Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ГЕОМЕТРИЯ-9

Материалы к урокам по теме:

“Векторы на плоскости (метрические задачи)”

Харьков, 2013 г.

Поурочное планирование (17 часов)

Урок 1. Скалярное произведение в линейном пространстве. Норма вектора.

Урок 2. Скалярное произведение в пространстве векторов на плоскости.

Урок 3. Ортогональные векторы. Скалярное произведение векторов в координатах.

Урок 4. Угол между векторами на плоскости.

Урок 5. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве.

Урок 6. *Самостоятельная работа* по теме: "Понятие скалярного произведения. Угол между векторами".

Урок 7. Векторы и прямоугольная декартова система координат.

Урок 8. Проекция вектора на ось. Связь координат вектора в ортонормированном базисе с его проекциями на базисные векторы.

Урок 9. *Самостоятельная работа* по теме: "Скалярное произведение в декартовой системе координат. Проекция вектора".

Урок 10. Формула, выражающая скалярное произведение векторов через стороны треугольника. Теорема косинусов. Теорема Стюарта.

Урок 11. Скалярное произведение векторов и площади.

Урок 12. Неравенства для углов треугольника. Формула Гамильтона (доказательство с помощью скалярного произведения векторов).

Урок 13. Сумма квадратов расстояний от точки до вершин треугольника. Теорема Лейбница.

Урок 14. *Самостоятельная работа* по теме: "Решение планиметрических задач".

Урок 15. Обобщающее занятие по теме.

Урок 16. Контрольная работа.

Урок 17. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Скалярное произведение в линейном пространстве. Норма вектора

1) Векторы произвольного линейного пространства можно складывать и умножать на число. Введем еще одну операцию – скалярное умножение векторов.

Определение.

> *Будем говорить, что в линейном пространстве E определено* ***скалярное произведение****, если каждой паре векторов $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in E$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ (или $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$), причем это соответствие обладает следующими свойствами:*
>
> (1) $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right)$ *(симметричность)*;
>
> (2) $\left(\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \lambda \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *(однородность)*;
>
> (3) $\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}\right)$ *(аддитивность)*;
>
> (4) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geqslant 0$, *причем* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$ т. и т. т., когда $\overrightarrow{a} = 0$.

Замечание. *Результатом скалярного умножения векторов является число (скаляр). Позднее, изучая направленные отрезки в трехмерном пространстве, мы познакомимся с еще одной операцией – векторным умножением векторов, в результате которой получается вектор.*

Термин "скалярное произведение" ввел уже знакомый нам ирландский математик У.Гамильтон.

2) Еще одно определение:

Определение.

> *Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется* ***евклидовым пространством****.*

В качестве примера евклидова пространства рассмотрим пространство векторов-строк с обычными правилами сложения и умножения на число. Определим для векторов $\overrightarrow{a}\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\overrightarrow{b}\,(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ скалярное произведение по формуле

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i.$$

Легко проверить, что все свойства скалярного произведения выполнены.

3) Из свойств (2) и (3) скалярного произведения сразу следует, что для любых действительных чисел α, β и любых векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{b}$ справедливо равенство

$$\left(\alpha \overrightarrow{a_1} + \beta \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}\right) = \alpha \left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}\right) + \beta \left(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}\right).$$

Т. о., операция скалярного умножения векторов *линейна* (по каждому аргументу).

4) В случае, если вектор $\overrightarrow{a}$ скалярно умножается сам на себя, вместо $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$ часто пишут $\overrightarrow{a}^2$. Такое произведение называют **скалярным квадратом** вектора $\overrightarrow{a}$.

5) Свойства скалярного произведения вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение, по обычным законам алгебры.

   Так, напр.,

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}\right) = 6\,(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + 2\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}\right) - 3\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) - \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\right).$$

   Справедливы и формулы сокращенного умножения, содержащие возведение в квадрат. Напр.,

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2, \quad \left(\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}\right)^2 = \overrightarrow{a}^2 \pm 2\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{b}^2.$$

6) В евклидовом пространстве можно ввести понятие нормы вектора. Как мы увидим позднее, понятие нормы является обобщением понятия длины.

Определение.

> ***Нормой вектора*** $\overrightarrow{a}$ *в евклидовым пространстве называется число*
>
> $$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}. \tag{1.1}$$

Так, в рассмотренном выше примере $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}$.

Из (1.1) сразу следует, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его нормы:

$$\overrightarrow{a}^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2. \tag{1.2}$$

Этот факт будет неоднократно использоваться нами в дальнейшем.

7) Заметим, что норма вектора удовлетворяет следующим условиям:

$$(1)\ \|\overrightarrow{a}\| \geqslant 0,\ \text{причем}\ \|\overrightarrow{a}\| = 0\ \text{только при}\ \ x = 0; \tag{1.3}$$

$$(2)\ \|\lambda\overrightarrow{a}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{a}\|\ \text{ при любом }\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

8) **Упражнения.**

   (1) В каком случае для трех ненулевых векторов выполнено соотношение $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}\right)$?

(2) Упростите выражение

$$A = \overrightarrow{a}^2 + 3\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) - 2\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) + 1,$$

если $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}$, $\|\overrightarrow{m}\| = 2$, $\|\overrightarrow{n}\| = 1$, $(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = 0$.

(3) Известно, что $\|\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}\| = \sqrt{5}$, $\|\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\| = \sqrt{7}$. Найдите $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

Домашнее задание

1) Известно, что $\|\overrightarrow{b}\| = \dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{a}$ – произвольный вектор. Найдите значение выражения
$$A = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2.$$

2) Известно, что $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}\right) = 5$, $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = -8$, $\left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}\right) = -10$. Найдите значение выражения
$$B = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}\right)^2 - \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right)^2.$$

3) Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, если $\|\overrightarrow{a}\| = 5$, $\|\overrightarrow{b}\| = 2$, $\|\overrightarrow{c}\| = 4$ и $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$.

4) Известно, что $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_4}$ – единичные векторы, причем $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4}) = -(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Упростите выражение
$$(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}).$$

5) Известно, что $\|2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| = \sqrt{6}$, $\|2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\| = \sqrt{11}$. Найдите $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

6) Докажите, что если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то они линейно независимы.

Урок 2. Скалярное произведение в пространстве векторов на плоскости

1) Введем понятие угла между векторами на плоскости.

Определение.

> *Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – два ненулевых и несонаправленных вектора на плоскости. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$.*
> ***Углом между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$*** *называют величину угла AOB.*
> *Если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равен нулю, то угол между ними не определяется.*

Заметим, что поскольку два угла со взаимно параллельными и одинаково направленными сторонами равны, данное определение корректно (т. е. величина угла между векторами не зависит от выбора точки O).

Угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ обозначают как $\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ или $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right)$.

Очевидно, что угол между любыми двумя векторами лежит в промежутке от $0°$ до $180°$:

$$0° \leqslant \left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) \leqslant 180°.$$

2) Рассмотрим пространство направленных отрезков на плоскости с обычными правилами сложения и умножения на число. Каждой паре векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ поставим в соответствие число по следующему правилу:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } \overrightarrow{a} = 0 \text{ или } \overrightarrow{b} = 0, \\ |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right), \text{ если } \overrightarrow{a} \neq 0, \overrightarrow{b} \neq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

3) Покажем, что все свойства скалярного произведения выполнены.

- Свойства (1) и (4) очевидны.
- Для доказательства свойства (2) надо рассмотреть отдельно случай, когда $\overrightarrow{a} = 0$ или $\overrightarrow{b} = 0$. Если же векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ ненулевые, то разбираем по очереди случаи

  а) $\lambda = 0$; б) $\lambda > 0$; в) $\lambda < 0$.
- Докажем свойство (3). Если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ или $\overrightarrow{b}$ равен нулю, то утверждение очевидно. Если векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ коллинеарны, то полагаем $\overrightarrow{a_2} = k\overrightarrow{a_1}$ и опять приходим к очевидному утверждению.

  Пусть теперь $\overrightarrow{a_1} \nparallel \overrightarrow{a_2}$. Обозначим $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, возьмем произвольную точку O и рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{s}$. Пусть A_1', A_2', S' – проекции точек A_1, A_2 и S на прямую OB. Далее необходимо разобрать три возможных случая расположения точек на прямой OB:

  а) A_1', A_2', S' и B лежат по одну сторону от точки O;

  б) A_1', A_2' и S' лежат по одну сторону от точки O, а B – по другую;

  в) A_1', S' и B лежат по одну сторону от точки O, а A_2' – по другую.

  В каждом из этих случаев надо проверить выполнение свойства (3). Для этого достаточно рассмотреть проекции векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{s}$ на прямую OB (напр., в первом случае достаточно доказать, что $OS' = OA_1' + OA_2'$.)

Т. о., соотношение (2.1) действительно определяет скалярное произведение.

4) Заметим, что для обозначения скалярного произведения в пространстве векторов на плоскости чаще используется обозначение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$.

5) На прошлом уроке мы ввели понятие нормы вектора в произвольном евклидовом пространстве. Легко видеть, что в пространстве векторов на плоскости $\|\overrightarrow{a}\|$ – это просто длина вектора $\overrightarrow{a}$. Как и ранее, мы будем обозначать ее $|\overrightarrow{a}|$.

6) **Упражнения.**

   (1) В ромбе $ABCD$ сторона $AB = 6$, а $\angle ABC = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов

   а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$;
   д) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$; ж) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

   (2) Известно, что $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{m} - 2\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n}$, $|\overrightarrow{m}| = 4$, $|\overrightarrow{n}| = 3$, $(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = 120°$. Найдите $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$.

   (3) Найдите длину вектора $\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$, если $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 60°$.

   (4) Найдите $\left|3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right|$, если

$$\left|2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| = 2\sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{a}| = 2, \quad |\overrightarrow{b}| = 1.$$

Домашнее задание

1) Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$, если

   а) $|\overrightarrow{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{n}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = 45°$;

   б) $|\overrightarrow{m}| = 8$, $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = 150°$.

2) Найдите скалярное произведение $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$, если $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 120°$.

3) Известно, что $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 150°$. Найдите $|2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}|$.

4) Известно, что в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$. Найдите

   а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$.

5) Докажите, что для любых данных точек A, B, C и D имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

6) Даны три единичных вектора $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, для которых выполнено соотношение $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = -1$. Докажите, что два из трех векторов противоположны.

Урок 3. Ортогональные векторы. Скалярное произведение векторов в координатах

1°. Ортогональные векторы

1) Рассмотрим евклидово пространство векторов на плоскости со скалярным произведением, заданным соотношением (2.1). Легко видеть, что справедливо следующее утверждение:

Утверждение.

Если угол между векторами острый, то их скалярное произведение положительно. Если угол между векторами тупой, то их скалярное произведение отрицательно. Если же векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Очевидно, что для ненулевых векторов справедливо и обратное. В частности, мы можем сформулировать критерий перпендикулярности векторов на плоскости:

Теорема 3.1 (критерий перпендикулярности векторов на плоскости)**.**

Два ненулевых вектора на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

2) Эта теорема подсказывает, как можно определить понятие перпендикулярности (или, как обычно говорят, ортогональности) векторов в произвольном евклидовом пространстве:

Определение.

*Два ненулевых вектора произвольного евклидова пространства называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.*

Для ортогональных векторов используют хорошо знакомое нам обозначение $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

3) В произвольном линейном пространстве, как мы помним, базисом называется полная линейно независимая система векторов. В евклидовом пространстве часто бывает удобно использовать базисы особого вида.

Определение.

> *Базис, векторы которого попарно ортогональны, называют* ***ортогональным****.*
> *Базис, все векторы которого имеют единичную длину, называют* ***нормированным****.*
> *Ортогональный нормированный базис называют* ***ортонормированным****.*

2°. Скалярное произведение векторов в координатах

1) Рассмотрим двумерное евклидово пространство. Выберем в этом пространстве произвольный базис $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ и возьмем два вектора $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{b} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}$. Тогда

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1y_1\overrightarrow{e_1}^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} + x_2y_2\overrightarrow{e_2}^2. \tag{3.1}$$

В случае ортогонального базиса эта формула существенно упрощается:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1y_1\overrightarrow{e_1}^2 + x_2y_2\overrightarrow{e_2}^2.$$

Но особенно простой вид формула (3.1) принимает в ортонормированном базисе:

Теорема 3.2.

Пусть в двумерном евклидовом пространстве даны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, имеющие в некотором ортонормированном базисе координаты $(x_1; x_2)$ и $(y_1; y_2)$ соответственно. Тогда их скалярное произведение может быть найдено по формуле

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1y_1 + x_2y_2. \tag{3.2}$$

2) Формула (3.2) позволяет сразу же получить выражение для длины вектора двумерного евклидова пространства, заданного своими координатами в ортонормированном базисе:

$$\boxed{|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.} \tag{3.3}$$

Заметим, что формула (3.3) – это переформулировка теоремы Пифагора.

3) Из теоремы 3.1 и формулы (3.2) непосредственно вытекает необходимое и достаточное условие ортогональности векторов в координатах:

Теорема 3.3.

Пусть в двумерном евклидовом пространстве даны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, имеющие в некотором ортонормированном базисе координаты $(x_1; x_2)$ и $(y_1; y_2)$ соответственно. Тогда

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 = 0. \tag{3.4}$$

Из теоремы 3.3 сразу получаем полезное утверждение:

Утверждение.

Ненулевые векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, имеющие в некотором ортонормированном базисе координаты $(x_1; x_2)$ и $(-x_2; x_1)$, ортогональны.

4) В школьном курсе геометрии нам неоднократно будут встречаться векторы, заданные своими координатами. В дальнейшем (если не оговорено противное) мы будем считать, что запись $\overrightarrow{a}(x; y)$ означает, что вектор $\overrightarrow{a}$ имеет координаты x, y в некотором ортонормированном базисе.

5) **Упражнение.** В ортонормированном базисе заданы векторы

$$\overrightarrow{a_1}\,(4; 3)\,, \quad \overrightarrow{a_2}\,(1; -2)\,, \quad \overrightarrow{a_3}\,(-1; 3)\,.$$

Найдите:

а) длины векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$;

б) скалярные произведения $\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_1}$;

в) длины векторов $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a_1} - 4\overrightarrow{a_2}$.

6) Полученные результаты легко обобщаются на случай произвольного n-мерного линейного пространства:

Теорема 3.4.

Пусть в некотором ортонормированном базисе даны векторы

$$\overrightarrow{a}\,(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{b}\,(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n).$$

Тогда их скалярное произведение может быть найдено по формуле

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k.$$

Следствие 1 (формула длины вектора в координатах).

Пусть в ортонормированном базисе дан вектор $\overrightarrow{a}\,(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$. *Тогда*

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}.$$

Следствие 2 (критерий ортогональности векторов в координатах).

Пусть в некотором ортонормированном базисе даны векторы $\overrightarrow{a}\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *и* $\overrightarrow{b}\,(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. *Тогда*

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = 0.$$

Домашнее задание

1) Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если

   а) $\overrightarrow{a}\left(\dfrac{1}{4}; -1\right)$, $\overrightarrow{b}\,(2; 3)$; б) $\overrightarrow{a}\,(-5; 6)$, $\overrightarrow{b}\,(6; 5)$; в) $\overrightarrow{a}\,(1,5; 2)$, $\overrightarrow{b}\,(4; -0,5)$.

2) При каких значениях x векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ перпендикулярны, если

   а) $\overrightarrow{a}\,(3; x)$, $\overrightarrow{b}\,(1; 9)$; б) $\overrightarrow{a}\,(2x; -3)$, $\overrightarrow{b}\,(x; 6)$?

3) При каких значениях y скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}\,(4; y)$ и $\overrightarrow{b}\,(3; -2)$ равно 14 ?

4) Известно, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ неколлинеарны. При каких значениях x векторы $\overrightarrow{a} + x\,\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - x\,\overrightarrow{b}$ перпендикулярны?

5) Векторы $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$. Какая теорема планиметрии следует из этого утверждения?

6) Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, где $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

7) Зная, что $|\overrightarrow{a}| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 5$, $\angle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = 120°$, определите, при каком значении параметра α векторы $\overrightarrow{p} = \alpha\,\overrightarrow{a} + 17\,\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = 3\,\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ будут перпендикулярны.

Урок 4. Угол между векторами на плоскости

1°. Нахождение угла между векторами на плоскости

1) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – два ненулевых вектора на плоскости, а φ – угол между ними. Из определения скалярного произведения векторов на плоскости сразу следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|}. \tag{4.1}$$

Эту формулу часто используют для нахождения угла между векторами.

2) **Упражнения.**

(1) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если

$$\left|3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right| = 4, \quad |\overrightarrow{a}| = 2, \quad |\overrightarrow{b}| = 1.$$

(2) Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$, если

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}\right) = \frac{1}{4}, \quad |\overrightarrow{a}| = 1, \quad |\overrightarrow{b}| = 2.$$

(3) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если

$$\left|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{13}, \quad \left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right) = 53, \quad |\overrightarrow{b}| = 2.$$

3) Если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имеют в некотором ортонормированном базисе координаты $(x_1; x_2)$ и $(y_1; y_2)$ соответственно, то формулу (4.1) можно переписать в виде

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}}. \tag{4.2}$$

4) **Упражнения.**

(1) Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{a}(1;-2)$ и $\overrightarrow{b}(2;-3)$.

(2) Даны векторы $\overrightarrow{a}(2;3)$ и $\overrightarrow{b}(-1;0)$. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a}+7\overrightarrow{b}$.

2°. Ориентированный угол между векторами на плоскости

1) Иногда бывает удобно рассматривать *ориентированные углы* между векторами (в частности, они понадобятся нам, когда мы на кружке будем изучать псевдоскалярное произведение векторов).

Определение.

> ***Ориентированным углом*** *между векторами* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *называют угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор* $\overrightarrow{a}$*, чтобы он стал сонаправлен вектору* $\overrightarrow{b}$*. При этом углы, отличающиеся на* $360°$*, считают равными.*

Без ограничения общности можно считать, что $-180° < \left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) \leqslant 180°$.

2) Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

- $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}}\right)$;
- $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}}\right) = (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}})$;
- $\left(\widehat{-\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) + 180°$.

Благодаря этим свойствам во многих случаях исчезает необходимость рассматривать различные варианты расположения точек.

Домашнее задание

1) При каких значениях x угол между векторами $\overrightarrow{a}(2;5)$ и $\overrightarrow{b}(x;4)$

а) острый; б) тупой ?

2) Даны векторы $\overrightarrow{a}\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ и $\overrightarrow{b}\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = 5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.

3) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$, если

$$|2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}| = 2\sqrt{43}, \quad |\overrightarrow{m}| = 6, \quad |\overrightarrow{n}| = 2.$$

4) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right) = \frac{27}{2}, \quad |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 3.$$

5) Какой угол образуют единичные векторы $\overrightarrow{s}$ и $\overrightarrow{t}$, если известно, что векторы $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{s} + 2\overrightarrow{t}$ и $\overrightarrow{q} = 5\overrightarrow{s} - 4\overrightarrow{t}$ взаимно перпендикулярны?

6) В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны. Найдите косинус угла, противолежащего основанию.

Урок 5. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

1°. Угол между векторами в евклидовом пространстве

1) Понятие угла между векторами произвольного евклидова пространства пока не определено. Но кажется вполне естественным ввести это понятие, воспользовавшись формулой (4.1).

Определение.

> ***Углом*** *между двумя ненулевыми векторами евклидового пространства* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *называется такое число* φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, *что* $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|}$.

2) Однако для того, чтобы это определение было корректным, необходимо, чтобы $|\cos\varphi| \leqslant 1$. Другими словами, должно выполняться неравенство
$$\left|\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\right| \leqslant \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|. \tag{5.1}$$
Оказывается, неравенство (5.1) справедливо в произвольном евклидовом пространстве и играет очень важную роль в математике. Оно называется **неравенством Коши-Буняковского-Шварца**.

3) Докажем неравенство (5.1). Пусть t – произвольное действительное число. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{a} - t\overrightarrow{b}$. Очевидно, что $\left(\overrightarrow{a} - t\overrightarrow{b}\right)^2 \geqslant 0$ при любом t. Раскрывая скобки в левой части этого неравенства, получаем, что квадратный трехчлен $\overrightarrow{b}^2 t^2 - 2\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)t + \overrightarrow{a}^2 \geqslant 0$ при любом t. Следовательно, дискриминант D этого квадратного трехчлена неположителен. Но $\dfrac{1}{4}D = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)^2 - \overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2$. Поэтому $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)^2 \leqslant \overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2$. Извлекая корень из обеих частей последнего неравенства, приходим к (5.1).

■

Замечание. Легко видеть, равенство в (5.1) достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно зависимы.

4) Конечно, в пространстве векторов на плоскости со скалярным произведением, определенным соотношением (2.1), неравенство Коши-Буняковского-Шварца очевидно и особого интереса не представляет. Однако записывая его в других евклидовых пространствах, можно получить много интересных неравенств. В частности, рассматривая пространство n-мерных векторов-строк, приходим к уже знакомому нам неравенству

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Позднее вы познакомитесь со многими другими примерами.

2°. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

1) Мы хорошо знаем, что в пространстве векторов на плоскости справедливо неравенство треугольника $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leqslant |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$. Аналогичное неравенство верно и в произвольном евклидовом пространстве. А именно, для любых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ справедливо неравенство

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leqslant \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|, \tag{5.2}$$

которое также называется **неравенством треугольника**.

Действительно,

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2 = \overrightarrow{a}^2 + 2\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{b}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\overrightarrow{a}\|^2 + 2\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| + \|\overrightarrow{b}\|^2 = \left(\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|\right)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей получившегося неравенства, приходим к (5.2).

2) Вспоминая полученные ранее формулы (1.3) и (1.4), видим, что норма вектора удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\|\overrightarrow{a}\| \geqslant 0$, причем $\|\overrightarrow{a}\| = 0$ только при $x = 0$;

(2) $\|\lambda\overrightarrow{a}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{a}\|$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ – однородность;

(3) $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leqslant \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|$ – неравенство треугольника.

3) Оказывается, любая функция, ставящая в соответствие вектору линейного пространства некоторое число и удовлетворяющая перечисленным выше условиям, называется **нормой**.

Другими словами, для задания нормы не обязательно иметь скалярное произведение. Можно рассматривать линейные пространства, в которых задана норма, но не обязательно задано скалярное произведение. Такие пространства называют **нормированными пространствами**.

4) С помощью нормы можно задать расстояние $\rho(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ произвольного евклидова пространства:

$$\rho(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|. \tag{5.3}$$

Расстояние, определенное с помощью (5.3), очевидно, удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\rho(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$;

(2) $\rho(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \rho(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$ – симметричность;

(3) $\rho(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) \leqslant \rho(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \rho(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ – неравенство треугольника.

Эти свойства часто называют **аксиомами расстояния** (т. е. расстоянием называют любую функцию, ставящую в соответствие паре векторов линейного пространства некоторое число, и удовлетворяющую этим свойствам).

Домашнее задание

1) Что можно сказать о двух ненулевых векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ на плоскости, если
а) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|$; б) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|$.

2) При каком взаимном расположении трех ненулевых векторов на плоскости выполнены соотношения

$$\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{c} \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)?$$

3) Используя тождество $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2 + \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2 = 2\left(\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2\right)$, докажите теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

4) В ромбе $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD. Найдите $\angle MAN$, если $\angle BAD = 60^\circ$.

5) В треугольнике ABC проведена медиана BD, $\angle DBC = 90^\circ$, $BD = \dfrac{\sqrt{3}}{4} AB$. Найдите $\angle ABD$.

6) Точки K и M – середины соответственно сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Найдите AD, если $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60^\circ$.

Урок 6. Самостоятельная работа №1: "Понятие скалярного произведения. Угол между векторами"

Домашнее задание

1) Даны три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. Докажите, что вектор $\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{a}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\,\overrightarrow{b}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{c}$.

2) Найдите угол между ненулевыми векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если $|\overrightarrow{a}|=2$, $|\overrightarrow{b}|=3$ и $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2+\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2=56$.

3) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны $2\sqrt{2}$ и 4 соответственно, угол B равен $135°$. Найдите косинус угла между стороной AC и медианой BB_1.

4) В четырехугольнике $ABCD$ углы A и D равны соответственно $65°$ и $85°$, $AB=\sqrt{3}$, $CD=3$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.

Урок 7. Векторы и прямоугольная декартова система координат

1) Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O и рассмотрим два единичных вектора, направленных вдоль осей координат. Обычно их обозначают $\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\}$ или $\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\}$. Очевидно, векторы $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ образуют ортонормированный базис.

2) Возьмем произвольную точку $A(x_0;y_0)$ и рассмотрим радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Очевидно,
$$\overrightarrow{OA}=x_0\overrightarrow{i}+y_0\overrightarrow{j}.$$
Т. о., координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ в ортонормированном базисе $\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\}$ совпадают с координатами его конца.

3) Возьмем теперь две произвольные точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ и найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в базисе $\{\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\}$. Поскольку $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_2-x_1;y_2-y_1)$, т. е.
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\overrightarrow{i}+(y_2-y_1)\overrightarrow{j}.$$

4) **Упражнения.**

   (1) Найдите углы треугольника с вершинами в точках $A\left(-1;\sqrt{3}\right)$, $B\left(1;-\sqrt{3}\right)$, $C\left(0,5;\sqrt{3}\right)$.

(2) Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A\,(3;0)$, $B\,(1;5)$, $C\,(2;1)$ – тупоугольный.

Замечание. Для уменьшения объема работы сперва нарисуйте треугольник ABC в декартовой системе координат, определите, какой из углов тупой, а после этого найдите скалярное произведение соответствующих векторов (косинус угла искать не надо!).

(3) В треугольнике ABC проведена высота CH (точка H лежит на стороне AB). Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$, если $AH = 2$, $BH = 3$, $CH = 5$.

Домашнее задание

1) Пусть $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ – координатные векторы. Докажите, что векторы $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ перпендикулярны.

2) Найдите косинусы углов треугольника с вершинами в точках $A\,(2;8)$, $B\,(-1;5)$, $C\,(3;1)$.

3) Пусть $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ – координатные векторы. Найдите длину вектора $\overrightarrow{a} = 3\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j}$.

4) Найдите диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, где $|\overrightarrow{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{q}| = 3$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = 45°$.

5) При каком значении x векторы $\overrightarrow{p} = x\overrightarrow{a} + 17\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ перпендикулярны, если $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 5$, $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 120°$.

6) В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найдите острый угол между этими медианами.

Урок 8. Проекция вектора на ось

1) В дальнейшем мы будем называть **осью** прямую, на которой выбрано положительное направление. Часто ось задается вектором, т. е. говорят об оси, имеющей направление вектора $\overrightarrow{m}$.

2) Дадим сперва определение проекции точки на ось:

Определение.

> ***Проекцией точки A на ось l*** *называется основание перпендикуляра, опущенного из точки A на l.*

Замечание. Такую проекцию называют **ортогональной**. Мы будем рассматривать только ортогональные проекции, хотя существуют и другие.

3) Теперь мы можем дать определение проекции вектора на ось:

Определение.

> *Пусть A' и B' – проекции точек A и B на ось l.* ***Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l*** *называется длина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятая со знаком "+", если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси l, и со знаком "–" в противном случае.*

Из данного определения следует, что проекция вектора на ось есть скалярная величина (число).

4) Определение проекции вектора на ось бывает удобно переформулировать следующим образом:

Определение.

> ***Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l*** *называется длина его составляющей по этой оси, взятая со знаком "+", если направление составляющей совпадает с направлением оси l, и со знаком "–" в противном случае.*

5) Для проекции вектора на ось используют следующие обозначения:

- $\text{пр}_l\,\overrightarrow{a}$ – проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на ось l;
- $\text{пр}_{\overrightarrow{m}}\,\overrightarrow{a}$ – проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на ось, направленную вдоль вектора $\overrightarrow{m}$;
- a_x, a_y – проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на оси координат.

6) Очевидно, что $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j}$, т. е. проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на оси координат – это координаты этого вектора в базисе $\{\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\}$. Отсюда сразу получаем свойства арифметических операций с проекциями:

(1) $\text{пр}_l\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \text{пр}_l\,\overrightarrow{a} + \text{пр}_l\,\overrightarrow{b}$;

(2) $\text{пр}_l\,(\alpha\overrightarrow{a}) = \alpha\,\text{пр}_l\,\overrightarrow{a}$.

7) Как найти проекцию вектора на ось?

- Если нужно найти проекции вектора $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ на оси координат, то проще всего воспользоваться формулами

$$\boxed{a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A.} \tag{8.1}$$

- В общем случае, когда нужно найти проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на ось, направленную вдоль вектора $\overrightarrow{m}$, удобнее всего воспользоваться формулой

$$\boxed{\text{пр}_{\overrightarrow{m}}\,\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|}.} \tag{8.2}$$

Докажем эту формулу. Пусть $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси проекции, $\overrightarrow{e_2}$ – единичный вектор, перпендикулярный этой оси. Обозначим a_1 и a_2 проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на направления, задаваемые векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$. Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор $\overrightarrow{e_1}$, получаем, что $a_1 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|}$, ч. т. д.

- Особенно простой вид формула (8.2) приобретает в случае, когда вектор $\overrightarrow{a}$ проектируется на единичный вектор $\overrightarrow{e}$:

$$\boxed{\text{пр}_{\overrightarrow{e}}\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e}.} \tag{8.3}$$

Замечание. Эта формула настолько важна, что ее часто принимают за определение проекции в произвольном евклидовом пространстве, т. е. проекцией вектора $\overrightarrow{a}$ на направление, задаваемое единичным вектором $\overrightarrow{e}$, называют число $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e})$.

8) **Упражнения.**

(1) Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ на вектор $\overrightarrow{b}$, если $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 3$, $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = 120°$, $\left(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}}\right) = 60°$.

(2) Даны точки $A\,(-3;1)$, $B\,(1;7)$, $C\,(-1;-2)$, $D\,(6;3)$. Найдите длину проекции отрезка AB на прямую CD.

(3) Даны точки $A\,(5;-3)$, $B\,(1;5)$, $C\,(-5;7)$. Найдите проекцию точки C на прямую AB.

Домашнее задание

1) Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC $(AD > BC)$, $\angle BAD = \varphi$, $AB = BC = CD = 1$.

а) Найдите проекцию на ось AD:

(1) вектора $\overrightarrow{AB}$; (2) вектора $\overrightarrow{CA}$; (3) вектора $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$.

б) Верно ли, что равны проекции:

(1) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось CD и вектора $\overrightarrow{CD}$ на ось BA;

(2) вектора $\overrightarrow{BC}$ на оси AB и CD?

в) Есть ли такой угол φ, при котором равны проекции на ось BD векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

г) Можно ли найти такую ось l, что равны проекции на эту ось:

(1) векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; (2) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BC}$?

2) Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{a} = 10\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ на ось, имеющую направление вектора $\overrightarrow{b} = 5\,\overrightarrow{i} - 12\,\overrightarrow{j}$.

3) Даны точки $A\,(1;7)$, $B\,(-4;-3)$, $C\,(5;-1)$. Найдите проекцию точки C на прямую AB.

Урок 9. Самостоятельная работа №2: "Скалярное произведение в декартовой системе координат. Проекция вектора"

Домашнее задание

1) Найдите модуль проекции вектора $\overrightarrow{a}\,(7;-4)$ на ось, параллельную вектору $\overrightarrow{b}\,(-8;6)$.

2) Известно, что $\overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}$, где $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный и найдите его площадь.

Урок 10. Формула, выражающая скалярное произведение векторов через стороны треугольника. Теорема косинусов. Теорема Стюарта

1) Мы уже видели, что некоторые теоремы планиметрии представляют собой, по сути, тождества для векторов. В частности, известная теорема, утверждающая, что *параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны*, есть просто геометрическая интерпретация тождества $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2$. Сейчас мы приведем еще один, более интересный пример.

2) Рассмотрим треугольник ABC, построенный на векторах $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$. Обозначим $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.[1] Выпишем формулу для квадрата разности:
$$\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2 = \overrightarrow{a}^2 - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2. \qquad (10.1)$$
Пусть a, b, c – длины векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ соответственно. Тогда
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}. \qquad (10.2)$$
Вспоминая определение скалярного произведения, получаем отсюда, что
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.} \qquad (10.3)$$

[1] Такие необычные обозначения введены для того, чтобы сохранить стандартные обозначения для сторон треугольника ABC

Т. о., нами доказана **теорема косинусов**. Оказалось, что она представляет собой геометрическую интерпретацию тождества (10.1).

3) Из (10.2) можно также получить формулу, выражающую скалярное произведение векторов через стороны треугольника, построенного на них:

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2\right).} \tag{10.4}$$

4) Равенство (10.4) часто бывает полезным при доказательстве теорем и решении задач. В частности, с его помощью легко доказать формулу, выражающую длину медианы треугольника через его стороны. Действительно, используя обозначения, введенные выше, имеем

$$\overrightarrow{m_c} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right).$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем, что

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right).$$

Отсюда, с учетом (10.4), сразу же находим, что

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - c^2\right) = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем уже знакомую нам формулу

$$\boxed{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.} \tag{10.5}$$

5) Как мы знаем, формула (10.5) является частным случаем теоремы Стюарта, позволяющей найти длину чевианы треугольника, если известны две его стороны и отрезки, на которые чевиана делит третью сторону. Несложно заметить, что теорема Стюарта также может быть доказана с помощью соотношения (10.4). Действительно, пусть D – точка на стороне AB треугольника ABC, $AD = x$, $BD = y$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{d}$. Тогда $\overrightarrow{d} = \dfrac{1}{c}\left(x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{b}\right)$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем, с учетом (10.4), что

$$d^2 = \frac{1}{c^2}\left(x^2a^2 + y^2b^2 + 2xy\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(x^2a^2 + y^2b^2 + xy\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right) = \frac{1}{c^2}\left(\left(x^2 + xy\right)a^2 + \left(y^2 + xy\right)b^2\right) - xy =$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(xca^2 + ycb^2\right) - xy = \frac{x}{c}\,a^2 + \frac{y}{c}\,b^2 - xy.$$

Т. о., мы доказали **теорему Стюарта**:

$$\boxed{d^2 = \frac{x}{c}\,a^2 + \frac{y}{c}\,b^2 - xy.} \tag{10.6}$$

6) В заключение решим следующую задачу:

   Задача. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка A_1 такая, что $BA_1 : A_1C = 2 : 3$. Найдите длину чевианы AA_1, если $AB = 6$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$.

Домашнее задание

1) Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2+b^2 = 5c^2$. Докажите, что две медианы треугольника перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

2) Найдите длину медианы AM треугольника ABC, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

3) В треугольнике ABC угол $BAC = 135^\circ$, а стороны AB и AC равны соответственно 4 и 10. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 3 : 1$. Найдите AM.

4) На стороне AC треугольника ABC взята точка K. Известно, что $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 9$, $AK = 2$. Пусть A_1 и B_1 – проекции точек A и B на прямую KM, где M – центроид треугольника ABC. Найдите A_1B_1.

Урок 11. Скалярное произведение векторов и площади

1°. Формула Герона

1) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – неколлинеарные векторы. Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Обозначим площадь этого параллелограмма S. Тогда

$$\boxed{S^2 = a^2b^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2.} \tag{11.1}$$

   Действительно, пусть φ – угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Тогда $S = ab\sin\varphi$, откуда

$$S^2 = a^2b^2\sin^2\varphi = a^2b^2\left(1 - \cos^2\varphi\right) = a^2b^2 - (ab\cos\varphi)^2 = a^2b^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2.$$

2) Из (11.1) сразу получаем формулу для площади треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:

$$\boxed{S_\triangle^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2\right).} \tag{11.2}$$

3) Из (11.2) с помощью формулы (10.4) легко вывести хорошо знакомую нам формулу Герона, выражающую площадь треугольника через его стороны:

$$\boxed{S_{\triangle} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.} \tag{11.3}$$

Здесь, как обычно, p – полупериметр треугольника.

Доказательство:

$$S_{\triangle}^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\right) = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right) = \frac{1}{16}\left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\,(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c) = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,.$$

4) Заметим, что если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны, то правая часть (11.2) равна нулю. Верно, очевидно, и обратное: если $a^2b^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2 = 0$, то векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны. Т. о., мы получили критерий коллинеарности векторов:

$$\boxed{\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a^2b^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2 = 0.} \tag{11.4}$$

2°. Формула, выражающая площадь треугольника через координаты его вершин

1) С помощью формулы (11.2) можно вывести формулу, выражающую площадь треугольника через координаты его вершин:

Теорема 11.1.

Площадь треугольника с вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ может быть найдена по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)\right|. \tag{11.5}$$

Доказательство теоремы: Обозначим $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$. Очевидно, $\overrightarrow{a} = (x_1 - x_3, y_1 - y_3)$, $\overrightarrow{b} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3)$. Поэтому в силу (11.2)

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\right) = \frac{1}{4}\left(\left((x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2\right)\left((x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2\right) -\right.$$
$$\left. - \left((x_1-x_3)(x_2-x_3) + (y_1-y_3)(y_2-y_3)\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left((x_1-x_3)^2(y_2-y_3)^2 + (x_2-x_3)^2(y_1-y_3)^2 -\right.$$
$$\left. -2(x_1-x_3)(x_2-x_3)(y_1-y_3)(y_2-y_3)\right) = \frac{1}{4}\left((x_1-x_3)(y_2-y_3) - (x_2-x_3)(y_1-y_3)\right)^2.$$

Отсюда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\Big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\Big|$$

Раскрывая скобки в правой части и группируя соответствующим образом слагаемые, получаем (11.5).

■

2) Нетрудно заметить, что формула (11.5) может быть записана в компактной форме с использованием определителя 3-го порядка. Действительно,

$$x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2) =$$
$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \det A.$$

Тогда с учетом вышесказанного

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}\big|\det A\big|.} \tag{11.6}$$

Замечание. *Мы уже сталкивались с теоремой 11.1 на кружке, когда изучали формулу Пика. Тогда было получено доказательство* (11.5) *в одном из возможных случаев расположения вершин треугольника. Сейчас мы получили строгое доказательство, не опирающееся на расположение вершин. В ближайшее время на кружке мы докажем теорему 11.1 с помощью* псевдоскалярного произведения *векторов. А в 11-м классе мы познакомимся с* векторным произведением *векторов. После этого формула* (11.6) *станет практически очевидной.*

3) Теорема 11.1 допускает обобщение на случай произвольного многоугольника. А именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 11.2.

Пусть $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ – вершины произвольного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Тогда площадь S этого многоугольника может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\Big|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_ny_1 - x_1y_n)\Big| =$$
$$= \frac{1}{2}\big|x_1\,(y_2 - y_n) + x_2\,(y_3 - y_1) + \ldots + x_n\,(y_1 - y_{n-1})\big|. \tag{11.7}$$

Теорему 11.2 можно доказать, опираясь на теорему 11.1, с помощью метода математической индукции. При этом надо пользоваться понятием *ориентированной площади*.

Домашнее задание

1) Даны вершины треугольника $A(-1;1)$; $B(-5;4)$; $C(7;2)$. Найдите площадь треугольника ABC.

2) Дан треугольник ABC, в котором $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 8$, $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины B.

3) Даны векторы $\overrightarrow{OA}(-1;2)$ и $\overrightarrow{OB}(-4;-2)$. Найдите площадь треугольника OAB.

4) В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне BC взята точка E такая, что $EC = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.

Урок 12. Неравенства для углов треугольника. Формула Гамильтона (доказательство с помощью скалярного произведения векторов)

1°. Неравенства для углов треугольника

Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажем несколько неравенств для тригонометрических функций этих углов. При этом интерес будут представлять не только сами полученные неравенства, но и методы их доказательства.

1) Начнем со следующего неравенства:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}.} \tag{12.1}$$

Доказательство: Пусть I – центр вписанной окружности, K_1, K_2, K_3 – точки касания. Тогда

$$\left(\overrightarrow{IK_1} + \overrightarrow{IK_2} + \overrightarrow{IK_3}\right)^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$IK_1^2 + IK_2^2 + IK_3^2 + 2\left(\overrightarrow{IK_1} \cdot \overrightarrow{IK_2} + \overrightarrow{IK_2} \cdot \overrightarrow{IK_3} + \overrightarrow{IK_3} \cdot \overrightarrow{IK_1}\right) \geqslant 0.$$

Но

$$\overrightarrow{IK_1} \cdot \overrightarrow{IK_2} = -r^2\cos\gamma, \quad \overrightarrow{IK_2} \cdot \overrightarrow{IK_3} = -r^2\cos\alpha, \quad \overrightarrow{IK_3} \cdot \overrightarrow{IK_1} = -r^2\cos\beta.$$

Поэтому

$$3r^2 - 2r^2\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right) \geqslant 0,$$

откуда и следует (12.1).

Гордин, 2.452 (а); МПЯ-9, 18.50

2) Опираясь на (12.1), несложно получить еще одно интересное неравенство:

$$\boxed{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}.} \qquad (12.2)$$

Доказательство: Для тупоугольного и прямоугольного треугольников неравенство очевидно. В случае остроугольного треугольника воспользуемся неравенством Коши и неравенством (12.1):

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leqslant \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{3}{2\cdot 3}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Прасолов, 10.42 (б)

3) Если α, β, γ – углы треугольника, то числа $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$, $\dfrac{\pi-\beta}{2}$, $\dfrac{\pi-\gamma}{2}$ положительны, а их сумма равна π. Это означает, что существует треугольник с углами $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$, $\dfrac{\pi-\beta}{2}$, $\dfrac{\pi-\gamma}{2}$. Следовательно, если некоторое симметрическое неравенство справедливо для тригонометрических функций углов любого треугольника, то справедливо и неравенство, в котором одновременно $\sin x$ заменен на $\cos\dfrac{x}{2}$, $\cos x$ – на $\sin\dfrac{x}{2}$, $\operatorname{tg} x$ – на $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $\operatorname{ctg} x$ – на $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Так, из неравенства (12.2) сразу получаем, что

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.} \qquad (12.3)$$

Обратный переход от неравенств с половинными углами к неравенствам с целыми углами возможен, вообще говоря, только для остроугольных треугольников. Действительно, если, напр., $\widetilde{\alpha} = \dfrac{\pi-\alpha}{2}$, то $\alpha = \pi - 2\widetilde{\alpha}$. Эта величина положительна только при $\widetilde{\alpha} < \dfrac{\pi}{2}$.

Замечание. Много интересных неравенств, содержащих углы треугольника, можно найти в книге В.В.Прасолова “Задачи по планиметрии”, гл. 10, §6.

2°. Еще раз о формуле Гамильтона

1) Мы уже знакомы с формулой, носящей имя ирландского математика Уильяма Гамильтона. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, O – центр описанной окружности. Тогда

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.} \qquad (12.4)$$

Докажем ее с помощью скалярного произведения векторов. Для этого возьмем т. D такую, что $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ и докажем, что $AD \perp BC$. Действительно,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

С другой стороны, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Перемножая скалярно эти равенства, получаем, что

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

т. е. $AD \perp BC$. Аналогично доказывается, что $BD \perp AC$, а $CD \perp AB$. Но это и означает, что D – ортоцентр треугольника ABC.

2) **Задача.** Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Домашнее задание

1) Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

2) Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\frac{3}{2}.$$

3) Даны три единичных вектора $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$. Известно, что ориентированные углы между ними удовлетворяют неравенствам

$$0 < (\widehat{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}}) < 180^\circ, \quad 0 < (\widehat{\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}}) < 180^\circ, \quad 0 < (\widehat{\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_1}}) < 180^\circ.$$

Докажите, что $|\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}| < 1$.

Урок 13. Сумма квадратов расстояний от точки до вершин треугольника. Теорема Лейбница

1) Рассмотрим ряд вопросов, касающихся суммы квадратов расстояний от некоторой точки плоскости до вершин треугольника. Пусть дан треугольник ABC, а X – произвольная точка плоскости. Введем обозначение

$$S(X) = XA^2 + XB^2 + XC^2.$$

Пусть P – некоторая вспомогательная точка. Тогда

$$S(X) = \overrightarrow{XA}^2 + \overrightarrow{XB}^2 + \overrightarrow{XC}^2 = \left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PX}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PX}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PX}\right)^2,$$

откуда

$$\boxed{S(X) = 3\,PX^2 + PA^2 + PB^2 + PC^2 - 2\,\overrightarrow{PX} \cdot \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right).} \qquad (13.1)$$

2) Возьмем в (13.1) в качестве точки P точку M пересечения медиан треугольника ABC. Тогда, поскольку $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$,

$$S(X) = 3MX^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Нами доказана

Теорема 13.1 (Лейбница)**.**

Пусть M пересечения медиан треугольника ABC. Тогда для любой точки X плоскости справедливо равенство

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3MX^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2. \qquad (13.2)$$

Следствие.

Среди всех точек плоскости точка пересечения медиан данного треугольника является точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

3) Решим несколько задач с помощью соотношения (13.1).

(1) Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности, описанной около правильного треугольника ABC, до его вершин есть величина постоянная.

(2) На окружности, описанной около треугольника ABC, взяты такие точки E и F, что сумма квадратов расстояний от точки E до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение, а сумма квадратов расстояний от точки F до вершин треугольника ABC – наибольшее значение. Докажите, что точки E и F лежат на прямой Эйлера треугольника ABC.

Домашнее задание

1) Дан треугольник ABC и число $d > 0$. Найдите геометрическое место таких точек X, для которых $XA^2 + XB^2 + XC^2 = d^2$.

2) Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек X, для которых $XA^2 + XB^2 = 2XC^2$.

Урок 14. Самостоятельная работа №3: “Решение планиметрических задач”

Домашнее задание

1) Найдите длину биссектрисы AK треугольника ABC, если $AB = c$, $AC = b$ и $\angle A = 120°$.

2) На сторонах BC, CA и AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, которые делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях. Докажите, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны.

Урок 15. Обобщающий урок

Домашнее задание

1) Пусть a и b – длины сторон параллелограмма, e и f – длины его диагоналей. Докажите, что $\left|a^2 - b^2\right| < ef$.

Вопросы к зачету

1. Скалярное произведение векторов в линейном пространстве. Определение евклидова пространства. Понятие нормы вектора.

2. Скалярное произведение в пространстве векторов на плоскости.

3. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов на плоскости. Определение ортогональных векторов в евклидовом пространстве. Ортонормированный базис.

4. Скалярное произведение векторов в координатах. Условие ортогональности векторов в координатах. Обобщение на случай произвольного n-мерного евклидова пространства.

5. Формула для косинуса угла между векторами на плоскости. Ориентированный угол между векторами на плоскости. Определение угла между векторами в евклидовом пространстве. Корректность определения. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве.

6. Векторы в прямоугольной системе координат. Проекция вектора на ось.

7. Формула, выражающая скалярное произведение векторов через стороны треугольника. Теорема косинусов. Формула, выражающая длину медианы треугольника через его стороны. Теорема Стюарта.

8. Геометрический смысл выражения $a^2b^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2$. Критерий коллинеарности векторов, использующий скалярное произведение. Формула Герона. Формула, выражающая площадь треугольника через координаты его вершин

9. Формула Гамильтона (доказательство с помощью скалярного произведения). Теорема Лейбница.