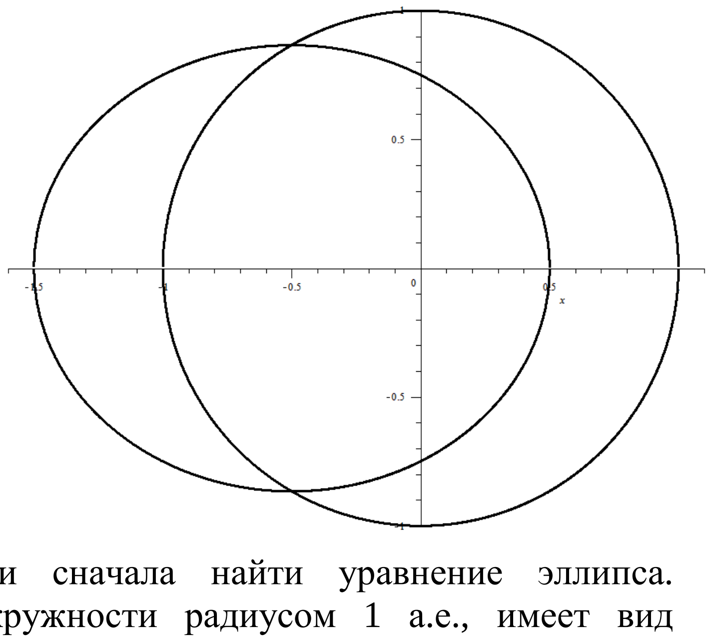
Решение задачи 1 (11 класс)

Очевидно, что при расстояниях порядка 1 а.е. влияние Земли на астероид пренебрежимо мало, значит траектория астероида – эллипс, в фокусе которого Солнце. Используем законы сохранения энергии E и момента импульса L для точек максимального приближение и удаления астероида от Солнца

$$\begin{cases} E = \dfrac{mv_{\max}^2}{2} - \dfrac{GmM}{0{,}5R} = \dfrac{mv_{\min}^2}{2} - \dfrac{GmM}{1{,}5R}, \\ L = mv_{\max} \cdot 0{,}5R = mv_{\min} \cdot 1{,}5R, \end{cases}$$

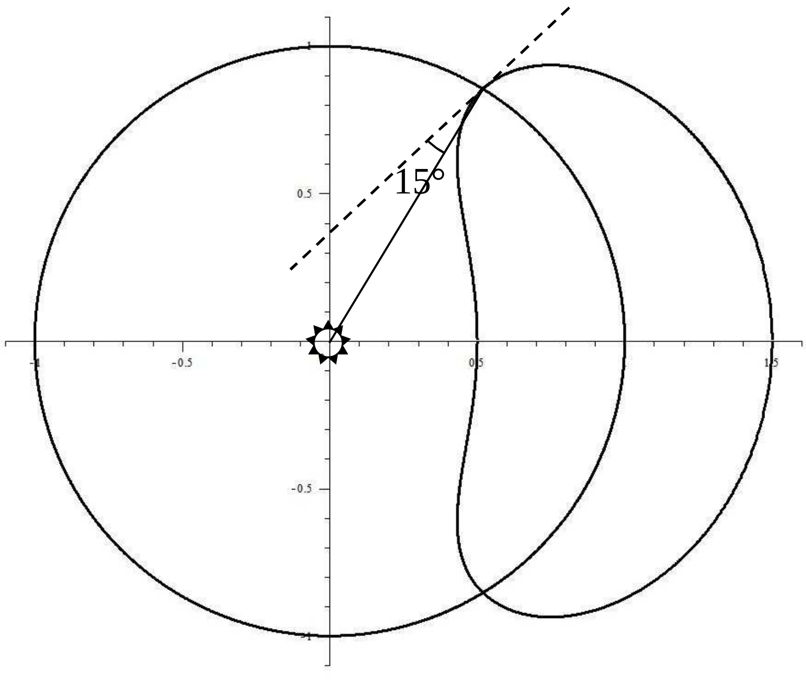
где M – масса Солнца, $R = 1\,\text{а.е.}$ – радиус земной орбиты. Решая систему, находим скорости $v_{\max} = 3v_{\min} = \sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$, а также полную энергию $E = -\dfrac{GmM}{2R}$ и момент импульса $L = \dfrac{m}{2}\sqrt{3GMR}$ астероида. Для построения эллипса, рассмотрим точки его пересечения с земной орбитой. Из закона сохранения энергии $\dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GmM}{R} = -\dfrac{GmM}{2R}$ находим, что скорость астероида v_0 на расстоянии $r = R$ от Солнца равна скорости орбитального движения Земли $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$. Из закона сохранения момента импульса $mv_\tau R = \dfrac{m}{2}\sqrt{3GMR}$ находим, что в момент пересечения земной орбиты тангенциальная составляющая (перпендикулярная к направлению на Солнце) скорости астероида $v_\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{GM}{R}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$ или $v_\tau = v_0 \cos 30^\circ$. Таким образом, траектории Земли и астероида пересекаются под углом 30°. Точно также можно найти углы пересечения траектории астероида с окружностью любого радиуса от $0{,}5R$ до $1{,}5R$ и достаточно точно изобразить искомый эллипс.



Можно поступить иначе и сначала найти уравнение эллипса. Уравнение траектории Земли, окружности радиусом 1 а.е., имеет вид $x^2 + y^2 = 1$ (все величины даны в а.е.). Эллипс есть растянутая вдоль осей единичная окружность, поэтому его уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. В нашем случае эллипс смещен на 0,5 а.е. влево (см. рис.), поэтому его уравнение

$\frac{(x+0{,}5)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Большая ось эллипса есть расстояние между максимально удаленными точками, поэтому ее половина, большая полуось a, равна полусумме минимального и максимального расстояния до Солнца $a=(0{,}5R+1{,}5R)/2=R=1$ а.е. Малая полуось b находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника: $b=\sqrt{a^2-(a/2)^2}=\sqrt{3}/2$ а.е. Таким образом, уравнение эллипса имеет вид $\frac{(x+0{,}5)^2}{1}+\frac{y^2}{3/4}=1$. Находим точки пересечения эллипса и окружности ($x=-1/2$), подставляем в производные функций и получаем тангенсы улов наклонов.

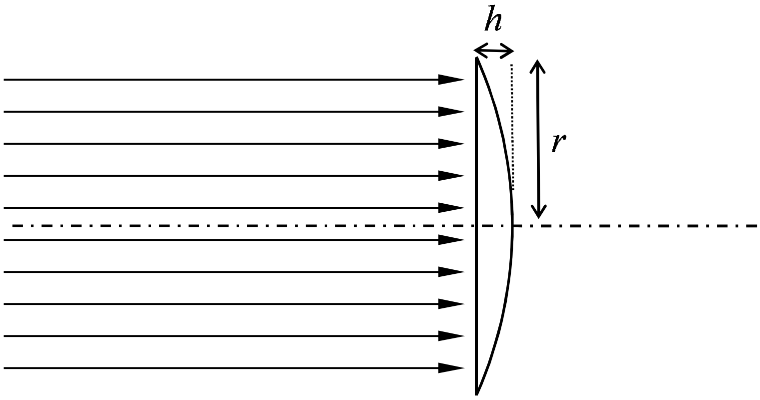
Поскольку периоды Земли и астероида равны, достаточно нарисовать траекторию за один период, после чего взаимное положение небесных тел повторяется. При построении траектории следует обратить внимание на точки пересечения орбитой астероида орбиты Земли. Как было показано ранее, в инерциальной системе отсчета скорости тел одинаковы, а угол между скоростями 30°. Из закона сложения скоростей следует, что относительная скорость астероида в этих точках будет направлена вдоль линии, образующей угол 15° к направлению на Солнце.



На рисунке изображена траектория астероида в неинерциальной системе отсчета. Существует прототип астероида из данной задачи. Это (3753) Круитни. Иногда его называют еще одним естественным спутником (квазиспутником) Земли. Плоскость орбиты Круитни составляет небольшой угол с плоскостью орбиты Земли. Минимальное расстояние до Солнца чуть меньше, чем в условии задачи (0,48398 а.е.), а максимальное – чуть больше (1,51146 а.е.). При округлении получаем 0,5 а.е. и 1,5 а.е. Положение Земли на рисунке приблизительно

11 клас Задача № 2.

Тонка плоско-опукла лінза радіусом r і товщиною h=*2,5 мм* виготовлена з матеріалу, показник заломлення якого n. У повітрі на плоску поверхню лінзи перпендикулярно до неї падає паралельний пучок монохроматичного світла (рис.1). Якщо опукла частина лінзи утворена сферичною поверхнею, паралельний пучок після проходження лінзи в одній точці не збирається, а освітлює деякий об'єм біля фокусу. Визначте найменшу довжину відрізка головної оптичної осі, що виявиться освітленим.



Згідно рисунку в умові, пучок падає на всю плоску поверхню лінзи. Освітленим треба вважати ту частину головної оптичної осі, точки якої перетинають щонайменше два променя, на що вказує умова: «…паралельний пучок після проходження лінзи в одній точці не збирається, а освітлює деякий об'єм біля фокусу». Тобто, ця частина оптичної осі освітлена збоку.

Знайдемо відстань L від центру сферичної поверхні (точка О) до перетину головної оптичної деяким довільним заломленим променем (див. Рис 1).

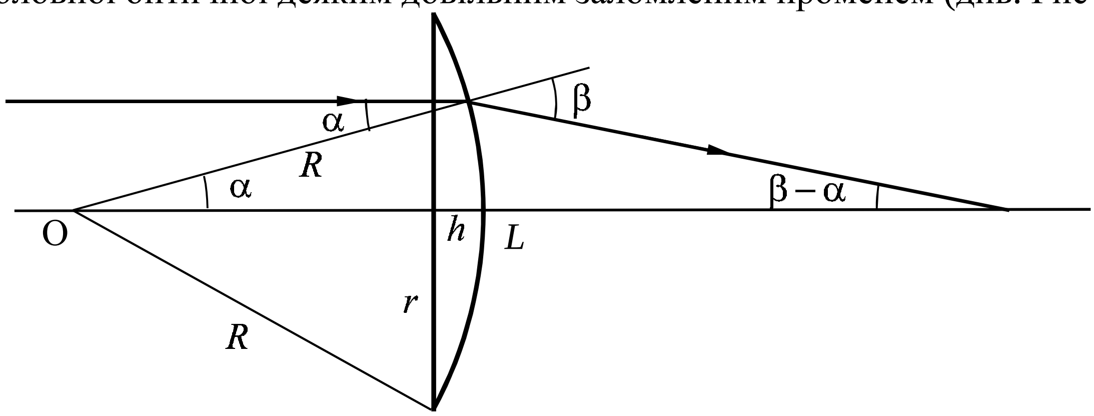


Рис.1

Для цього скористаємось теоремою синусів для трикутника, утвореного відрізком головної оптичної осі довжиною L, радіусом сферичної поверхні R і заломленим променем: $\dfrac{L}{\sin(180^\circ-\beta)}=\dfrac{R}{\sin(\beta-\alpha)}$. Звідки

$L=\dfrac{R\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\dfrac{R\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}$, де кут заломлення β виражаємо із закону заломлення світла на сферичній поверхні $\sin\beta=n\sin\alpha$. Отже

$$L=\frac{Rn\sin\alpha}{n\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}=\frac{Rn}{n\cos\alpha-\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{Rn\left(n\cos\alpha+\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\right)}{n^2\cos^2\alpha-(1-n^2\sin^2\alpha)}=\frac{Rn}{n^2-1}\left(n\cos\alpha+\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\right)$$

Зі збільшенням кута α кожний з двох доданків в останньому виразі монотонно зменшується. Найбільшою відстань L буде для променя, який проходить поряд з головною оптичною віссю і для якого $\alpha=0$ (див. Рис.1).

$$L_{\max}=L\big|_{\alpha=0}=\frac{Rn}{n^2-1}(n+1)=\frac{Rn}{n-1}.$$

Найменшою відстань L буде для променя, який заломлюється на краю лінзи і для якого $\sin\alpha=r/R$:

$$L_{\min}=L\big|_{\sin\alpha=\frac{r}{R}}=\frac{Rn}{n^2-1}\left(n\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}+\sqrt{1-n^2\frac{r^2}{R^2}}\right)$$

Скористаємось тим, що за умовою лінза тонка, тобто $r/R<<1$. Можна відразу записати наближені значення коренів, можна спочатку виділити повні квадрати і знехтувати зовсім малими величинами $(r/R)^4$. У будь-якому разі отримуємо $L_{\min}=\dfrac{Rn}{n-1}-\dfrac{n^2}{n-1}\dfrac{r^2}{2R}$.

Радіус сфери R визначимо з теореми Піфагора для прямокутного трикутника (Рис.1): $R^2=(R-h)^2+r^2$, $R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$. Отже

$$L_{\min}=\frac{Rn}{n-1}-\frac{n^2}{n-1}\frac{r^2h}{r^2+h^2}\approx\frac{Rn}{n-1}-\frac{n^2h}{n-1}.$$

Порівнюючи $L_{\min}$ з $L_{\max}$, знаходимо відповідь на перше питання задачі. Довжина відрізку головної оптичної осі, що виявиться засвіченим (його перетинатимуть заломлені промені)

$$\Delta L=L_{\max}-L_{\min}=\frac{n^2h}{n-1}.$$

Для скла з показником заломлення $n=1{,}5$ це відстань $\Delta L=4{,}5h=11{,}25$ мм. Більш ніж на 1 см розтягнулося вздовж головної оптичної осі зображення нескінченно віддаленої точки (так можна інтерпретувати утворення пучка паралельних променів, що падав на лінзу). Якщо намалювати заломлені промені після проходження лінзи, у просторі з'явиться об'єм перетину променів, які матиме ще більші лінійні розміри. Це явище має назву сферичної аберації і пов'язане з певною недосконалістю сферичних поверхонь для фокусування променів. Зазначимо, що ΔL не залежить від радіусу лінзи, але залежить від показника заломлення. Розв'язуючи рівняння $\Delta L'(n)=0$, знаходимо $n=2$ (досить реалістичний показник заломлення) і

$$\Delta L_{\min}=4h=1\,\text{см}.$$

Задача 3

Необмежена заряджена площина з поверхневою густиною заряду $-\sigma$ та поверхневою густиною маси ρ починає поступально рухатися зі швидкістю v_0 нормально до своєї поверхні. В початковий момент часу вона знаходиться в лівому кінці вакуумного міжелектродного проміжку довжиною L, обмеженого двома провідними заземленими площинами. За яких умов заряджена площина долетить до правого кінця проміжку?

Розв'язання

Нехай у деякий момент часу заряджена площина знаходиться в точці $z = z_1$ (рис.1). Оскільки провідні поверхні заземлені, електричне поле не може виходити за межі міжелектродного проміжку. Це означає, що сума густин поверхневих зарядів σ_1 та σ_2 на лівій та правій пластинах дорівнюватиме поверхневому заряду площини з протилежним знаком:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \quad (1)$$

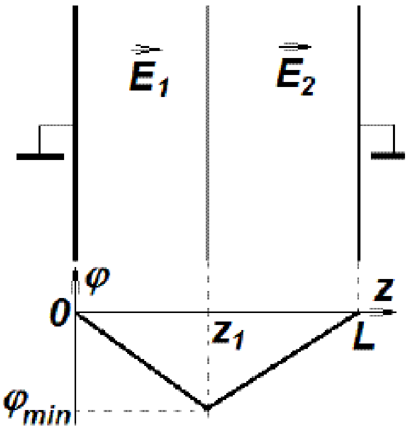


Рис.1.

Тоді ліву і праву частини системи можна розглядати як конденсатори з поверхневими густинами зарядів σ_1 та σ_2 і віддалями між пластинами z_1 та $L - z_1$, причому напруги на конденсаторах однакові за величиною і протилежні за знаком. Таким чином,

$$E_1 z_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} z_1 = E_2(L - z_1) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}(L - z_1) = U \quad (2)$$

З рівнянь (1)-(2) знаходимо, що

$$\sigma_1 = \sigma\left(1 - \frac{z_1}{L}\right), \qquad \sigma_2 = \sigma\frac{z_1}{L}, \qquad U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z_1 \left(1 - \frac{z_1}{L}\right). \quad (3)$$

Сумарна енергія конденсаторів на одиницю площі поверхні складає величину $W = (C_1 + C_2)U^2/2$, де $C_{1,2}$ – ємності на одиницю площі поверхні:

$$C_1 = \varepsilon_0/z_1, \qquad C_2 = \varepsilon_0/z_2 \quad (4)$$

Таким чином,

$$W = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} z_1^2 \left(1 - \frac{z_1}{L}\right)^2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{L - z_1}\right) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 L} z_1(L - z_1) \quad (5)$$

Енергія системи на одиницю поверхні записана як добуток двох співмножників, сума яких стала. Отже, вона досягає максимуму, коли $z_1 = L/2$:

$$W_{\max} = \frac{\sigma^2 L}{8\varepsilon_0} \quad (6)$$

Очевидно, заряджена площина зможе долетіти до протилежного кінця міжелектродного проміжку лише в тому випадку, коли її початкова кінетична енергія (на одиницю площі) перевищує значення (6):

$$\frac{\rho v_0^2}{2} > \frac{\sigma^2 L}{8\varepsilon_0} \quad (7)$$

або

$$v_0 > \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{L}{\rho\varepsilon_0}} \quad (8)$$

Критерии оценивания.

1. Правильное толкование условия задачи:

а) заземление, следовательно суммарный заряд равен нулю – 1 балл;

б) поверхностная плотность индуцированного заряда на заземленной пластине равна по величине и противоположна по знаку заряду на соответствующей стороне заряженной проводящей пластины – 1 балл.

2. Запись энергии взаимодействия зарядов как функции координат пластин или запись суммы сил, действующих на пластину, как функцию координат пластины – 1,5 балла.

3. Использование закона сохранения энергии и расчет через работу (интегрированием) – 1 балл.

4. Правильный результат (численный коэффициент) – 0,5 балла.

Снижение: при правильной идее ошибка в размерностях – -1балл.

11 клас Задача № 4.

Протон рухається по гвинтовій траєкторії навколо напрямку магнітного поля Землі у радіаційному поясі ван Аллена, де мінімальна індукція магнітного поля в середній частині поясу складає B_1=6.5 мкТл. За якого співвідношення між поздовжною (вздовж напрямку геомагнітного поля) та поперечною швидкістю протона в середній частині пояса буде можливим його відбиття від області більш сильного магнітного поля поблизу магнітного полюсу, де максимальне значення поля складає B_2=65 мкТл. *Вказівка*: Індукція магнітного поля вздовж його напрямку змінюється дуже повільно.

1. Протон движется по винтовой траектории вокруг направления магнитного поля Земли во радиационном поясе ван Аллена, где минимальная индукция магнитного поля в средней части пояса составляет B_1=6.5 мкТл. При каком соотношении между продольной (вдоль направления геомагнитного поля) и поперечной скоростью протона в средней части пояса будет возможно его отражение от области более сильного магнитного поля вблизи магнитного полюса, где максимальное значение поля составляет B_2=65мкТл. *Указание*: Индукция магнитного поля вдоль его направления изменяется очень медленно.

Розв'язок. Оскільки напруженість магнітного поля в напрямку до полюса зростає повільно, припускаємо, що в перпендикулярній до нього площині рух протона майже коловий. Кутова швидкість обертання буде рівною циклотронній частоті:

$$\omega = \frac{eB}{m} \qquad (1)$$

Крім того, можна припустити, що зберігається проекція моменту імпульсу на напрям магнітного поля:

$$mr^2\omega + \frac{er^2B}{2} = const\,, \qquad (2)$$

а після підстановки сюди виразу для ω отримуємо:

$$mr^2\omega = const = mr_1^2\omega_1\,, \qquad (3)$$

де r_1 та ω_1 - відповідні параметри для точки, де B= B_1. Також можна записати закон збереження енергії:

$$\frac{mv_\parallel^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{2} = \frac{mv_{\parallel 1}^2}{2} + \frac{mr_1^2\omega_1^2}{2}$$

Відбиття відбудеться за умови $v_\parallel = 0$, де магнітне поле матиме деяку напруженість B. З записаних вище співвідношень (1-3) отримуємо:

$$v_\parallel^2 = r^2\omega^2\left(\frac{B}{B_1} - 1\right) = v_\perp^2\left(\frac{B}{B_1} - 1\right)$$

Оскільки в межах геомагнітного поля $B < B_2$, для співвідношення між поздовжною та поперечною швидкостями отримаємо:

$$\frac{v_\parallel}{v_\perp} = \sqrt{\frac{B}{B_1} - 1} < \sqrt{\frac{B_2}{B_1} - 1} \quad , \text{ тобто } \frac{v_\parallel}{v_\perp} < 3$$

Розв'язання задачі 5 (11 клас).

Рівняння руху кульки має вигляд $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}$. Звідси усталена швидкість падіння $\vec{u} = \dfrac{m\vec{g}}{k}$. Запишемо рівняння руху в проекціях на осі координат (горизонтальну Ox і напрямлену вертикально вгору Oy):

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x = -k\frac{dx}{dt}, \qquad (1)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y = -mg - k\frac{dy}{dt}. \qquad (2)$$

Інакше: $\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{g}{u}v_x$, $\dfrac{dv_y}{dt} = -g - \dfrac{g}{u}v_y$. Останнє рівняння можна переписати у вигляді $\dfrac{d(u+v_y)}{dt} = -\dfrac{g}{u}(u+v_y)$. Таким чином, величини v_x і $u+v_y$ задовольняють одному й тому самому добре відомому диференціальному рівнянню. Отже, ці величини однаково залежать від часу (експоненціально зменшуються з однаковими показниками експоненти). Тому відношення цих величин лишається незмінним:

$$\frac{v_x}{v_y + u} = \frac{v_{0x}}{v_{0y} + u}. \qquad (3)$$

У верхній точці траєкторії $v_x = v_1$, $v_y = 0$.

Звідси $v_1 = \dfrac{uv_{0x}}{v_{0y} + u} = \dfrac{uv_0 \cos\alpha}{v_0 \sin\alpha + u} =$ 8,66 м/с.

Повернемося до рівняння (2). Його можна переписати у вигляді $d(v_y + gt + \dfrac{g}{u}y) = 0$, звідки

$$v_y + gt + \frac{g}{u}y = \text{const}. \qquad (4)$$

Порівнюючи початковий і кінцевий моменти польоту (враховуючи, що $y = y_0$), отримаємо $v_y = v_{0y} - gt = -6$ м/с. Із співвідношення (3) отримуємо значення v_x в точці падіння: $v_x = \dfrac{v_{0x}(v_{0y} + u - gt)}{v_{0y} + u} =$ 3,46 м/с. Модуль швидкості перед падінням $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$ 6,9 м/с.

Повернемося тепер до рівняння (1) та перепишемо його у вигляді $d(v_x + \dfrac{g}{u}x) = 0$. Звідси отримуємо $v_x + \dfrac{g}{u}x = \text{const}$ або $v_{0x} = v_x + \dfrac{g}{u}L$. Таким чином, $L = \dfrac{u(v_{0x} - v_x)}{g} =$ 14 м.

Щоб відповісти на останнє запитання, зазначимо: час t_1 руху кульки по висхідній частині траєкторії ***менший*** від часу руху по низхідній частині. Це достатньо довести для тіла, яке кинули вертикально вгору (рівняння руху по двох осях незалежні). Очевидно, через втрати енергії на подолання опору повітря кулька проходить кожну малу ділянку траєкторії вниз повільніше, ніж угору. Тому рух униз триває ***більше*** часу. Таким чином, $t_1 < t/2$. Скористаємося співвідношенням (4): $v_{0y} = gt_1 + \dfrac{g}{u}H$. Отже, $H = \dfrac{u}{g}(v_{0y} - gt_1) > \dfrac{u}{g}(v_{0y} - \dfrac{gt}{2}) =$ 2 м.

Відповідь. 1) $v_1 =$ 8,66 м/с; 2) $v =$ 6,9 м/с; 3) $L =$ 14 м.

Не може ($H >$ 2 м).