Задача № 2

Условие: Шар массой $2m$ бросают вертикально вверх со скоростью v_0. К шару привязана легкая абсолютно жесткая нить длиной[1] $l < v_0^2/2g$, к другому концу которой привязан шар массой m. Через какое время t и на какой высоте h шары столкнутся?

Решение: Рассмотрим движение шаров до столкновения. Вначале первый (тяжелый) шар движется вверх равнозамедленно, а второй (легкий) покоится. Когда тяжелый шар достигнет высоты l, нить натянется, и произойдет "удар" через нить (то, что он достигнет этой высоты, следует из неравенства в условии). Непосредственно перед этим его скорость $u_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$. Дальнейшее сильно зависит от свойств нити и шаров, например от жесткости и упругости нити и модуля Юнга вещества шаров. Разберем два крайних случая: абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара.

1. *Абсолютно упругий удар.* В этом случае в результате удара сохраняются и импульс, и механическая энергия. Скорости u_1 и u_2 шаров (см. рис. 2.1) непосредственно после него определяются соответствующими законами сохранения:

$$\begin{cases} 2mu_0 = 2mu_1 + mu_2, \\ mu_0^2 = mu_1^2 + \dfrac{mu_2^2}{2}. \end{cases}$$

Эти уравнения легко привести к виду:

$$2(u_0 - u_1) = u_2, \tag{1}$$
$$2(u_0^2 - u_1^2) = u_2^2. \tag{2}$$

Разделив уравнение (2) на (1) с учетом условия $u_0 \neq u_1$, получим

$$u_0 + u_1 = u_2. \tag{3}$$

Решая систему линейных уравнений (1) и (3), получим $u_1 = u_0/3$ и $u_2 = 4u_0/3$.

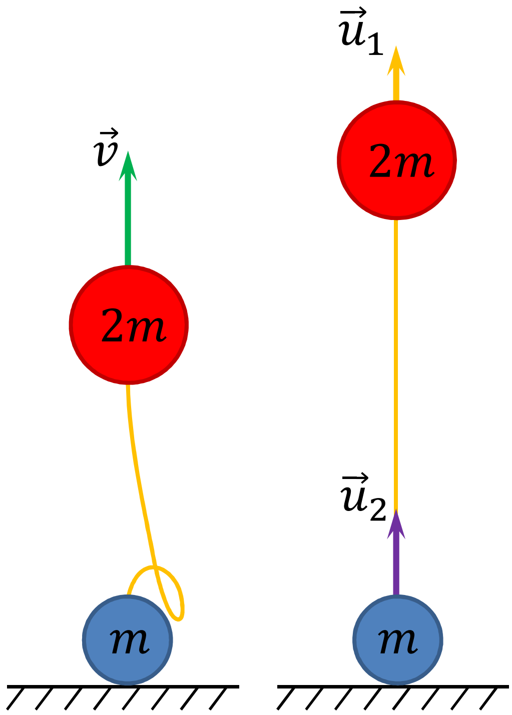

Рис. 2.1. Слева изображен момент до "удара". Справа — момент непосредственно после него.

После такого перераспределения скоростей оба шара будут двигаться с ускорением g, направленным вниз. Перейдем в систему отсчета, связанную с легким шаром. В этой системе отсчета тяжелый шар движется равномерно со скоростью $u_2' = u_1 - u_2 = -u_0$ (вниз). Так как начальное расстояние между шарами l, то время между моментом максимального расстояния между шарами и моментом столкновения $t_2 = l/u_0$.

Найдем время t_1 между началом движения и моментом максимального расстояния между шарами. По формуле равноускоренного движения

$$v_0 - u_0 = gt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 - u_0}{g}. \tag{4}$$

Искомое время

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 - u_0}{g} + \frac{l}{u_0} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gl}}{g} + \frac{l}{\sqrt{v_0^2 - 2gl}} = \frac{v_0}{g}\left(1 - \sqrt{1-k} + \frac{k}{2\sqrt{1-k}}\right), \tag{5}$$

где

$$k = \frac{2gl}{v_0^2}, \quad 0 < k < 1.$$

Найдем высоту, на которой произошло столкновение, при помощи уравнения движения легкого шара. Этот шар двигался вверх равнозамедленно с ускорением g и начальной скоростью $u_2 = 4u_0/3$ в течение

[1] В исходном условии в формуле было $l < v_0/2g$, что, очевидно, неверно из соображений размерности.

времени t_2. По формуле равноускоренного движения

$$h = u_2 t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = \frac{4l}{3} - \frac{g l^2}{2\left(v_0^2 - 2gl\right)} = l\left(\frac{4}{3} - \frac{k}{4(1-k)}\right) = l \cdot \frac{16-19k}{12(1-k)}. \tag{6}$$

Выражение, определяемое формулой (6), в принципе может быть меньше нуля (а именно, при $k > 16/19$). Это соответствует случаю, когда легкий шар столкнется с опорой перед столкновением с тяжелым шаром. Будем считать это столкновение абсолютно неупругим. Тогда после этого легкий шар останется лежать на опоре, а столкновение шаров произойдет, когда тяжелый шар упадет на опору. Соответственно $h = 0$. Найдем время t_2 падения тяжелого шара. Его скорость непосредственно перед столкновением $u_3 = \sqrt{u_1^2 + 2gl} = v_0\sqrt{1+8k}/3$. Тогда из формулы равноускоренного движения

$$t_2 = \frac{u_1 + u_3}{g} = \frac{v_0}{3g}\left(\sqrt{1-k} + \sqrt{1+8k}\right). \tag{7}$$

Полное время с учетом формул (4) и (7) получим

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1-k} + \frac{1}{3}\sqrt{1+8k}\right). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что величины, определяемые формулами (5) и (8), равны при $k = 16/19$.

Ответ: (здесь $k = 2gl/v_0^2$) При абсолютно упругом ударе (через нить)

1. при $0 < k \leqslant 16/19$: $t = \dfrac{v_0}{g}\left(1 - \sqrt{1-k} + \dfrac{k}{2\sqrt{1-k}}\right)$ и $h = l \cdot \dfrac{16-19k}{12(1-k)}$,
2. при $16/19 < k < 1$: $t = \dfrac{v_0}{g}\left(1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{1-k} + \dfrac{1}{3}\sqrt{1+8k}\right)$ и $h = 0$.