

**Оборудование:** подвес (гвоздь на стене), нить, цилиндрический груз с крючком, секундомер (на мобильном телефоне).

**Задача:** определить объем груза.

**Анализ оборудования:** при таком скудном оборудовании идея эксперимента не может быть сложной. Подвес и нить необходимы, видимо, для того, чтобы сделать из груза маятник. Секундомером можно измерить период малых колебаний такого маятника. Считая маятник математическим (пренебрегаем размерами груза), можно вычислить длину нити. В этом случае нитью можно пользоваться как линейкой! Такой анализ подводит к идее эксперимента.

**Теоретическое обоснование методики:** как написано в анализе, пренебрегаем размерами маятника по сравнению с длиной нити. Если период колебаний  $T$ , то тогда из формулы для периода малых колебаний математического маятника длина нити

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2},$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения. Измерим теперь при помощи нити радиус и высоту цилиндра. Обмотаем нить кольцом вокруг боковой поверхности цилиндра. Если при этом количество витков  $n_1$  (оно вовсе не обязательно целое), то радиус цилиндра

$$r = \frac{l}{2\pi n_1}.$$

Обмотаем теперь нить в виде прямоугольной рамки так, что она проходит через параллельные диаметры оснований (при взгляде сбоку с достаточно большого расстояния нить видна по контуру цилиндра). Если теперь количество витков  $n_2$ , то высота цилиндра

$$h = \frac{l}{2n_2} - 2r.$$

Отсюда получаем выражение для объема цилиндра:

$$V = \pi r^2 h = \frac{g^3 T^6 (\pi n_1 - 2n_2)}{512 \pi^8 n_1^3 n_2}$$

При этом объемом крючка пренебрегаем.

**Постановка эксперимента:** Для начала подвешиваем груз на длинной нити некоторой длины. Отклоняем груз на малый угол и измеряем период  $T$  его колебаний при помощи секундомера. Далее наматываем нить вокруг груза двумя способами, как описано в обосновании. Пусть количества витков в этих случаях  $n_1$  и  $n_2$  соответственно. Тогда объем рассчитываем по формуле в рамке.

Для повышения точности период измеряли несколько раз. Измеряли время  $t$ , в течение которого происходило  $k$  колебаний, тогда период  $T = t/k$ .

**Результаты эксперимента:** При измерении периода колебаний были получены следующие данные:

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7
Кол-во колебаний $k$	$20 \pm 0,25$	$25 \pm 0,25$	$25 \pm 0,25$	$15 \pm 0,25$	$20 \pm 0,25$	$30 \pm 0,25$	$20 \pm 0,25$
Время $t$ , с	$55,9 \pm 0,2$	$70,0 \pm 0,2$	$70,0 \pm 0,2$	$41,9 \pm 0,2$	$55,8 \pm 0,2$	$84,0 \pm 0,2$	$55,9 \pm 0,2$
Период $T$ , с	$2,80 \pm 0,04$	$2,80 \pm 0,03$	$2,80 \pm 0,03$	$2,79 \pm 0,05$	$2,79 \pm 0,04$	$2,80 \pm 0,02$	$2,80 \pm 0,04$

На основании этих данных период  $T_i = t_i/k_i$ . Погрешность периода  $\delta T_i = T_i \sqrt{(\delta t_i/t_i)^2 + (\delta k_i/k_i)^2}$  (здесь и далее символ  $\delta$  перед обозначением величины означает использования вместо самой величины ее погрешность, а индекс – номер эксперимента).

Погрешность  $\delta k$  считаем равной  $1/4$  (наверняка можно различить четверть периода). Погрешность  $\delta t$  состоит из погрешности секундомера и задержки реакции экспериментатора (последняя преобладает: точность использованного секундомера  $0,01$  с, а время реакции человека около  $0,1$  с), будем считать  $\delta t = 0,2$  с. Для конечной величины значение равно среднему выборки, а погрешность рассчитываем по формуле

$$\delta T = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \delta T_i^2},$$

где  $n = 7$  – количество измерений. Тогда  $T = 2,796 \pm 0,014$  с.

При измерении размеров груза были получены следующие данные:

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7
Кол-во витков $n_1$	$23,7 \pm 0,25$	$23,7 \pm 0,25$	$23,5 \pm 0,25$	$23,7 \pm 0,25$	$23,7 \pm 0,25$	$24,0 \pm 0,25$	$23,8 \pm 0,25$
Кол-во витков $n_2$	$14,7 \pm 0,25$	$14,7 \pm 0,25$	$14,5 \pm 0,25$	$14,7 \pm 0,25$	$14,7 \pm 0,25$	$14,6 \pm 0,25$	$14,7 \pm 0,25$
Объем $V$ , см <sup>3</sup>	$21,3 \pm 0,9$	$21,3 \pm 0,9$	$22,1 \pm 1,0$	$21,3 \pm 0,9$	$21,3 \pm 0,9$	$21,2 \pm 0,9$	$21,2 \pm 0,9$

Объем рассчитываем по формуле в рамке, а погрешность объема – по формуле

$$\delta V_i = V_i \sqrt{9 \left( \frac{\delta g}{g} \right)^2 + 36 \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 + \left( \frac{\delta \left( \frac{\pi}{n_{1i}^2 n_{2i}} - \frac{2}{n_{1i}^3} \right)}{\frac{\pi}{n_{1i}^2 n_{2i}} - \frac{2}{n_{1i}^3}} \right)^2},$$

где<sup>i</sup>

$$\delta \left( \frac{\pi}{n_{1i}^2 n_{2i}} - \frac{2}{n_{1i}^3} \right) = \sqrt{\left( \delta n_{1i} \left( \frac{6}{n_{1i}^4} - \frac{2\pi}{n_{1i}^3 n_{2i}} \right) \right)^2 + \left( \delta n_{2i} \frac{\pi}{n_{1i}^2 n_{2i}^2} \right)^2}.$$

Погрешности  $\delta n_1$  и  $\delta n_2$  считаем равными  $1/4$ . Погрешность  $\delta g = 0,01 \text{ м/с}^2$ . Погрешность конечного результата рассчитываем по формуле

$$\delta V = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \delta V_i^2},$$

где  $n = 7$ . По результатам эксперимента  $V = 21,4 \pm 0,4 \text{ см}^3$ .

**Выводы:** Экспериментально был определен объем груза  $V = 21,4 \pm 0,4 \text{ см}^3$ . Проанализируем влияние погрешностей на конечный результат. Ошибки в величинах  $k$ ,  $g$  и  $t$  незначительны, трение воздуха или нити мало влияет на движение достаточно плотного массивного груза. Более существенна ошибка в длине нити: при подвешивании груза весом  $0,5 \text{ кг}$  длина нити увеличивается приблизительно на 3-5 процентов. Также существенна ошибка в количестве витков: невозможно намотать витки строго по заданному контуру. При достаточно маленьком грузе и достаточно толстой нити она может достигнуть 10%. Методическая ошибка в периоде (приближенная формула  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ) для малых колебаний незначительна – всего лишь около 2 процентов<sup>ii</sup>. Такие ошибки одного порядка с погрешностью пренебрежения объемом крючка. В общем и целом, может быть достигнута достаточная точность для такого рода эксперимента.

Для установления истины было проведено несколько дополнительных замеров при помощи более точного оборудования. Длина нерастянутой нити при измерении рулеткой  $l_1 = 1,86 \pm 0,01 \text{ м}$ , в то время как длина растянутой нити по результатам эксперимента  $l = 1,94 \pm 0,02 \text{ м}$ . В длине ошибка около 4%, что дает ошибку в радиусе около 8%.

При прямом измерении линейкой диаметр  $d_1 = 2,5 \pm 0,1 \text{ см}$  и высота  $h_1 = 3,9 \pm 0,1 \text{ см}$ , в то время как по результатам эксперимента  $d = 2,60 \pm 0,03 \text{ см}$  и  $h = 4,02 \pm 0,01 \text{ см}$  (измерение нестандартным методом оказалось точнее, если не учесть растяжение нити!).

При измерении мензуркой получен результат  $V_2 = 19,0 \pm 0,5 \text{ см}^3$ , при этом при измерении линейкой  $V_1 = 19,1 \pm 1,6 \text{ см}^3$ , а по результатам эксперимента  $V = 21,4 \pm 0,4 \text{ см}^3$ .

---

<sup>i</sup> В общем виде для погрешности величины  $f(x_1, x_2, \dots)$  эта формула выглядит так:

$$\delta f = \sqrt{\left(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \dots}$$

<sup>ii</sup> См. [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pendulum\\_period.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pendulum_period.svg) – график зависимости относительной ошибки от угла отклонения.