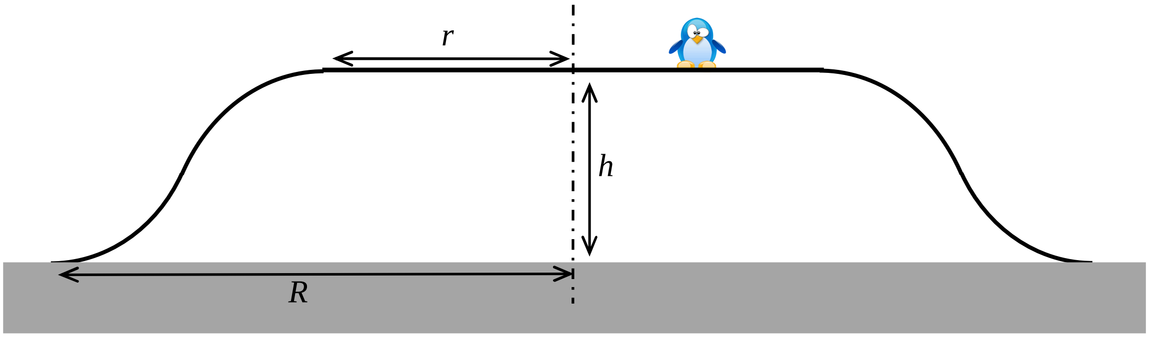
10 клас

Розв’язок задачі № 1.
Згідно умови під час спуску пінгвін не відривається від поверхні айсбергу. Це можна розуміти по-різному.

1) Пінгвін за будь-якої швидкості нездатний відірватися від схилу, оскільки це заборонено автором задачі (птах до схилу наче приклеївся).



2) Бажання автора недостатньо і треба врахувати фізичні чинники, що обумовлюють рух без відриву (швидкість, кривизна траєкторії). При цьому до рисунку можна віднестися або як до суто схематичного, або як до такого, що дозволяє змоделювати профіль схилу дугами парабол, кіл, тощо…

Найбільшої швидкості на горизонтальній дільниці пінгвін може набрати, рухаючись з максимальним прискоренням μg вздовж діаметру: $v_0 = \sqrt{2\mu g d} = 2\sqrt{\mu g r}$. Далі скористуємось законом збереження енергії

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \qquad (1)$$

і отримаємо максимальну швидкість при вході у воду $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{2g(2\mu r + h)} = 14\,\text{м/с}$.

Внаслідок циліндроподібної форми айсбергу і відсутності сил тертя, на пінгвіна під час спуску діє спрямована у вертикальній площині сила реакції з боку схилу. Отже, момент імпульсу пінгвіна відносно осі симетрії айсберга зберігатиметься. Припустимо, що пінгвін підбігає під кутом α до лінії майданчика (дуги кола радіусом r), а залишає айсберг під кутом β до дуги кола радіусом R. За законом збереження імпульсу маємо $mv_0 r\cos\alpha = mvR\cos\beta$, де v_0, v - швидкості на початку і наприкінці спуску. Пінгвін набув швидкості v_0, розганяючись вздовж хорди, довжина якої $l = 2r\sin\alpha$, тобто, він міг досягти максимальної швидкості $v_0 = \sqrt{2\mu g l} = \sqrt{4\mu g r\sin\alpha}$. Виражаємо $\cos\beta$ із закону збереження моменту імпульсу і враховуємо закон збереження енергії:

$$\cos\beta = \frac{rv_0}{Rv}\cos\alpha = \frac{rv_0\cos\alpha}{R\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{r\cos\alpha}{R\sqrt{1 + 2gh/v_0^2}}.$$

Як бачимо з останнього виразу, чим більшою виявиться швидкість v_0, тим більшим буде $\cos\beta$, а, отже, меншим β. Тому підставимо $v_0 = \sqrt{4\mu g r\sin\alpha}$ і отримаємо

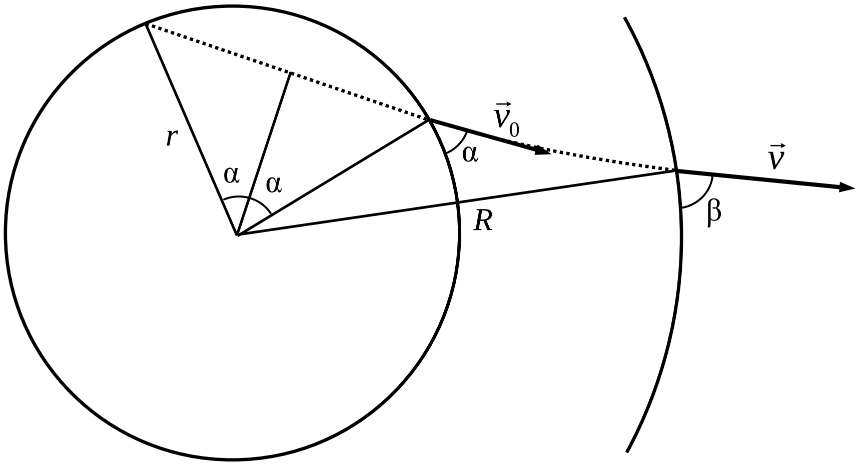
$$\cos\beta = \frac{r\cos\alpha}{R\sqrt{1 + \dfrac{h}{2\mu r\sin\alpha}}} = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \dfrac{h}{2\mu r}}}.$$

Залишається проаналізувати, за якого кута α кут β буде мінімальним. Підкореневий вираз доволі складний, але, у нашому випадку він спрощується, оскільки $h/(2\mu r)=1$.

$$\cos\beta=\frac{r}{R}\sqrt{\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{1+\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right)^2}$$

Найбільше значення $\cos\beta=1/4$ маємо, коли $\sin\alpha=1/2$. Отже, пінгвін має розігнатися вздовж хорди, що утворює з дугою у місці дотику кут $\alpha=30^\circ$, і, з'їхавши вниз, відірветься від краю айсберга під кутом $\beta=\arccos(1/4)\approx 75{,}5^\circ$.

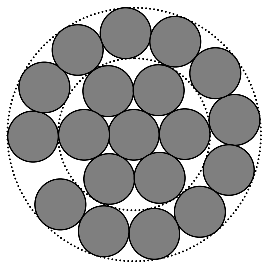


Тепер спробуємо врахувати фізичні чинники відсутності відриву. Вважатимемо зображення схилу в умові схематичним і навіть таким, зміна якого з метою забезпечення максимуму швидкості тільки вітається.

За швидкості $v_0=2\sqrt{\mu g r}$ тіло, кинуте горизонтально з висоти $h=5\text{м}$, пролітає вздовж горизонталі відстань $l=2\sqrt{2\mu h r}=10\,\text{м}$. Як бачимо, це більше за $R-r=5\,\text{м}$, і пінгвін обов'язково відірветься від схилу. Якщо пінгвін розганятиметься з центру майданчику (вздовж одного радіусу), то він, рухаючись вздовж параболи, якраз і пролетить по горизонталі відстань $R-r=5\,\text{м}$. Отже, оптимальний схил матиме форму такої параболи. Пінгвін, не відриваючись від неї, тим не менш не буде на неї тиснути, що дозволить, виконати умову задачі і досягти максимальної швидкості внизу. Біля самої берегової лінії парабола може перейти у невелику дугу, що забезпечить її горизонтальне спряження з водою. Тепер слід розглянути більш загальний випадок руху пінгвіна вздовж хорди, довшої за 5 метрів.

Розв'язок задачі № 2

Сталь у дротах використовують завдяки її міцності. Це дозволяє зменшити кількість опор ліній електропередач, збільшивши між ними відстані. Щоб сталь не іржавіла під дією атмосферної вологи, її вкривають тонким шаром цинку. Алюміній виконує головну роль дроту, як добрий і досить дешевий провідник струму. Але алюміній – м'який метал, і тому алюмінієвий дріт навивають на сталевий. Шари навивають у протилежних напрямках, щоб жодна з дротин не «провалилася» між дротинами попереднього шару, а також щоб наступний шар фіксував структуру попереднього шару. Крім того, така будова кабелю розподіляє механічне навантаження між окремими дротинами, запобігаючи локальному руйнуванню дротин. Розглянемо перпендикулярний переріз дроту, вважаючи, що всі дротини прямі і нінащо не



Рис

навиваються (Рис.1). Як бачимо, якщо перший шар з 6 дротин ліг ідеально (ніяких зазорів між дротинами), то у другому шарі може бути не більше 12 дротин. Для того, щоб вони щільно прилягали одна до одної, слід їх трохи повернути. Тоді кожна дротина другого шару навиватиметься на циліндр діаметром $3d$, а її форма нагадуватиме гвинтову лінію. З фотографії в умові задачі дійсно можна зробити висновок, що другий шар нараховує 12 дротин. Тоді третій шар за умовою задачі матиме $30-12=18$ алюмінієвих дротин.

Кількість дротин у шарі можна оцінити, поділивши довжину кола, що проходить через центри відповідних дротин на діаметр дротин d. Так, для другого шару радіус кола дорівнює $2d$. Тому $N_2 \approx \frac{2\pi \cdot 2d}{d} = 4\pi \approx 12{,}57$. Між дванадцятьма дротинами залишається вільне місце (Рис.1). Уникнути його, тобто забезпечити щільне прилягання дротин одна до одної, можна шляхом нахилу дротин (навивання).

На Рис. 3 зображена верхня дротина, яка утворює з віссю кабелю кут β і має перпендикулярний до цього напряму еліптичний переріз з великою віссю $\frac{d}{\cos\beta}$.

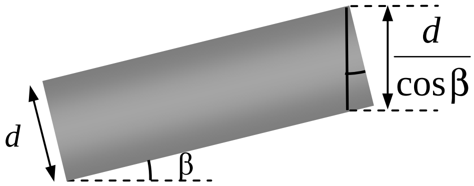


Рис.3

З цього $\cos\beta = \frac{12}{4\pi}$, звідки β = 17,3°. Для третього шару (зовнішньому на фото в умові задачі) $N_3 \approx 6\pi \approx 18{,}85$, тобто 18 дротин і вільне місце. Тому третього шару $\cos\beta = \frac{18}{6\pi}$, що дає те ж саме значення β = 17,3°.

Для четвертого шару $N_4 = 8\pi \approx 25{,}13$. Тому $\cos\beta = \frac{25}{8\pi}$, звідки β = 5,9°. Зауважимо, що в разі використання 24 дротин кут нахилу $\cos\beta = \frac{24}{8\pi}$, що дає знайоме значення β = 17,3°. Це може бути технологічно більш доцільним.

Тепер розрахуємо опір $l = 1\,\text{км}$ дроту. Оскільки кут β = 17,3°достатньо малий, довжина дроту перебільшуватиме довжину кабелю всього у $\frac{1}{\cos\beta} \approx 1{,}047$ рази. Знехтуємо цим. Опір однієї дротини $R = \rho l / S = 4\rho l / \pi d^2$. Загальний опір $R_{заг}$ паралельного з'єднання 7 сталевих і 30 алюмінієвих дротин:

$$\frac{1}{R_{заг}} = \frac{7\pi d^2}{4\rho_{ст} l} + \frac{30\pi d^2}{4\rho_{ал} l} = \frac{\pi d^2}{4l}\left(\frac{7}{\rho_{ст}} + \frac{30}{\rho_{ал}}\right),$$

Звідки знаходимо: $R_{заг} \approx 0{,}27$ Ом. (Або 0,29 Ом за умови врахування збільшення довжини дротин).

Розв'язок задачі № 3

Найбільш фантастичними є припущення про тунель і відсутність атмосфери. Інші дані приблизно відповідають параметрам Землі та космічної обсерваторії «Кеплер».

1) Унаслідок згоряння чергової малої порції палива КО отримує певний імпульс (отже, й зміну швидкості), пропорційний масі витраченого палива. Зміна швидкості Δv однакова в усіх інерціальних системах відліку; зміна ж кінетичної енергії $\Delta W_k = \frac{m(v+\Delta v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \approx mv \cdot \Delta v$ тим більша, чим більша швидкість руху. Отже, найвигіднішим є вмикання двигуна під час максимально швидкого руху (тут нема протиріччя з законом збереження енергії: що більша швидкість, то меншу частку вивільненої енергії згоряння палива отримують гази, що відкидаються реактивним двигуном назад). Таким чином, можна запропонувати такий метод старту: КО скинути в

тунель і в момент досягнення найбільшої швидкості (у центрі планети) увімкнути двигун на розгін. Витрата палива прямо пропорційна зміні швидкості КО. Підрахуємо потрібні зміни швидкості для обох випадків.

Потенціальна енергія взаємодії КО з планетою на поверхні планети дорівнює $-G\frac{Mm}{R} = -mgR$, а в центрі планети ця енергія менша на $\frac{mgR}{2}$, тобто дорівнює $-\frac{3mgR}{2}$ (цей результат випливає з того, що всередині однорідної планети сила тяжіння пропорційна відстані до її центра). КО при падінні до центра планети набуває швидкості $v_1 = \sqrt{gR}$. Після роботи двигуна повна механічна енергія КО має збільшитися до нуля (КО віддаляється від планети на дуже велику відстань, потенціальна енергія зменшується за модулем більше ніж у 200 разів). Таким чином, при старті з поверхні КО матиме швидкість $v_2 = \sqrt{2gR}$ (це друга космічна швидкість для даної планети), а при старті з середини тунелю (з центра планети) потрібна швидкість $v_3 = \sqrt{3gR}$.

Отже, у першому випадку двигун має змінити швидкість КО на v_2, а у другому — на $v_3 - v_1$. Отже, відношення витрат палива становить $\frac{m_{\text{тунель}}}{m_{\text{поверхн}}} = \frac{v_3 - v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \approx 0,52.$

Застосування тунелю дозволить зекономити близько 48 % палива.

2) Через меншу швидкість порівняно з планетою КО матиме меншу велику піввісь траєкторії, а відповідно — й менший період обертання. Тому КО «обганятиме» планету і кожного разу торкатиметься її орбіти далі від планети. Скористаємося тим, що велика піввісь траєкторії a пов'язана з механічною енергією тіла через співвідношення $W = -G\frac{Mm}{2a}$ (див. додаток). У цьому розділі через M позначено масу зорі, а не планети.

За швидкості $v_0 = \sqrt{G\frac{M}{a_0}} = 30\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$ КО рухалася б коловою траєкторію радіусом $a_0 = 150$ млн км. Зазначимо, що період обертання коловою траєкторією $T_0 = \frac{2\pi a_0}{v_0} \approx 31,4\cdot 10^6$ с (як і слід було очікувати, це приблизно один рік). Отже, $W_0 = -\frac{mv_0^2}{2}$.

Якщо швидкість КО на відстані a_0 від зорі трохи менша від v_0 (на $\Delta v = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$), то кінетична й повна механічна енергії менші приблизно на $mv_0 \cdot \Delta v$. Отже, відносне *збільшення* модуля механічної енергії (і, відповідно, *зменшення* півосі орбіти) становить $\frac{2\Delta v}{v_0}$.

Із третього закону Кеплера випливає, що відносне зменшення періоду обертання дорівнює $\frac{3}{2}\cdot\frac{2\Delta v}{v_0} = \frac{3\Delta v}{v_0}$. Отже, за цей час планета пройде менше від повної довжини колової траєкторії на $\frac{3\Delta v}{v_0}\cdot 2\pi a_0 = 6\pi a_0\frac{\Delta v}{v_0} = 940\,000$ км. Саме на стільки збільшиться відстань між КО і планетою.

Додаток. Щоб довести формулу $W = -G\frac{Mm}{2a}$, розглянемо точки з найбільшою та найменшою відстанями від зорі (відповідно r_1, r_2). Ці точки лежать на великій осі еліпса; отже, швидкість у цих точках перпендикулярна до великої осі. Скористаємося законами збереження енергії та моменту імпульсу:

$$W = -G\frac{Mm}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2} = -G\frac{Mm}{r_2} + \frac{mv_2^2}{2},\ L = mv_1r_1 = mv_2r_2.$$

Виключивши v_2 і скоротивши $r_1 - r_2$ (випадок кола дуже легкий), отримуємо $G\frac{Mm}{r_1} = \frac{mv_1^2}{2}\cdot\frac{r_1 + r_2}{r_2}$, звідки $W = -G\frac{Mm}{r_1 + r_2} = -G\frac{Mm}{2a}$.

Розв’язок задачі 4

Общая утечка тепла из баков (мощность тепловых потерь) равна

$$P = k \cdot (t_1 - t_0) + k \cdot (t_2 - t_0) + k \cdot (t_3 - t_0) + k \cdot (t_4 - t_0) = k \cdot [(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - 4t_в]$$

где $t_в = 20°C$ - температура воздуха в цеху, k - некоторый коэффициент, характеризующий интенсивность утечки тепла из бака.

Отсюда видно, что для уменьшения общей утечки тепла из баков необходимо уменьшить «суммарную» температуру баков $\Theta = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

Посмотрим, чем определяется эта «суммарная» температура и температура реагентов в каждом баке.

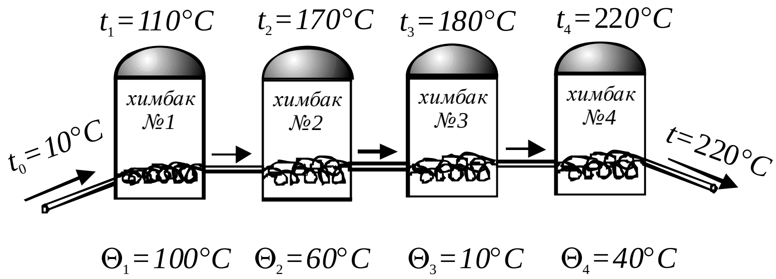


Рис. 2

То, что есть характеристикой бака и не зависит от подключения – это интенсивность химических реакций внутри бака и связанная с ней мощность выделяемого тепла. Ее можно характеризовать температурой Θ, на которую должна нагреваться охлаждающая жидкость после прохождения через бак. (В стационарном состоянии уравнение теплового баланса для каждого бака дает $P = c\dfrac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \Theta$). Величина дополнительного нагрева воды Θ для каждого бака указаны на рисунке 2.

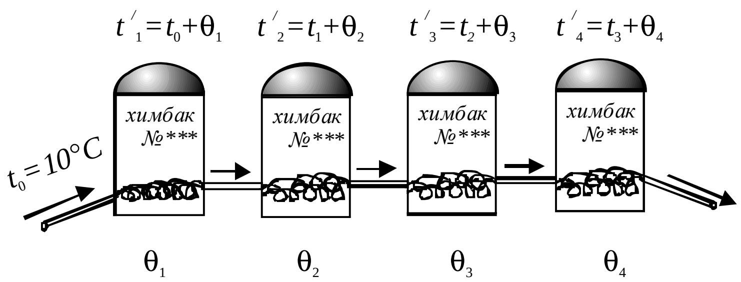


Рис. 3

Пусть у нас есть новое соединение баков. Чтобы не путать новые номера со старыми, обозначим «температуры нагрева баков» через θ_1, θ_2, θ_3 и θ_4.

Тогда температура в первом баке будет равна $t_1' = t_0 + \theta_1$, где t_0 - первоначальная температура охлаждающей жидкости. Такой же будет и температура воды на выходе из первого бака. Температура во втором баке будет $t_2' = t_1' + \theta_2 = t_0 + \theta_1 + \theta_2$. В третьем - $t_3' = t_2' + \theta_3 = t_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. В четвертом - $t_4' = t_3' + \theta_4 = t_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.
А «суммарная» температура баков окажется равной $\Theta' = t_1' + t_2' + t_3' + t_4' = 4 \cdot t_0 + 4 \cdot \theta_1 + 3 \cdot \theta_2 + 2 \cdot \theta_3 + 1 \cdot \theta_4$.

Для первоначального подключения баков эта величина была равна $\Theta = 680\ град$. А наша задача постараться сделать ее как можно меньше.

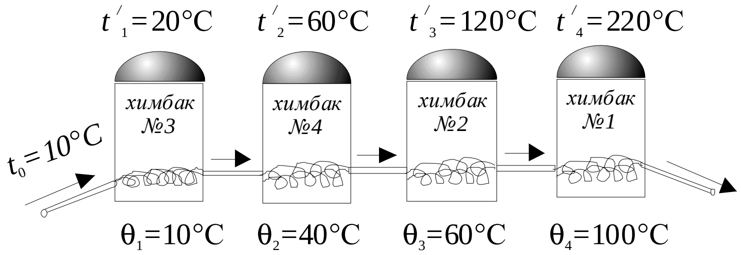


Рис. 4

Для минимизации мы воспользуемся следующей идеей: чтобы сумма $\Theta' = 4 \cdot t_0 + 4 \cdot \theta_1 + 3 \cdot \theta_2 + 2 \cdot \theta_3 + 1 \cdot \theta_4$ была как можно меньше, при большем множителе следует ставить как можно меньшую величину θ_i. Тогда получим

$$\Theta' = 4 \cdot t_0 + 4 \cdot \Theta_3 + 3 \cdot \Theta_4 + 2 \cdot \Theta_2 + 1 \cdot \Theta_1 = 420\ \textit{град}.$$

Считаем теперь, на сколько можно уменьшить мощность кондиционеров.

При первоначальном подключении мощность тепловыделения была равна

$$P = k \cdot \left[(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - 4t_в\right] = 600 \cdot k$$

При новом подключении

$$P' = k \cdot \left[(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - 4t_в\right] = 340 \cdot k\ .$$

Итого, мощность подогрева воздуха цеха уменьшилась на 43,3%

Ответ: мощность кондиционеров можно уменьшить в на 43,3%, если соединить баки следующим образом: первый – бак №3, второй – бак №4, третий – бак № 2, четвертый – бак № 1.

Розв'язок задачі № 5

Сформулюємо головний принцип, за допомогою якого ми будемо аналізувати умову запропонованого завдання.

Зображення з'єднувальних проводів на електричних схемах умовно: їх форму і довжину ми можемо змінювати довільним чином, а точки підключення ми можемо зсувати уздовж сполучних проводів.

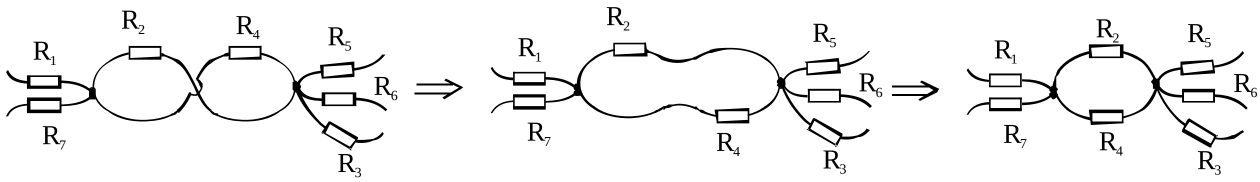


Рис. 2

Виходячи з цього принципу, змістимо точки підключення до «вісімки» опорів R_6, R_3 і R_7 і а після цього «розкрутимо» «вісімку» (рис. 2). Тепер видно, що у наведеній схемі опори R_2 і R_4 включені паралельно.

Тому у вихідній схемі опори R_2 і R_4 виконували роль одного опору з номіналом $R_{общ} = \dfrac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \dfrac{4}{3}\ Ом$. Після того, як опір перегорів, для відновлення працездатності схеми досить замінити опір одним опором з номіналом $R_x = \dfrac{4}{3}\ Ом$.

Відповідь: резистор R_4 замінили новим резистором з опором $R_x = \dfrac{4}{3}\ Ом$.