

Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ:
“НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”**

Харьков, 2010 г.

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C'$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a } + C = -\arccos \frac{x}{ a } + C'$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right + C \quad (\alpha \neq 0)$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{ a } + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right + C$	

Первообразная

1. Докажите, что функция $F(x) = \ln(-x) + \sqrt{-x}$ является первообразной для функции

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x \in (-\infty; 0).$$

Будет ли функция F первообразной для f на заданном промежутке, если:

2. $F(x) = \sqrt{4x^7 - 1} + 5, \quad f(x) = \frac{14x^6}{\sqrt{4x^7 - 1}}, \quad x \in (3; 4);$

3. $F(x) = \frac{1}{x} + 6x + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad f(x) = 6 - \frac{1}{x^2} - \sin 2x,$
а) $x \in \mathbb{R};$ б) $x \in (-\infty; 0);$ в) $x \in [0; 5);$ г) $x \in [1; 3];$ д) $x \in (-1; 1);$

4. $F(x) = x|x^2 - 3x - 4|, \quad f(x) = 3x^2 - 6x - 4, \quad x \in (4; 5);$

5. $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2, & x \geq 2, \end{cases} \quad f(x) = |x - 2|x,$

а) $x \in \mathbb{R};$ б) $x \in (-\infty; 2);$ в) $x \in (-\infty; 2];$
г) $x \in [2; \infty);$ д) $x \in (5; 7);$ е) $x \in (-5; 7)?$

Основные свойства неопределенного интеграла

Применяя таблицу простейших интегралов, найдите интегралы:

6. $\int \left(\frac{1}{3}x^8 - 6x^5 - x^2 - 4 \right) dx;$ 7. $\int (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx;$

8. $\int (3 - x^2)^3 dx;$ 9. $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + 3 \sin x \right) dx;$

10. $\int \left(3e^x - 5 \cdot 8^x + \frac{32}{x} \right) dx;$ 11. $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx;$

12. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$ 13. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$

14. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2};$ 15. $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$

16. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$ 17. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

Домашнее задание

Применяя таблицу простейших интегралов, найдите интегралы:

- | | |
|---|--|
| 18. $\int x^2 (5 - x)^4 dx;$ | 19. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx;$ |
| 20. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$ | 21. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx;$ |
| 22. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$ | 23. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx;$ |
| 24. $\int (1 + \sin x + \cos x) dx;$ | 25. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$ |

Формула замены переменных

Найдите интегралы:

- | | |
|---|--|
| 26. $\int \sqrt[3]{1-3x} dx;$ | 27. $\int \frac{dx}{2-3x^2};$ |
| 28. $\int \frac{dx}{1-\cos x};$ | 29. $\int \frac{x dx}{4+x^4};$ |
| 30. $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$ | 31. $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3 + 27)^{2/3}};$ |
| 32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}};$ | 33. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$ |
| 34. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)};$ | 35. $\int \frac{dx}{\cos x}.$ |

Упражнения на метод замены переменной

Найдите интегралы:

- | | |
|--|--|
| 36. $\int x (1-x)^{100} dx;$ | 37. $\int \frac{x^2}{1+x} dx;$ |
| 38. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)};$ | 39. $\int \frac{dx}{1+e^x};$ |
| 40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}};$ | 41. $\int x\sqrt{2-5x} dx;$ |
| 42. $\int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2};$ | 43. $\int \sin^2 x dx;$ |
| 44. $\int \sin^3 x dx;$ | 45. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$ |

$$46. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

Домашнее задание

Найдите интегралы:

$$47. \int \frac{x^3}{3+x} dx;$$

$$48. \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx;$$

$$49. \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)};$$

$$50. \int \cos^4 x dx;$$

$$51. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx;$$

$$52. \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$$

$$53. \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

$$54. \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$$

Формула замены переменных – 2

Найдите интегралы:

$$55. \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx;$$

$$56. \int \frac{dx}{1+\sin x};$$

$$57. \int \sin^5 x \cos x dx;$$

$$58. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;$$

$$59. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$$

$$60. \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$$

$$61. \int x^2 (2-3x^2)^2 dx;$$

$$62. \int \frac{x^5}{x+1} dx;$$

$$63. \int \frac{dx}{x^2+x-2};$$

$$64. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

Формула замены переменных – 3

Найдите интегралы:

$$65. \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx;$$

$$66. \int x^5 (2-5x^3)^{2/3} dx;$$

$$67. \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx;$$

$$68. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx;$$

$$69. \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$$

$$70. \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$$

$$71. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}};$$

$$72. \int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

Тригонометрические подстановки

Применяя тригонометрические подстановки $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$ и т. п., найдите интегралы (параметры положительны):

$$73. \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}};$$

$$74. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}};$$

$$75. \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx;$$

$$76. \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx;$$

$$77. \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$$

Гиперболические подстановки

Найдите интегралы:

$$78. \int \operatorname{sh}^2 x dx;$$

$$79. \int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx;$$

$$80. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$$

Применяя гиперболические подстановки $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$ и т. п., найдите интегралы (параметры положительны):

$$81. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx; \quad 82. \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx \quad (x \geq a);$$

$$83. \int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx \quad (x+a > 0, x+b > 0).$$

Интегрирование по частям

Применяя метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

$$84. \int \ln x dx;$$

$$85. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$$

$$86. \int x^2 e^{-2x} dx;$$

$$87. \int \arcsin x dx;$$

$$88. \int x^2 \arccos x dx;$$

$$89. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$90. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

Формулы понижения

91. Выведите формулу понижения для интеграла $K_n = \int \cos^n x dx$ ($n > 2$) и с ее помощью вычислите $\int \cos^8 x dx$.

92. Выведите формулу понижения для интеграла $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ ($n > 2$) и с ее помощью вычислите $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

Найдите интегралы:

93. $\int x^5 e^{x^3} dx;$

94. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx;$

95. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

96. $\int x \sin^2 x dx;$

97. $\int (e^x - \cos x)^2 dx.$

Интегралы, содержащие квадратные трехчлены

Найдите интегралы:

98. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1};$

99. $\int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1};$

100. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2};$

101. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx;$

102. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx;$

103. $\int \sqrt{2+x-x^2} dx;$

104. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+x-1}};$

105. $\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-2}}.$