

*Харьковский физико-математический лицей №27*

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме:  
“ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ”

*Харьков, 2014 г.*

## Поурочное планирование (18 часов)

**Урок 1.** Понятие предела функции в точке. Равносильность различных определений предела функции в точке.

**Урок 2.** Общие свойства предела функции. Предельный переход и арифметические операции.

**Урок 3.** Определение функции, непрерывной в точке. Пределы рациональных функций.

**Урок 4.** Пределы, содержащие иррациональности.

**Урок 5.** (*доп.*) Предел сложной функции. Критерий Коши существования предела функции.

**Урок 6.** Левая и правая окрестности точки. Предел функции справа и слева. Существование односторонних пределов монотонной функции. Вертикальные асимптоты графика функции.

**Урок 7.** *Самостоятельная работа* по теме: “Предел функции в точке”.

**Урок 8.** Первый замечательный предел. Пределы, содержащие тригонометрические функции.

**Урок 9.** Предел функции на бесконечности. Окрестность бесконечно удаленной точки. Упражнения на вычисление пределов функции на бесконечности.

**Урок 10.** Второй замечательный предел.

**Урок 11.** Наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.

**Урок 12.** Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

**Урок 13.** (*доп.*) Сравнение асимптотического поведения функций.  $O$ -символика.

**Урок 14.** (*доп.*) Асимптотическое равенство функций.

**Урок 15.** *Самостоятельная работа* по теме: “Предел функции на бесконечности. Замечательные пределы”.

**Урок 16.** Обобщающий урок по теме.

**Урок 17.** **Контрольная работа.**

**Урок 18.** Анализ контрольной работы.

## Урок 1. Определение предела функции

### Домашнее задание

- 1) В формулировке определения предела функции в точке  $a$  по Коши вместо слов "...из неравенства  $0 < |x - a| < \delta$  следует ..." было сказано "...из неравенства  $|x - a| < \delta$  следует ...". Приведите пример функции, не имеющей предела в точке  $a$  при таком определении, но имеющей предел при настоящем определении.
- 2) В формулировке определения предела функции в точке по Коши вместо слов "...для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  ..." было сказано "...для любого  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon > 0$  ...". Покажите, что при таком "определении" каждое из чисел  $A_1 = 0$  и  $A_2 = 100$  является пределом функции  $f(x) = x$  в точке  $x_0 = 0$ .
- 3) В формулировке определения предела функции в точке по Коши вместо слов "...для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  ..." было сказано "...для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  ...". Покажите, что при таком "определении" предел в точке  $x_0$  имеют лишь функции вида  $f(x) = \text{const}$  при  $x \neq x_0$  (в самой точке  $x_0$  функция может быть как неопределена, так и определена любым образом).
- 4) С помощью определения предела функции в точке докажите, что:
  - (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$ ;
  - (2)  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ ;
  - (3)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$ ;
  - (4)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$ ;
  - (5)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin x = 0,5$ .

- 5) Существует ли предел функции  $f(x) = \cos \frac{1}{x - \pi}$  в точке  $x_0 = \pi$ ?

## Урок 2. Общие свойства предела функции

### Домашнее задание

- 1) Приведите пример функции  $f(x)$ , которая определена на всей вещественной оси, не имеет предела ни в одной точке, а функция  $f^2(x)$  имеет предел в каждой точке.

- 2) Что можно утверждать о существовании предела функции  $f + g$  в точке  $x_0$ , если:
- функции  $f$  и  $g$  не имеют предела в точке  $x_0$ ;
  - функция  $f$  имеет предел в точке  $x_0$ , а функция  $g$  – нет?
- 3) Что можно утверждать о существовании предела функции  $f \cdot g$  в точке  $x_0$ , если:
- функции  $f$  и  $g$  не имеют предела в точке  $x_0$ ;
  - функция  $f$  имеет предел в точке  $x_0$ , а функция  $g$  – нет?
- 4) Известно, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ . Верно ли, что по крайней мере один из пределов  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  равен нулю?
- 5) Вычислите пределы:
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 1);$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{3x - 1};$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} \left( 2x^2 + \frac{1}{x} + 3x - 1 \right);$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$
  - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}.$

### Урок 3. Функции, непрерывные в точке. Пределы рациональных функций

#### Домашнее задание

Вычислите пределы:

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x\sqrt{x+2} - x^2 - x);$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x^3}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + 2x};$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^3} \right)^{8/x^2};$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8};$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} - 3x}{3\sqrt{x} - 2x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \right);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2 - x - 2} - \frac{2}{3x^2 - 6x} \right).$$

## Урок 4. Пределы, содержащие иррациональности

### Домашнее задание

Вычислите пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{2x + 10} - 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \sin x}}{\sin x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6 - x} - 1}{3 - \sqrt{4 + x}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{3 + 2x}}{\sqrt[4]{2 - 14x} - 2}.$$

## Урок 6. Пределы функций справа и слева. Вертикальные асимптоты

### Домашнее задание

- 1) Сформулируйте с помощью неравенств следующие утверждения и приведите соответствующие примеры:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ;
  - б)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ;
  - в)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ .
- 2) Пусть  $y = f(x)$ . Сформулируйте с помощью неравенств, что означает:
  - а)  $y \rightarrow b - 0$  при  $x \rightarrow a$ ;
  - б)  $y \rightarrow b + 0$  при  $x \rightarrow a - 0$ ;
  - в)  $y \rightarrow b + 0$  при  $x \rightarrow a + 0$ .
- 3) Найдите пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ .
- 4) Найдите  $f(1)$ ,  $f(1 - 0)$ ,  $f(1 + 0)$ , если  $f(x) = x + [x^2]$ .
- 5) Найдите  $f(n)$ ,  $f(n - 0)$ ,  $f(n + 0)$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), если  $f(x) = \text{sign}(\sin \pi x)$ .

## Урок 8. Первый замечательный предел

### Домашнее задание

Вычислите пределы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin \frac{x}{3}}$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \alpha x}{\sin^3 \beta x}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} x}$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x + \sin 11x}{5x}$ ;

- 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 10x - \cos x}{4x^2};$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\sin 6x};$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x};$
- 9)  $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{4x + \pi};$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \sqrt{2} \cos x}.$

## Урок 9. Предел функции на бесконечности

### Домашнее задание

Вычислите пределы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1}{3x^5 + 2x^3 - 1};$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+10x)}{x^{10} + 1};$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1});$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right);$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}};$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}};$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right);$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$

## Урок 10. Второй замечательный предел

### Домашнее задание

1) Найдите числа  $a$  и  $b$  из условия:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax - b) = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4bx^2 + 5}{2x - 1} + ax \right) = 1, 5;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

2) Найдите пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(x + 1) - \ln x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \log_x 2;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{1/x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0);$$

$$(6) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow +0} (1 + x)^{1/x^2}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -0} (1 + x)^{1/x^2}.$$

3) Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$ .

## Урок 11. Наклонные и горизонтальные асимптоты

### Домашнее задание

Найдите асимптоты графиков функций:

$$1) f(x) = \frac{x^2}{x - 1};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x + 2};$$

$$3) f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{(x - 2)(x + 1)};$$



$$4) f(x) = \frac{1}{x} + x + e^{-x};$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2 + x};$$

$$6) f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3};$$

$$7) f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$8) f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}.$$

## Урок 12. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

### Домашнее задание

1) Найдите пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \mathcal{D}(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cos \frac{\pi}{x-1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2} \sin \pi x \operatorname{arctg} 2^{1/(x^2-4)}.$$

2) Покажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  неограничена в любой окрестности точки  $x = 0$ , однако не является бесконечно большой при  $x \rightarrow 0$ .

3) Найдите пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-1/x^2};$$

$$(2) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}.$$

4) Докажите, что при достаточно большом  $x > 0$  имеют место неравенства:

$$\text{а) } \ln^{1000} x < \sqrt{x}; \quad \text{б) } x^{10} e^x < e^{2x}.$$

## Урок 13. О-символика

### Домашнее задание

1) Докажите, что при  $x \rightarrow a$ :

а)  $o(o(f(x))) = o(f(x))$ ;

б)  $O(o(f(x))) = o(f(x))$ ;

в)  $o(O(f(x))) = o(f(x))$ ;

г)  $O(O(f(x))) = O(f(x))$ ;

д)  $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$ .

2) Пусть  $x \rightarrow 0$  и  $n > 0$ . Докажите, что:

а)  $CO(x^n) = O(x^n)$  ( $C \neq 0$ );

б)  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$  ( $n < m$ );

в)  $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$ .

3) Пусть  $x \rightarrow +\infty$  и  $n > 0$ . Докажите, что:

а)  $CO(x^n) = O(x^n)$ ;

б)  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^m)$  ( $n < m$ );

в)  $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$ .

4) Пусть  $x \rightarrow 0$ . Докажите, что:

а)  $2x - x^2 = O(x)$ ;

б)  $x \sin(\sqrt{x}) = O(x^{3/2})$ ;

в)  $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$  ( $\varepsilon > 0$ );

г)  $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$ .

5) Пусть  $x \rightarrow +\infty$ . Докажите, что:

а)  $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ ;

б)  $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ;

в)  $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

## Урок 14. Асимптотически равные функции

### Домашнее задание

Вычислите пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ ;

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

## Вопросы к зачету

1. Предел функции в точке. Равносильность определений предела функции в точке по Коши и по Гейне.
2. Теорема об ограниченности функции, стремящейся к пределу. Теорема о сохранении знака. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах. Теоремы об арифметических операциях с пределами.
3. Критерий Коши существования предела функции.
4. Первый и второй замечательные пределы.
5. Предел функции справа и слева. Вертикальные асимптоты графика функции. Существование односторонних пределов монотонной функции. Характеристика разрывов монотонной функции.
6. Предел функции на бесконечности. Наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.  $O$ -символика.
8. Асимптотическое равенство (эквивалентность) функций. Примеры асимптотически равных функций.