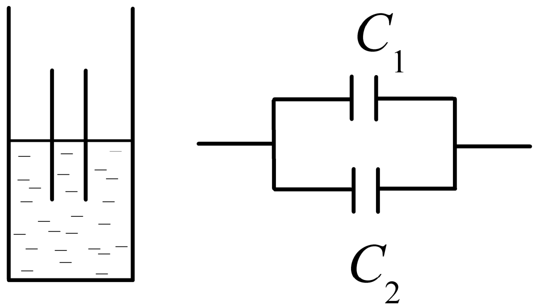
## Задачи 11 класс

**1. Плоский конденсатор, у которого расстояние между пластинами равно 4 мм, погружается до половины в жидкость с диэлектрической проницаемостью, равной 2. На сколько нужно раздвинуть пластины конденсатора, чтобы его емкость осталась неизменной?**

Плоский конденсатор, у якого відстань між пластинами дорівнює 4 мм, занурюється до половини в рідину з діелектричної проникністю, яка дорівнює 2. На скільки потрібно розсунути пластини конденсатора, щоб його ємність залишилася незмінною?

**Решение:**




Емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей. До погружения в жидкость емкость конденсаторов была равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_в S}{d}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - диэлектрическая проницаемость вакуума, $\varepsilon_в$ - диэлектрическая проницаемость воздуха, равная 1.

После погружения конденсатора до половины в жидкость и раздвижения пластин до некоторой величины $d_1$ образовалось два параллельно соединенных конденсатора с площадью пластин $S/2$ у каждого. Вычислим емкость образовавшегося сложного конденсатора, пользуясь формулой для двух конденсаторов, соединенных параллельно, и приравняем ее к первоначальной емкости конденсатора:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_в S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ж} S}{2d_1}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_ж$ - диэлектрическая проницаемость жидкости, равная 2. Подставив вместо $C$ ее значение из (1), получим

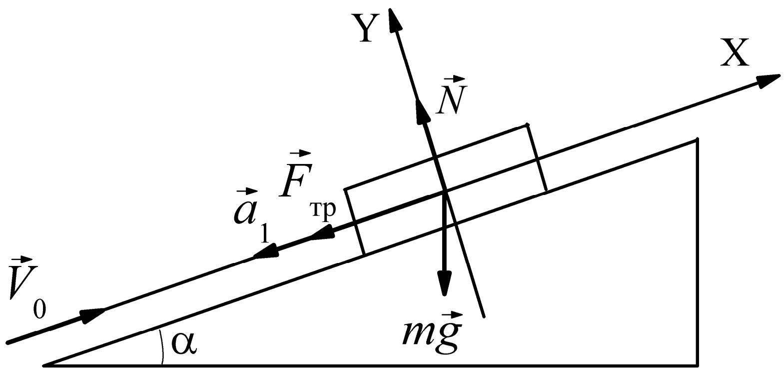
$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_в S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_в S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ж} S}{2d_1}, \qquad (2)$$

откуда $d_1 = (3/2)d = 6$ мм, $\Delta d = d_1 - d = 2$ мм.

**2. Горка со льда образует с горизонтом угол $\alpha$ = 10°. По ней пускают вверх камень, который, поднявшись на некоторую высоту, соскальзывает по тому же пути вниз. Чему равен коэффициент трения, если время спуска в *n* = 2 раза больше времени подъема?**

Гірка з льоду утворює з горизонтом кут $\alpha = 10°$. По ній пускають вгору камінь, який, піднявшись на деяку висоту, зісковзує по тому ж шляху вниз. Який коефіцієнт тертя, якщо час спуску в $n$ = 2 рази більший за час підйому?

**Решение:**




Рассмотрим движение тела вверх по наклонной плоскости, учитывая, что ускорение направлено вдоль наклонной плоскости против направления движения тела. На тело будут действовать сила тяжести $mg$, сила нормальной реакции поверхности $N$, сила трения $F_{тр}$, возникающая между телом и плоскостью.

Запишем уравнение динамики в проекциях на оси OX и OY:

$$\left.\begin{array}{c} -F_{ðð} - mg\sin\alpha = -ma_1 \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{array}\right\}.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu \cdot N$, получим:

$$-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = -ma_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \mu g\cos\alpha + g\sin\alpha. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь случай, когда тело спускается вниз с ускорением $a_2$. Запишем уравнение динамики для этого случая в проекциях на оси OX и OY:

$$\left.\begin{array}{c} -F_{тр} + mg\sin\alpha = ma_2 \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\mu N + mg\sin\alpha = ma_2 \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \quad (2)$$

Чтобы найти путь $S_1$, который пройдет тело при подъеме по наклонной плоскости, запишем первое и второе уравнения кинематики в проекции на ось OX, учитывая, что скорость в конце движения тела равна нулю:

$$\left.\begin{array}{c} 0 = V_0 - a_1 \cdot t_1 \\ S_1 = V_0 \cdot t_1 - \dfrac{a_1 t_1^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}. \quad (3)$$

В случае, когда тело будет опускаться по наклонной плоскости вниз, начальная скорость тела равна нулю, поэтому

$$S_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2}. \qquad (4)$$

Так как $S_1 = S_2$ (длина наклонной части не изменяется), то, приравняв (3) и (4), получим

$$\frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 t_1^2 = a_2 t_2^2. \qquad (5)$$

Согласно условию задачи $t_2 = n \cdot t_1 = 2 \cdot t_1$ , тогда

$$a_1 t_1^2 = 4 a_2 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4 a_2 \ . \qquad (5)$$

Подставим в полученное уравнение ускорения из (1) и (2):

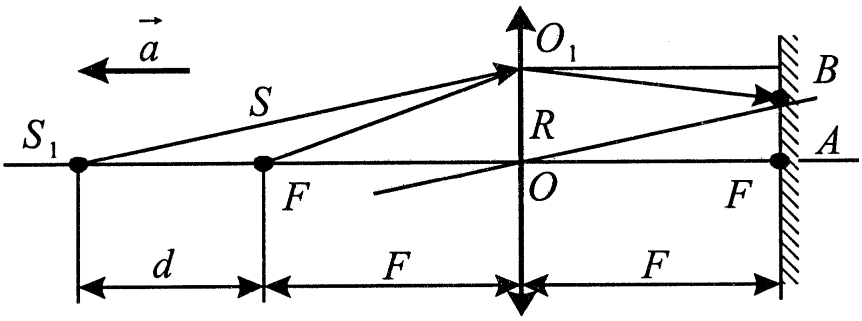
$$\mu g \cos\alpha + g \sin\alpha = 4 g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha$$

и найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{3 \sin\alpha}{5 \cos\alpha} = \frac{3}{5} tg\alpha = \frac{3}{5} tg10^\circ = \frac{3}{5} \cdot 0{,}176 = 0{,}1 \, .$$

**3. Имеется собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см и экран, который находится в ее фокальной плоскости. С другой стороны линзы в ее фокусе находится точечный источник света, который в некоторый момент начинает отдаляться от линзы с постоянным ускорением $a = 4$ м/с. Через какой промежуток времени $t$ после начала движения радиус светового пятна на экране уменьшится в $n = 6$ раз?**
Є збірна лінза з фокусною відстанню $F = 10$ см і екран, який розміщено в її фокальній площині. З іншої сторони лінзи в її фокусі знаходиться точкове джерело світла, яке в деякий момент починає віддалятись від лінзи з постійним прискоренням $a = 4$ м/с. Через який проміжок часу $t$ після початку руху радіус світлової плями на екрані зменшиться в $n = 6$ разів?

**Решение:**




Из подобия треугольников $\Delta S_1OO_1$ и $\Delta OAB$ следует, что

$$\frac{|OO_1|}{F+d} = \frac{|AB|}{F}. \qquad (1)$$

Сначала точечный источник находится в фокусе линзы. Световые лучи после прохождения линзы будут параллельны главной оптической оси. В этом случае $|OO_1| = R$ - радиус пятна света на экране.
Когда источник удалится от фокуса линзы на расстояние $d$, радиус пятна на экране станет $|AB| = R/n$, где по условию задачи $n = 6$. Поэтому условие (1) примет вид:

$$\frac{R}{F+d} = \frac{R}{nF} \quad \Rightarrow \quad F + d = nF. \qquad (2)$$

Световая точка, двигаясь с ускорением $a$ от фокуса линзы, за время $t$ пройдет путь

$$d = \frac{at^2}{2}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$F + \frac{at^2}{2} = nF \quad \Rightarrow \quad 2F + at^2 = 2nF. \qquad (4)$$

Тогда для времени $t$ имеем:

$$t = \sqrt{\frac{2F(n-1)}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.1\cdot(6-1)}{4}} = 0{,}5c.$$

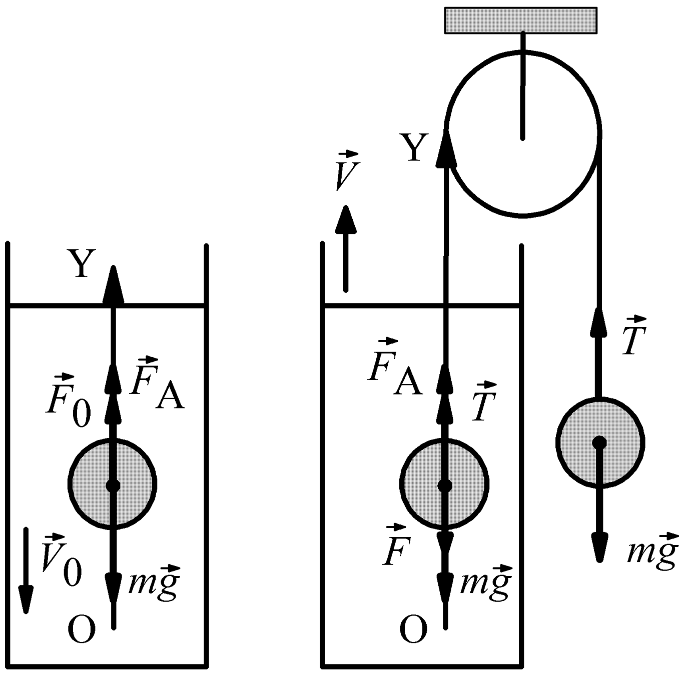
**4. Два одинаковых шарика из никеля связаны невесомой нитью, которая перекинута через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с керосином. С какой постоянной скоростью будут двигаться шарики, если известно, что постоянная скорость падения одиночного шарика в керосине равна $V_0$ = 1 м/с? Считать, что сила сопротивления движению шарика в жидкости пропорциональна его скорости. Плотность керосина $\rho_0$ = 0,8 г/см$^3$, плотность никеля $\rho$ = 8,8 г/см$^3$, трение в блоке не учитывать.**

Дві однакові кульки з нікелю зв'язані невагомою ниткою, яка перекинута через невагомий блок, причому одна з кульок занурена у посудину з керосином. З якою сталою швидкістю будуть рухатися кульки, якщо відомо, що стала швидкість падіння одиночної кульки в керосині дорівнює $V_0$ = 1 м/с? Вважати, що сила опору руху кульки в рідині пропорційна її швидкості. Густина керосину $\rho_0$ = 0,8 г/см$^3$, густина нікелю $\rho$ = 8,8 г/см$^3$, тертя в блоці не враховувати.

**Решение:**

Рассмотрим случай, когда шарик движется с постоянной скоростью $V_0$ в жидкости. Запишем проекции сил на вертикальную ось OY:

$$F_A + F_0 - m \cdot g = 0. \quad (1)$$




Здесь $F_A$ - сила Архимеда, $F_0$ – сила сопротивления движению шарика через жидкость, $m \cdot g$ - сила тяжести. Так как $F_0 = k \cdot V_0$ (согласно условию задачи), а сила Архимеда $F_A = \rho_0 \cdot g \cdot V_ш$ ($V_ш$ - объем шарика), то (1) принимает вид:

$$\rho_0 \cdot g \cdot V_ш + k \cdot V_0 - m \cdot g = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь случай, когда система из двух шариков, связанных нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, движется с постоянной скоростью $V$. Запишем проекции сил на ось OY:

$$\left.\begin{aligned} F_A + T - F - mg = 0 \\ T - mg = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_A = F \,. \qquad (3)$$

Так как $F = k\cdot V$, а $F_A = \rho_0 \cdot g \cdot V_ш$, то (3) принимает вид:

$$\rho_0 \cdot g \cdot V_ш = k \cdot V \,. \qquad (4)$$

Выразим $k$ из (4) и подставим в (2), получим

$$\rho_0 g V_ш + \rho_0 g V_ш \frac{V_0}{V} - mg = 0 \,. \qquad (5)$$

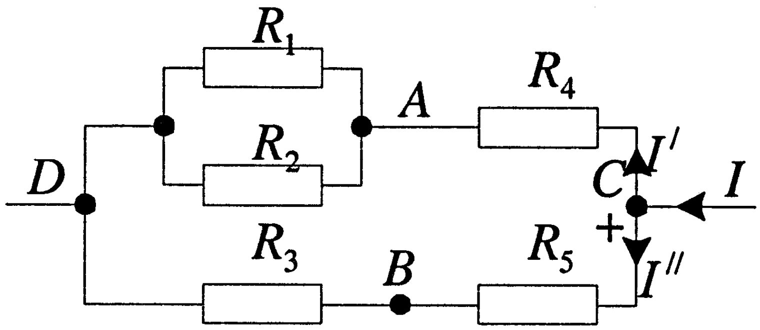
Учтем, что масса шарика $m = \rho \cdot V_ш$, тогда из уравнения (5) следует:

$$\rho_0 \cdot V + \rho_0 \cdot V_0 - \rho \cdot V = 0 \,,$$

$$V = \frac{\rho_0 V_0}{\rho - \rho_0} = \frac{0{,}8 \cdot 1}{8{,}8 - 0{,}8} = 0{,}1\, м/с \,.$$

**5. Найти величину сопротивления $R_1$, при которой разность потенциалов между точками А и В в схеме, изображенной на рисунке, равна нулю, $R_2$ = 60 Ом, $R_3$ = 10 Ом, $R_4$ = 80 Ом, $R_5$ = 20 Ом.**

Знайти величину опору $R_1$, при якій різниця потенціалів між точками А і В у схемі, зображеній на рисунку, дорівнює нулю, $R_2$ = 60 Ом, $R_3$ = 10 Ом, $R_4$ = 80 Ом, $R_5$ = 20 Ом.




**Решение:**

Разница потенциалов между точками А и В будет равна нулю в том случае, когда $U_{R4} = U_{R5}$ или

$$I'R_4 = I''R_5\,. \tag{1}$$

Решение задачи сводится к определению токов $I'$ и $I''$.
Найдем общее сопротивление системы:

$$R = \frac{R' \cdot R''}{R' + R''}\,,$$

где $R' = R_4 + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, $\qquad R'' = R_3 + R_5$.

Сила тока в цепи будет

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot (R' + R'')}{R' \cdot R''}\,.$$

Так как $I = I' + I''$, $I' \cdot R' = I'' \cdot R''$, то можно найти силы тока $I'$ и $I''$:

$$I'R' = (I - I'')R' = I''R'' \quad \Rightarrow \quad I'' = \frac{IR'}{R' + R''} = \frac{U}{R''} = \frac{U}{R_3 + R_5}\,.$$

$$I' = I - I'' = \frac{U \cdot (R' + R'')}{R' \cdot R''} - \frac{U}{R''} = \frac{U}{R'}\,,$$

$$I' = \frac{U \cdot (R_1 + R_2)}{R_1R_4 + R_2R_4 + R_1R_2}\,.$$

Подставим значения $I'$ и $I''$ в уравнение (1):

$$\frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_1R_4 + R_2R_4 + R_1R_2} = \frac{R_5}{R_3 + R_5} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_2 \cdot R_5 - R_3 \cdot R_4} = \frac{60 \cdot 10 \cdot 80}{60 \cdot 20 - 10 \cdot 80} = 120 \text{ Îì}\,.$$