

"Косморозминка"

Сучасний Всесвіт описується за допомогою 1) рівняння Фрідмана ($c = 1$)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{\kappa}{a^2} \quad (1)$$

де $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ – параметр Хаббла, a – масштабний фактор, який залежить тільки від часу і який описує розширення Всесвіту, ρ_m – густина енергії нерелятивістської речовини у Всесвіті (сума так званої баріонної складової Всесвіту та темної матерії), ρ_r – густина радіаційної складової Всесвіту (електромагнітне випромінювання), ρ_Λ – густина так званої темної енергії, а член $\frac{\kappa}{a^2}$ ($\kappa = 0, \pm 1$) описує вклад просторової кривизни Всесвіту в його динаміку, 2) рівняння

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + 3(p_m + p_r + p_\Lambda))a \quad (2)$$

де p_i – це тиск відповідної складової. Тиск і густина енергії пов'язані між собою співвідношенням $p_i = \omega_i \rho_i$, де $\omega_m = 0$, $\omega_r = \frac{1}{3}$, а ω_Λ лежить у межах від -1.2 до -0.8 і в загальному може залежати від часу

1) Використовуючи рівняння (1)-(2) отримайте рівняння, яке зв'яже між собою похідні за часом від густини енергії, параметр Хаббла і густини та тиски складових Всесвіту

2) Знайти залежності кожної з густин енергій складових Всесвіту від масштабного фактору. Якісно проаналізувати, коли яка складова дає основний внесок в динаміку розширення Всесвіту

3) Отримати залежності $a = a(t)$, $\rho = \rho(t)$, $H = H(t)$ для плоского Всесвіту ($\kappa = 0$), який складається тільки з

3.1) радіаційної складової

3.2) нерелятивістської матерії

4) В який момент часу після народження Всесвіту густина матерії вперше стане більшою за густину випромінювання? Вважаючи, що сучасні значення параметру Хаббла H_0 , а також відносні густини енергій $\Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0}{\rho_{cr}^0}$ і $\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_{cr}^0}$ відомі (тут $\rho_{cr}^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ – сучасне значення так званої критичної густини Всесвіту, ρ_m^0 і ρ_r^0 – сучасні значення густини енергії нерелятивістської матерії та випромінювання)

5) Вважаючи відомими сучасні значення H_0 , Ω_r^0 , Ω_m^0 знайти сучасний вік Всесвіту, вважаючи, що він просторово-плоский ($\kappa = 0$) з домінуванням 1) матерії 2) випромінювання 3) обох складових

6) Параметр z характеризує розбігання галактик у Всесвіті і визначається співвідношенням $\frac{a_0}{a} = 1 + z$, де a_0 – сучасне значення масштабного фактору. Вважаючи, що Всесвіт складається з темної енергії ($\Omega_\Lambda^0 = \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_{cr}^0} \simeq 0.75$) і матерії ($\Omega_m^0 \simeq 0.25$). Знайти при якому значенні параметру z сповільнене розширення Всесвіту $\ddot{a} < 0$ змінилось прискоренням $\ddot{a} > 0$, вважаючи, що густина енергії та тиск темної енергії зв'язані співвідношенням $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$

7) Знайти сучасний вік Всесвіту, який складається з темної енергії і нерелятивістської матерії, вважаючи, що $\Omega_m^0 = 0.25$, $\Omega_\Lambda^0 = 0.75$, $H_0 = 73$ км/(с·Мегапарсек) (1 Мегапарсек = $3.1 \cdot 10^{24}$ см)

№ завдання	Відповідь	Можлива кількість балів	Оцінка
Завд. 1	$aT = const$	1.00	
Завд. 2	$H(T) = ?$	0.25	
Завд. 3	$T(t) = ?$	1.0	
Завд. 4	$t = ?$	0.5	
Завд. 5	$T(z) = ?$	0.25	
Завд. 6	$T_r =$	1.5	
	$t_r =$	1.0	
	$z_r =$	0.5	
Завд. 7	$A = ?$	1.0	
Завд. 8	$t_u = ? \quad t_t = ?$	1.0	

Густина енергії ρ та густина числа частинок n (концентрація), які заповнюють Всесвіт, наступним чином залежать від температури T Всесвіту:

$$\rho = \alpha_1 T^4, \quad n = \beta_1 T^3$$

(де α, β – числові коефіцієнти), якщо частинки є релятивістськими (рухаються зі швидкостями близькими до швидкості світла). Якщо ж частинки є нерелятивістськими, то:

$$n = \beta_2 (mT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu - m}{T}},$$

де β_2 – числовий коефіцієнт, μ – так званий хімічний потенціал, m – маса частинки,

$$\rho = (m + \frac{3}{2}T)n,$$

(використано систему одиниць $c = 1, \hbar = 1, k_B = 1$)

1) Показати, що при розширенні Всесвіту, в якому домінують релятивістські частинки, добуток масштабного фактору a на температуру T є інваріантом $aT \simeq const$

2) У ранньому Всесвіті знайти залежність параметру Хаббла від температури

3) Знайти залежність температури Всесвіту від часу

4) В перших прискорювачах елементарні частинки прискорювались до енергій порядку 1 MeV = 10^6 eV. В прискорювачах останнього покоління

ЛНС протони прискорюються до $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$. Які часи в історії Всесвіту дозволяють дослідити ці енергії? (вважати $\alpha_1 \sim 10$)

5) Знайти залежність температури випромінювання у Всесвіті, що розширюється, від так званого z параметру червоного зміщення $z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1$, де t_0 —сучасний вік Всесвіту

6) Вважаючи, що матеріальну складову Всесвіту утворюють нерелятивістські протони p , електрони e , атоми водню H , і проходять реакції $p + e \rightleftharpoons H + \gamma$, з умови збереження баріонного числа $n_p + n_e = n_H$ знайти температуру, при якій стає термодинамічно вигідним утворення атомів водню з протонів та електронів. Знайти вік Всесвіту на цей момент, а також значення параметру z . (Вважати, що $n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu_i - m_i}{T}}$, $g_p = g_e = 2$, $g_H = 4$, $m_p \simeq m_H$, $\mu_e + \mu_p = \mu_H$, середовище весь час є електронейтральним в загальному)

7) Вважаючи, що $(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = \text{const}$, де n_B — густина числа частинок, а $n_{\bar{B}}$ — густина числа античастинок, і вважаючи відомим відношення сучасних значень густини числа частинок n_B^0 до густини числа фотонів n_γ^0 відомо $\frac{n_B^0}{n_\gamma^0} \sim 10^{-9}$ розрахувати так звану величину баріон-антибаріонної асиметрії Всесвіту $A = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B}$ (врахувати, що в сучасному Всесвіті антиречовини немає!)

8) Нехай зірка випромінює світло в момент часу t . Це світло реєструється в момент часу t_0 на Землі і має червоне зміщення $z = 100$. Який вік Всесвіту в момент випромінювання фотону? Скільки часу фотони були в дорозі до Землі?

Листок - відповідей

Прізвище, Ім'я, По-батькові.

№ завдання	Відповідь	Можлива кількість балів	Оцінка
Завд. 1	$M_{tot} =$ $M_{DM} =$	0.5	
Завд. 2	$m =$	1.25	
Завд. 3	$\beta =$	0.75	
Завд. 4	$n =$ $\beta =$	2.5	

Далека галактика, що рухається від нас, спостерігається на відстані $d = 10$ мегапарсек (1 мегапарсек $= 3.0856 \cdot 10^{22}$). Під час спектральних спостережень двох протилежних крайових областей зображення галактики (кутова діаметр зображення галактики $\alpha = 718''$) були виділені лінії поглинання з довжинами хвиль $\lambda_1 = 394.553nm$, $\lambda_2 = 394.159nm$, що відповідають лабораторній лінії $\lambda_0 = 393.477nm$. Загальна маса випромінюючої речовини складає $M_{obs} = 3.5 \cdot 10^9 M_{\odot}$ (маса Сонця $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}kg$).

1. Визначити загальну масу галактики M_{tot} та масу зосередженої в ній невидимої темної матерії M_{DM} .

2. Введемо гіпотезу про те, що невідома гравітуюча темна матерія може бути пояснена за допомогою гіпотетичних елементарних частинок. Одночасно в найменшій елементарній комірці 6-вимірного простору імпульсів та координат не може знаходитися більше двох частинок. Також відоме співвідношення невизначеностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, де Δx , Δp — невизначеності значень координати та імпульсу, $\hbar = 4.135 \cdot 10^{-15}$ еВ·с. Оцінити масу m в електрон-вольтах гіпотетичної частинки темної матерії.

3. Одним з можливих методів визначення маси темної матерії в гравітаційно зв'язаних структурах є спостереження відхилення променів світла від прямолінійних траєкторій в їх гравітаційному полі. Користуючись н'ютонівською теорією гравітації (вважати, що фотон має надзвичайно малу масу) визначити кут, на який відхилиться промінь світла в гравітаційному полі галактики, описаної в п.1. Мінімальна відстань між траєкторією променя і центром галактики (прицільний параметр) — r_0 . Вся маса галактики зосереджена в сфері радіуса, що менше за прицільний параметр.

4. Для слабких гравітаційних полів для променя світла виконується співвідношення $0 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) d\vec{x}^2$, $\vec{x} = (x, y, z)$ — звичайні координати тривимірного простору, t — час, $U(r) = \frac{GM_{tot}}{r}$. Визначити ефективний показник заломлення простору в такій теорії та кутове зміщення β променя світла від прямої траєкторії для галактики з п.1. Прицільний параметр — r_0 .

Задача 1

Частинка з енергією спокою E_1 і швидкістю \vec{v}_1 зіткнулася з нерухомою частинкою з енергією спокою E_2 , яка поглинає частинку, що налетіла. Знайти енергію спокою (0.5 бала) і швидкість \vec{v} (0.5 бала) частинки, що виникла в результаті зіткнення.

Задача 2

Частинка з енергією спокою E_0 пружньо зіткнулася зі стаціонарною частинкою, яка має таку ж саму енергію спокою. Якою буде кінетична енергія T частинки, що налітала після розсіяння, якщо кут розсіяння дорівнює θ , а кінетична енергія цієї частинки до зіткнення була T_0 ? (1 бал)

Задача 3

Відбувається реакція $A \rightarrow B + C$ (з масами m_a , m_b і m_c відповідно)

1. Вважаючи, що частинка A знаходиться в стані спокою в лабораторній системі відліку, знайти енергію E_b частинки B в цій системі. (0.5 бала)

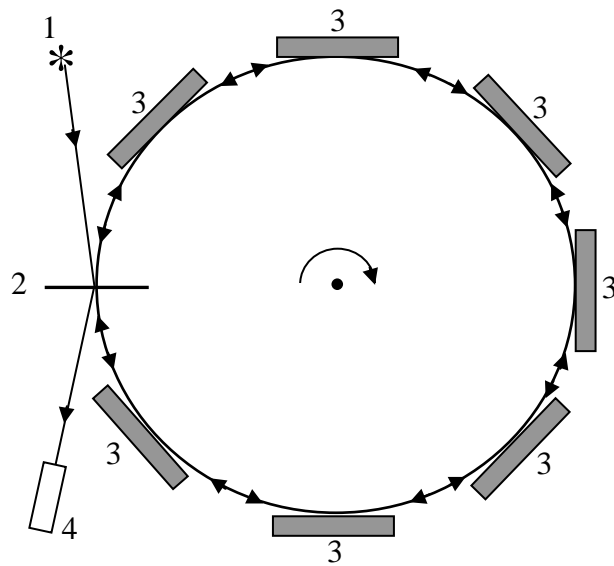
2. Атом A знаходиться в стані спокою і випускає фотон з енергією $h\nu$. Після цього утворюється атом, енергія спокою якого $(m_a c^2 - \delta)$. Знайти як співвідносяться між собою $h\nu$ і δ : $h\nu > \delta$, $h\nu < \delta$ чи $h\nu = \delta$. (0.5 бала)

3. Вважаючи, що частинка A рухається в лабораторній системі координат і розпадається на частинки B і C , знайти як зв'язані між собою кут, під яким випромінюється частинка B і енергії частинок A та B . (0.5 бала)

Задача 4

В першому експерименті пучок протонів, прискорених до енергії 30 ГеВ, падає на нерухому мішень. В другому експерименті кожен з двох окремих пучків протонів прискорюється до енергії 15 ГеВ, після чого пучки направляються назустріч один одному. Розрахувати повну енергію двох протонів в системі центра мас в кожному експерименті. (1 бал). До якої енергії необхідно прискорити пучок протонів у експерименті першого типу, щоб досягти тієї самої енергії, що і в другому експерименті. (0.5 бала)

Задача Ефект Саньяка. Нехай деяка хвиля довільної природи рухається по круглому диску радіусом R (в подальшому – *кільце*), який обертається навколо осі, перпендикулярної до центру диску з кутовою швидкістю Ω (така модель може бути реалізована в волоконному кільцевому інтерферометрі або у звичайному кільцевому інтерферометрі у випадку, коли число розташованих по колу дзеркал або призм повного внутрішнього відбиття прямує до нескінченності). На диску розташовані і обертаються з ним джерело випромінювання хвиль



довільної природи, напівпрозора пластинка 2 і приймач хвиль 3. Напівпрозора пластинка 2 ділить хвилю, яку випромінює джерело, на

дві хвилі – хвиля 1 рухається по колу радіуса R в напрямку обертання диска, а хвиля 2 – по колу радіуса R в протилежному напрямку. Вважаючи, що швидкість хвилі, яка рухається по колу відносно нерухомого диску дорівнює V_ϕ , а частота – ω , і нехтуючи:

1) зміною геометричних розмірів інтерферометра під впливом центробіжних сил; 2) поперечним зсувом

Рис. 2. Кільцевий інтерферометр: 1- джерело випромінювання, 2- світло подільна пластинка (напівпрозоре дзеркало), 3 – дзеркала, 4 – фотоприймач. Стрілки показують напрям обертання інтерферометра.

зустрічних хвиль під дією центр обіжних сил, пов'язаних з кривизною їх траєкторії в інтерферометрі (це призводить до незначного збільшення площі кільця, яке є однаковим для обох зустрічних хвиль), знайти:

2.1) різницю Δt між часами, які витрачають на проходження кільця кожна з хвиль, що рухається по круглому диску назустріч одна одній, (1 бал)

2.2) з'ясуйте, чи залежить ця різниця від того, заповнений кільцевий інтерферометр оптичним середовищем чи ні. (0.5 бала)

2.3) порівняйте цю різницю часів для акустичних хвиль і електромагнітних хвиль (0.5 бала).

Хвилі, які створюють інтерференційну картину на приймачі (тобто ті хвилі, які прийшли на приймач після обходу кільця, одночасно, на вході кільця виходять з напівпрозорої пластинки, що ділить хвилю, з різницею в часі Δt . Вважаючи, що джерело випромінювання хвиль і приймач хвиль розташовані на відстані R від центра обертання і обертаються разом з диском з тією ж кутовою швидкістю Ω знайти

2.4) різницю фаз зустрічних хвиль на виході з кільця (1.0 бала)