9 клас, задача № 1

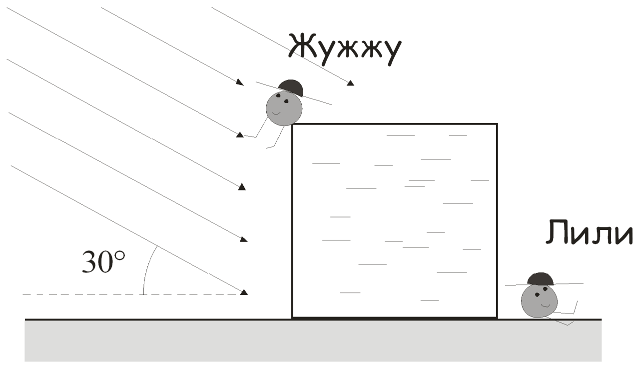


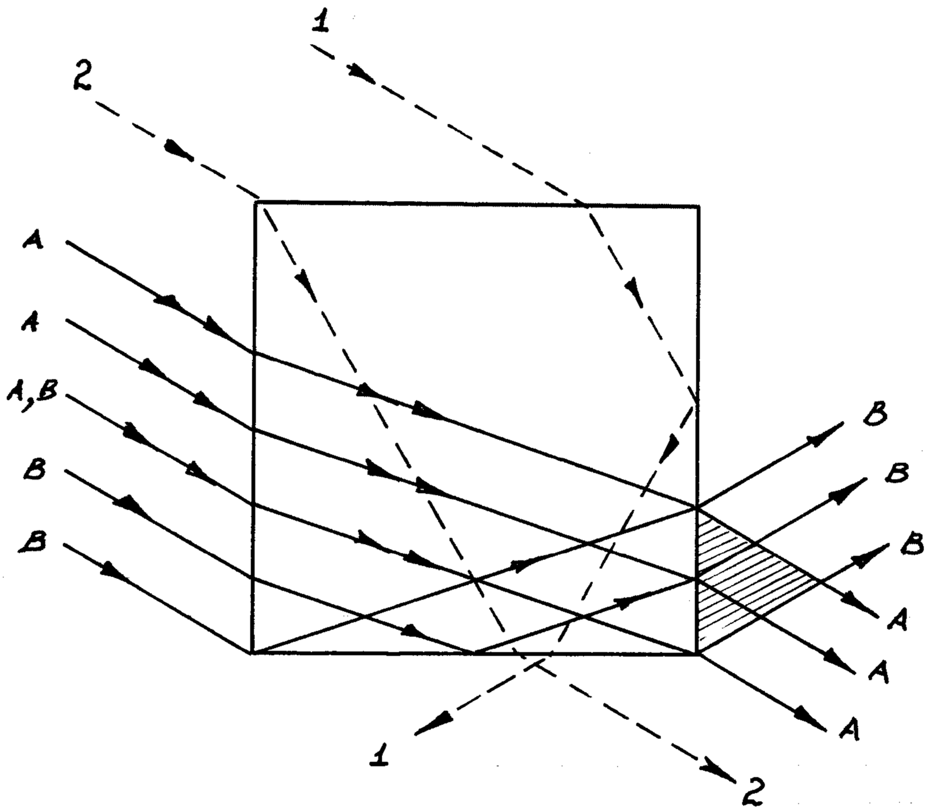
Рис. 1

Дві однакові комашки Жужу и Лілі люблять грітися у вранішніх променях Сонця. Для сонячних ванн вони використовують скляний куб, загублений колись місцевим любителем оптики (рис.1). Жужу, велика прихильниця тепла, сідає на саме сонечко — на вершину куба, а стриманіша Лілі розташовується у „тіні” куба, притулившись до його грані.

Скільки сонячного тепла отримує за один сеанс Лілі, якщо Жужу отримує 14,015 мДж тепла? Показник заломлення скла рівний $\sqrt{3}$, висота Сонця над горизонтом під час вранішніх заходів рівна 30°. Втратами світлової енергії знехтуйте.

Розв’язання

Дослідимо, як утворюється „тінь” за скляним кубом у місці розташування комашки Лілі. Куб пронизують кілька груп променів, які зарактеризуються подібними умовами поширення.



Врахувавши, що при даному показнику заломлення граничний кут повного відбивання становить близько 35° маємо:

Група променів „1” після заломлення верхньою гранню куба та повного відбивання від бічної грані виходять крізь нижню грань і не потрапляють на комашку.

Крупа променів „2” після подвійного заломлення також виходить крізь нижню грань.

Група променів „А” після подвійного заломлення потрапляє на комашку.

Група променів „В” також потрапляє на комашку після заломлення, повного відбивання та повторного заломлення.

Таким чином, комашка Лілі, яка знаходиться у заштрихованій області, освітлюється як променями групи „А” так і променями групи „В”, отримуючи подвійну порцію світлової енергії, яка рівна 2•14,015 мДж=28,03 мДж.

9 клас, задача №2

Бойлер – це пристрій для нагрівання води. Якщо бойлер залишати увімкненим, він весь час споживатиме електроенергію, адже необхідно буде компенсувати теплові втрати, потужність яких пропорційна різниці температур води та навколишнього середовища. Якщо ж бойлер з нагрітою водою вимкнути, вода в ньому почне остигати. При наступному ввімкненні її знову доведеться нагрівати до необхідної температури.

Не дуже якісний бойлер з 10 л води вимкнули, і за годину температура в ньому знизилась з 75°С до 45°С. Ще через годину бойлер увімкнули. За наступну годину він знову нагрів воду до 75°С. Визначте температуру води в бойлері у момент його вмикання та потужність його нагрівального елементу. Навколишня температура 15°С, питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·К).

Схематичне зображення бойлера подано на рис. 2, де 1 – зовнішній кожух, 3 – ємність для води, 6 – антикорозійний анод. Поясніть призначення інших елементів бойлера, позначених на рисунку.

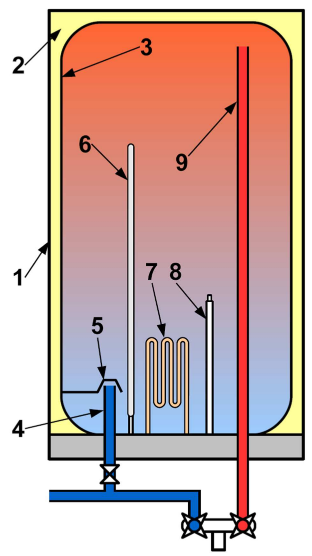
Як можна знизити споживання електроенергії бойлером?

Розв'язання

Скористаємось законом збереження енергії. Припустимо, що за тиждень споживається 1 $м^3$ гарячої води і наприкінці тижня бойлер знаходиться у такому ж стані, як і на початку. Перший бойлер, який весь час підтримує воду у гарячому стані, і другий, який вимикають, витрачають на нагрівання води однакову кількість енергії. Але перший внаслідок більшої різниці температур віддає у навколишнє середовище більше теплоти, ніж другий. Всі ці втрати компенсуються за рахунок споживання електроенергії. Отже, з енергетичної точки зору вигідніше вимикати бойлер. Будуть менші платежі за електрику. Але з точки зору економії часу (треба чекати, поки нагріється вода, або ж вмикати заздалегідь) більш зручним може виявитись завжди гарячий бойлер.

Щоб зменшити його втрати енергії слід подбати про гарну теплоізоляцію.

Відсутні в умові пояснення:
2 — теплоізоляція
4 — патрубок впуску холодної води
5 — розсікач (щоб завадити примусовому перемішуванню води)
7 — нагрівальний елемент
8 — термодатчик
9 — забірник гарячої води (гаряча вода зверху, холодна внизу)



1-й спосіб (наближений). Під час остигання води темп втрати нею теплоти змінюється, оскільки змінюється різниця температур між водою у бойлері і навколишнім середовищем. Для розрахунків будемо брати середню арифметичну температуру води. Для першої години це $t_{\text{I}} = \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 60$°С, для другої $t_{\text{II}} = \dfrac{t_2 + t_3}{2} = \dfrac{t_3}{2} + 22{,}5$°С. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} cm(75^\circ - 45^\circ) = k(60^\circ - 15^\circ)\tau, \\ cm(45^\circ - t_3) = k(t_3/2 + 22{,}5^\circ - 15^\circ)\tau, \end{cases}$$

де $\tau = 1\,\text{год}$. Знаходимо не тільки $t_3 = 30$°С, але й коефіцієнт $k = \dfrac{70}{9}\dfrac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{град}} \approx 7{,}78\dfrac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{град}}$. Другий етап (нагрівання від $t_3 = 30$°С до $t_1 =$ 75°С) наближеного розв'язку виглядає аналогічно. Для врахування втрат теплоти беремо середню температуру $t_{\text{с}} = \dfrac{t_1 + t_3}{2} = 52{,}5$°С. Потужність нагрівального елементу бойлера позначимо $P_{\text{б}}$. Тоді

$$cm(75^\circ - 30^\circ) = \left(P_{\text{б}} - k(52{,}5^\circ - 15^\circ)\right)\tau,$$

звідки знаходимо $P_{\text{б}} \approx 817\,\text{Вт}$.

2-й спосіб (точний). Розглянемо зміну температури Δt води за невеликий проміжок часу $\Delta\tau$. Вода остигає і віддає теплоту в навколишнє середовище: $cm\Delta t = k(t - t_{навк})\Delta\tau$. На початку першої години остигання ($t_1 =$ 75°С) різниця температур з навколишнім середовищем $t_1 - t_{навк} = 60$°С, і темп втрати температури високий. Наприкінці першої години (початку другої) остигання ($t_2 = 45$°С) різниця температур з навколишнім середовищем $t_2 - t_{навк} = 30$°С, і темп втрати температури удвічі менший:

$$cm\Delta t_1 = 60^\circ k\Delta\tau,$$

$$cm\Delta t_2 = 30^\circ k\Delta\tau.$$

За один і той самий час $\Delta\tau$ у другому випадку температура зменшиться у два рази менше $\Delta t_2 = \dfrac{1}{2}\Delta t_1$. Наприклад, $\Delta t_2 = 1$°С, $\Delta t_1 = 2$°С. Тоді різниця температур стане 29°С і 58°С, і знову відрізнятиметься рівно у два рази. Отже, темпи остигання води протягом першої і другої години відрізнятимуться удвічі. Якщо протягом першої години різниця температур зменшилась з $t_1 - t_{навк} = 60$°С до $t_2 - t_{навк} = 30$°С, то протягом другої години вона повинна зменшитись з $t_2 - t_{навк} = 30$°С до $t_3 - t_{навк} = 15$°С. Наприкінці другої години остигання (початку третьої) температура води стане $t_3 = t_{навк} +$ 15°С = 30°С. Як бачимо, точна відповідь збіглася з наближеною. *Якби бойлер й далі остигав, ще б через годину різниця температур стала б 7,5°С, а* *температура води 22,5°С. Таким чином, температура води постійно наближатиметься до навколишньої, так її і не досягаючи.*

Отриманий результат можна узагальнити. За рівні проміжки часу початкова і кінцева різниці температур з навколишнім середовищем змінюються в однакову кількість разів. У нашого бойлера за годину – точно у 2 рази. Тоді за півгодини відношення різниць температур повинно дорівнювати $\sqrt{2}$, щоб за годину (двічі по півгодини) отримати $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Аналогічно, за чверть години $\sqrt{\sqrt{2}}$ і так далі. За час $\Delta\tau = \frac{\tau}{2^n}$ треба взяти *n* квадратних коренів з двійки. Позначимо це число через *х*. Чим більшим буде *n*, тим менший час охолодження і менша різниця між початковою температурою t_1 і кінцевою t. Це означає, що зміною темпу теплових втрат протягом малого проміжку часу можна буде знехтувати, і знайти досить точне значення k (чим більше *n*, тим точніше). Для малого проміжку часу $\Delta\tau = \frac{\tau}{2^n}$ з початку остигання умова теплового балансу має вигляд $cm(t_1 - t) = k(t_1 - t_{навк})\Delta\tau,$ де $\frac{t_1 - t_{навк}}{t - t_{навк}} = x$. Звідки $t = t_{навк} + \frac{t_1 - t_{навк}}{x}$ і $k = 2^n\left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{cm}{\tau}$.

Для $n = 1$: $k = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{cm}{\tau} \approx 0{,}586\frac{cm}{\tau} \approx 6{,}83\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{град}}$.

Для $n = 2$: $k = 2^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)\frac{cm}{\tau} \approx 0{,}636\frac{cm}{\tau} \approx 7{,}42\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{град}}$.

Для $n = 12$ ($\Delta\tau$ стає меншим секунди): $k \approx 0{,}693\frac{cm}{\tau} \approx 8{,}09\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{град}}$.

Для нескінченно великих n множник $2^n\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ *позначається* $\ln 2$ *і дорівнює 0,693147.., що практично не відрізняється від отриманої відповіді.* Зазначимо близьке значення k у наближеному розв'язку (див. **1-й спосіб**).

Під час нагрівання умова теплового балансу має вигляд:

$$cm\Delta t = \left(P_б - k(t - t_{навк})\right)\Delta\tau = k\left(P_б/k + t_{навк} - t\right)\Delta\tau.$$

Для нашого бойлера за $\tau = 1$год вираз $P_б/k + t_{навк} - t$, що є аналогом різниці температур, повинен змінитись у 2 рази: $P_б/k + t_{навк} - t_3 = 2\left(P_б/k + t_{навк} - t_1\right)$. Звідси знаходимо:

$$P_б = k\left(2t_1 - t_3 - t_{навк}\right) = 105^\circ k \approx 849\,\text{Вт}.$$

9 клас, задача № 3

На рис.3 показано частину нескінченної дротяної сітки з прямокутними комірками. Кожний горизонтальний відрізок дроту має опір *1 Ом*, кожний вертикальний — опір *3 Ом*. Визначте наближене значення опору між сусідніми вузлами сітки А і В. Похибка має бути не більшою за 0,05 Ом.

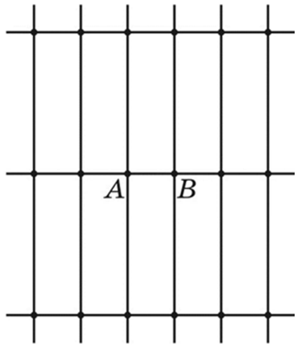


Рис.3

Розв'язок

Встановимо верхню та нижню межі можливих значень опору. Скористаємося тим, що збільшення будь-якого опору в колі спричиняє збільшення загального опору кола, а зменшення будь-якого опору спричиняє зменшення загального опору. Зокрема, розрізання будь-якого провідника може спричинити тільки збільшення опору R між вузлами A і B, а закорочування будь-якої ділянки — тільки зменшення опору. Таким чином можна оцінити межі R_{max} і R_{min}.

а) оцінимо спочатку нижню межу значень опору. Для цього уявімо, що ми з'єднуємо провідниками C без опору всі обведені на рис. 1 сірими колами вузли. На рис. 2 показано еквівалентну схему такого кола.

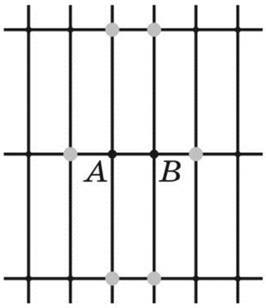


Рис. 1

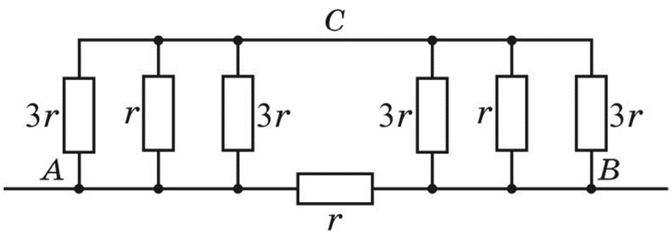
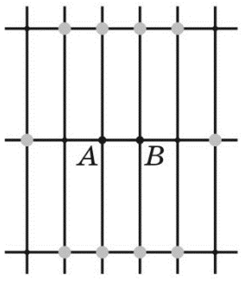


Рис. 2

Простий підрахунок дає значення $R_{\min 1} = \frac{6}{11} r \approx 0{,}545$ Ом.

Отриману оцінку можна дещо поліпшити, якщо закорочувати більш віддалені вузли. Ці вузли та відповідну еквівалентну схему кола показано на рис. 3, 4.



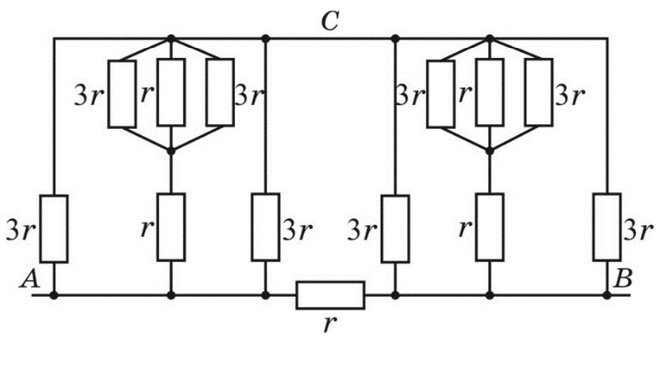


Рис. 3 *Рис. 4*

Підрахунок дає тепер значення $R_{\min 2} = \frac{48}{79} r \approx 0{,}608$ Ом.

б) оцінимо тепер верхню межу значень опору. Для цього перш за все «перегнемо» коло вздовж прямої AB, з'єднавши точки що мають рівні потенціали. Опір з'єднаних паралельно провідників зменшується вдвічі. Після цього обріжемо всі вертикальні провідники другого ряду. Отримаємо коло, що наведено на рис. 5 (опори всіх вертикальних провідників однакові; опори всіх горизонтальних провідників *на кожному рівні* також однакові).

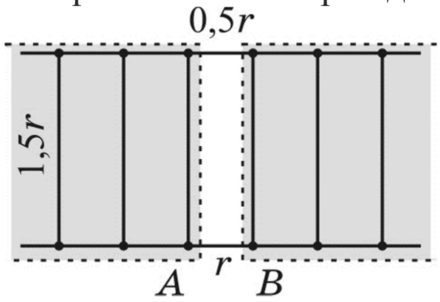


Рис. 5

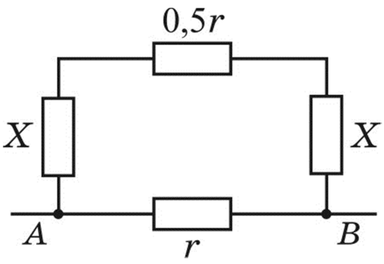


Рис. 6

Отримане коло можна розглядати як з'єднання двох однакових нескінченних кіл, що виділені сірим тонуванням (позначимо їх опори X), а також провідників опорами r і $0,5r$. Еквівалентну схему такого кола показано на рис. 6. Його опір $R_{\max} = \frac{r(2X + 0,5r)}{2X + 1,5r}$. Опір X нескінченного кола знайдемо з умови незалежності опору від кількості комірок у лінійному колі: $X = \frac{1,5r(X + 1,5r)}{X + 3r}$. Звідси $X = \frac{3r}{4}(\sqrt{5} - 1)$ і $R_{\max} = r\left(1 - \frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0,702r \approx 0{,}702$ Ом.

Враховуючи отримані оцінки зверху та знизу, можемо записати остаточний результат у вигляді $R = r\,(0,65 \pm 0,05) = 0,65 \pm 0,05$ (Ом) .

9 клас, задача № 4

Котушка з намотаною стрічкою перебуває у рівновазі на похилому схилі, зробленому з двох однакових лінійок, коли з неї звисає третина стрічки (див. рис.4а). При цьому стрічка обвиває котушку рівно три рази. На рис.4б ця ж котушка знову у рівновазі, але тепер на ній на півоберта стрічки більше, а підтримує рівновагу наповнена гелієм повітряна кулька. Визначте масу стрічки, якщо маса порожньої котушки $m_0 = 5$ *г*, а її зовнішній радіус у півтора рази більший за радіус частини зі стрічкою. Знайдіть, на скільки густина гелію у кульці менша за густину зовнішнього повітря. Об'єм кульки *2 л*, маса оболонки *1 г*. Довжина лінійки L *= 51 см*, верхній кінець вище нижнього на H *= 3 см*. Дайте обґрунтовану відповідь, як буде рухатись котушка у першому і другому випадках, якщо її трохи прокотити вздовж схилу вгору або вниз і відпустити?

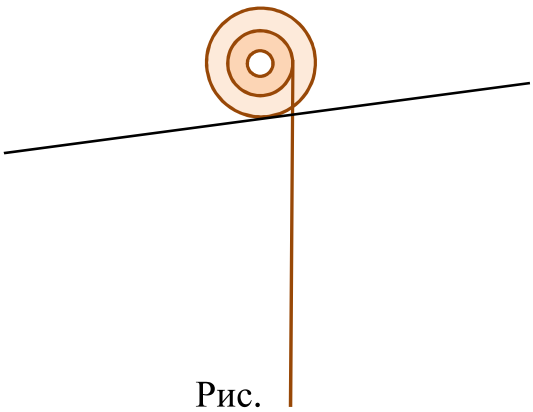


Рис. 1

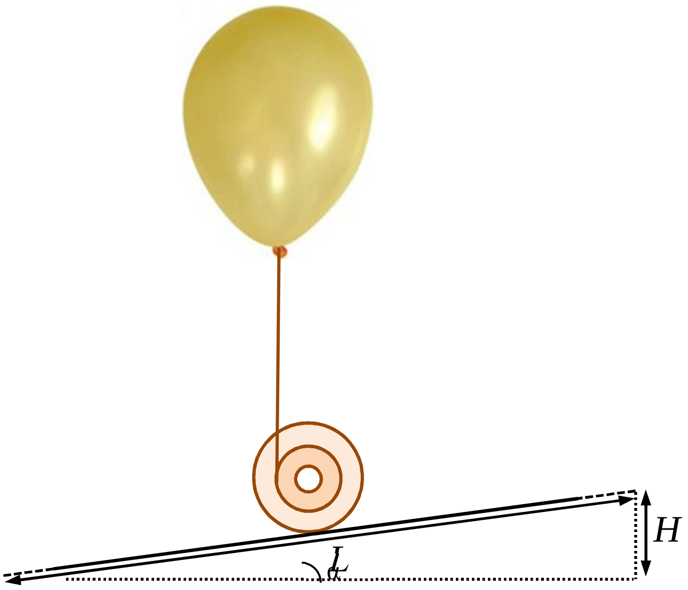
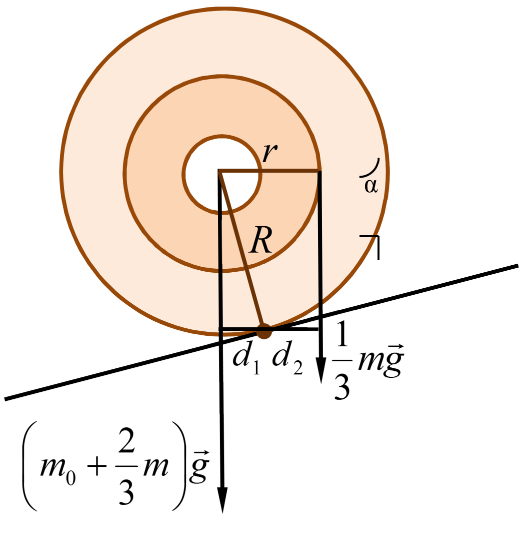


Рис. 2

Розв'язок. Позначимо масу стрічки через m. У першому випадку звисає частина стрічки масою $\frac{1}{3}m$, а центр тяжіння намотаної частини масою $\frac{2}{3}m$ знаходиться у центрі котушки. Розглянемо сили та їх моменти, що діють на котушку (Рис.3). З умови рівноваги



$$\left(m_0 + \frac{2}{3}m\right)gd_1 = \frac{1}{3}mgd_2,$$

де $d_2 = r - d_1$, а d_1 знайдемо з подібності трикутників (з Рис.3 і Рис.2): $\frac{d_1}{R} = \frac{H}{L}$.

Отже,

$$m = \frac{3m_0}{\frac{r}{d_1} - 3} = \frac{3m_0}{\frac{r}{R}\frac{L}{H} - 3} = \frac{9}{25}m_0 = 1{,}8\text{ г}.$$

α

Відповімо на якісне питання. Якщо котушку трохи провернути вгору (Рис.1,3), невеличка маса намотаної стрічки набуде вертикального положення, і відповідна їй сила тяжіння збільшить плече. Отже момент сили, який обертає котушку за годинниковою стрілкою, збільшиться, і вона, збільшуючи швидкість, покотиться вгору. Це виглядає парадоксальним лише на перший погляд, адже разом з підйомом котушки опускатиметься вільна частина стрічки. Потенціальна енергія стрічки в цілому зменшуватиметься швидше, ніж збільшуватиметься потенціальна енергія котушки, звідси й енергія на рух. Якщо котушку трохи провернути вниз (Рис.3), все аналогічно, тільки тепер невеличка маса стрічки зменшить своє плече, рівновага порушиться, і котушка покотиться вниз.

α

У другому випадку вертикальна частина стрічки матиме масу $\frac{2}{9}m$, а центр тяжіння намотаної частини масою $\frac{7}{9}m$ знаходиться на вертикалі, що проходить через центр котушки. $\vec{T}$ - сила натягу стрічки у місці дотику до котушки, яка складається з сила Архімеда $\rho_{пов} gV$, спрямованої вгору і сили тяжіння, що діє гелій у кульці, її оболонку і вертикальну частину стрічки, тобто

$$T = \rho_{пов} gV - \rho_{гел} gV - m_{обол} g - \frac{2}{9}mg.$$

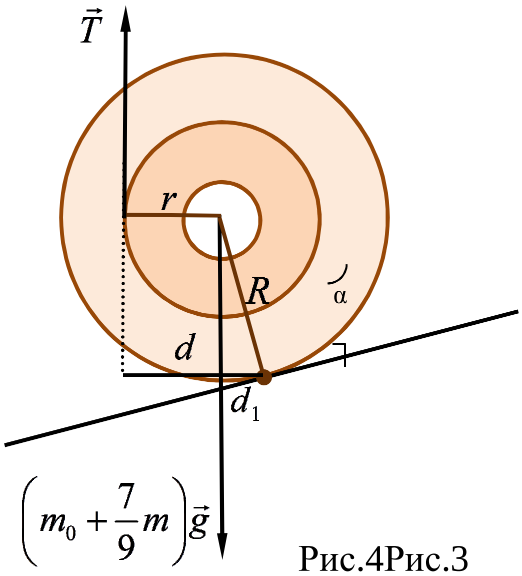


Рис.4Рис.3

З умови рівноваги (Рис.4)

$$Td = \left(m_0 + \frac{7}{9}m\right) g d_1, \quad \text{де} \quad d = r + d_1.$$

Враховуючи $m = \frac{9}{25}m_0$ і

$$T = (\rho_{пов} - \rho_{гел}) gV - m_{обол} g - \frac{2}{9}mg,$$

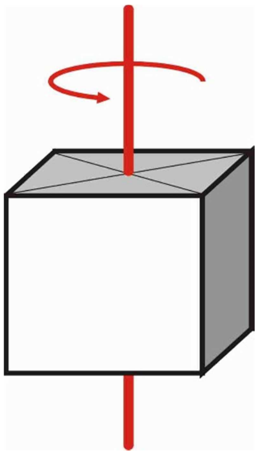
знаходимо:

$$\rho_{пов} - \rho_{гел} = \frac{1}{V}\left(m_{обол} + \frac{68}{370}m_0\right) = \frac{71}{74}\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 0{,}96\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Відповімо на якісне питання. Якщо котушку трохи провернути вгору (Рис.2,4), невеличка маса намотаної стрічки набуде вертикального положення, і відповідна їй сила тяжіння збільшить плече, протидіючи моменту підйомної сили кульки. Цьому ж сприятиме і зміна положення центру ваги півдуги стрічки. Котушка повернеться назад. Якщо котушку трохи провернути вниз, розгляд аналогічний. Котушка повертається у попереднє положення.

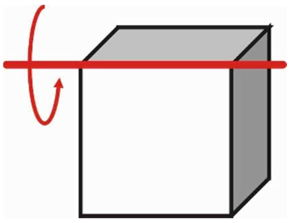
Тобто рівновага котушки в першому випадку є нестійкою, а в другому – стійкою.

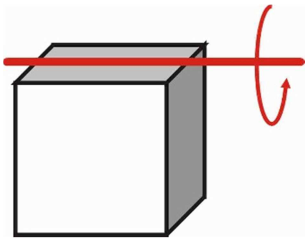
9 клас, задача № 5

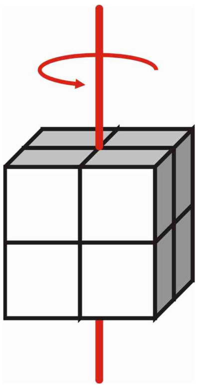


Однорідний куб, обертаючись навколо осі, що проходить через його центр мас (Рис.5а) перпендикулярно до його основи, має кінетичну енергію W_0. Знайти кінетичну енергію обертання цього куба з тим самим періодом: а) відносно осі, що проходить через одне з його ребер (Рис.5б); б) відносно осі, що проходить через середини ребер (Рис.5в). *Примітка:* кінетична енергія обертання прямокутного паралелепіпеда відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно до його основи, прямо пропорційна добуткові його маси на квадрат довжини діагоналі його основи та обернено пропорційна квадратові періоду обертання $W \sim \frac{m}{T^2}\left(a^2 + b^2\right)$.

Розв'язок







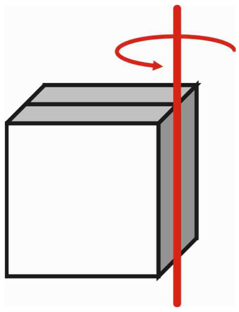
а) «Разделим» куб, вращающийся относительно оси, проходящей через его центр тяжести, на восемь одинаковых кубиков. Тогда энергия движения целого куба есть сумма энергий движения маленьких кубиков:

$$W_0 = 8W_1^*, \tag{1}$$

Каждый маленький кубик вращается относительно оси, проходящей через одно из его ребер. Энергию именно такого вращательного движения для целого куба нам и необходимо найти. Учитывая соотношение массы и размеров маленького кубика относительно целого куба, можно записать выражение, связывающее энергии их движения (примем во внимание, что куб – частный случай прямоугольного параллелепипеда, для куба $a = b$)

$$W_1^* = \alpha \frac{m^* {a^*}^2}{T^2} = \frac{\alpha}{T^2}\frac{m}{8}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \alpha \frac{ma^2}{32T^2} = \frac{W_1}{32}, \tag{2}$$

где α – коэффициент пропорциональности.



Из уравнений (1) и (2) нетрудно получить кинетическую энергию вращения куба относительно оси, проходящей через одно из его ребер:

$$W_1 = 4W_0 . \tag{3}$$

б) «Разделим» куб, вращающийся относительно оси, проходящей через середины ребер, на два одинаковых прямоугольных параллелепипеда. Тогда энергия движения целого куба есть сумма энергий движения параллелепипедов:

$$W_2 = 2W_1^* , \tag{4}$$

Заметим, что каждый из параллелепипедов вращается относительно оси, проходящей через одно из его ребер, тогда, используя уравнение (3) из предыдущего случая, для энергии его вращения можно записать выражение

$$W_1^* = 4W_0^* , \tag{5}$$

где W_0^* – энергия вращения прямоугольного параллелепипеда относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к его основанию.

Для целого куба ($a = b$) имеем

$$W_0 = \frac{2\alpha m a^2}{T^2} . \tag{6}$$

Учитывая соотношение массы и размеров параллелепипеда относительно целого куба, выражения для W_0^* принимает вид

$$W_0^* = \frac{\alpha}{T^2}\frac{m}{2}\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{5}{8}\frac{\alpha m a^2}{T^2} , \tag{7}$$

где α – коэффициент пропорциональности.

Тогда из (4), (5) и (7) получим для энергии вращения куба относительно оси, проходящей через середины ребер

$$W_2 = 5\frac{\alpha m a^2}{T^2} . \tag{8}$$

Принимая во внимание (6), окончательно получаем

$$W_2 = \frac{5}{2}W_0 .$$