Условие: Проводник представляет собой бесконечную спираль с уменьшающимся радиусом, причем радиус зависит от угла поворота φ $(0 \le \varphi < \infty)$ от начального положения A по закону $r(\varphi) = L(1-\alpha)^{\varphi/2\pi}$, где L – известный макимальный радиус; а α – малый безразмерный коэффициент $(\alpha \ll 1)$. Кроме того, эту спираль пересекает проводник AB, проходящий через центр O спирали (см. рис. 1). Каким будет сопротивление системы при подключении к точкам A и B? Сопротивление единицы длины всех проводников ρ, сечения одинаковы и малы (диаметр намного меньше αL).

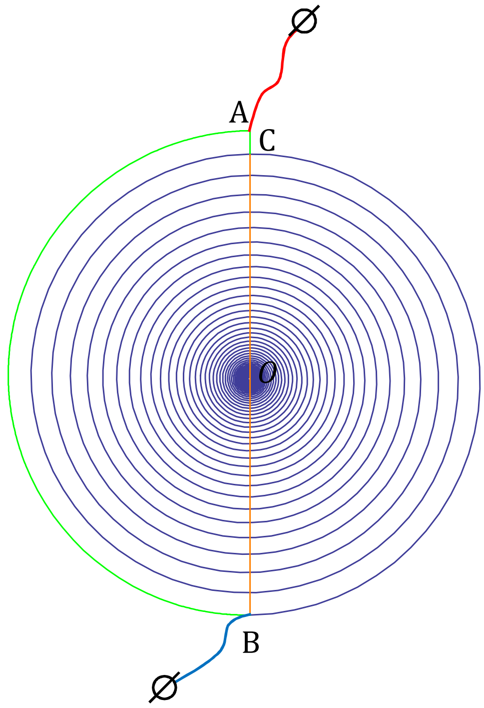

рис. 1

Решение: Пусть сопротивление бесконечной цепи между точками A и B равно r. Рассмотрим участок BC бесконечной цепи, т.е. всю систему за исключением зеленых проводников (см. рис. 1). Очевидно, что этот участок подобен всей бесконечной цепи, причем коэффициент подобия $k = (1-\alpha)^{\pi/2\pi} = \sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \alpha/2$. Так как сечения всех проводников одинаковы, а длины проводников на участке BC отличаются от длин проводников всей цепи в k раз; то сопротивление участка BC в k раз меньше сопротивления цепи:

$$r_{\text{BC}} = rk = r\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Заменив весь бесконечный участок BC цепи сопротивлением r_{BC}, получаем заметное упрощение (см. рис. 2). Рассчитать такую цепь не представляет особого труда. Пусть сопротивление дуги AB равно $\rho\pi L + \rho\alpha x$, где αx – поправка порядка α к длине дуги AB (ее можно найти интегрированием). Тогда сопротивление участка AC равно $r_{\text{AC}} = \rho\alpha L$; сопротивление верхней ветви $r_{\text{в}} = \rho\alpha L + r(1-\alpha/2)$; сопротивление всей цепи

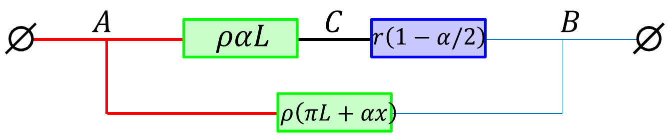

рис. 2

$$r_{\text{ц}} = \frac{(\rho\pi L + \rho\alpha x) r_{\text{в}}}{(\rho\pi L + \rho\alpha x + r_{\text{в}})} = \frac{(\rho\pi L + \rho\alpha x)\big(\rho\alpha L + r(1-\alpha/2)\big)}{\big(\rho\pi L + \rho\alpha x + \rho\alpha L + r(1-\alpha/2)\big)} = r.$$

Имеем уравнение:

$$(\rho\pi L + \rho\alpha x)\big(\rho\alpha L + r(1-\alpha/2)\big) = r\big(\rho\pi L + \rho\alpha x + \rho\alpha L + r(1-\alpha/2)\big).$$

Раскроем все скобки и приведем подобные члены, выбросив все члены порядка α^2:

$$r^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \rho\alpha L r\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \rho^2 \alpha\pi L^2 = 0.$$

Как видим, сопротивление r не зависит от поправки x. Решив уравнение в первом приближении, получим:

$$r = \frac{-\rho\alpha L r\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \pm \sqrt{\rho^2\alpha^2 L^2 r^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2 + 4\rho^2\alpha\pi L^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}{2-\alpha}.$$

Так как $r > 0$, то перед корнем стоит знак “плюс”. Так как под корнем стоит величина порядка α, то сам корень порядка $\sqrt{\alpha}$. Тогда можно пренебречь членом $-\rho\alpha L r(1+\pi/2)$ в числителе, а также членом $-\alpha$ в знаменателе. Имеем:

$$r \approx \frac{\sqrt{4\rho^2\alpha\pi L^2}}{2} = \rho L\sqrt{\alpha\pi}.$$

Получили интересный результат: сопротивление порядка $\sqrt{\alpha}$.

<u>Ответ</u>: $r = \rho L\sqrt{\alpha\pi}$.