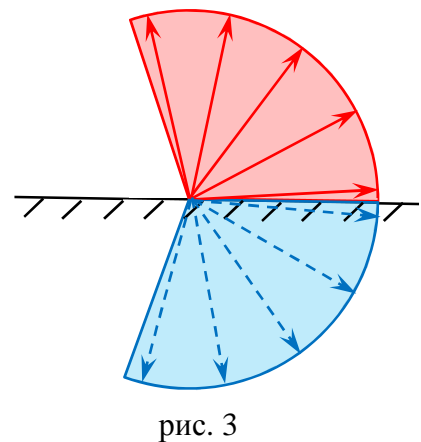
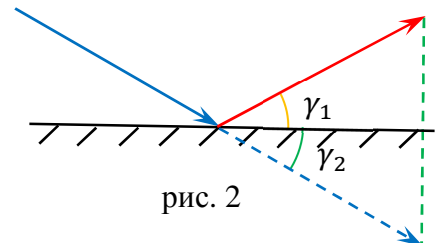
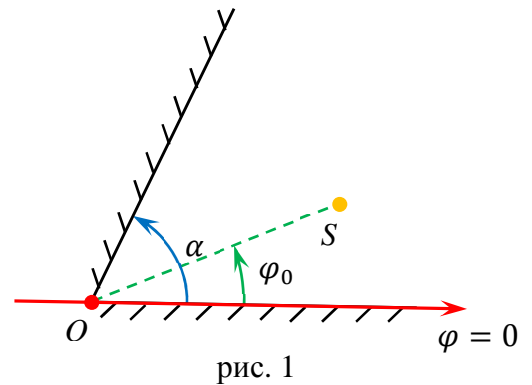


Условие: Два зеркала помещены отражающими поверхностями друг к другу так, что угол между зеркалами равен α (см. рис. 1, плоскость рисунка перпендикулярна зеркалам). Внутри этого угла находится светящаяся точка S . Какое максимальное количество отражений может испытать луч, выходящий из точки? Где при этом она должна располагаться?

Решение: Введем полярную систему координат с центром в точке пересечения зеркал и нулевым направлением, лежащим на ближнем к светящейся точке зеркале, как на рисунке. Будем рассматривать только те лучи, которые лежат в плоскости рисунка (движение остальных лучей можем считать сложением движения в данной плоскости и движения, перпендикулярного плоскости; последнее несущественно при решении задачи). Пусть φ_0 – полярный угол (далее азимут) точки S (см. рис. 1), $\varphi_0 \leq \alpha/2$.

Рассмотрим, как изменится направление луча при падении на зеркало. На рис. 2 изображены падающий и отраженный лучи, для наглядности их цвета сделали разными. Так как угол падения равен углу отражения, то $\gamma_1 = \gamma_2$. Тогда после отражения в каком-либо зеркале направление луча изменится на симметричное относительно зеркала. Рассмотрим теперь пучок лучей, падающих на зеркало под углами, изменяющимися в некоторых пределах. Так как каждый луч отразится симметрично, то тогда весь пучок отразится так, как на рис. 3 (синие лучи – падающие, красные – отраженные).

Вернемся к исходной задаче. Рассмотрим движение лучей, исходящих из источника под произвольными азимутами φ ($0 < \varphi < 2\pi$; $\varphi \neq \pi + \varphi_0$). Очевидно, что лучи с азимутами $\varphi \in (\alpha; \pi + \varphi_0)$ попадут вначале на второе зеркало; лучи с азимутами $\varphi \in (\pi + \varphi_0; 2\pi)$ попадут на первое; лучи же с азимутами $\varphi \in [0; \alpha]$ уйдут на бесконечность, не попав ни на одно из зеркал (попадут в “мертвую зону”). Первый пучок (зеленая область малого кольца, см. рис. 4) отразится так, что некоторая часть лучей попадет в “мертвую зону” (оставшиеся лучи образуют зеленую область среднего кольца), причем угол между крайними лучами уменьшится на α . Аналогичную картину наблюдаем и для второго пучка (синяя область). Таким образом, после каждого отражения пучок будет сжиматься на α , пока весь не попадет в “мертвую зону”. Так как начальная ширина первого пучка $\theta_1 = \pi + \varphi_0 - \alpha$, а второго $\theta_2 = \pi - \varphi_0$; то максимальное количество отражений для лучей первого пучка $n_1 = [\theta_1/\alpha] = [(\pi + \varphi_0)/\alpha] - 1$; $n_2 = [\theta_2/\alpha] = [(\pi - \varphi_0)/\alpha]$, где $[x]$ – число x ,



округленное вверх. Подставив в первом случае максимально возможное значение $\varphi_{0\max} = \alpha/2$; а во втором – минимально возможное $\varphi_{0\min} = 0$; получим:

$$n_{1\max} = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} + \frac{1}{2} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1}{2} \right\rceil; \quad n_{2\max} = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil \geq n_{1\max}.$$

Получили, что выгодно располагать источник как можно ближе к одному из зеркал. При этом максимальное количество отражений $n_{\max} = \lceil \pi/\alpha \rceil$.

Ответ: $n_{\max} = \lceil \pi/\alpha \rceil$.

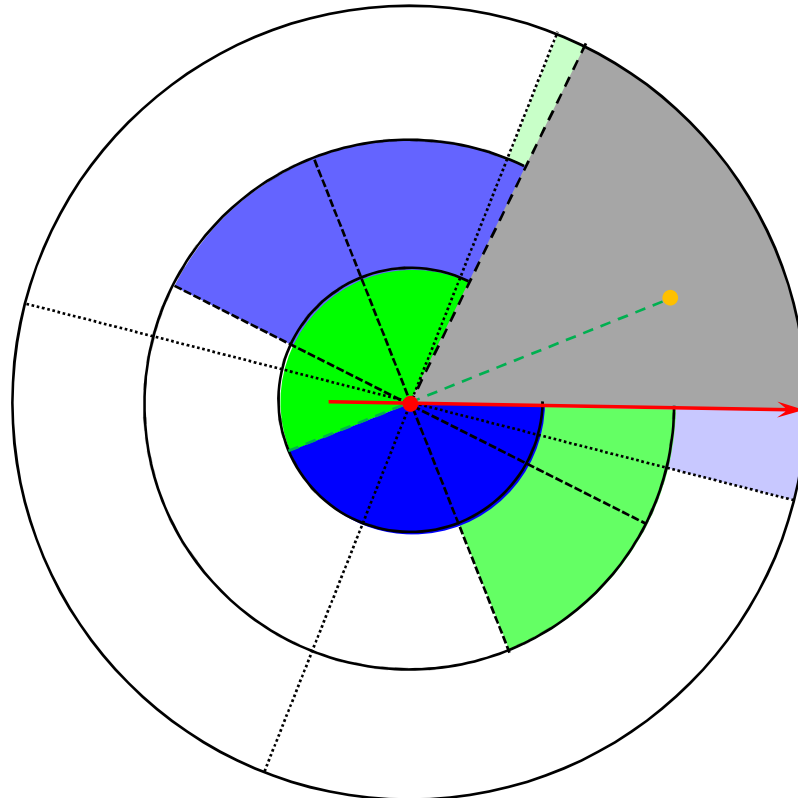


рис. 4