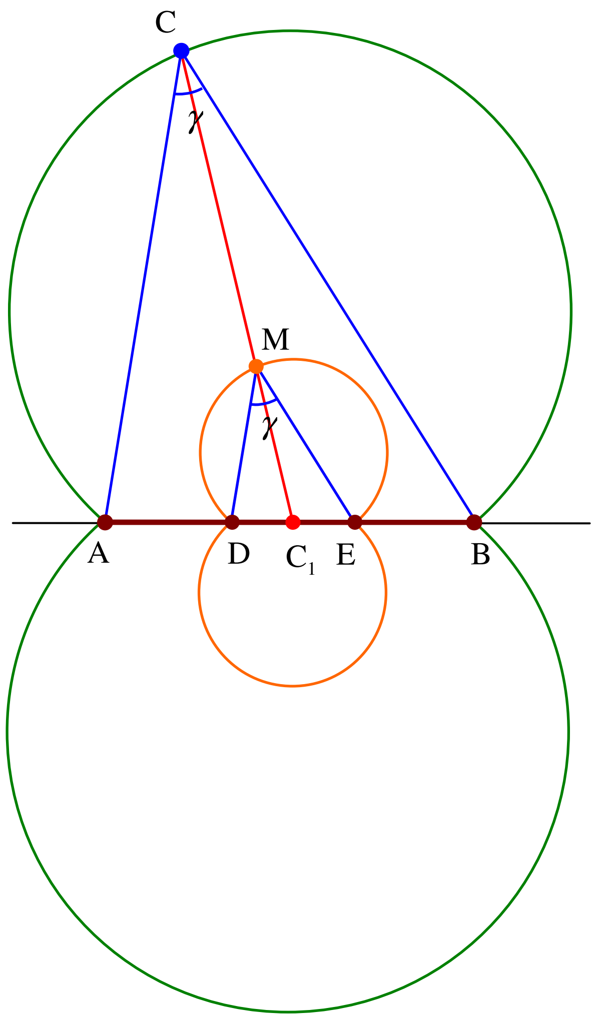
| | |
|---|---|
| Реєстраційний номер | 308799 |
| Назва олімпіади | Всеукраїнська учнівська інтернет-олімпіада з математики |
| Прізвище, ім’я та по батькові учасника | Шумаєв Олександр Ігорович |
| Рік народження | 1999 |
| Область | Харківська |
| Місто | Харків |
| Повна назва навчального закладу | Харківський фізико-математичний ліцей № 27 Харківської області |
| Клас, до якого перейшов учень | 9 |
| Клас, за який виконується конкурсне завдання | 9 |
| Статус | учень |
| Електронна адреса учасника | sashashumaev@rambler.ru |

# Задача № 1

**Условие:** На одном основании построено множество треугольников с одинаковым углом при вершине. Найти геометрическое место точек пересечения медиан этих треугольников.




**Решение:** Пусть $\gamma$ – величина угла при вершине данных треугольников. ГМТ вершин данных треугольников – множество, состоящее из дуг двух окружностей, проходящих через концы данного основания, причем данное основание стягивает дугу, равную $2\gamma$, причем в это ГМТ не входят точки A и B. Действительно, тогда углы при вершине данных треугольников вписаны в эти окружности и опираются на дугу, стягиваемую данным основанием, которая равна $2\gamma$, тогда угол при вершине равен $\gamma$. На рисунке AB – данное основание; зеленые дуги окружностей – ГМТ вершин треугольников; C – произвольная вершина; $CC_1$ – медиана $\Delta$ ABC. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Тогда $C_1M = \frac{CC_1}{3}$. Таким образом, при выборе всевозможных вершин C данных треугольников точка пересечения медиан M всегда находится в 3 раза ближе к середине отрезка AB, чем точка C. Значит, искомое ГМТ является изображением ГМТ вершин данных треугольников при преобразовании гомотетии с центром в точке $C_1$ и коэффициентом $k = \frac{1}{3}$ (гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k$ называется преобразование плоскости или пространства, переводящее точку X в точку X' такую, что вектор $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$). Искомое ГМТ, как и ГМТ вершин данных треугольников, состоит из дуг двух окружностей, величина которых равна $360° - 2\gamma$. Согласно свойствам преобразования гомотетии, эти дуги пересекают отрезок AB в точках D и E таких, что $\frac{C_1D}{AC_1} = \frac{C_1E}{BC_1} = \frac{1}{3}$ (см. рисунок), причем сами точки D и E не входят в искомое ГМТ.

**Ответ:** Искомое ГМТ есть множество, состоящее из дуг двух окружностей, проходящих через точки D и E, которые введены выше, причем градусная мера дуг равна $360° - 2\gamma$, где $\gamma$ – угол при вершине данных треугольников, за исключением точек D и E (на рисунке изображено оранжевым).

# Задача № 2

**<u>Условие</u>:** На плоскости задан круг с центром в точке O и точка A вне него. При помощи циркуля и линейки провести через точку A секущую BC к этому кругу так, чтобы AB = BC (B, C принадлежат окружности).

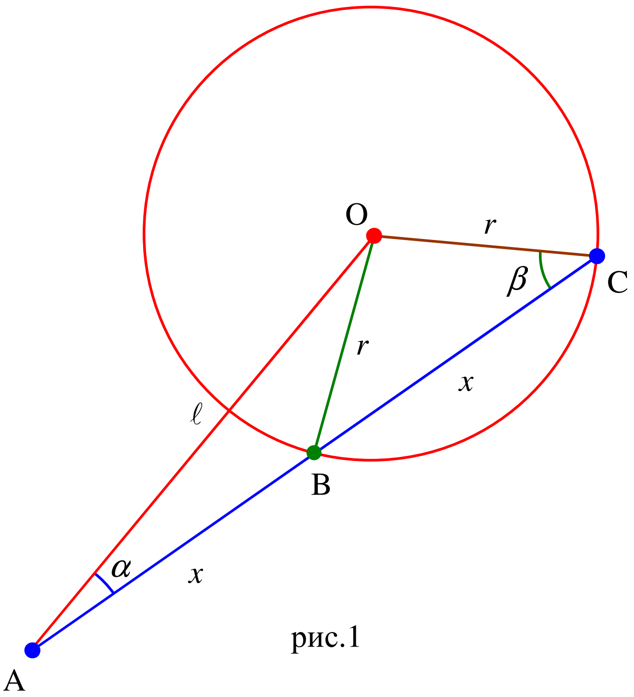



рис.1

**<u>Решение</u>:** 1. Анализ. При решении задачи будем считать, что точка B лежит между точками A и C. На рисунке $r$ – радиус круга; $x = AB = BC$; $AO = \ell$; $\angle OAC = \alpha$; $\angle OCA = \beta$. По теореме синусов для $\Delta$AOC: $\dfrac{r}{\sin\alpha} = \dfrac{\ell}{\sin\beta}$, откуда $\sin\beta = \dfrac{\ell\sin\alpha}{r}$. Учитывая, что $\beta < 90°$, имеем $\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{\ell^2\sin^2\alpha}{r^2}}$. Запишем теорему косинусов для $\Delta$ OBC:

$$r^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\beta,$$

откуда $x = 2r\cos\beta = 2\sqrt{r^2 - \ell^2\sin^2\alpha}$.
Запишем теорему косинусов для $\Delta$ OAB:

$$r^2 = \ell^2 + x^2 - 2\ell x\cos\alpha$$

и подставим *x*:

$$r^2 = \ell^2 + 4r^2 - 4\ell^2\sin^2\alpha - 4\ell\sqrt{r^2 - \ell^2\sin^2\alpha}\cos\alpha, \qquad (1)$$

откуда $4\ell\sqrt{r^2 - \ell^2\sin^2\alpha}\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \ell^2(1 - 4\sin^2\alpha) + 3r^2$. Возведем в квадрат:

$$16\ell^2(r^2 - l^2\sin^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \ell^4(1 - 4\sin^2\alpha)^2 + 9r^4 + 6\ell^2r^2(1 - 4\sin^2\alpha).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получаем:

$$10\ell^2r^2 + 8\ell^2r^2\sin^2\alpha = \ell^4 + 9r^4 + 8\ell^4\sin^2\alpha,$$

откуда $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{10\ell^2r^2 - 9r^4 - \ell^4}{8\ell^2(\ell^2 - r^2)}}$. Подстановкой в уравнение (1) убеждаемся в правильности решения.

Условия существования решения: $\dfrac{10\ell^2r^2 - 9r^4 - \ell^4}{8\ell^2(\ell^2 - r^2)} \ge 0$ и $\sqrt{\dfrac{10\ell^2r^2 - 9r^4 - \ell^4}{8\ell^2(\ell^2 - r^2)}} < 1$. Второе неравенство равносильно неравенству $10\ell^2r^2 - 9r^4 - \ell^4 < 8l^4 - 8\ell^2r^2$, которое можно преобразовать к виду $9r^4 - 18\ell^2r^2 + 9\ell^4 > 0$ и которое выполняется при $\ell \ne r$. Очевидно, что $\ell > r$, тогда $8\ell^2(\ell^2 - r^2) > 0$ и для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $10\ell^2r^2 - 9r^4 - \ell^4 \ge 0$. Очевидно, что это также и достаточное условие, поскольку тогда существует $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ такой, что $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{10\ell^2r^2 - 9r^4 - \ell^4}{8\ell^2(\ell^2 - r^2)}}$, тогда существует и искомая секущая. Выражение в левой части данного неравенства имеет положительные корни $\ell = r$ и $\ell = 3r$. Поскольку это квадратное неравенство относительно $\ell^2$ и коэффициент при $\ell^4$ меньше нуля, то неравенство выполняется при

$r < \ell \le 3r$. При $r < \ell < 3r$ также существует второе решение, симметричное данному относительно прямой OA.

2. Построение. Для начала рассмотрим несколько базовых построений, необходимых для решения задачи.

А) Построение отрезка $x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$.

Проводим прямую $\ell_1$, отмечаем на ней произвольную точку, восстанавливаем перпендикуляр $\ell_2$ к прямой $\ell_1$ в этой точке. Откладываем отрезок длиной $b$ на прямой $\ell_2$ от точки пересечения прямых $\ell_1$ и $\ell_2$. Проводим окружность с центром во втором конце построенного отрезка и отмечаем одну из точек пересечения этой окружности с прямой $\ell_1$ (см. рис.2, такие точки существуют, так как $a > b$). Тогда из теоремы Пифагора длина отрезка между точкой пересечения перпендикулярных прямых и точкой пересечения окружности с прямой $\ell_1$ равна $x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$.

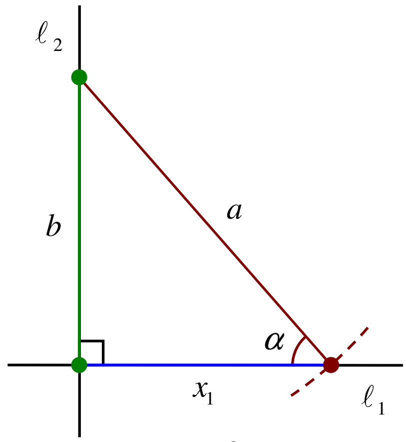


рис.2

Б) Построение отрезка $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Построение аналогично построению А, только отрезок $a$ откладываем на прямой $\ell_1$. Тогда по теореме Пифагора длина отрезка $x_2$, соединяющего концы отрезков $a$ и $b$, принадлежащие разным прямым, равна $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис.3).

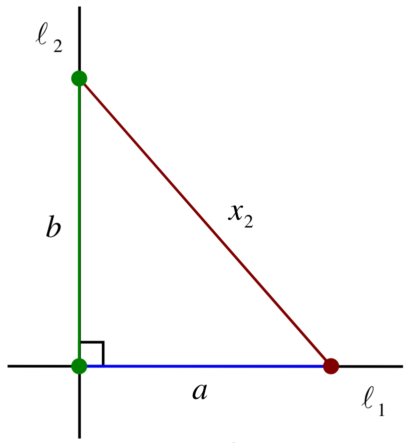


рис.3

В) Построение отрезка $x_3 = \dfrac{a \cdot b}{c}$. Проводим пересекающиеся под произвольным углом прямые $\alpha$ и $\beta$. На прямой $\alpha$ откладываем последовательно отрезки $c$ и $b$ от точки пересечения прямых $\alpha$ и $\beta$, как показано на рис.4. На прямой $\beta$ откладываем отрезок $a$ от точки пересечения прямых $\alpha$ и $\beta$. Через концы отрезков $a$ и $c$ проводим прямую $\gamma_1$. Через более отдаленный от точки пересечения прямых $\alpha$ и $\beta$ конец отрезка $b$ проводим прямую $\gamma_2$, параллельную $\gamma_1$ (провести параллельную прямую можно, например, отложив от отрезка $b$ угол $\varphi$, см. рис.4). Согласно обобщенной теореме Фалеса, прямые $\gamma_1$ и $\gamma_2$ отсекают на прямой $\beta$ отрезок $x_3$ такой, что $\dfrac{a}{c} = \dfrac{x_3}{b}$, откуда $x_3 = \dfrac{a \cdot b}{c}$.

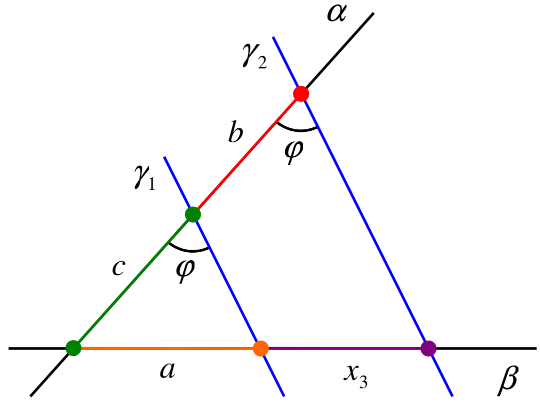


рис.4

Г) Построение угла $\alpha = \arcsin\dfrac{b}{a}$, $a > b$. Выполняем построения, примененные в построении А. Тогда синус угла между отрезками $a$ и $x_1$ равен $\dfrac{b}{a}$ (см. рис.2).

Д) Построение отрезка $x_4 = k \cdot a$, $k \in \mathbb{N}$. Проводим прямую, откладываем на ней $k$ отрезков длиной $a$ так, чтобы конец предыдущего отрезка совпадал с началом следующего. Тогда расстояние между крайними точками построенных отрезков равно $k \cdot a$.

Далее последовательно выполняем построения отрезков:

1) $t_1 = 3r$ (построение Д).

2) $t_2 = \sqrt{t_1^2 + r^2} = r\sqrt{10}$ из отрезков $a = t_1$ и $b = r$ (построение Б).

3) $t_3 = \dfrac{3r^2}{\ell}$ из отрезков $a = t_1$, $b = r$, $c = \ell$ (построение В).

4) $t_4 = \sqrt{t_2^2 - \ell^2} = \sqrt{10r^2 - \ell^2}$ из отрезков $a = t_2$ и $b = \ell$ (построение А).

5) $t_5 = \sqrt{t_4^2 - t_3^2} = \sqrt{10r^2 - \dfrac{9r^4}{\ell^2} - \ell^2}$ из отрезков $a = t_4$ и $b = t_3$ (построение А).

6) $t_6 = \sqrt{\ell^2 - r^2}$ из отрезков $a = \ell$ и $b = r$ (построение А).

7) $t_7 = 3t_6 = 3\sqrt{\ell^2 - r^2}$ (построение Д).

8) $t_8 = \sqrt{t_7^2 - t_6^2} = \sqrt{8(\ell^2 - r^2)}$ из отрезков $a = t_7$ и $b = t_6$ (построение А).

Теперь строим угол $\alpha = \arcsin\dfrac{t_5}{t_8} = \arcsin\sqrt{\dfrac{10\ell^2 r^2 - 9r^4 - \ell^4}{8\ell^2(\ell^2 - r^2)}}$ (построение Г).

Возвращаемся к исходному чертежу (т.е. рис.1) и откладываем угол $\alpha$ от прямой ОА в произвольную полуплоскость. Отмечаем В и С – точки пересечения данной окружности с проведенной стороной угла $\alpha$. Если же по построению $\sin\alpha = 0$, т.е $t_5 = 0$; то используем прямую ОА в качестве искомой секущей. Такое возможно только при $\ell = 3r$.

3. Доказательство. См. анализ.

4. Исследование. При $r < \ell < 3r$ задача имеет 2 решения, симметричных относительно прямой ОА. При $\ell = 3r$ задача имеет одно решение – искомой секущей является прямая ОА. При $\ell > 3r$ задача не имеет решений. Это очевидно также из следующих соображений: хорда ВС окружности не больше ее диаметра, а расстояние $\text{АВ} \geq \ell - r > 2r$, тогда АВ оказывается больше ВС.

# Задача № 3

**<u>Условие</u>:** Числа *a*, *b*, *c*, *d* принадлежат промежутку $[2;4]$. Доказать неравенство

$$25(ab+cd)^2 \geq 16(a^2+d^2)(b^2+c^2).$$

**<u>Решение</u>:** Воспользуемся тождеством $(ab+cd)^2+(ac-bd)^2=(a^2+d^2)(b^2+c^2)$. Подставим левую часть тождества в неравенство вместо $(a^2+d^2)(b^2+c^2)$ и приведем подобные члены:

$$9(ab+cd)^2 \geq 16(ac-bd)^2.$$

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, можно извлечь из них корень:

$$3|ab+cd| \geq 4|ac-bd|. \qquad (1)$$

Поскольку *a*, *b*, *c*, *d* > 0, то выражение $ab+cd$ неотрицательно, и можно убрать знак модуля в левой части неравенства. Рассмотрим 2 случая.

а) $ac > bd$;

б) $ac < bd$.

а) В этом случае $|ac-bd| = ac-bd$. Тогда неравенство (1) принимает вид:

$$3(ab+cd) \geq 4(ac-bd). \qquad (2а)$$

Произведем замену переменных $\alpha=\frac{a}{2}-1$; $\beta=\frac{b}{2}-1$; $\gamma=\frac{c}{2}-1$; $\delta=\frac{d}{2}-1$. Тогда числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ принадлежат промежутку $\left[\frac{2}{2}-1;\frac{4}{2}-1\right]=[0;1]$. Выразим переменные $a$, $b$, $c$, $d$:

$$a=2(\alpha+1);\ b=2(\beta+1);\ c=2(\gamma+1);\ d=2(\delta+1)$$

и подставим в (2а):

$$12((\alpha+1)(\beta+1)+(\gamma+1)(\delta+1)) \geq 16((\alpha+1)(\gamma+1)-(\beta+1)(\delta+1)).$$

Раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую часть, сократив на 4:

$$6-\alpha+7\beta+3\alpha\beta-\gamma-4\alpha\gamma+7\delta+4\beta\delta+3\gamma\delta \geq 0. \qquad (3а)$$

Рассмотрим это неравенство. Слагаемые $7\beta$, $3\alpha\beta$, $7\delta$, $4\beta\delta$, $3\gamma\delta$ неотрицательны, поскольку неотрицательны числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Для остальных слагаемых можно сделать "оценку снизу" $-\alpha \geq -1$; $-\gamma \geq 1$; $-4\alpha\gamma \geq -4$, так как $\alpha,\beta,\gamma,\delta \leq 1$. Тогда выполняется неравенство $-\alpha-\gamma-4\alpha\gamma \geq -6$, и, тем более, неравенство (3а).

б) В этом случае $|ac-bd| = bd-ac$, а неравенство (1) принимает вид

$$3(ab+cd) \geq 4(bd-ac). \qquad (2б)$$

Произведем такую же замену, как в случае а):

$$12((\alpha+1)(\beta+1)+(\gamma+1)(\delta+1)) \geq 16((\beta+1)(\delta+1)-(\alpha+1)(\gamma+1)).$$

Раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую часть, сократив на 4:

$$6+7\alpha-\beta+3\alpha\beta+7\gamma+4\alpha\gamma-\delta-4\beta\delta+3\gamma\delta \geq 0. \qquad (3б)$$

В этом неравенстве неотрицательны слагаемые $7\alpha$, $3\alpha\beta$, $7\gamma$, $4\alpha\gamma$, $3\gamma\delta$. Остальные слагаемые ограничены неравенствами $-\beta \geq -1$, $-\delta \geq -1$, $-4\beta\delta \geq -4$. Тогда выполняется неравенство $-\beta-\delta-4\beta\gamma \geq -6$, и, тем более, неравенство (3б).

Доказано.

# Задача № 4

**<u>Условие</u>:** Доказать, что для каждого натурального числа $n \geq 2$

$$(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^2 > n^n .$$

**<u>Решение</u>:** Разобьем множители левой части неравенства на пары: первый с последним, второй с предпоследним и т.д. Получим $n$ пар вида $(n-k;\, k+1)$, где $k \in \mathbb{N}$; $0 \leq k < n$ (среди пар будут повторения, но это учтено при их построении). Каждой паре поставим в соответствие множитель $n$ из правой части неравенства. Докажем, что произведение чисел любой пары не меньше $n$. Это произведение $P = (n-k)(k+1) = nk + n - k^2 - k$. Тогда $P - n = nk - k(k+1) = k(n-k-1)$. Поскольку $k > 0$ и $n - k \geq 1$, т.к. $k < n$ и $k, n \in \mathbb{N}$; то $P - n \geq 0$. Каждая пара не меньше $n$, поэтому произведение всех пар не меньше $n^n$. Очевидно, при $n \geq 2$ существуют такие $k$, что $P - n > 0$ (например, $k = n - 2$), то тогда произведение всех пар строго больше $n^n$, что и требовалось доказать.

# Задача № 5

**<u>Условие</u>:** Проезжая мимо кинотеатра, школьник успел увидеть только часы (но не минуты) начала четырех сеансов:

1-й сеанс – 12 ч. … мин.

2-й сеанс – 13 ч. … мин.

………………………..

7-й сеанс – 23 ч. … мин.

8-й сеанс – 24 ч. … мин.

Как по этим данным восстановить начало каждого из 8 сеансов? Имеется в виду, что длительность всех сеансов одинакова и выражается числом минут, кратным 5.

**<u>Решение</u>:** Оценим длительность сеанса при помощи этих данных. Сеанс длится менее 2 часов, потому что иначе количество часов между 1-м и 2-м сеансами не менее 2. 2-й сеанс начался не позже, чем в 13:59, 7-й сеанс начался не раньше, чем в 23:00. Тогда между 2-м и 7-м сеансами прошло не более 9 ч. 1 мин, или 541 мин; за это время прошло 5 полных сеансов. Тогда длительность сеанса не менее $\frac{541\text{ мин.}}{5} = 108{,}2\text{ мин}$. Учитывая, что длительность сеанса в минутах кратна 5, остается 2 варианта длительности сеанса: 110 мин. и 115 мин. Покажем, что второй вариант невозможен. Пусть длительность сеанса 115 мин. Тогда первый сеанс начался не позже чем в 12:04, иначе количество полных часов в начале 2-го сеанса не меньше 14. Тогда 2-й сеанс начался не позже чем в 13:59; 3-й не позже чем в 15:54; …; 7-й в 23:34; 8-й в 25:29, что противоречит условию. Получаем, что длительность сеанса равна 110 мин. При этом начало 1-го сеанса лежит в промежутке времени от 12:00 до 12:09, потому что иначе количество полных часов в начале 2-го сеанса не меньше 14. Покажем, что все варианты удовлетворяют условию. Восстановим расписание сеансов в первом и последнем случаях:

| № сеанса | Время начала | № сеанса | Время начала |
|---|---|---|---|
| 1 | **12**:00 | 1 | **12**:09 |
| 2 | **13**:50 | 2 | **13**:59 |
| 3 | 15:40 | 3 | 15:49 |
| 4 | 17:30 | 4 | 17:39 |
| 5 | 19:20 | 5 | 19:29 |
| 6 | 21:10 | 6 | 21:19 |
| 7 | **23**:00 | 7 | **23**:09 |
| 8 | **24**:50 | 8 | **24**:59 |

Аналогично выглядит расписание сеансов, если 1-й сеанс начался на $n$ минут позже 12:00; тогда необходимо добавить $n$ минут ко времени начала всех сеансов.
В решении задачи полагалось, что время начала каждого сеанса выражается целым числом минут.

**<u>Ответ</u>:** Восстановить начало каждого сеанса невозможно; возможны 10 случаев (см. таблицу). Длительность сеанса во всех случаях равна 110 мин, или 1 ч. 50 мин.