Урок 14. Геометрическая прогрессия

1°. Определение геометрической прогрессии

1) Мы уже знаем каким соотношением задается геометрическая прогрессия. Дадим теперь ее словесное определение:

Определение.

> ***Геометрической прогрессией*** *называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю, называемым* ***знаменателем*** *прогрессии.*

2) Геометрическую прогрессию обычно обозначают $\{b_n\}$, а ее знаменатель – q (первой буквой французского слова *qwoti* – частное).

2°. Свойства геометрической прогрессии

1) Несложно по индукции доказать формулу общего члена геометрической прогрессии

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.} \tag{14.1}$$

2) Как и у арифметической прогрессии, у геометрической прогрессии есть характеристическое свойство:

Теорема 14.1 (характеристическое свойство геометрической прогрессии).

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией т. и т. т., когда абсолютная величина любого ее члена, начиная со второго, равна среднему геометрическому предыдущего и последующего членов:

$$\{b_n\} - \textit{геометрическая прогрессия} \;\Leftrightarrow\; |b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}},\; n \geqslant 2.$$

Замечание 1. *Теперь понятна связь между понятиями геометрической прогрессии и среднего геометрического.*

Замечание 2. *В случае конечной геометрической прогрессии нужно говорить об абсолютной величине всех членов, кроме первого и последнего.*

3) Из характеристического свойства можно получить такое следствие:

Следствие.

Если натуральные числа p, r, k, m таковы, что $p+r = k+m$, то выполнено соотношение:

$$b_p \cdot b_r = b_k \cdot b_m.$$

4) Продолжая аналогию с арифметической прогрессией, можно получить формулу для произведение первых n членов геометрической прогрессии:

Теорема 14.2.

Пусть $P_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$*. Тогда* $P_n^2 = (b_1 b_n)^n$.

5) Нужно отметить, что формула для произведения первых n членов геометрической прогрессии используется очень редко. Зато часто бывает нужно посчитать сумму первых n ее членов:

Теорема 14.3.

Пусть $\{b_n\}$ *– геометрическая прогрессия, причем ее знаменатель* $q \neq 1$. *Обозначим* $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. *Тогда*

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

3°. Простейшие задачи на геометрическую прогрессию

1) Пусть $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии, если $b_4 - b_1 = -9$ и $b_2 + b_3 + b_4 = -6$.

2) Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если $b_4 = 24$ и $q = -2$.

3) При каких значениях x числа $2x - 3$, $x - 4$ и $x + 2$ будут последовательными членами геометрической прогрессии ? Найдите эти числа.

4) Между числами 2 и 162 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию.

Домашнее задание

1) Найдите первый член геометрической прогрессии, которая состоит из шести членов, если сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних равна 21.

2) Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если $b_3 = 12$ и $b_6 = 324$.

3) При каких значениях x числа $3x - 2$, $x + 2$ и $x + 8$ будут последовательными членами геометрической прогрессии ? Найдите эти числа.

4) Между числами 3 и 96 вставьте четыре таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию.

5) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член, начиная со второго, равен разности двух соседних (следующего и предыдущего).

6) Известно, что a, b и c – три последовательных члена геометрической прогрессии. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{a} = \dfrac{b^2+c^2}{c}$.