8 класс

Теоретический тур

Задача 1.

Квадратная пластинка, сделанная из анизотропного материала, при нагревании до некоторой температуры расширяется в вертикальном направлении в k = 1,154 раза, а в горизонтальном – в n = 1,022 раза. На рис.1а направление наибольшего расширения материала показано прямыми линиями.

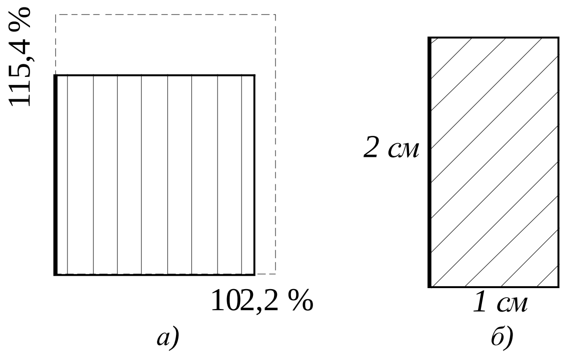


Рис. 1

Из этой пластинки вырезают прямоугольный фрагмент (рис.1б) таким образом, что направление наибольшего расширения составляет угол 45° с основанием, и нагревают его до той же самой температуры. Во сколько раз увеличатся при нагреве длины боковых сторон и площадь фрагмента? Указание: анизотропными называют материалы, у которых физические свойства различны в разных направлениях.

Решение.

Главная идея решения: каждая часть тела меняет свою форму независимо от других частей тела. Т.е. каждая часть тела одинаково расширится независимо от того, нагревается ли она отдельно, сама по себе, или нагревается в составе тела.

Метод 1. Составления квадрата.

Прямоугольник можно разрезать на части так, чтобы сложить из них квадрат той же площади (на рис. 2 рассмотрен наш случай, когда прямоугольник можно разрезать на четыре части).

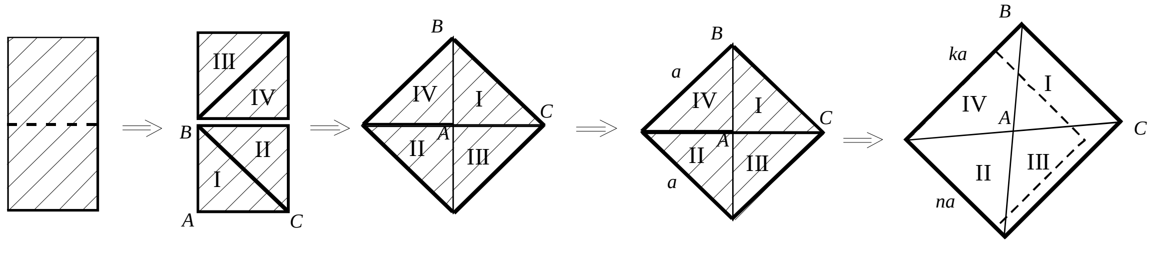


Рис. 2

Как деформируется такой квадрат нам известно: одна сторона увеличивается в $k = 1{,}154$ раза, другая – в $n = 1{,}022$ раза. Поэтому остается просто прочитать ответ с рисунка 2:

$$S / S_0 = kn = 1{,}18, \ AB / AB_0 = AC / AC_0 = \sqrt{\frac{k^2 + n^2}{2}} = 1{,}09.$$

Метод 2. Деформация квадрата в ромб

Любой прямоугольник можно разрезать на некоторое число различных квадратов, в которых линии наибольшего расширения идут вдоль одной из диагоналей.

Каждый такой «косой» квадрат (рис. 3) вписан в соответствующий «прямой» (подобный тому, что дан в условии).

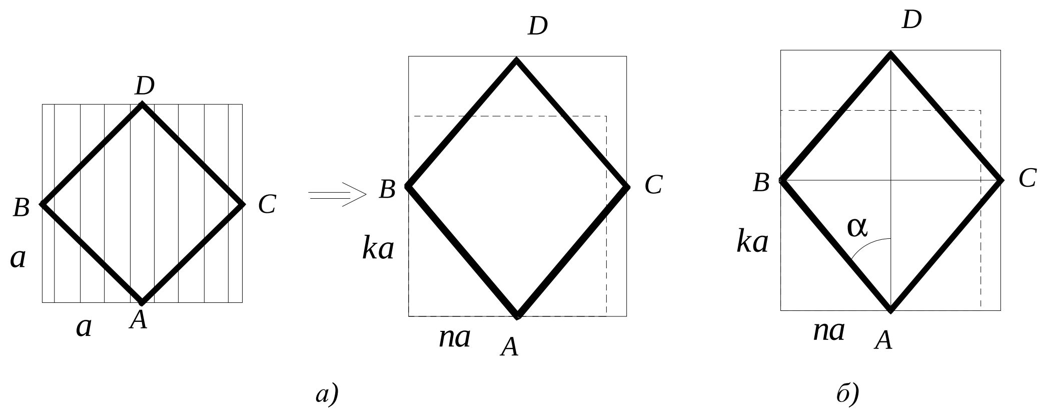


Рис. 3

Теперь деформируем «прямой» квадрат и смотрим, что происходит с нарисованным в нем «косым» квадратом.

При деформации «прямой» квадрат превращается в прямоугольник, а «косой» квадрат в ромб, но остается по площади по-преждему половиной квадрата.

Отсюда первый ответ. Площадь «прямого квадрата» при деформации увеличится в $k \cdot n$ раз, во столько же раз увеличится и площать «косого» квадрата:

$$S / S_0 = kn .$$

Из рисунка видно, что обе стороны «косого» квадрата, AB и AC, останутся равными и после деформации. Учитывая, что до деформации они были равны $AB_0 = AC_0 = \sqrt{2}a$, а после деформации $AB = AC = \sqrt{k^2 + n^2}\,a$, получаем

$$AB / AB_0 = AC / AC_0 = \sqrt{\frac{k^2 + n^2}{2}} .$$

Проясним одну неясность, которая иногда возникает, при знакомстве с ответами. Казалось бы, что если сторона квадрата увеличится в p раз, то его площадь обязательно должна увеличиться в p^2 раз. В нашем случае такого соотношения нет. Почему?

Потому, что деформированный «косой» квадрат уже не является квадратом! При деформации он превращается в ромб. Площадь ромба равна $S = AB \cdot AC \cdot \sin(2\alpha)$ (рис. 3, *б*), и, если учесть, что для нашего случая $\sin\alpha = \dfrac{n}{\sqrt{k^2 + n^2}}$ и $\cos\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{k^2 + n^2}}$, получаем

$$S = AB \cdot AC \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 + n^2}{2}} AB_0 \cdot \sqrt{\frac{k^2 + n^2}{2}} AC_0 \cdot 2 \cdot \frac{n}{\sqrt{k^2 + n^2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2}} = knS_0 .$$

Все сходится.

Ответ: $S / S_0 = kn = 1{,}18$, $AB / AB_0 = AC / AC_0 = \sqrt{\dfrac{k^2 + n^2}{2}} = 1{,}09$.

8 класс

Теоретический тур

ЗАДАЧА №2

«ДВА ПРОФЕССОРА»

Каждый вечер профессор Глобус и профессор Циркуль выходят на прогулку, и делают «круг», каждый вокруг своего квартала. Кварталы – одинаковые квадраты (рис. 1).

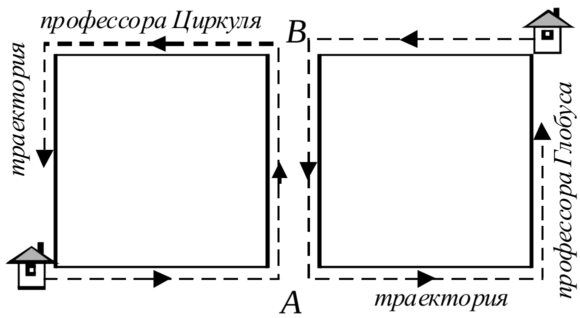


Рис. 1

Профессор Глобус выходит на прогулку всегда ровно в 18^{00}, идет по улице медленно. Профессор Циркуль на прогулку выходит, когда ему вздумается, идет быстро. Скорости профессоров от прогулки к прогулке не изменяются. За многие годы профессора заметили, что они встречаются на улице AB, когда профессор Циркуль выходит из дома в промежуток времени с 18^{05} по 18^{40}.

1) Во сколько раз скорость профессора Циркуля больше скорости профессора Глобуса?

2) Сколько времени длится прогулка профессора Глобуса?

РЕШЕНИЕ

Обозначим профессоров буквами G и C (от лат. globi - глобус и circini - циркуль). И примем, что скорость C в k раз больше скорости G. Отметим, что из условия задачи сразу следует, что $k > 1$ (покажите это сами).

Почему профессора не встретятся, если профессор C выйдет слишком рано?

Потому, что C идет быстро и успеет пройти всю улицу AB раньше, чем профессор G дойдет до угла B. Вот поэтому он и должен «ждать» время $t_1 = 5$ *мин*.

А пусть он «ждет» не дома, а на углу B. Давайте подсчитаем, сколько времени ему придется «ждать» (рис. 2, *а*).

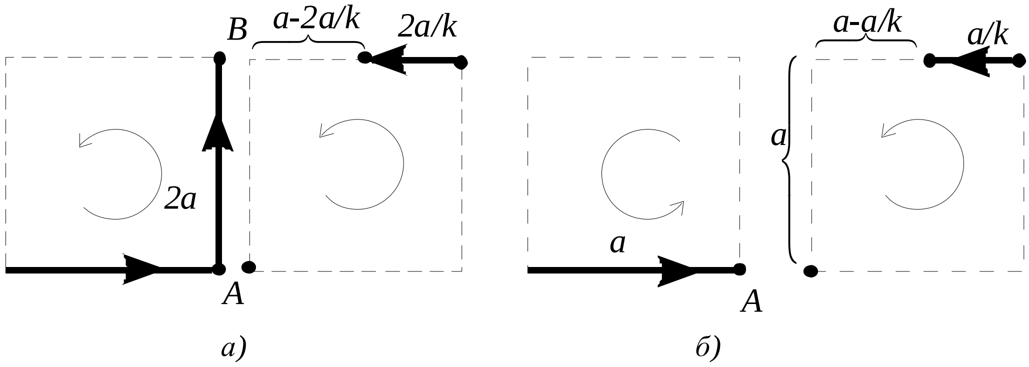


Рис. 2

До угла B профессору C надо пройти расстояние $2a$, где a – сторона квартала. Профессор G пройдет за это же время расстояние $\frac{2a}{k}$. Ему останется еще пройти расстояние $\left(a-\frac{2a}{k}\right)$, на что у него уйдет время $\left(a-\frac{2a}{k}\right)/V$. Именно столько времени профессору C придется ждать: $t_1=\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot\frac{a}{V}$. Это первое уравнение.

Почему профессора не встретятся, если C задержится дома больше, чем на $t_2=40\ мин$? Потому, что профессор G успеет пройти улицу AB прежде, чем C дойдет до угла A.

Снова предлагаем профессору C «подождать» коллегу не дома, а на углу A, и считаем, сколько времени ему придется «ждать» (рис. 2, *б*).

Пока C пройдет одну сторону квартала (расстояние a), его коллега пройдет расстояние $\frac{a}{k}$ и ему останется пройти еще расстояние $\left(2a-\frac{a}{k}\right)$. На это у него уйдет время $t_2=\left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a}{V}$. Это второе уравнение.

Из системы уравнений:

$$\begin{cases} t_1=\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot\frac{a}{V} \\ t_2=\left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a}{V} \end{cases} \qquad (1)$$

получаем ответ:

$$k=\frac{2t_2-t_1}{t_2-2t_1}=\frac{2\cdot 40-5}{40-2\cdot 5}=2{,}5.$$

Скорость профессора C в два с половиной раза больше скорости профессора G.

2) Из системы уравнений (1) получаем

$$a/V=\frac{1}{3}(2t_2-t_1).$$

Отсюда для $T_1=\frac{4a}{V}$ (времени прогулки профессора G) получаем:

$$T_1=4\frac{a}{V}=\frac{4}{3}\cdot(2t_2-t_1)=\frac{4}{3}\cdot(2\cdot 40-5)=100\ мин.$$

ОТВЕТ

1) скорость профессора C в *два с половиной раза* больше скорости профессора G;

2) время прогулки профессора Глобуса $T_1=\frac{4}{3}\cdot(2t_2-t_1)=100\ мин$.

8 класс.

Теоретический тур.

Задача 3. «Охлаждение баков»

В «горячем» цеху химического комбината установлены четыре бака, в которых идут химические реакции с выделением тепла. Для охлаждения баков была организована принудительная система охлаждения - охлаждающая жидкость прокачивается через систему последовательно соединенных змеевиков (рис. 1, *а*). При этом в каждом баке устанавливается постоянная температура реагентов: $110°C$, $170°C$, $180°C$ и $220°C$ (при начальной температуре охлаждающей жидкости $10°C$).

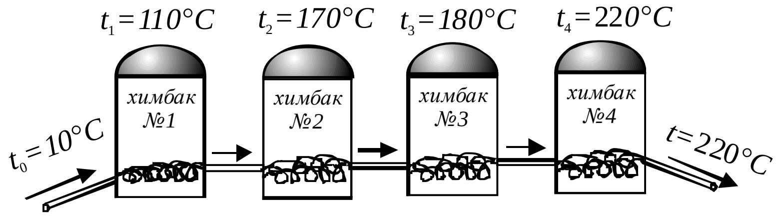


Рис. 1

Несмотря на хорошую теплоизоляцию баков, они все-таки сильно нагревали воздух в цехе. Поэтому для поддержания температуры воздуха равной $20°C$ приходилось включать мощную систему кондиционеров.

Предложите такую (новую) последовательность соединения баков, для которой нагрев воздуха в помещении был бы минимальным? На сколько процентов удастся при новом подключении уменьшить мощность кондиционеров?

Задачу решить при следующих предположениях: 1) качество змеевиков очень высокое и на выходе каждого из них охлаждающая жидкость имеет температуру охлаждаемой жидкости; 2) потоки тепла из баков в водух прямо пропорциональны разности температур внутри и снаружи баков; 3) утечки тепла в воздух пренебрежимо малы по сравнению с теплообменом, идущим через теплообменники.

Решение

Общая утечка тепла из баков (мощность тепловых потерь) равна

$$P = k \cdot (t_1 - t_0) + k \cdot (t_2 - t_0) + k \cdot (t_3 - t_0) + k \cdot (t_4 - t_0) = k \cdot [(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - 4t_в]$$

где $t_в = 20°C$ - температура воздуха в цеху, k - некоторый коэффициент, характеризующий интенсивность утечки тепла из бака.

Отсюда видно, что для уменьшения общей утечки тепла из баков необходимо уменьшить «суммарную» температуру баков $\Theta = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

Посмотрим, чем определяется эта «суммарная» температура и температура реагентов в каждом баке.

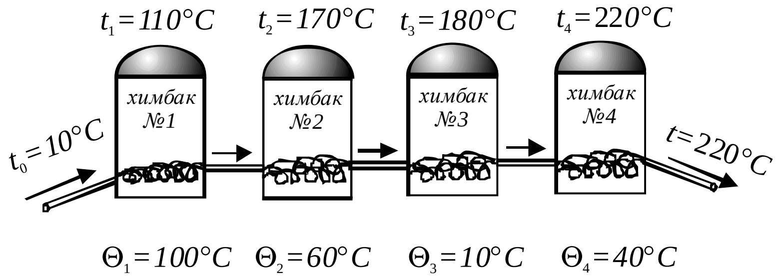


Рис. 2

То, что есть характеристикой бака и не зависит от подключения – это интенсивность химических реакций внутри бака и связанная с ней мощность выделяемого тепла. Ее можно характеризовать температурой Θ, на которую должна нагреваться охлаждающая жидкость после прохождения через бак. (В стационарном состоянии уравнение теплового баланса для каждого бака дает $P = c\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\cdot\Theta$). Величина дополнительного нагрева воды Θ для каждого бака указаны на рисунке 2.

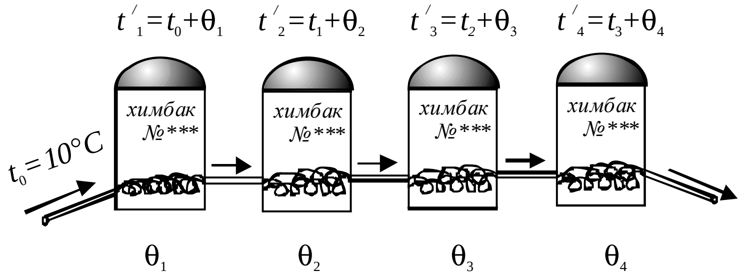


Рис. 3

Пусть у нас есть новое соединение баков. Чтобы не путать новые номера со старыми, обозначим «температуры нагрева баков» через θ_1, θ_2, θ_3 и θ_4.

Тогда температура в первом баке будет равна $t_1' = t_0 + \theta_1$, где t_0 - первоначальная температура охлаждающей жидкости. Такой же будет и температура воды на выходе из первого бака. Температура во втором баке будет $t_2' = t_1' + \theta_2 = t_0 + \theta_1 + \theta_2$. В третьем - $t_3' = t_2' + \theta_3 = t_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. В четвертом - $t_4' = t_3' + \theta_4 = t_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.
А «суммарная» температура баков окажется равной $\Theta' = t_1' + t_2' + t_3' + t_4' = 4\cdot t_0 + 4\cdot\theta_1 + 3\cdot\theta_2 + 2\cdot\theta_3 + 1\cdot\theta_4$.

Для первоначального подключения баков эта величина была равна $\Theta = 680\,\textit{град}$. А наша задача постараться сделать ее как можно меньше.

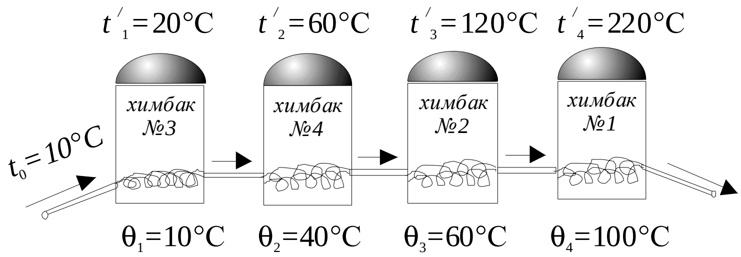


Рис. 4

Для минимизации мы воспользуемся следующей идеей: чтобы сумма $\Theta' = 4\cdot t_0 + 4\cdot\theta_1 + 3\cdot\theta_2 + 2\cdot\theta_3 + 1\cdot\theta_4$ была как можно меньше, при большем множителе следует ставить как можно меньшую величину θ_i. Тогда получим

$$\Theta' = 4\cdot t_0 + 4\cdot\Theta_3 + 3\cdot\Theta_4 + 2\cdot\Theta_2 + 1\cdot\Theta_1 = 420\,\textit{град}.$$

Считаем теперь, на сколько можно уменьшить мощность кондиционеров.

При первоначальном подключении мощность тепловыделения была равна

$$P = k\cdot\left[\left(t_1 + t_2 + t_3 + t_4\right) - 4t_в\right] = 600\cdot k$$

При новом подключении

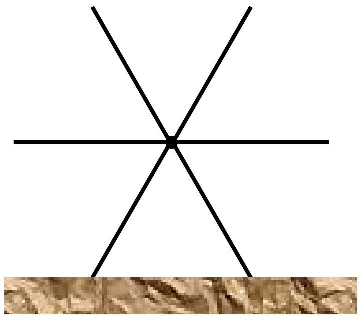
$$P' = k\cdot\left[\left(t_1 + t_2 + t_3 + t_4\right) - 4t_в\right] = 340\cdot k.$$

Итого, мощность подогрева воздуха цеха уменьшилась в 1,76 раза (на 43%)

Ответ: мощность кондиционеров можно уменьшить в 1,76 раз (на 43%) если соединить баки следующим образом: первый – бак №3, второй – бак №4, третий – бак № 2, четвертый – бак № 1.

8 клас
Теоретичний тур.

Задача 4.



В одному з проектів марсоходу його колеса зроблені з шести пластин-стержнів (див. Рис.), довжиною $a=10$ см кожна. У стандартному режимі руху горизонтальною поверхнею колеса марсохода обертаються рівномірно, а він переміщується зі швидкістю v=1 см/с. Знайдіть максимальну швидкість точок колеса марсохода. Яку максимальну висоту перешкоди може переїхати марсохід, не зачепивши її верхівку? Які точки колеса описують траєкторії максимальної довжини? Побудуйте таку траєкторію та вкажіть її довжину за один його оберт.

Розв'язок. Сусідні пластини колеса утворюють дві сторони рівностороннього трикутника. Тому за один оберт колесо переміщується на відстань l=6a=60 см, а період його обертання $T=6a/v$. Найбільшу швидкість матиме найбільш віддалена точка від центру обертання, у якому колесо дотикається поверхні (Рис.1). Віддалена точка за 1/6 періоду проходить відстань, що дорівнює 1/6 довжини кола радіусом $r=2a$. Отже її швидкість $v_{\max}=\dfrac{2\pi r}{T}=\dfrac{2}{3}\pi v\approx 2{,}1$ см/с.

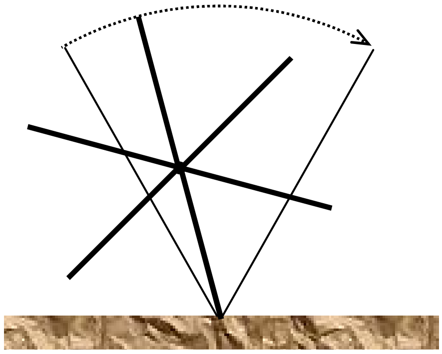


Рис. 1

Внаслідок симетрії (до того ж колесо можна подумки прокотити як в одну, так і в іншу сторону) перешкода найбільших розмірів, через яку колесо може переїхати, не зачепивши її верхівку, також матиме симетричну форму. Але це не буде рівносторонній трикутник, і ось чому. Під час оберту (Рис.2) пластина ABC переходить у A*B*C*. Кожна точка пластини описує дугу кола. Найбільший радіус кола $r_{\max}=a$ буде у точок A і C, а найменший $r_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ у точки B.

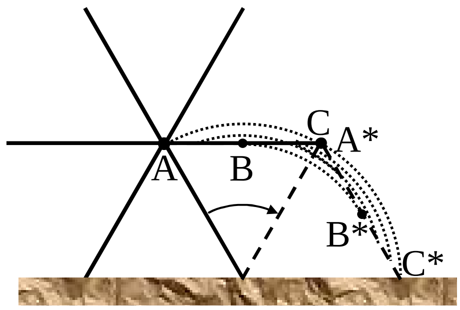


Рис. 2

Дуга саме цього кола і обмежує максимальну висоту перешкоди. На Рис.3 показано як дуга кола найменшого радіусу перетинає вертикальну вісь симетрії. За теоремою Піфагора знаходимо

$$h=\sqrt{r_{\min}^2-(a/2)^2}=a/\sqrt{2}\approx 7{,}07 \text{ см}.$$

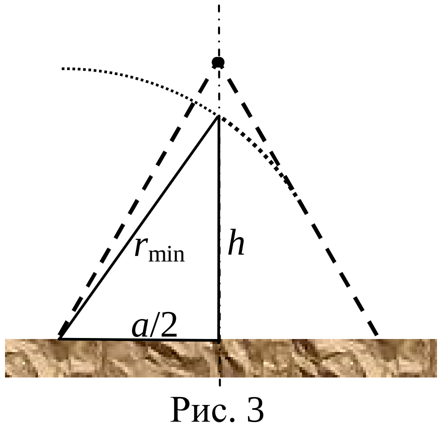


Рис. 3

Траєкторія будь-якої точки колеса складається з дуг у 60° кіл різного радіусу. За один оберт найдовшою буде траєкторія крайньої точки колеса. Її траєкторія зображена на Рис.4

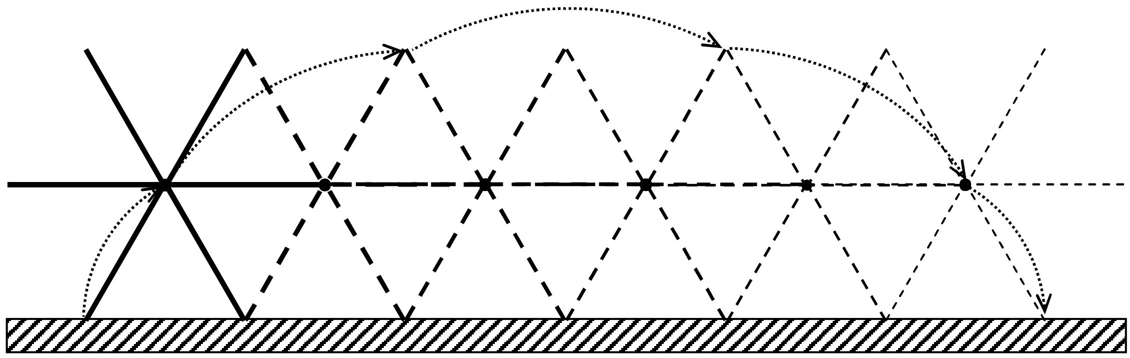


Рис. 4

Довжина цієї траєкторії $l = \frac{\pi}{3}\left(a + \sqrt{3}a + 2a + \sqrt{3}a + a\right) = \frac{2\pi}{3}\left(2 + \sqrt{3}\right)a = 78,1см$, що більше, ніж, наприклад, довжина траєкторії центральної точки колеса $l_A = 2\pi a = 62,8см$.

8 клас
Теоретичний тур

Задача 5.

На рисунку показано світну точку A та три її зображення, отримані за допомогою оптичної системи, що складається з лінзи та великого плоского дзеркала. Відомо, що зображення A_1 і A_2 уявні, а зображення A_3 — дійсне. Накресліть можливе розташування елементів оптичної системи. Визначте межі області, звідки можна побачити всі три зображення.

Розв'язання

Оскільки одне зображення є дійсним, лінза має бути збиральною, вона розташована між точками A і A_3. Очевидно, дзеркало може бути розташоване тільки ліворуч від лінзи. Всі точки лежать на головній оптичній осі лінзи, перпендикулярної до площини дзеркала. Одне з уявних зображень є результатом відбивання світла від дзеркала, а інше — результатом заломлення світла в лінзі. Дійсне ж зображення є результатом послідовного відбивання світла від дзеркала та заломлення в лінзі (тобто точка A_3 є зображенням у лінзі якоїсь із точок A_1 або A_2). Таким чином, дзеркало розташоване в середині відрізку AA_1 або AA_2. Розгляньмо ці випадки.

1) Точка A_1 є зображенням точки A у дзеркалі.

Тоді точка A_2 буде уявним зображенням точки A в лінзі, точка ж A_3 — дійсним зображенням у лінзі точки A_1. Скористаємося формулою тонкої лінзи. Будемо вимірювати відстані в клітинках, позначимо відстань оптичного центру лінзи від точки A через d. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{d+3} = \dfrac{1}{F}, \\ \dfrac{1}{d+9} + \dfrac{1}{15-d} = \dfrac{1}{F}. \end{cases}$$

Звідси $d^2 + 2d - 15 = 0$ і $d = 3$, $F = 6$. Відповідні елементи та їх розташування показано на рис. 1.

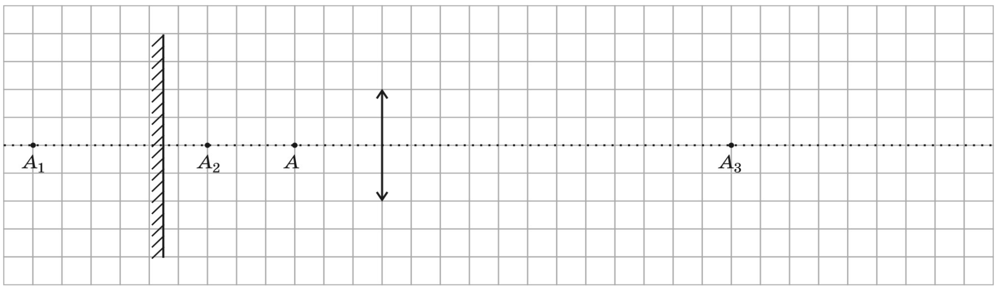


Рис. 1

На рис. 2 виділено область, звідки можна побачити зображення A_1.

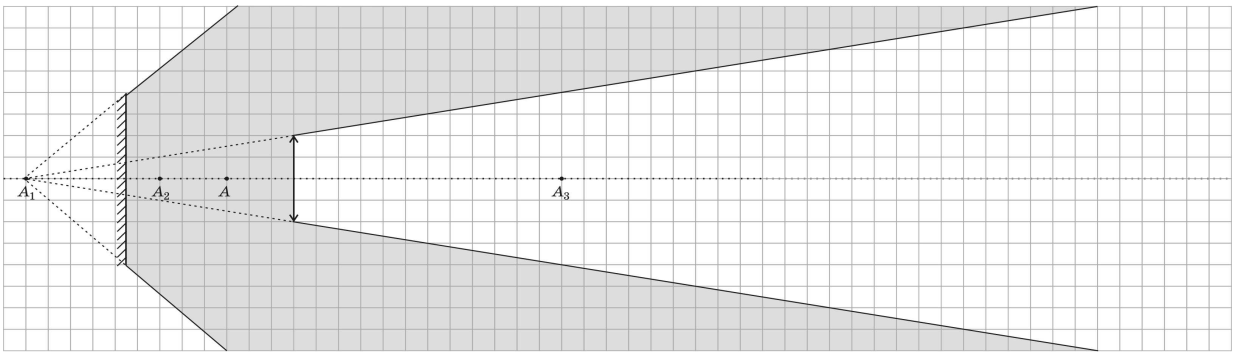


Рис. 2

На рис. 3 і 4 виділено області, звідки можна побачити відповідно зображення A_2 та A_3.

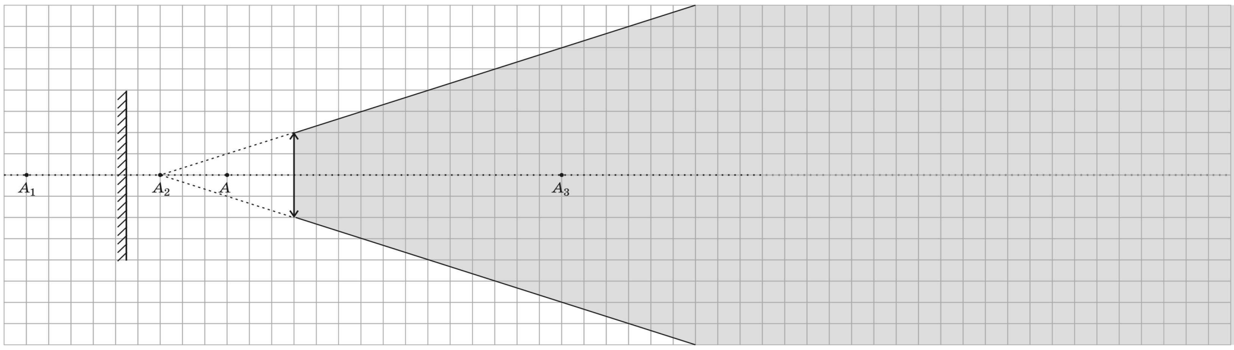


Рис. 3

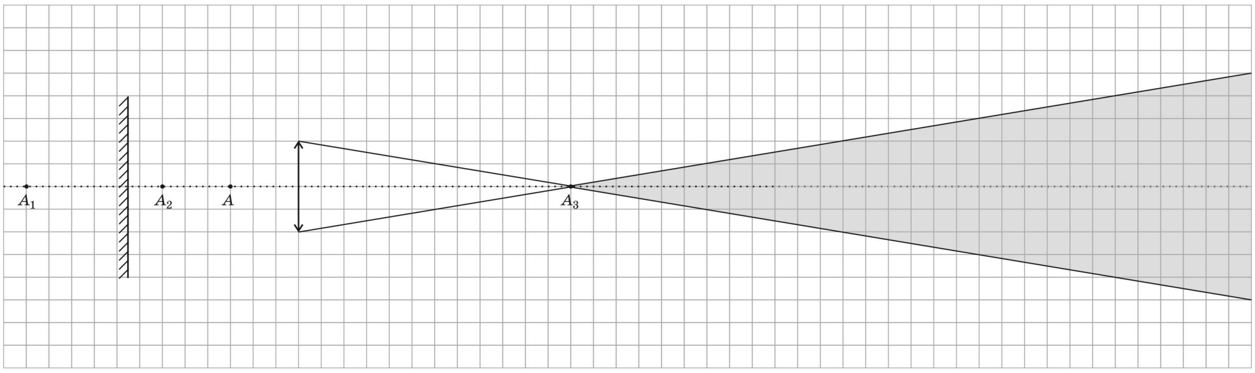


Рис. 4

Оскільки області на рис. 2 і 4 обмежені паралельними прямими, ці області не перетинаються. Отже, побачити одночасно з якоїсь точки всі три зображення неможливо.

2) Точка A_2 є зображенням точки A у дзеркалі.

Тоді точка A_1 буде уявним зображенням точки A в лінзі, точка ж A_3 — дійсним зображенням у лінзі точки A_2. Аналогічно першому випадку отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{d+9} = \dfrac{1}{F}, \\ \dfrac{1}{d+3} + \dfrac{1}{15-d} = \dfrac{1}{F}. \end{cases}$$

Звідси знов отримуємо $d^2 + 2d - 15 = 0$ і $d = 3$ (легко показати, що це не випадковий збіг), однак тепер $F = 4$. Відповідні елементи та їх розташування показано на рис. 5.

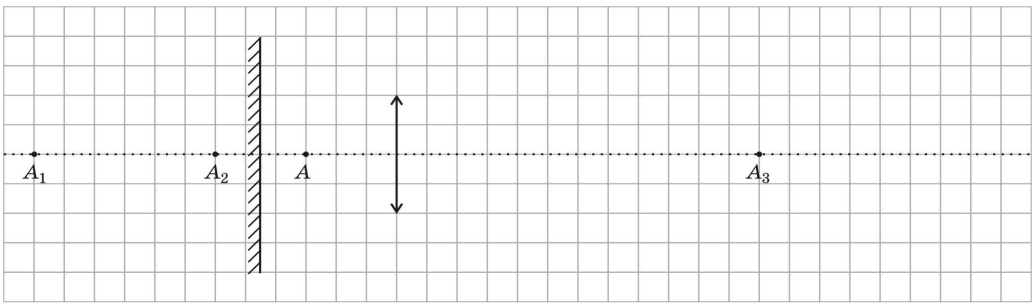


Рис. 5

На рис. 6 виділено область, звідки можна побачити зображення A_1.

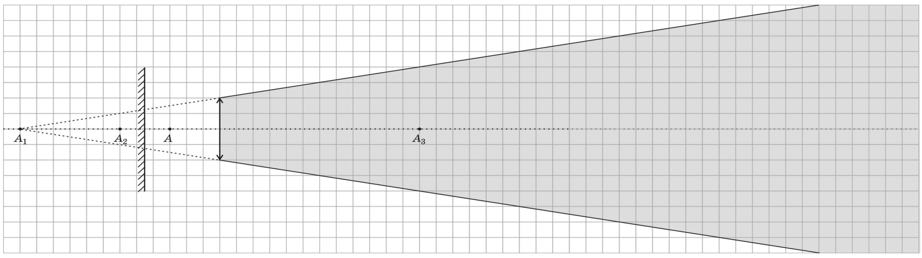


Рис. 6

На рис. 7 виділено область, звідки можна побачити зображення A_2.

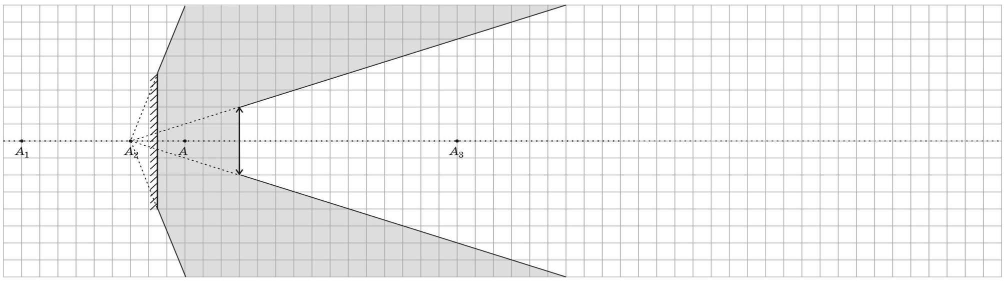


Рис. 7

Оскільки області на рис. 6 і 7 не перетинаються, подальший розгляд непотрібний. Побачити одночасно з якоїсь точки всі три зображення неможливо.