Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме: “ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ”

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (27 часов)

Урок 1. Кванторы всеобщности и существования. Аксиоматика множества действительных чисел.

Урок 2. Аксиома Кантора (лемма о вложенных отрезках). Понятие точной верхней и нижней грани множества. Существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества.

Урок 3. Принцип разделяющего числа.

Урок 4. Понятие предела последовательности.

Урок 5. Нахождение пределов последовательностей при помощи определения. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о сохранении знака.

Урок 6. Теоремы о пределе суммы и произведения.

Урок 7. Теорема о пределе частного.

Урок 8. Теоремы о предельном переходе в неравенствах. Лемма о "двух милиционерах".

Урок 9. *Письменный опрос по теории.*

Урок 10. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Урок 11. Упражнения на нахождение пределов.

Урок 12. Теорема о пределе степени ($\alpha \in \mathbb{Q}$). Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n}$, $|a| > 1$.

Урок 13. *Самостоятельная работа* по теме: "Нахождение пределов последовательностей".

Урок 14. Монотонные последовательности. Критерий Вейерштрасса существования предела монотонной последовательности. Пределы $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$, $|a| > 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$.

Урок 15. Число e.

Урок 16. Число e (продолжение).

Урок 17. Понятие степени с иррациональным показателем.

Урок 18. Свойства степени с действительным показателем. Теорема о предельном переходе в показателе степени. Показательная функция и ее график.

Урок 19. Логарифмическая функция. Понятие логарифма.

Урок 20. Формулы логарифмирования.

Урок 21. Формула перехода к другому основанию и ее следствия.

Урок 22. Непрерывность показательной, логарифмической и степенной функций. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n}$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n}$. Непрерывность тригонометрических функций.

Урок 23. Подпоследовательности. Лемма Больцано – Вейерштрасса. Предельные точки множества. Теорема Вейерштрасса о предельных точках ограниченного множества.

Урок 24. Критерий Коши существования предела последовательности.

Урок 25. Начальные сведения о числовых рядах. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Урок 26. *Зачет* по теме: “Предел последовательности”.

Урок 27. *Зачет* по теме: “Предел последовательности”.

Урок 1. Кванторы всеобщности и существования. Аксиоматика множества действительных чисел

1°. Кванторы всеобщности и существования

"Если обозначения удобны для открытий ..., то поразительным образом сокращается работа мысли" (Г.Лейбниц)

2°. Аксиоматика множества действительных чисел

1) Особое место в математике занимают числовые функции. Они составляют главный объект исследования классического математического анализа. Но сколько-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств числовых функций невозможно без точного определения множества действительных (вещественных) чисел, на котором эти функции действуют.

2) Хорошо известна следующая шутка: *число в математике, как время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам.* Понятию числа может быть посвящен отдельный большой курс. Мы же только приведем основные свойства действительных чисел, сформулировав их в виде аксиом.

3) Итак,

Множество $\mathbb{R}$ называется ***множеством действительных (вещественных) чисел****, если выполнены следующие условия:*

(I) $\mathbb{R}$ – *поле относительно операций сложения и умножения;*

(II) $\mathbb{R}$ – *линейно упорядоченное множество, т. е. между элементами $\mathbb{R}$ установлено соотношение $\leqslant$ (другими словами, о любых x и y из $\mathbb{R}$ можно сказать, выполнено ли $x \leqslant y$ или нет). При этом должны удовлетворяться следующие условия:*

(1) *Для любого x из $\mathbb{R}$ выполнено $x \leqslant x$;*

(2) *Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;*

(3) *Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;*

(4) *Для любых x и y из $\mathbb{R}$ выполнено по крайней мере одно из соотношений $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$.*

(III) *Арифметические операции и отношение порядка связаны между собой следующим образом. Пусть x, y, z – элементы $\mathbb{R}$. Тогда:*

(1) *если $x \leqslant y$, то $x + z \leqslant y + z$;*

(2) *если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant x \cdot y$.*

(IV) *Выполнена аксиома полноты (непрерывности).*

Замечание. О том, что такое аксиома полноты, мы поговорим немного позднее.

4) Относительно любой системы аксиом сразу же возникают два вопроса.

   (1) Во-первых, совместны ли эти аксиомы, т. е. существует ли множество, удовлетворяющее этим аксиомам, является ли этот набор аксиом *непротиворечивым*. Это весьма сложный вопрос. Скажем лишь, что аксиомам групп (I) – (III) удовлетворяют множество обыкновенных дробей (рациональных чисел), а также множество бесконечных десятичных дробей (как периодических, так и непериодических) с обычным образом введенными операциями сложения, умножения и отношением порядка.

   (2) Во-вторых, однозначно ли данная система аксиом определяет математический объект (*категорична* ли система аксиом). Однозначность здесь понимается следующим образом: если некие лица A и B построили свои модели $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$, удовлетворяющие данному набору аксиом, то между множествами $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), сохраняющее арифметические операции и отношение порядка (такое соответствие называют **изоморфизмом**). Система аксиом (I) – (III) не категорична, не хватает еще одного свойства – аксиомы полноты (непрерывности).

5) Есть несколько утверждений, которые можно взять в качестве аксиомы полноты. Эти утверждения равносильны, т. е. приняв одно из них за аксиому, остальные можно доказать (используя аксиомы (I) – (III)). На ближайших уроках мы познакомимся с тремя из этих утверждений – **аксиомой Кантора**, часто называемой **леммой о вложенных отрезках**, **принципом верхней грани** и **принципом разделяющего числа**. Равносильность этих утверждений будет доказана следующим образом: опираясь на аксиому Кантора, мы докажем принцип верхней грани, затем, с помощью этого принципа мы докажем принцип разделяющего числа, и, наконец, основываясь на принципе разделяющего числа, мы докажем лемму о вложенных отрезках.

   Отметим, что в конце темы мы встретимся с еще одним утверждением, которое можно взять в качестве аксиомы полноты. Его называют **аксиомой (леммой) Больцано-Вейерштрасса**.

Урок 2. Аксиома Кантора (лемма о вложенных отрезках). Точная верхняя и точная нижняя грани множества

1°. Аксиома Кантора (лемма о вложенных отрезках)

1) Введем следующие определения:

> *Рассмотрим последовательность отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Если каждый следующий отрезок этой последовательности содержится в предыдущем, то такую последовательность называют* ***системой вложенных отрезков****.*

> *Система вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ называется* ***стягивающейся****, если в ней есть отрезки сколь угодно малой длины.*

Очевидно, что стягивающаяся система отрезков должна быть бесконечной.

2) Теперь мы можем сформулировать аксиому Кантора (лемму о вложенных отрезках):

Утверждение 2.1 (**Аксиома Кантора**).

Пусть задана стягивающаяся система вложенных отрезков. Тогда существует (и притом единственная) точка, принадлежащая всем отрезкам системы.

3) То, что существует не более одной точки, принадлежащей всем отрезкам стягивающейся системы вложенных отрезков, не является аксиомой вне зависимости от выбранного подхода к формулировке аксиомы полноты. Действительно, пусть есть две точки, ξ_1 и ξ_2, принадлежащие всем отрезкам системы. Поскольку рассматриваемая система стягивающаяся, то найдется такой отрезок Δ, длина которого меньше, чем $|\xi_1 - \xi_2|$. Но тогда точки ξ_1 и ξ_2 не могут одновременно принадлежать отрезку Δ.

4) На множестве рациональных чисел аксиома Кантора не выполняется. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть систему отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, где a_n и b_n – последовательные десятичные приближения с недостатком и избытком какого-нибудь иррационального числа.

5) Важно отметить, что если взять стягивающуюся систему вложенных интервалов, то утверждение о существовании общей точки становится неверным. В качестве примера достаточно рассмотреть систему интервалов $\left\{\left(0; \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$. Очевидно, что эта система не имеет общих точек.

2°. Понятие точной верхней (нижней) грани

1) Введем несколько важных определений:

> *Пусть A – некоторое подмножество множества действительных чисел. Говорят, что множество A* ***ограничено сверху****, если существует такое число M, что $x \leqslant M$ для всех x из A. Число M называют* ***верхней гранью*** *множества A.*

> *Пусть A – ограниченное сверху множество. Число M называется* ***точной верхней гранью*** *множества A, если:*
>
> (1) *$x \leqslant M$ для всех x из A, т. е. M – верхняя грань множества A;*
>
> (2) *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число x из A, что $x > M - \varepsilon$, т. е. никакое число, меньшее M, не является верхней гранью множества A.*

Обозначение: $M = \sup\limits_{x \in A} x$ или просто $M = \sup A$, читается "супремум A".

Упражнение. Запишите определение точной верхней грани с помощью кванторов.

2) Сформулируем утверждение, иногда называемое **принципом верхней грани** (как мы увидим позднее, оно равносильно аксиоме Кантора):

Утверждение 2.2 (Т-ма о существовании точной верхней грани).

Ограниченное сверху непустое подмножество множества действительных чисел имеет точную верхнюю грань.

3) Заметим, что на множестве рациональных чисел теорема о существовании точной верхней грани неверна. В качестве контрпримера достаточно рассмотреть множество всех приближений с недостатком какого-нибудь иррационального числа.

4) Докажем теорему о существовании точной верхней грани, опираясь на аксиому Кантора.

Доказательство: Пусть множество A ограничено сверху. Если множество A конечно, то утверждение очевидно.

Пусть A – бесконечное множество. Из определения ограниченного сверху множества следует, что $\exists M : \forall a \in A \; a \leqslant M$. Возьмем произвольное число $a \in A$, $a < M$ и рассмотрим отрезок $\sigma_0 = [a; M]$. Затем разделим σ_0 пополам. По крайней мере в одной из двух образовавшихся половинок обязательно есть точки из множества A. Обозначим σ_1 ту из них, которая лежит правее. Продолжая этот процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$ По аксиоме Кантора существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам системы. Докажем, что $\xi = \sup A$.

Для этого сперва покажем, что ξ – верхняя грань множества A. Действительно, пусть $\exists a \in A : a > \xi$. Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon : 0 < \varepsilon < a - \xi$. Поскольку система отрезков $\{\sigma_n\}$ – стягивающаяся, то $\exists N \in \mathbb{N} : \sigma_N < \varepsilon$. Но тогда при $\forall n > N$ отрезки σ_n лежат левее точки a, что невозможно. Противоречие.

Возьмем теперь произвольную точку $\xi_1 < \xi$ и докажем, что ξ_1 не является верхней гранью множества A. Действительно, поскольку система отрезков $\{\sigma_n\}$ – стягивающаяся, то найдется отрезок σ_N, лежащий правее точки ξ_1 (рассуждение аналогично приведенному выше). Но каждый из отрезков системы содержит точки из A. Поэтому $\exists a \in A : a > \xi_1$, ч. т. д.

■

Домашнее задание

1) Дайте определение ограниченного снизу множества. Запишите это определение с помощью кванторов.

2) Множество, ограниченное как сверху, так и снизу, называется **ограниченным**. Запишите определение ограниченного множества с помощью кванторов.

3) Аналогично понятию точной верхней грани можно ввести понятие **точной нижней грани** множества A (ее обозначают $m = \inf\limits_{x \in A} x$ или просто $M = \inf A$, читается "инфимум A".) Сформулируйте определение точной нижней грани словами и запишите его с помощью кванторов.

4) Сформулируйте и докажите теорему о существовании точной нижней грани:

   а) опираясь на аксиому Кантора;

   б) пользуясь теоремой о существовании точной верхней грани.

Урок 3. Принцип разделяющего числа

1) Сформулируем еще одно утверждение, которое можно взять в качестве аксиомы полноты:

   Утверждение 3.1 (**Принцип разделяющего числа**).

   Пусть множество действительных чисел разбито на два непересекающихся непустых множества A и B так, что для любого $a \in A$ и любого $b \in B$ справедливо неравенство $a < b$. Тогда либо существует действительное число, наибольшее в A, а в B нет наименьшего числа, либо существует действительное число, наименьшее в B, а в A нет наибольшего числа.

   Замечание. Разбиение множества действительных чисел, о котором идет речь в утверждении 3.1, называют **сечением** множества действительных чисел. При этом используется обозначение $\mathbb{R} = A + B$.

2) Докажем принцип разделяющего числа, опираясь на теорему о существовании точной верхней грани.

   Доказательство: Пусть $\mathbb{R} = A+B$. Возьмем произвольное $b \in B$. Тогда для $\forall a \in A$ выполнено неравенство $a < b$. Следовательно, множество A ограничено сверху и у него существует точная верхняя грань. Обозначим $c = \sup A$. Легко видеть, что $a \leqslant c \leqslant b$ для $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

   Если $c \in A$, то c – наибольшее число в A. Предположим, что в множестве B есть наименьший элемент (назовем его b_0). Рассмотрим число $\xi = \dfrac{c + b_0}{2}$. Очевидно, оно больше c, но меньше b_0, и, следовательно, не принадлежит ни A, ни B. Противоречие.

Пусть теперь $c \in B$. Тогда c – наименьшее число в B. Если в A есть наибольший элемент a_0, то рассмотрим число $\xi = \dfrac{a_0 + c}{2}$. Очевидно, что оно не принадлежит ни A, ни B. Противоречие.

■

3) Для завершения доказательства равносильности трех формулировок аксиомы полноты осталось показать, что *из принципа разделяющего числа следует лемма о вложенных отрезках*. Сделаем это.

Доказательство: Пусть задана стягивающаяся система отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Разобьем множество действительных чисел на классы A и B следующим образом: класс A состоит из таких чисел x, которые меньше хотя бы одного из левых концов данной системы отрезков (т. е. $\exists N : x < a_N$). Остальные числа отнесем к классу B.

Очевидно, что оба множества A и B непусты (напр., $a_1 - 1 \in A$, $b_1 \in B$). Пусть $x \in A$, $y \in B$. В силу определения множеств A и B для $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leqslant y$ и $\exists N \in \mathbb{N} : x < a_N$. Следовательно, $x < a_N \leqslant y$, т. е. $x < y$.

Т. о., построенное разбиение множества действительных чисел на классы A и B удовлетворяет условиям утверждения 3.1. Поэтому существует число ξ, являющееся либо наибольшим в A, либо наименьшим в B. Но в классе A не может быть наибольшего числа. Действительно, пусть x – наибольшее число в классе A. Поскольку $x \in A$, то $\exists N \in \mathbb{N} : x < a_N$. Рассмотрим число $c = \dfrac{x + a_N}{2}$. Очевидно, $x < c < a_N$. Следовательно, c принадлежит классу A, но больше x. Противоречие.

Итак, ξ – наименьшее число в B. Поэтому $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Но это означает, что ξ – общая точка системы отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

■

Урок 4. Понятие предела последовательности

1°. Числовые последовательности

1) Дадим строгое определение последовательности:

> *Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \dots$ поставлено в соответствие некоторое число x_n. Тогда говорят, что* ***задана числовая последовательность*** *$x_1, x_2, x_3, \dots$.*
> Числа x_n называются **членами** или **элементами** последовательности.

Замечание. Другими словами, числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел.

Обозначают последовательности так: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

2) Рассмотрим примеры числовых последовательностей:

(1) $x_n = a$ (стационарная последовательность);

(2) $x_n = \begin{cases} n, & n \leqslant 100; \\ a, & n > 100 \end{cases}$ (стабилизирующаяся последовательность);

(3) $x_n = n$ (натуральный ряд);

(4) $x_n = \dfrac{1}{n}$;

(5) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

(6) $x_n = \dfrac{n-1}{n}$;

(7) $x_n = 1 + \dfrac{1}{10^n}$;

(8) $x_n = (-1)^n$;

(9) $x_n = \begin{cases} n, & 1 \leqslant n \leqslant 10; \\ \dfrac{1}{10^{n-10}}, & n > 10. \end{cases}$

3) Существует несколько способов задания последовательностей:

- аналитический (с помощью формулы, позволяющей найти x_n по номеру n);
- рекуррентный (каждый следующий член последовательности определяется через один или несколько предыдущих);
- словесное описание (напр., “рассмотрим последовательность простых чисел”).

2°. Понятие предела последовательности

1) Сформулируем важнейшее определение курса:

Определение.

> *Число a называется* ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$*, если для* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$.

Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

2) Понятие предела последовательности имеет простой геометрический смысл.

Введем определение окрестности точки:

> *Интервал* $U_\varepsilon(a) = \{x : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ *называется* ***ε-окрестностью точки*** a.

Теперь мы можем переформулировать определение предела последовательности:

> *Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для* $\forall\varepsilon > 0$ *все члены последовательности, начиная с некоторого, попадают в* ε*-окрестность точки a:*
>
> $$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a).$$

3) Дадим еще одно определение предела последовательности:

> *Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если любая* ε*-окрестность точки a содержит все члены этой последовательности, кроме, быть может, конечного числа.*

Очевидно, что данное определение равносильно предыдущим.

4) Не все последовательности имеют предел.

Упражнение. Запишите с помощью кванторов утверждение: “Число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$”.

> *Последовательности, имеющие предел, называются **сходящимися**. Не имеющие предела последовательности называются **расходящимися**.*

5) В заключение заметим, что последовательность не может иметь более одного предела:

Теорема 4.1 (**О единственности предела**).

Сходящаяся последовательность имеет ровно один предел.

Доказательство теоремы: Предположим, что некоторая последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b. Возьмем непересекающиеся окрестности точек a и b. Очевидно, что начиная с некоторого номера N все члены последовательности $\{x_n\}$ должны лежать в этих окрестностях, что невозможно.

■

Домашнее задание

1) Покажите, что если в определении предела последовательности вместо слов “для любого $\varepsilon > 0$” сказать “для любого ε”, то никакая последовательность не будет иметь предел.

2) Какие последовательности будут иметь предел, если в определении предела последовательности вместо слов “для любого $\varepsilon > 0$” сказать “для любого $\varepsilon \geqslant 0$” ?

3) Дадим следующее “определение” предела последовательности: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon \geqslant 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$. Какие последовательности будут иметь предел при таком “определении”?

4) В формулировке определения предела последовательности вместо слов “найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство ...” было сказано “для всех номеров n выполняется неравенство ...” Какие последовательности будут иметь предел при таком “определении”?

5) В формулировке определения предела последовательности вместо неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ было написано неравенство $x_n - a < \varepsilon$. Докажите, что при таком “определении” число 2 является пределом последовательности $\{x_n = 1\}$.

6) В формулировке определения предела последовательности вместо слов “найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$” было сказано “найдется такой номер N, что выполняется неравенство $|x_N - a| < \varepsilon$”. Приведите пример последовательности, имеющей предел при таком определении, но не имеющей предела при настоящем определении.

7) Пользуясь определением предела, найдите предел последовательности или докажите, что последовательность расходится:

(1) $\left\{0; \dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{3}; 0; \dfrac{1}{4}; \ldots\right\}$;

(2) $\left\{1; \dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{1}{3}; 1; \dfrac{1}{4}; \ldots\right\}$;

(3) $\left\{1; 0; \dfrac{1}{2}; 0; 0; \dfrac{1}{3}; 0; 0; 0; \dfrac{1}{4}; 0; 0; 0; 0; \dfrac{1}{5}; \ldots\right\}$;

(4) $\{0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; \ldots\}$;

(5) $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{1}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{3}; \ldots\right\}$;

(6) $\left\{0; 1\,\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2}{3}; 1\,\dfrac{1}{4}; -\dfrac{4}{5}; 1\,\dfrac{1}{6}; \ldots\right\}$.

Урок 5. Нахождение пределов последовательностей по определению. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о сохранении знака

1)

Теорема 5.1 (**Об ограниченности сходящейся последовательности**).

Сходящаяся последовательность ограничена.

2)

Теорема 5.2 (**О сохранении знака**).

Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет не равный нулю предел a. Тогда, начиная с некоторого номера все члены последовательности имеют тот же знак, что и число a. Кроме того, найдется такой номер N, что для $\forall n > N \;\; x_n > \dfrac{|a|}{2}$.

Домашнее задание

1) Известно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

   а) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$.

   б) Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$?

2) Объясните, почему если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n x_n = 0$.

3) Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$.

4) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$?

5) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$?

6) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = b$. Можно ли сделать какой-либо вывод о пределе последовательности $\{x_n\}$?

7) Могут ли какие-нибудь члены сходящейся последовательности быть равными пределу этой последовательности?

8) Может ли последовательность $\{x_n\}$ быть расходящейся, если известно, что последовательность $\{x_n^2\}$ сходится?

9) Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2;$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n+2}{2n-1} = -\dfrac{1}{2};$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n-2}{n^2+n+1} = 3.$

Урок 6. Теоремы о пределе суммы и произведения

1)

Теорема 6.1 (**О пределе суммы (разности)**).

Пусть $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *– две сходящиеся последовательности,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда последовательности* $\{x_n \pm y_n\}$ *также сходятся, причем*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2)

Теорема 6.2 (**О пределе произведения**).

Пусть $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *– две сходящиеся последовательности,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда последовательность* $\{x_n y_n\}$ *также сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab.$$

Домашнее задание

1) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$?

2) Последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$?

3) Может ли последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходиться, если каждая из последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ расходится?

Урок 7. Теорема о пределе частного

1)

Теорема 7.1 (**О пределе частного**).

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ также сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Домашнее задание

1) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

Урок 8. Теоремы о предельном переходе в неравенствах. Лемма о "двух милиционерах"

1)

Теорема 8.1 (**О предельном переходе в неравенствах**).

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Известно, что $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n \leqslant y_n$. Тогда $a \leqslant b$.

Замечание. Если начиная с некоторого номера $x_n < y_n$, то это не означает, что $a < b$ (в качестве примера достаточно рассмотреть последовательности $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ и $y_n = \dfrac{1}{n}$). Т. о., при предельном переходе строгое неравенство, вообще говоря, переходит в нестрогое.

2) Справедлива и в каком-то смысле обратная теорема:

Теорема 8.2.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Известно, что $a < b$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n < y_n$.

3)

Теорема 8.3 (**Лемма о "двух милиционерах"**).

Пусть $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ – две сходящиеся последовательности, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Про третью последовательность y_n известно, что

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n.$$

Тогда последовательность y_n также сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Урок 11. Упражнения на нахождение пределов

1°. Нахождение пределов дробно-рациональных выражений

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+3}{1-4n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^4-4n^3+2n-9}{-3n^4+2n^2+7}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-3n+7}{5-6n^2}$;

Замечание. Результаты решенных упражнений легко обобщаются. А именно, имеет место следующее утверждение:

Утверждение.

Пусть даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ и требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$. Тогда:

- *Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = 0$;*
- *Если $\deg P(x) > \deg Q(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \infty$;*
- *Если $\deg P(x) = \deg Q(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ равен отношению старших коэффициентов многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.*

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\,(3n+2)\,n}{(n+3)\,(2n-4)\,(n+8)}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{2} - \dfrac{n^2}{2n+1}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{4^n}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 11} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}\right)$.

2°. Нахождение пределов с использованием теорем о бесконечно малых и бесконечно больших последовательностях

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n^2+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 3n^2\sin n + n\cos n + 1}{3n^2 + 5n\cos 2n + 5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n} \cdot \cos n\right)$.

Домашнее задание

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+1}{3n-2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n^2+5n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+3n+1}{2n^2-1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)\,(3n-2)}{(n+2)\,(4n-1)}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{5n+1}{3n+2}\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n}-\dfrac{5}{n^2}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n+1}-\dfrac{6n^3}{4n^2-1}\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(3-n)^3}{n^2+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{2n+\sin n}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n\,\sin n+n^2}+\dfrac{\sqrt{2}\,n}{n+1}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$.

Урок 12. Теорема о пределе степени

Домашнее задание

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{\sqrt{n^2+3n+10}+3n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\,(n+3)}-n\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{2n+6}\right)^5$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt{n^3}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}}+\dfrac{\cos n}{n^2}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\,\sin n!}{n+1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\cos n$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^{-n}}{1+3^{-n}}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^n+3\cdot 7^n}{7+3^n+7^n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2+\sin n}{3n^2+n\,\cos 2n}-\dfrac{5^n+3^n}{3\cdot 5^n-2^n}\right)$.

Урок 14. Критерий Вейерштрасса

Домашнее задание

1) Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, докажите сходимость следующих последовательностей:

   (1) $x_n = a+\dfrac{p_1}{10}+\ldots+\dfrac{p_n}{10^n}$, где $a\in\mathbb{Z}$, а p_i – целые неотрицательные числа, не превышающие 9;

   (2) $x_n = \dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+9}{2n-1}$;

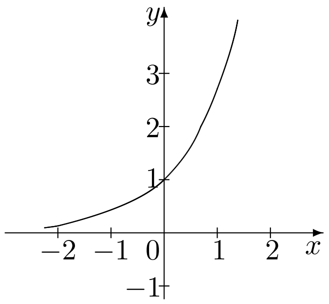
   (3) $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(4) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\ldots$, $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}$, $\ldots$

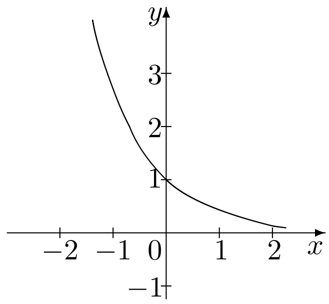
2) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1)$.

Урок 18. Свойства степени с действительным показателем. Теорема о предельном переходе в показателе степени. Показательная функция и ее график

График показательной функции $f(x) = a^x$ выглядит следующим образом:



а) $a > 1$



а) $0 < a < 1$

Урок 19. Понятие логарифма

1°. Логарифмическая функция

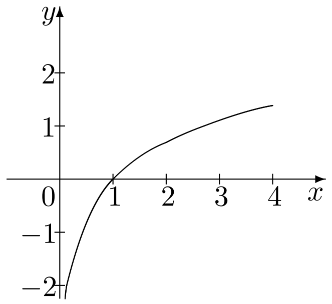
1) Показательная функция $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) строго монотонна. Следовательно, существует обратная к ней функция $g(x) = f^{-1}(x)$.

Определение.

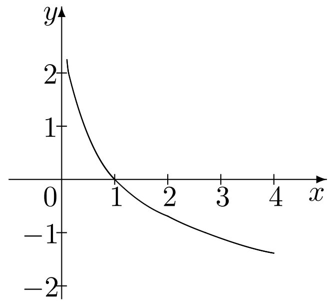
> *Функцию, обратную показательной, называют* ***логарифмической*** *и обозначают* $\log_a x$. *При этом число* a *называют* ***основанием логарифма***.

2) В математическом анализе встречаются, в основном, логарифмы с основанием e. Такие логарифмы называют **натуральными** и обозначают $\ln x$. В прикладных науках чаще всего используют **десятичные** логарифмы, т. е. логарифмы с основанием 10. Их обозначают $\lg x$.

3) Поскольку логарифмическая функция $g(x) = \log_a x$ обратна показательной функции $f(x) = a^x$, то график функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x)$ относительно биссектрисы I-III координатных углов.



а) $a > 1$



б) $0 < a < 1$

4) Перечислим **свойства логарифмической функции**. Их можно либо доказать непосредственно, либо вывести, опираясь на общую теорию взаимно обратных функций.

   (1) Функция $g(x) = \log_a x$ определена при всех положительных x.

   (2) Областью значений функции $g(x) = \log_a x$ является вся числовая ось.

   (3) Функция $g(x) = \log_a x$, очевидно, не является ни четной, ни нечетной.

   (4) Функция $g(x) = \log_a x$ непериодична.

   (5) Функция $g(x) = \log_a x$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$.

   (6) График функции $g(x) = \log_a x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (т. к. график показательной функции $f(x) = a^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$).

   (7) График функции $g(x) = \log_a x$ имеет единственную точку пересечения с осями координат $(1; 0)$, т. е.

$$\boxed{\log_a 1 = 0.} \tag{19.1}$$

   (8) Функция $g(x) = \log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $a < 1$. Экстремумов логарифмическая функция не имеет.

   (9) Функция $g(x) = \log_a x$ на всей области определения выпукла вверх при $a > 1$ и выпукла вниз при $a < 1$.

2°. Логарифм числа

1) Пусть, по-прежнему, $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Т. к. $f(x)$ и $g(x)$ – взаимно обратные функции, то $f(g(x)) = x$. Следовательно,

$$\boxed{a^{\log_a x} = x.} \tag{19.2}$$

2) Равенство (19.2) называют **основным логарифмическим тождеством** и часто используют для определения логарифма:

Определение.

> ***Логарифмом числа* x *по основанию* a** *называют показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить данное число x.*

Замечание. При таком подходе необходимо выяснять, существует ли $\log_a x$, единственен ли он. Вводя логарифмическую функцию как обратную показательной, мы сразу ответили на все эти вопросы.

3) Из того, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, следует также, что $g(f(x)) = x$, т. е.

$$\boxed{\log_a a^x = x.} \tag{19.3}$$

4) Подставляя в (19.3) $x = 1$ получаем, что

$$\boxed{\log_a a = 1.} \tag{19.4}$$

Впрочем, равенство (19.4) сразу следует из определения логарифма.

5) **Упражнения**.

(1) Вычислите:

а) $\log_{1/3} 9$;

б) $\log_{100} 1000$.

(2) При каких значениях x справедливы следующие неравенства:

а) $\lg(5x-1) < \lg(4x+1)$;

б) $\log_{0,5} x > \log_{0,5} \dfrac{x}{2}$;

в) $\log_x 4 > \log_x 3$.

(3) Постройте графики функций:

а) $y = \log_{1/2}(4x-8)$;

б) $y = \ln(6-2x)$.

Домашнее задание

1) Вычислите:

(1) $\log_{1/2} 64$;

(2) $\log_7 \sqrt[5]{343}$;

(3) $\log_{1000} \sqrt[5]{10}$;

(4) $\dfrac{4^{\log_4 48}}{3^{\log_3 16}}$.

2) При каких значениях x справедливы неравенства:

(1) $\log_7 x < \log_7 2x$;

(2) $\log_{1/4}\left(x^2-1\right) \geqslant \log_{1/4}(2x+14)$;

(3) $\log_x \sqrt{2} < \log_x 1,2$;

(4) $\log_x \sin\dfrac{\pi}{4} < \log_x \sin\dfrac{\pi}{3}$;

3) Что больше: $\log_a N$ или $\log_a \dfrac{1}{N}$, если:

(1) $a > 1$, $N > 1$;
(2) $a < 1$, $N > 1$;
(3) $a > 1$, $0 < N < 1$;
(4) $a < 1$, $0 < N < 1$?

4) Найдите область определения следующих функций:

(1) $\ln(-4x - 6)$;
(2) $\log_2(x-4) + \log_{1/9}(4-x)$.

5) Постройте графики функций:

(1) $y = \log_{1/3}|x|$;
(2) $y = \left|\log_3(x+2)\right|$.

6) Постройте ГМТ, задаваемые равенствами:

(1) $|y| = \ln(x-1)$;
(2) $|y| = \left|\log_4(2x-1)\right|$.

Урок 20. Формулы логарифмирования

1°. Повторение

1) Вычислите:

(1) $\lg\left(10\sqrt[3]{100}\right)$;
(2) $\ln\log_7 7$;
(3) $5^{1-\log_5 2}$;
(4) $9^{\log_3 6 - 1{,}5}$;
(5) $\log_{1/3}\log_2 512$;
(6) $\log_{0{,}5}\sqrt[3]{10 + \lg 0{,}01}$.

2) Найдите область определения следующих функций:

(1) $\ln(3-2x) + \lg\left(4 - x^2\right)$;
(2) $\log_{x/(6-x)}\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

3) Постройте график функции $y = \sqrt{\lg\sin x}$.

2°. Формулы логарифмирования

1) Сейчас мы познакомимся с несколькими очень важными свойствами логарифмов. Пусть a – положительное действительное число, не равное 1. Тогда:

- Для любого $x > 0$ и произвольного действительного α

$$\boxed{\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x;} \tag{20.1}$$

Доказательство: Из определения логарифма сразу следует, что

$$a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha, \qquad a^{\alpha \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = x^\alpha.$$

Но показательная функция строго монотонна, т. е. принимает каждое свое значение только один раз. Следовательно, $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

- Для любых $x > 0$ и $y > 0$

$$\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y;} \tag{20.2}$$

Доказательство: Из определения логарифма сразу следует, что

$$a^{\log_a (xy)} = xy, \qquad a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Но показательная функция строго монотонна, т. е. принимает каждое свое значение только один раз. Следовательно, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

- Для любых $x > 0$ и $y > 0$

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.} \tag{20.3}$$

Доказательство: Равенство (20.3) можно доказать точно так же, как и равенство (20.2). А можно воспользоваться уже доказанными формулами (20.1) и (20.2):

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \left(xy^{-1}\right) = \log_a x + \log_a \left(y^{-1}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

2) Формулы (20.1) –(20.3) называются **формулами логарифмирования**. Они позволяют свести нахождение логарифмов от сложных рациональных выражений к нахождению логарифмов сомножителей.

Упражнения.

(1) Вычислите:

а) $2\log_{1000} 5 + \log_{1000} 40$;

б) $\log_3 \sin \frac{\pi}{6} - \log_3 \cos \frac{\pi}{6}$.

(2) Выразите $\ln \dfrac{a^3 \sqrt[5]{b^2}}{c\sqrt{pq^3}}$ через $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$, $\ln p$ и $\ln q$.

(3) Выразите $\lg x$ через $\lg 2$ и $\lg 3$, если $x = \sqrt{\dfrac{24\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}}$.

3) Иногда приходится иметь дело с обратной задачей: нахождением числа по его логарифму. Такую операцию называют **потенцированием**. И здесь формулы логарифмирования часто бывают полезны.

   Упражнения.

   (1) Найдите x, если $\log_a x = \log_a c + b$.

   (2) Найдите x, если $\ln x = \frac{2}{3}\ln(a+b) - \frac{1}{3}\ln(a-b) + \frac{2}{3}\ln a - \frac{1}{3}\ln b$.

4) При работе с логарифмами часто делают ошибки, связанные с неправильным применением формул логарифмирования. Надо помнить, что вообще говоря,

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(xy) \neq \log_a x \cdot \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

   Также ни в коем случае нельзя выносить минус из под знака логарифма:

$$\log_a(-x) \neq -\log_a x.$$

Домашнее задание

1) Найдите область определения следующих функций:

   (1) $\lg\frac{2x-1}{5-x} - \ln\left(x^2-1\right)$;

   (2) $\log_{x^2}(3x-2)$.

2) Является ли равенство $\log_2\left(x^2-4\right) = \log_2(x-2) + \log_2(x+2)$ тождеством? В какой области оно выполняется?

3) Вычислите:

   (1) $\log_2 10 - \log_2 5$;

   (2) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

4) Упростите выражение: $\log_a\frac{2}{1} + \log_a\frac{3}{2} + \ldots + \log_a\frac{n+1}{n}$.

5) Прологарифмируйте по основанию a следующие выражения:

   (1) $x = \sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$;

   (2) $x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b\sqrt{m}}{b^2+c^2}}$;

   (3) $x = \frac{24m^2\sqrt{b+c}}{n^4\sqrt[3]{b-c}}$;

   (4) $x = \sqrt[5]{\frac{a^4 b^{-3} c^2 \sqrt{m+n}}{d^{-3} y^{-1/8}}}$.

6) Найдите x, если:

(1) $\log_a x = \dfrac{1}{3}\left(\log_a b - \dfrac{2}{5}\,\log_a c + \log_a d + 4\right)$;

(2) $\log_a x = \dfrac{1}{4}\left(\log_a y + \dfrac{3}{7}\left(\log_a z - 2\right)\right)$;

(3) $\log_a x = 3\left(\dfrac{1}{4}\log_a y + \dfrac{7}{3}\left(\log_a z - \dfrac{1}{5}\left(\log_a t + 2\,\log_a w\right)\right)\right)$.

Урок 21. Формула перехода к другому основанию и ее следствия

1°. Формула перехода к другому основанию

1) Как уже упоминалось, в математическом анализе встречаются в основном натуральные логарифмы. Однако в школьном курсе алгебры приходится преобразовывать выражения, в которые входят логарифмы с различными основаниями. Поэтому достаточно часто возникает необходимость выразить логарифмы по одному основанию через логарифмы по другому основанию. Делается это с помощью формулы

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},} \tag{21.1}$$

которую называют **формулой перехода к другому основанию**.

Доказательство: Прологарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$ по основанию b:

$$\log_b a^{\log_a x} = \log_b x.$$

С учетом (20.1) отсюда сразу же получаем, что $\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$. Осталось разделить обе части последнего равенства на $\log_b a$. ■

2) Формулу (21.1) можно переписать в виде $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$. Меняя обозначения, получаем изящное равенство

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.} \tag{21.2}$$

3) **Упражнения**. Вычислите:

(1) $7^{\frac{\ln\ln 2}{\ln 7}}$;

(2) $\dfrac{\log_5 0,125}{\log_5 22 - \log_5 11}$;

(3) $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$.

2°. Следствия из формулы перехода к другому основанию

1) Пусть a и b – два положительных числа, не равные 1. Подставляя в (21.1) $x = b$, сразу же получаем, что

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.} \tag{21.3}$$

Эта формула часто используется при преобразовании логарифмических выражений.

2) В курсе алгебры нам неоднократно будут встречаться логарифмы, основание которых представляет собой степень какого-то числа. При преобразовании таких логарифмов бывает полезной следующая формула:

$$\boxed{\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b, \quad k \neq 0.} \tag{21.4}$$

Доказательство: Из (21.1) сразу следует, что $\log_{a^k} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a a^k} = \dfrac{\log_a b}{k}$.

■

3) **Упражнения**. Вычислите:

(1) $5^{\frac{1}{\log_2 5}}$;

(2) $10,1^{\frac{2}{\lg 10,1}}$;

(3) $2^{-1-\log_4 3}$;

(4) $\log_4 \dfrac{1}{5} + \log_2 6 + \dfrac{1}{2}\log_4 \dfrac{25}{81} - \log_{16} 64$;

(5) $\log_{125} 5 - \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2} + \log_{2,5} 0,4$;

(6) $\log_3 5 \cdot \log_{0,2} 9$;

(7) $\log_{64} 7 \cdot \log_{49} 6 \cdot \log_{6\sqrt{6}} 4$;

(8) $\dfrac{\log_2 72}{\log_{18} 2} - \dfrac{\log_2 12}{\log_{81} 2}$.

Домашнее задание

1) Вычислите:

   (1) $3^{\frac{1}{\log_5 3}}$;

   (2) $5^{1+2\log_{0,2} 2}$;

   (3) $27^{\log_9 2}$;

   (4) $\sqrt{25^{1/\log_6 5} + 49^{1/\log_8 7}}$;

   (5) $a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}$.

   (6) $\log_{1/8}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$;

   (7) $\log_{15} 20 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18 \cdot \log_{20} 19$;

   (8) $3^{\log_{1/3} 0{,}04} + \log_{25}\left(3+2\sqrt{2}\right) - \log_{1/5}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

2) Докажите, что

   (1) $\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_{a^2} N} + \dfrac{1}{\log_{a^3} N} + \dfrac{1}{\log_{a^4} N} + \dfrac{1}{\log_{a^5} N} = 15\,\log_N a$;

   (2) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$.

Урок 23. Подпоследовательности. Лемма Больцано – Вейерштрасса

Домашнее задание

1) Найдите все предельные точки следующих последовательностей:

   (1) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$;

   (2) $x_n = (-1)^n$;

   (3) $x_n = n$;

   (4) $x_n = n^{(-1)^n}$.

2) Докажите, что если последовательность имеет предел, равный a, то она не имеет предельных точек, отличных от a.

3) Найдите пределы:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3+4}\right)^{5n^2+3}$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{4n^2}$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2+2}\right)^{3n^2}$.

4) а) Пусть $\{p_n\}$ – произвольная последовательность действительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}=e$.

б) Пусть $\{q_n\}$ – произвольная последовательность действительных чисел, стремящаяся к $-\infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e$.

5) Существует ли последовательность, множество предельных точек которой есть:

а) $\mathbb{N}$; б) $[0;1]$; в) $\mathbb{Q}$?

Урок 24. Критерий Коши существования предела последовательности

Домашнее задание

Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость следующих последовательностей:

1) $x_n=\dfrac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\sin n!}{n\,(n+1)}$;

2) $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos n!}{n\,(n+1)}$.

Вопросы к зачету

1. Лемма о вложенных отрезках (аксиома Кантора). Ограниченные множества. Понятие точной верхней (нижней) грани. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного множества.

2. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о сохранении знака.

3. Теорема о пределе суммы (разности).

4. Теорема о пределе произведения.

5. Теорема о пределе частного.

6. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Лемма "о двух милиционерах".

7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

8. Монотонные последовательности. Критерий Вейерштрасса существования предела монотонной последовательности. Пределы $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, $|q|<1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$, $|a|>1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{n!}$.

9. Число e.

10. Определение степени с иррациональным показателем.

11. Теорема о предельном переходе в показателе степени (непрерывность показательной функции).

12. Непрерывность логарифмической и степенной функций. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n}$. Непрерывность тригонометрических функций.

13. Подпоследовательности. Лемма Больцано – Вейерштрасса.

14. Предельные точки множества. Производное множество. Теорема Вейерштрасса о предельных точках.

15. Критерий Коши существования предела последовательности.

16. Понятие числового ряда. Бесконечная геометрическая прогрессия. Критерий Коши сходимости ряда. Расходимость гармонического ряда. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0$.

3. Докажите, что $0<e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{3}{n}$.

4. Докажите, что $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<e\cdot\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$.

5. а) Докажите, что $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ при любом натуральном n.

б) Докажите, что если $\alpha>-1$, то $\ln(1+\alpha)\leqslant\alpha$.

в) Докажите, что $1+\alpha\leqslant e^{\alpha}$, где α – произвольное действительное число.

6. Докажите, что последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ сходится.

7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{1/n}-1\right)=\ln a$, где $a>0$.

8. а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)=e$.

б) Выведите формулу $e=2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{n\cdot n!}$, где $0<\theta_n<1$.

в) Докажите, что число e иррационально.

9. Докажите, что из любой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

10. а) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то последовательность средних арифметических $S_n = \left\{\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}$ также сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

б) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ $(x_n > 0)$ сходится, то последовательность средних гармонических $H_n = \left\{\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}\right\}$ также сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ $(x_n > 0)$ сходится, то последовательность средних геометрических $G_n = \left\{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right\}$ также сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

г) Докажите, что если последовательность $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ $(x_n > 0)$ сходится, то последовательность $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ также сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

д) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

11. *(Теорема Штольца)* Пусть b_n – бесконечно большая возрастающая последовательность, a_n – произвольная последовательность. Тогда если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, и эти пределы равны.

12. а) Докажите, что при натуральном p $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$.

б) Докажите, что при натуральном p $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

в) Докажите, что при натуральном p $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

13. а) Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ сходится.

б) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

14. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}\ (n \geqslant 1).$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

15. Даны числа a, b, c. Построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, где

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ c_1 = c,\ a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2},\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Докажите, что эти последовательности имеют общий предел, и найдите его.

16. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

17. [арифметико-геометрическое среднее] Докажите, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, задаваемые по формулам

$$x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел.