Делимость-12. Остатки при делении степеней целых чисел

1. Докажите, что $a^3 \equiv a \pmod 6$.

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b + c \,\vdots\, 6$. Докажите, что $a^7 + b^7 + c^7 \,\vdots\, 6$.

3. Докажите, что $a^5 \equiv a \pmod{30}$.

* * *

Степени целых чисел при делении на различные натуральные числа могут давать только некоторые из остатков. Это обстоятельство часто бывает полезным при решении различных задач. Наиболее часто используемые утверждения приведены в таблице. Они доказываются простым перебором остатков.

$n^2 \equiv 0;\ 1 \pmod 3$;	$n^2 \equiv 0;\ 1 \pmod 4$;
$n^2 \equiv 0;\ \pm1 \pmod 5$;	$n^2 \equiv 0;\ 1;\ 2;\ 4 \pmod 7$;
$n^2 \equiv 0;\ 1;\ 4 \pmod 8$;	$n^2 \equiv 0;\ 1;\ 4;\ 7 \pmod 9$;
$n^2 \equiv 0;\ \pm1;\ \pm4;\ 5 \pmod{10}$;	$n^2 \equiv 0;\ 1;\ 4;\ 9 \pmod{16}$;
$n^3 \equiv 0;\ \pm1 \pmod 7$;	$n^3 \equiv 0;\ \pm1 \pmod 9$;
$n^4 \equiv 0;\ 1 \pmod 8$;	$n^4 \equiv 0;\ 1 \pmod{16}$;
$n^6 \equiv 0;\ 1 \pmod 7$;	$n^6 \equiv 0;\ 1 \pmod 9$.

4. Найдите все простые p такие, что:
а) число $p^2 + 2$ также простое;
б) числа $p^2 + 4$ и $p^2 + 6$ также простые;
в) число $p^6 + 6$ также простое.

5. Может ли быть точным квадратом число:
а) $4x^2 + 4x + 3$;
б) $44x^3 + 22x + 10$?

6. Найдите все натуральные n, при которых число $2^n + 8n + 5$ является точным квадратом.

7. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что
а) $xyz \,\vdots\, 30$; б) $xyz \,\vdots\, 60$.

8. Натуральное число n таково, что n^2+1 – десятизначное число. Докажите, что в числе n^2+1 есть две одинаковые цифры.

9. Известно, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма делителей n делится на 24.

10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух точных квадратов.

11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех точных квадратов.

12. Докажите, что числа вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

13. Докажите, что число 1599 нельзя представить в виде суммы четырнадцати четвертых степеней целых чисел.

Задачи для самостоятельного решения

14. Известно, что $a+b+c \equiv 0 \pmod{30}$. Докажите, что $a^5+b^5+c^5 \equiv 0 \pmod{30}$.

15. Найдите все простые p такие, что:

а) число $2p^2+1$ также простое;

б) число $3p^2+1$ также простое;

в) числа p^3-330 и p^3-104 также простые.

16. Может ли быть точным квадратом число:

а) $49x^3+28x+3$;

б) $x^2+8x+14$?

17. Докажите, что при натуральных n число n^4+2n^2+3 не может быть простым.

18. Найдите такие простые числа x и y, что число x^y+1 также является простым.

19. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех точных кубов.

20. Докажите, что число 2528 нельзя представить в виде суммы семи шестых степеней целых чисел.

Делимость-17. Малая теорема Ферма

Лемма.

Пусть целое число a не делится на простое число p. Тогда числа a, $2a$, $3a$, $\ldots$, $(p-1)\,a$ дают попарно различные остатки по модулю p.

Теорема (малая теорема Ферма).

Пусть p – простое число и целое число a не делится на p. Тогда

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Следствие.

Пусть p – простое число. Тогда $a^p \equiv a \pmod{p}$ для любого целого a.

* * *

Упражнения.

1) Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.

2) Найдите остаток от деления 3^{642} на 641.

3) Найдите остаток от деления 3^{4024} на 2011.

4) Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

5) Докажите, что $7^{120}-1$ делится на 143.

6) Докажите, что $300^{3000}-1$ делится на 1001.

7) Докажите, что число $30^{239}+239^{30}$ – составное.

8) Найдите остаток от деления 3^{1997} на 1999.

* * *

1. Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 делится на 17.

2. Пусть p – простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ для любых целых a и b.

3. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

4. а) Пусть p – простое число, отличное от 3. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{p}$ не делится на p.

б) Пусть p – простое число, большее 5. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на p.

5. Докажите, что для любого простого p разность

$$111\ldots11222\ldots22333\ldots33\ldots888\ldots88999\ldots99 - 123456789$$

(в первом числе каждая ненулевая цифра написана p раз) делится на p.

6. Докажите, что уравнение $x^2+1=py$, где p – простое число вида $4k+3$, неразрешимо в целых числах.

7. Докажите, что уравнение $x^2-y^3=7$ неразрешимо в целых положительных числах.

8. *(Теорема Вильсона).* Пусть p – простое число. Докажите, что

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

9. Докажите, что при любом натуральном n число

$$n\,(2n+1)\,(3n+1)\ldots(2006n+1)$$

делится на каждое простое число, меньшее 2006.