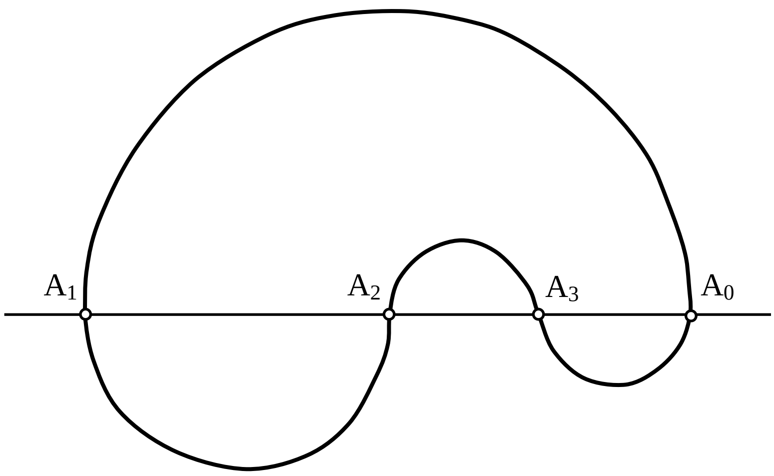
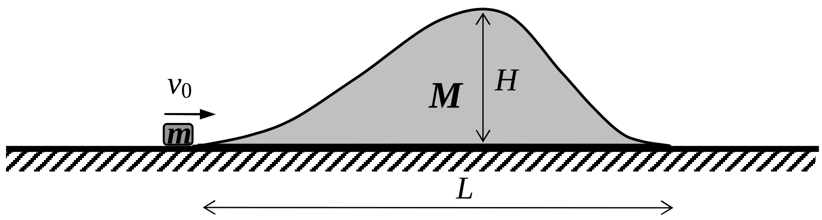


Рис. 2

9 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 3 (Розв’язок)

Малюнок в умові задачі:

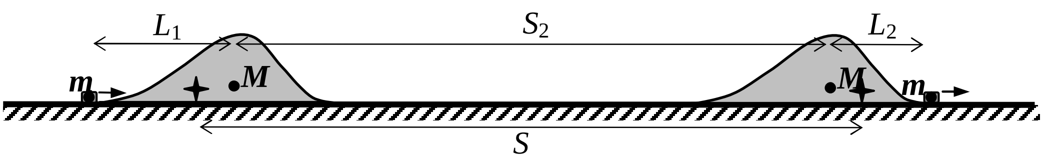


Тіло може з’їхати з гірки назад, а може переїхати гірку і з’їхати з іншої сторони (спереду). Визначимо, за якої умови це відбувається.

Якщо швидкість поступово збільшувати, тіло буде підніматися на все більшу висоту. Особливий випадок, коли тіло піднімається на верхівку гірки з нульовою відносно неї швидкістю. Розглянемо цей граничний випадок відносно нерухомої системи відліку з точки зору законів збереження

$$\begin{cases} mv_0 = (m+M)v, \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{(m+M)v^2}{2} + mgH. \end{cases}$$

Знаходимо, якщо $v_0 < \sqrt{2\left(1+\dfrac{m}{M}\right)gh}$ тіло не зможе піднятися на верхівку і з’їде назад через початкову точку, якщо ж $v_0 > \sqrt{2\left(1+\dfrac{m}{M}\right)gh}$ - тіло буде мати, проходячи верхівку, більшу від гірки швидкість і з’їде попереду неї. Звісно, швидкість навантаженої тілом гірки буде змінюватись в залежності від горизонтальної проекції сили, з якою тіло під час відносного руху тисне на гірку. Але, якщо розглянути систему з двох тіл, ця сила виявиться внутрішньою, а ззовні у горизонтальному напрямку ніякі сили на цю систему не діють. Це означає, що центр мас весь час буде рухатись зі сталою швидкістю $v_c = \dfrac{mv_0}{m+M}$ і за час *t* зміститься на відстань $S = v_c t = \dfrac{mv_0 t}{m+M}$. Тоді у першому випадку, коли тіло з’їжджає з тієї ж сторони, і центр мас системи відносно гірки набуває попереднього положення, гірка проїде таку ж відстань, як і центр мас: $S_1 = S = \dfrac{mv_0 t}{m+M}$.



У другому випадку розглянемо задачу детальніше (див. Рис.). Як бачимо, відстань S_2, яку пройшла гірка разом зі своїм центром мас (точка *M*), менша, ніж відстань S, яку пройшов центр мас системи тіл гірка + тіло (на рисунку позначено зірочкою ✦). Різниця цих відстаней складається з відстані між центрами мас гірки і системи тіл у першому випадку $\frac{m}{m+M}L_1$ і у другому випадку $\frac{m}{m+M}L_2$, тобто

$$S_2 = S - \frac{m}{m+M}L_1 - \frac{m}{m+M}L_2 = S - \frac{m}{m+M}L = \frac{m}{m+M}\left(v_0 t - L\right).$$

Не важко переконатися, що остання формула відповідає граничним випадкам, а саме: $S_2 \to 0$, якщо $m/M \to 0$ - гірка не відчуває легенького тіла. Що стосується часу t, безумовно, цікавим є випадок, коли $t = L/v_0$ і згідно формули $S_2 = 0$. Формули не бачать профіль нашої гірки і відповідають також на безліч питань, які лежать поза конкретикою задачі. Уявимо, наприклад, гірку з прямим тунелем, скрізь який без затримки проходить тіло. Зрозуміло, $t = L/v_0$ і $S_2 = 0$. Випадок $t < L/v_0$ також можливий. Якби гірка тягнулася не тільки вгору, але й униз, ковзаючи, наприклад, по рейкам, і в неї був тунель, який спочатку спускався, а потім піднімався, ми б отримали зміщення гірки у зворотному напрямку $S_2 < 0$.

Нарешті у випадку, коли тіло мов би завмирає на верхівці гірки $v_0 = \sqrt{2\left(1+\frac{m}{M}\right)gh}$ можна користуватися обома формулами, оскільки час такого підйому на *зображену* гірку нескінченно великий. У загальному випадку

$$S_{гірки} = \begin{cases} \dfrac{mv_0 t}{m+M}, & v_0 \le \sqrt{2\left(1+\dfrac{m}{M}\right)gh}, \\ \dfrac{m}{m+M}\left(v_0 t - L\right), & v_0 > \sqrt{2\left(1+\dfrac{m}{M}\right)gh}. \end{cases}$$

Цікаво відзначити, що отримані відстані, які проїде гірка, не залежать від того відривається тіло від гірки у процесі руху чи ні, відсутня сила тертя між гіркою і тілом чи в наявності. Якщо тіло повертається назад $S_1 = \frac{mv_0 t}{m+M}$, якщо проходить вперед $S_2 = \frac{m}{m+M}\left(v_0 t - L\right)$, навіть у тому випадку, коли воно летить і в момент часу t просто покидає повітряний простір над гіркою.

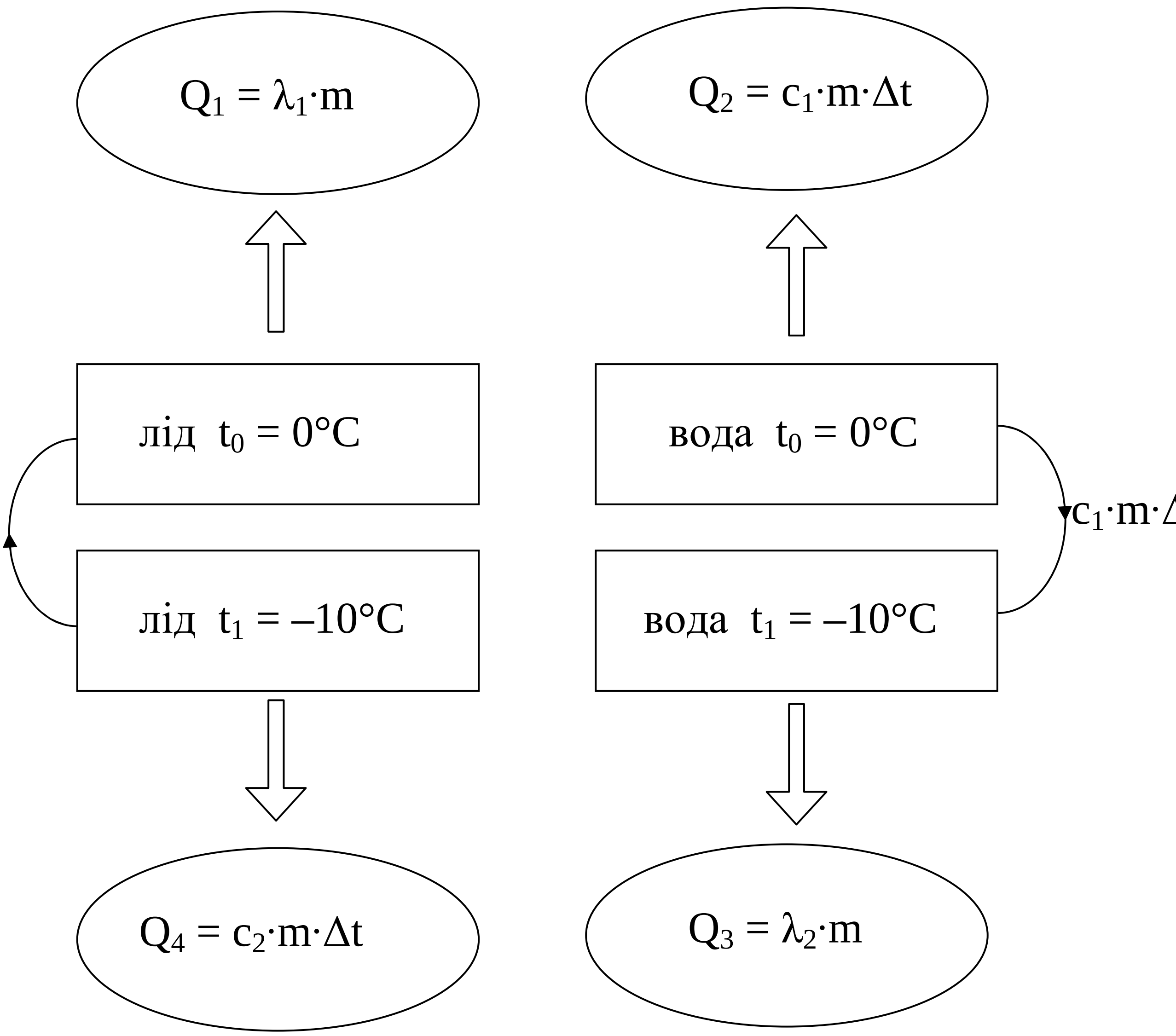
Нарешті для випадку малих сил тертя між гіркою і поверхнею, зазначимо, що відстань зменшиться, і якщо під час руху не буде зупинок, від отриманих відповідей слід відняти $\frac{\mu g t^2}{2}$, Але, звичайно, оцінка куди з’їде тіло повинна бути іншою.

9 клас

XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)

Задача 4 (Розв'язок)

Розв'язання задачі пояснює схема:



Запишемо рівняння теплового балансу:

$$\boldsymbol{\lambda_1 \cdot m + c_2 \cdot m \cdot \Delta t = \lambda_2 \cdot m + c_1 \cdot m \cdot \Delta t}$$

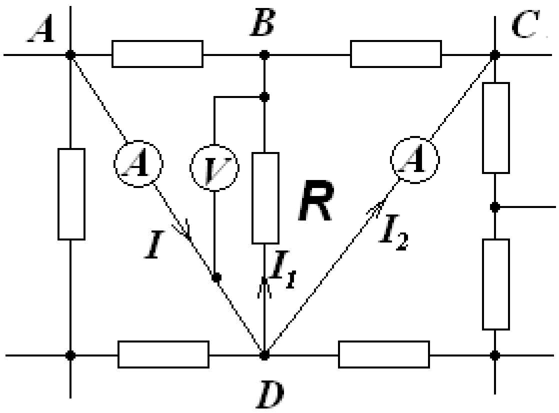
Звідси випливає, що

$$\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda_1 + (c_2 – c_1) \cdot \Delta t}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 3{,}12 \cdot 10^5 \cdot \text{Дж/кг}}$$

9 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 5 (Розв'язок)

Позначимо на схемі такі точки та опори.



Спочатку з'єднаємо точки A і D амперметром, точки C і D – провідником, до точок A і B під єднаємо джерело струму, а до резистора R – вольтметр.

У цьому випадку через резистор проходи мите струм I, через провідник I_2.

$$I = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

Поміняємо провідник і амперметр місцями. Коло не зміниться, оскільки їх опори однакові, у цьому випадку матимемо змогу амперметром визначити струм I_2. З рівності (1) знайдемо:

$$I_1 = I - I_2,$$

а шуканий опір буде: $R = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I - I_2}$, де U – показ вольтметра.