РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1

1А (2 балла)

На шар действует сила давления со стороны стенки $\vec{F}_1$ (которая по третьему закону Ньютона равна по модулю искомой силе давления шара на стенку) и сила давления $\vec{F}_A$ со стороны жидкости (сила Архимеда). Центр шара движется по окружности радиуса $R/2$ с угловой скоростью ω, поэтому на основании второго закона Ньютона для центра масс можно записать уравнение

$$m\omega^2 \frac{R}{2} = F_1 + F_A, \tag{1.1}$$

где $m = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho$ - масса шара. Сила Архимеда может быть записана в виде (по аналогии с выводом закона Архимеда из условия равновесия жидкости)

$$F_A = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho_0 \frac{\omega^2 R}{2}. \tag{1.2}$$

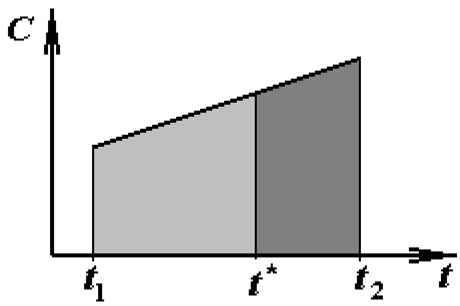
Из уравнения (1.1) с учетом формулы (1.2) получаем:

$$F_1 = \frac{1}{6}\pi R^3 \rho \frac{\omega^2 R}{2} - \frac{1}{6}\pi R^3 \rho_0 \frac{\omega^2 R}{2} = \frac{1}{12}\pi R^4 \omega^2 (\rho - \rho_0). \tag{1.3}$$

Заметим, что данная формула применима, когда плотность материала шара больше плотности жидкости $\rho > \rho_0$. В противном случае шар не будет касаться стенки (уплывет к оси сосуда), поэтому при $\rho < \rho_0$ сила давления будет равна нулю.

1В (3 балла)

Построим график зависимости теплоемкости тел от температуры. Площадь под этим графиком численно равна количеству полученной или отданной теплоты. Так как теплоемкости тел одинаковы, условию теплового баланса соответствует равенство площадей трапеций под графиком от t_1 до установившейся температуры t^* и от t^* до t_2. Из этого условия следует равенство



$$\left(c(t_1) + c(t^*)\right)\cdot\left(t^* - t_1\right) = \left(c(t_2) + c(t^*)\right)\cdot\left(t_2 - t^*\right). \tag{1.4}$$

Подстановка выражения для теплоемкости приводит к уравнению

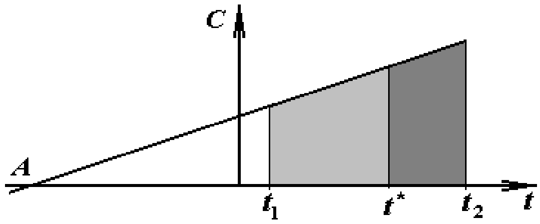
$$\left(1 + \alpha t_1 + 1 + \alpha t^*\right)\left(t^* - t_1\right) = \left(1 + \alpha t_2 + 1 + \alpha t^*\right)\left(t_2 - t^*\right), \tag{1.5}$$

положительный корень которого дает ответ на вопрос задачи:

$$t^* = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha(t_1+t_2)+\frac{\alpha^2}{2}\left(t_1^2+t_2^2\right)}-1\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{(1+\alpha t_1)^2+(1+\alpha t_2)^2}{2}}-1\right). \qquad (1.6)$$

Примечания.

1. Возможен интересный геометрический вариант решения данной задачи. Продлим график зависимости теплоемкости от температуры до пересечения с осью температур (точка A). Обозначим площади треугольников от точки A до соответствующих температур S_1, S^*, S_2. Так как эти треугольники подобны, то их площади пропорциональны квадратам высот, то есть $c^2(t)$. Условие равенства нужных площадей имеет вид



$$S_2 - S^* = S^* - S_1.$$

Откуда следует

$$S^* = \frac{S_1+S_2}{2},$$

или

$$(1+\alpha t^*)^2 = \frac{(1+\alpha t_1)^2+(1+\alpha t_2)^2}{2}.$$

Из этого уравнения конечная температура t^* выражается элементарно.

2. Допустимо получить выражение для внутренней энергии тел (проинтегрировав теплоемкости) и затем записать закон ее сохранения.

1C (2 балла)

Кинетическая энергия колебаний

$$E_k = n\frac{m\upsilon^2}{2} = n\frac{mx'^2}{2} = \frac{\alpha x'^2}{2}, \quad \text{где } \alpha = nm.$$

Потенциальная энергия колебаний

$$E_p = \frac{(k/n)(\Delta\ell)^2}{2} = \frac{(k/n)(2\pi x)^2}{2} = \frac{(4\pi^2 k/n)\cdot x^2}{2} = \frac{\beta x^2}{2},$$

где $\beta = 4\pi^2 k/n$. Циклическая частота

$$\omega^2 = \beta/\alpha = 4\pi^2 k/n^2 m.$$

Период колебаний

$$T = 2\pi/\omega = n\sqrt{m/k}.$$

1D (3 балла)

Со стороны излучения на бипризму действует сила давления, связанная с преломлением света. Эта сила направлена вдоль оси x распространения пучка света и по величине равна изменению импульса фотонов в единицу времени. Каждый фотон после прохождения через призму отклоняется на угол

$$\theta = (n-1)\gamma .$$

Изменение импульса фотона

$$\Delta p_x = p(1-\cos\theta) \approx p\theta^2/2 = p(n-1)^2\gamma^2/2 = (h\nu/c)(n-1)^2\gamma^2/2$$

Число фотонов падающих на призму в единицу времени

$$N = IS/h\nu.$$

Сила

$$F = N\Delta p_x = IS(n-1)^2\gamma^2/2c = 4{,}2\ 10^{-7}\ Н.$$

Так как полный импульс фотонов после прохождения пластины не изменяется, то на вторую призму (вогнутую) действует такая же по величине сила, но противоположная по направлению. Таким образом, для создания небольшого зазора, необходимо преодолеть силу давления излучения, растягивая призмы в разные стороны силой

$$F = 4{,}2\ 10^{-7}\ Н.$$

Задача 2
Электромагнитная пушка (10 баллов)

а) Силы, действующие на проводник изображены на рисунке 2. Это – сила тяжести $m\vec{g}$, сила Ампера $\vec{F}_A$ и сила реакции со стороны плоскости $\vec{N}$.

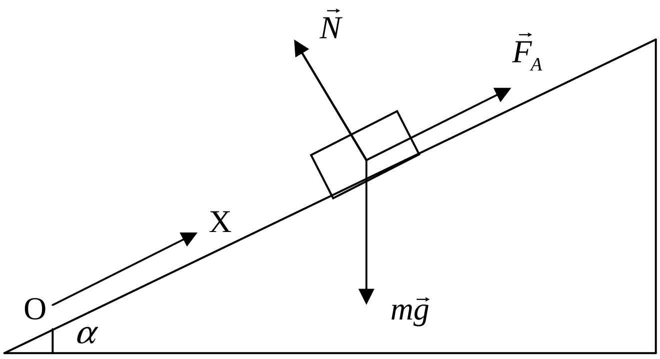


Рисунок 2. Силы, действующие на подвижный проводник.

Уравнение движения (второй закон Ньютона) подвижного проводника в проекции на ось OX имеет вид

$$ma = F_A - mg\sin\alpha . \tag{2.1}$$

Сила Ампера вычисляется по формуле

$$F_A = BIh . \tag{2.2}$$

В момент начала движения должно быть $a \geq 0$ и закон Ома дает

$$I = \frac{E_{\min}}{R}, \tag{2.3}$$

откуда

$$E_{\min} = \frac{mgR\sin\alpha}{Bh}. \tag{2.4}$$

b) Сила тока будет установившейся лишь в том случае, когда ускорение проводника будет равно нулю. Тогда из (2.1) и (2.2) получим

$$I_0 = \frac{mg\sin\alpha}{Bh}. \tag{2.5}$$

c) Сила тока I в подвижном проводнике определяется законом Ома

$$I = \frac{E + E_{ind}}{R}. \tag{2.6}$$

Здесь E_{ind} - это э.д.с. электромагнитной индукции, вызванная изменением магнитного потока и равная

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -Bh\frac{dx}{dt} = -Bhu, \tag{2.7}$$

где u - скорость движения подвижного стержня по плоскости. Из (2.6) и (2.7) получаем

$$I = \frac{E - Bhu}{R}. \tag{2.8}$$

В установившемся режиме сила тока $I = I_0$, тогда из (2.5) и (2.8) следует

$$u_0 = \frac{E}{Bh} - \frac{mgR\sin\alpha}{B^2h^2}. \tag{2.9}$$

d) Из соотношений (2.1) и (2.2) следует

$$m\Delta u = BIh\Delta t - mg\Delta t\sin\alpha. \tag{2.10}$$

Учитывая, что $\Delta q = I\Delta t$, из (2.10) находим

$$mu_0 = Bhq - mg\tau\sin\alpha, \tag{2.11}$$

где τ - время движения по плоскости.
Умножая (8) на Δt и учитывая что $u = \Delta x/\Delta t$, находим

$$\Delta q = \frac{E\Delta t - Bh\Delta x}{R} \tag{2.12}$$

Из (2.12) получаем

$$q = \frac{E\tau - BhL}{R}. \tag{2.13}$$

Из (2.11) и (2.13) находим

$$q = \frac{m(E^2Bh - mgER\sin\alpha + B^3h^3Lg\sin\alpha)}{B^2h^2(BEh - mgR\sin\alpha)}. \tag{2.14}$$

Отсюда получается ответ

$$C_1 = \frac{mBhg\sin\alpha}{(BEh - mgR\sin\alpha)} \qquad C_2 = \frac{mE}{B^2h^2}.$$

e) Источник тока совершает работу

$$A = Eq, \tag{2.15}$$

а проводник приобретает кинетическую энергию

$$E_{kin} = \frac{mu_0^2}{2} \tag{2.16}$$

и потенциальную

$$E_{pot} = mgL\sin\alpha. \tag{2.17}$$

Из закона сохранения энергии

$$A = E_{kin} + E_{pot} + Q, \tag{2.18}$$

откуда

$$Q = \frac{mE(E^2Bh - mgER\sin\alpha + B^3h^3Lg\sin\alpha)}{B^2h^2(BEh - mgR\sin\alpha)} - mgL\sin\alpha - \frac{m}{2}\left(\frac{E}{Bh} - \frac{mgR\sin\alpha}{B^2h^2}\right)^2. \tag{2.19}$$

Таким образом, получается ответ

$$C_3 = \frac{m^2g^2R\sin^2\alpha}{(BEh - mgR\sin\alpha)} \qquad C_4 = \frac{mE^2}{B^2h^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{E}{Bh} - \frac{mgR\sin\alpha}{B^2h^2}\right)^2$$

Задача 3
Атом гелия (10 баллов)

a) Согласно постулату Бора орбитальный момент импульса каждого электрона принимает следующий дискретный ряд значений

$$m_e\upsilon \cdot r = n\hbar, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Для основного состояния $n = 1$. Тогда

$$p \cdot r = \hbar$$

b) Потенциальная энергия системы состоит из энергии притяжения электронов с ядром и энергии отталкивания электронов между собой. Классически система может совершать вращательное движение по круговым орбитам только если электроны все время расположены по разные стороны от ядра. При этом система имеет потенциальную энергию

$$E_p = -\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{7}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

c) Второй закон Ньютона для каждого из электронов имеет вид:

$$m_e\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2e^2}{r^2} - \frac{e^2}{4r^2}\right)$$

С учетом квантования орбитального момента импульса из этого уравнения получим

$$r = \frac{16\pi\varepsilon_0}{7}\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

Численное значение

$$r = 3{,}02 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

d) Полная энергия основного состояния атома гелия

$$E = E_k + E_p = 2\frac{p^2}{2m_e} - \frac{7}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

С учетом квантования орбитального момента импульса и выражения для радиуса орбиты из предыдущего пункта имеем

$$E = -\left(\frac{7}{16\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{\hbar^2}$$

Численное значение

$$E = -133{,}32 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -83{,}3 \text{ эВ}$$

e) Однократно ионизированный атом гелия представляет собой водородоподобный атом с зарядом ядра $+2e$. Его энергия определяется по следующей формуле

$$E_1 = -\frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{me^4}{\hbar^2} = -87{,}06 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -54{,}4 \text{ эВ}$$

Тогда энергия однократной ионизации нейтрального атома гелия

$$E_{ion} = E_1 - E = 28{,}9 \text{ эВ}$$

f) Атомы ионизируются под действием внешнего давления, когда работа для изменения объема на величину порядка размера атома равна энергии ионизации. В качестве оценки это условие запишется как

$$E_{ion} \sim \frac{4\pi r^3}{3} p_{ion}$$

Численное значение давления порядка

$$p_{ion} \sim 10^{14} \text{ Па}$$

Схема оценки решений задач теоретического тура

Задача 1

A

Оцениваемые результаты	**Оценки**
Уравнение (1):	0,5 балла
Выражение для силы Архимеда	0,5 балла
Формула для силы (3)	0,5 балла
$F_1 = 0$ при $\rho < \rho_0$	0,5 балла

B

Оцениваемые результаты	**Оценки**
Уравнение теплового баланса	1.0 балла
Выражение для количества теплоты	1.0 балла
Выражение для конечной температуры (3)	1.0 балла

C

Оцениваемые результаты	**Оценки**
Потенциальная энергия колебаний	1,0 балла
Кинетическая энергия колебаний	0,5 балла
правильный ответ	0,5 балла

D

Оцениваемые результаты	**Оценки**
Правильная идея	0,5 балла
Расчёт изменения импульса после прохождения призмы Френеля	1,0 балла
Формула для силы давления на призму Френеля	0,5 балла
Давления на вторую призму	0,5 балла
Верный численный ответ	0,5 балла

Задача 2

Оцениваемые результаты	**Оценки**
Правильное значение $E_{\min}$	1,0 балла
Правильное значение тока I_0	1,0 балла
Правильное значение u_0	2,0 балла
Правильное выражение для закона Ома	0,5 балла
Правильное уравнение движения (второй закон Ньютона)	0,5 балла
Правильное значение C_1	1,0 балла

Правильное значение C_2	1,0 балла
Правильное выражение для закона сохранения энергии	1,0 балла
Правильное значение C_3	1,0 балла
Правильное значение C_4	1,0 балла

Задача 3

Оцениваемые результаты	**Оценки**
Условие квантования	1,0 балла
Правильное взаимное расположение электронов	1,0 балла
Правильное значение потенциальной энергии	1,0 балла
Правильное выражение для радиуса	1,5 балла
Численный ответ для радиуса	0,5 балла
Правильное значение полной энергии	1,0 балла
Правильное значение энергии однократной ионизации	2,0 балла
Разумная формула для оценки давления	1.5 балла
Численный ответ в пределах $10^{13} - 10^{15}$ Па	0.5 балла

Примечание: решение в котором не учитывалось взаимодествие между электронами за пункты а)-е) получает 1,0 балла.