**Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2012 г.**

**I тур**

**1.** В числе

$$34! = \overline{295232799039 * 041408476186096435 * 0000000}$$

две цифры в записи заменены на звездочки. Какие именно цифры были заменены?

**2.** Докажите, что на графике функции $f(x) = x^4$ можно указать такую точку $A$, а на графике функции $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ – такую точку $B$, что расстояние между точками $A$ и $B$ меньше $\dfrac{1}{100}$.

**3.** Найдите все простые числа $p$ такие, что $p^5 - p = 2 \cdot n!$, где $n$ – натуральное.

**4.** В городе Ноттингеме проживают 100 богачей, каждый из которых имеет хотя бы миллион золотых монет. Робин Гуд разрабатывает планы ограбления богачей Ноттингема: каждый из них состоит в том, чтобы отобрать у каждого из богачей одинаковое количество (но не более миллиона) золотых монет. Докажите, что, какими б не были состояния богачей Ноттингема, Робин Гуд может составить не менее 100 различных планов ограбления так, что для любых двух разных планов $P'$ и $P''$ не нашлось бы таких богачей $B'$ и $B''$, что $B'$ после ограбления по плану $P'$ имеет столько же золотых монет, сколько имеет $B''$ после ограбления по плану $P''$.

**5.** На сторонах остроугольного треугольника $ABC$ вне него построены треугольники $A'BC$, $AB'C$, $ABC'$ так, что $\angle ABC' = \angle A'BC = \angle B'AC = 30°$ и $\angle BAC' = \angle AB'C = \angle A'CB = 90°$. Докажите, что $A'C' \perp B'M$, где $M$ – середина $BC$.

**II тур**

**1.** Влад испек $n$ круглых блинов, диаметры которых равны $1, 2, \ldots, n$. Он хочет сложить блины в пирамидку так, чтобы использовать все блины, причём на блин диаметром $d$ разрешается класть блин диаметром не более $2d$. Сколько существует таких различных пирамидок? *Ответ обоснуйте.*

**2.** В треугольнике $ABC$ точки $D$, $E$ и $F$ – середины сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно. Биссектриса угла $BDC$ пересекает сторону $BC$ в точке $M$, а биссектриса угла $ADC$ пересекает сторону $AC$ в точке $N$. Прямые $CD$ и $MN$ пересекаются в точке $O$, прямые $OE$ и $AC$ пересекаются в точке $P$, а прямые $OF$ и $BC$ пересекаются в точке $Q$. Докажите, что $PQ = CD$.

**3.** Пусть $K_n$ — количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, для каждого из которых наибольший общий делитель всех его элементов равен 1 (например, $K_3 = 5$). Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ число $K_n + 1$ делится нацело на 3.

**Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2013 г.**

**I тур**

**1.** Изобразите на координатной плоскости $Oxy$ множество всех точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$.

**2.** Для $x \in (0;1)$ и $y \in (0;1)$ найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{xy\,(1-x-y)}{(x+y)\,(1-x)\,(1-y)}.$$

**3.** Пусть вписанная окружность треугольника $ABC$ касается его сторон $AB$, $AC$ и $BC$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Прямая, которая проходит через точку $F$ и центр этой окружности, пересекает отрезок $DE$ в точке $L$. Докажите, что прямая $AL$ проходит через середину стороны $BC$.

**4.** Найдите все такие определенные на множестве всех действительных чисел числовые функции $f$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(xf(y)) + f(y + f(x)) - f(x + yf(x)) = x.$$

**5.** По кругу записали 672 натуральных числа $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{672}$ таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{672} = 2013$ и $a_k \neq 1342$ для всех $k$, $1 \leqslant k \leqslant 672$. Докажите, что всегда можно выбрать несколько записанных подряд чисел, сумма которых равна 1342.

**II тур**

**1.** Известно, что $a + b + c + d = 6$. Может ли выполняться равенство

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 18\,?$$

**2.** В клетках таблицы $11 \times 11$ расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Настя посчитала произведение всех чисел в каждой строке, а Влад – произведение всех чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

**3.** Точка $O$ – центр описанной окружности тупоугольного треугольника $ABC$ с тупым углом при вершине $B$. Пусть $D$ – точка пересечения прямой $AB$ и прямой, перпендикулярной $AC$ и проходящей через точку $C$. Прямая $l$ проходит через точку $D$ перпендикулярно $AO$, $E$ – точка пересечения прямых $l$ и $AC$, $F$ – точка пересечения прямой $l$ с описанной окружностью треугольника $ABC$, причём $F$ лежит на отрезке $DE$. Докажите, что описанные окружности треугольников $BEF$ и $DFC$ касаются.

**4.** Таня записала на доске числа 0 и 1. Раз в минуту она выписывает на доску наименьшее натуральное число, которое не составляет ни с какими двумя уже написанными арифметическую прогрессию и не было выписано ранее. Будет ли написано на доске число 2013?

**Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2014 г.**

**I тур**

**1.** Найдите все решения уравнения $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на промежутке $[0; \pi)$.

**2.** а) Известно, что в бесконечной арифметической прогрессии натуральных чисел есть некоторый член, который является $k$-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что среди членов прогрессии есть бесконечное число таких, которые также являются $k$-ми степенями натуральных чисел.

б) Существует ли бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия натуральных чисел, ни один член которой не является степенью натурального числа, большей первой?

**3.** Пусть $a$, $b$, $c$ – стороны остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2} \leqslant \sqrt{3\,(ab+bc+ca)}.$$

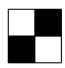
**4.** В треугольнике $ABC$, в котором $AC < AB < BC$, на сторонах $AB$ и $BC$ выбрали точки $K$ и $N$ соответственно так, что $KA = AC = CN$. Прямые $AN$ и $CK$ пересекаются в точке $O$. Из точки $O$ провели отрезок $OM \perp AC$ ($M \in AC$). Докажите, что окружности, вписанные в треугольники $ABM$ и $CBM$, касаются друг друга.

**5.** Дан выпуклый 11-угольник. Его диагонали покрашены в несколько цветов. Два цвета называются пересекающимися, если существуют два отрезка, покрашенные в эти цвета и пересекающиеся в некоторой внутренней точке этих отрезков. Какое наибольшее количество разных цветов может быть использовано, чтобы каждые два использованных цвета пересекались?

**II тур**

**1.** Известно, что для действительных $x$, $y$, $z$ выполнены равенства $x^2+y = y^2+z = z^2+x$. Докажите, что $x^3+y^3+z^3 = xy^2+yz^2+zx^2$.

**2.** Тимур должен покрыть квадратный клетчатый стол $n \times n$ салфетками $2 \times 2$, изображенными на рисунке. Салфеток у него неограниченное число. Каждая салфетка может покрывать ровно четыре клетки стола. Все клетки стола должны быть покрыты, салфетки могут накладываться друг на друга, но не могут выходить за границу стола. Салфетки можно поворачивать. Какое наименьшее число чёрных клеток может остаться видимым?



**3.** Пусть $\omega$ – описанная окружность треугольника $ABC$. Другая окружность, проходящая через точки $A$ и $C$, пересекает отрезки $BC$ и $BA$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Прямые $AD$ и $CE$ повторно пересекают $\omega$ в точках $G$ и $H$ соответственно. Касательные к окружности $\omega$, проведенные в точках $A$ и $C$, пересекают прямую $DE$ в точках $L$ и $M$ соответственно. Докажите, что прямые $LH$ и $MG$ пересекаются в точке, принадлежащей $\omega$.

**4.** Сережа хочет покрасить все целые числа в несколько цветов так, чтобы числа, разность которых является точной степенью, были покрашены в разные цвета. Хватит ли ему конечного числа цветов? (Точной степенью называется число вида $n^k$, где $n$ и $k$ – натуральные числа, причём $k \geqslant 2$.)

## Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2015 г.

### I тур

**1.** Существуют ли действительные числа $x$, $y$, $z$, удовлетворяющие равенству:

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{(y-z)(y+z)}+\frac{1}{(z-x)(z+x)}=0\,?$$

**2.** Найдите все натуральные числа $n$, у которых больше $\dfrac{n}{2}$ делителей.

**3.** Известно, что многочлен

$$P(x)=x^{2016}+2016x^{2015}+a_{2014}x^{2014}+a_{2013}x^{2013}+\ldots+a_1x+1$$

можно также представить в виде $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2016})$, где среди чисел $x_1$, $x_2$,…, $x_{2016}$ по крайней мере 2015 отрицательных и не обязательно различных. Найдите все коэффициенты многочлена $P(x)$.

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ стороны $AB$ и $BC$ имеют разную длину, а продолжение медианы $BM$ пересекает описанную окружность в точке $N$. На этой окружности отметили такую точку $D$, что $\angle BDH=90^\circ$, где $H$ – точка пересечения высот треугольника $ABC$. Точка $K$ выбрана так, что $ANCK$ – параллелограмм. Докажите, что прямые $AC$, $KH$ и $BD$ пересекаются в одной точке.

**5.** В стране есть 2015 городов, некоторые из которых соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для каждого $n>3$ не существует $n$ попарно разных городов $A_1$, $A_2$,…, $A_n$, для которых есть замкнутый маршрут перелетов $A_1\to A_2\to\ldots\to A_n\to A_1$ (для трех городов такие маршруты могут существовать). Какое наибольшее число пар городов этой страны могут быть соединены прямым авиасообщением?

### II тур

**1.** Пусть натуральные числа $a_1<a_2<\ldots<a_n$ таковы, что $a_k$ делит $a_{k+2}$ для любого $k=1,2,\ldots,n-2$. Известно, что $a_n=1000$. Найдите наибольшее возможное значение $n$.

**2.** Действительные числа $x_1,x_2,\ldots,x_{2015}$ удовлетворяют условиям

$$x_1^{2014}+\ldots+x_{2015}^{2014}=1 \quad \text{и} \quad x_1^{2015}+\ldots+x_{2015}^{2015}=-1.$$

Чему может равняться значение выражения $x_1+x_2^2+x_3^3+\ldots+x_{2015}^{2015}$?

**3.** Пусть $ABC$ – равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC$, $O$ – произвольная точка на прямой $BC$ такая, что окружность с центром $O$, проходящая через $A$, не касается прямых $AB$ и $AC$. Прямые $AB$ и $AC$ пересекают окружность в точках $M$ и $N$ соответственно. Найдите ГМТ ортоцентров треугольников $AMN$.

**4.** Для произвольного натурального $n$ числа $n, n+1, \ldots, 6n-1, 6n$ записаны в ряд в некотором порядке. Докажите, что существует натуральное число, которое можно представить двумя разными способами как сумму нескольких (возможно, одного) идущих подряд чисел этого ряда.