

Задача 1. «Показательная разминка»

1.1 Материальная точка начинает двигаться вдоль прямой под действием постоянной силы. При этом пройденный точкой путь S зависит от времени t по закону

$$S = Ct^{\lambda},$$

где C - постоянная величина. Докажите справедливость приведенной формулы, определите показатель степени λ .

1.2 Вязкая жидкость начинает вытекать из баллона по длинной узкой горизонтальной трубке. Давление газа в баллоне над жидкостью поддерживается постоянным. При этом длина столба жидкости в трубке l зависит от времени t по закону

$$l = Ct^{\lambda},$$

где C - постоянная величина. Докажите справедливость приведенной формулы, определите показатель степени λ .

В установившемся режиме средняя по поперечному сечению скорость движения жидкости по тонкой трубке пропорциональна разности давлений на концах трубки и обратно пропорциональна ее длине.

1.3 Внутри некоторой планеты в результате радиоактивного распада выделяется теплота, плотность мощности (количество теплоты, выделяющейся в единицу времени в единице объема) которой постоянна во времени и во всех точках внутри планеты. Температура поверхности планеты вследствие теплового излучения в окружающее пространство остается постоянной. Зависимость температуры T внутри планеты от расстояния до ее центра r имеет вид

$$T = A + Br^{\lambda},$$

где A, B - постоянные величины. Докажите справедливость приведенной формулы, определите показатель степени λ .

Поток теплоты q (количество теплоты, протекающее через единичную площадку в единицу времени)

определяется законом Фурье $q = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta z}$, где $T(z)$ -

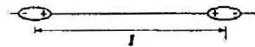
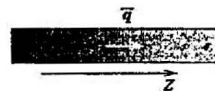
функция, описывающая зависимость температуры от координаты.

1.4 Два точечных диполя находятся на расстоянии l друг от друга. Сила электростатического взаимодействия между ними зависит от расстояния по закону

$$F = Cl^{\lambda},$$

где C - постоянная величина. Докажите справедливость приведенной формулы, определите показатель степени λ .

Точечным диполем называется система из двух связанных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, расположенных на малом расстоянии друг от друга.

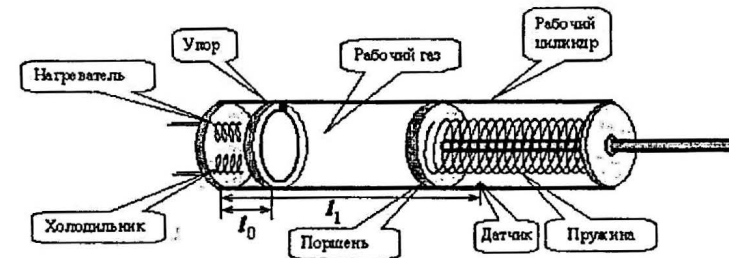


1.5 Двум небольшим одинаковым шарикам, находящимся на расстоянии h друг от друга, сообщают разноименные электрические заряды, равные по величине. Шарик начинают сближаться. Время t , через которое шарик столкнутся, зависит от начального расстояния h между шариками по формуле

$$t = Ch^{\lambda}$$

где C - постоянная величина. Докажите справедливость приведенной формулы, определите показатель степени λ .

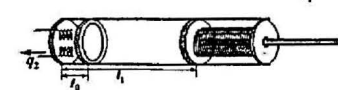
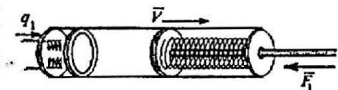
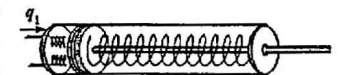
Задача 2 «Тепловой двигатель»



Внутри закрытого с одной стороны рабочего цилиндра расположен плотно пригнанный поршень, соединенный с помощью стержня с рабочим устройством, (на рисунках не показано). При движении поршня вправо на поршень действует дополнительная сила со стороны рабочего механизма, при его движении влево эта дополнительная сила отсутствует¹. Между поршнем и основанием цилиндра находится рабочий газ. На расстоянии l_0 от основания цилиндра закреплен кольцевой упор. В основание цилиндра вмонтированы нагреватель постоянной мощности q_1 (т.е. сообщаящий газу в единицу времени постоянное количество теплоты q) и холодильник, забирающий от газа в единицу времени количество теплоты q_2 , не зависимо от состояния газа. На упоре и в стенке цилиндра на расстоянии $l_1 = ml_0$ от основания цилиндра вмонтированы датчики, способные включать и выключать холодильник и нагреватель. Поршень соединен с противоположной стенкой возвращающей пружиной. Длина недеформированной пружины равна длине рабочего цилиндра.

Рабочий газ можно считать идеальным двухатомным (его молярная теплоемкость равна $C_p = \frac{5}{2}R$). Теплоемкостью цилиндра и поршня, потерями теплоты в окружающее пространство можно пренебречь, также можно пренебречь инерционностью поршня и рабочего устройства.

Началом цикла будем считать состояние, когда поршень доходит до упора, в этот момент включается нагреватель (а холодильник



отключается). В этом положении пружина сжата на величину l_0 , и ее сила упругости равна F_0 .

Во время движения поршня вправо на него со стороны рабочего устройства действует постоянная сила $F_1 = nF_0$ (помимо силы упругости пружины).

При достижении датчика, находящегося на

расстоянии l_1 , нагреватель выключается, и включается холодильник.

В исходное положение поршень возвращается действием пружины при работающем холодильнике.

Параметры двигателя $n = 2,0$; $m = 2,0$; $q_1 = q_2 = q$.

Коэффициентом полезного действия будем считать отношение работы, совершенной над рабочим устройством, к количеству теплоты, полученной газом от нагревателя

В ходе решения допускается и рекомендуется выполнение промежуточных численных расчетов.

Часть 1.

В этой части необходимо рассчитать характеристики двигателя в рамках следующих допущений:

- атмосферное давление значительно меньше давления рабочего газа в цикле;
- трение пренебрежимо мало;
- все процессы являются равновесными и обратимыми.

1.1. Изобразите на диаграмме (P, V) изменения состояния рабочего газа за цикл работы двигателя.

1.2. Найдите коэффициент полезного действия двигателя η .

1.3. Найдите среднюю мощность, развиваемую двигателем (ответ выразите через мощность нагревателя q).

Часть 2.

Рассмотрите работу двигателя в рамках следующих допущений:

- сила атмосферного давления на поршень постоянна и равна силе упругости пружины в начальной точке цикла F_0 ;
- трение пренебрежимо мало;
- все процессы являются равновесными и обратимыми.

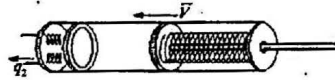
2.1. Изобразите на диаграмме (P, V) изменения состояния рабочего газа за цикл работы двигателя.

2.2. Найдите коэффициент полезного действия двигателя η .

Часть 3.

Рассмотрите работу двигателя в рамках следующих допущений:

- сила атмосферного давления на поршень постоянна и равна силе упругости пружины в начальной точке цикла F_0 ;
- сила трения, действующая на поршень со стороны стенок, постоянна по модулю и равна $0,10F_0$;
- все газовые процессы являются равновесными и обратимыми.



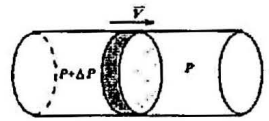
3.1. Изобразите на диаграмме (P, V) изменения состояния рабочего газа за цикл работы двигателя.

3.2. На сколько процентов изменится коэффициент полезного действия устройства из-за наличия трения?

Часть 4

Сейчас вам предстоит оценить влияние неравновесности реально протекающих процессов.

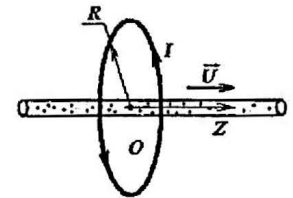
4.1. По очень длинной горизонтальной трубе может двигаться без трения поршень. С обеих сторон поршня находится воздух (средняя молярная масса $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$) при температуре $T = 800 \text{ K}$. Давление газа с одной стороны поршня равно $P = 5,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$, а с другой на $\Delta P = 5,0 \cdot 10^2 \text{ Па}$ больше. Оцените скорость установившегося движения поршня.



4.2. Оцените, на сколько изменится КПД рассматриваемого двигателя при учете неравновесности процесса расширения, процесс сжатия считайте равновесным. Считайте, что рабочим газом является воздух, средняя температура газа в этом процессе $T = 800 \text{ K}$, среднее давление $P = 5,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Задача 3. «Магнитная регулировка»

В данной задаче исследуется возможность управлением течением жидкости с помощью магнитного поля. В качестве жидкости используется растительное масло, смешанное с мелкими железными опилками. Эта смесь протекает по длинной узкой горизонтальной трубке, которая проходит через тонкую кольцевую катушку, по которой пропускают постоянный электрический ток. Ось катушки совпадает с осью трубки.



Параметры устройства:

- внутренний радиус трубки $r_0 = 1,0 \text{ мм}$;
- радиус катушки $R = 1,0 \text{ см}$; катушка содержит $N = 100$ витков;
- опилки можно считать железными шариками диаметром $a = 0,10 \text{ мм}$, плотность железа $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
- плотность масла $\rho_0 = 0,80 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- концентрация опилок в неподвижном масле $n_0 = 10 \frac{\text{штук}}{\text{мм}^3}$;
- на концах трубки поддерживается постоянная разность давлений $\Delta P_0 = 1,0 \text{ кПа}$;
- магнитная проницаемость масла равна 1, магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

Технически это возможно

При отсутствии электрического тока в катушке расход масла (объем, протекающий через трубку в единицу времени) постоянен и равен $q_0 = 10 \frac{\text{см}^3}{\text{мин}}$. Скорости движения различных слоев масла внутри трубки различаются и зависят от расстояния до оси. Однако, для упрощения задачи будем считать, что скорость течения постоянна в поперечном сечении (см. также примечание к задаче 1.2). Также будем считать, что сила, действующая на отдельную частицу со стороны магнитного поля, зависит только от расстояния до катушки и не зависит от расстояния до оси.

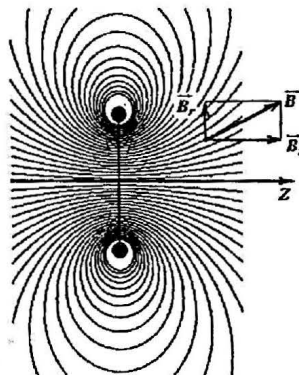
Часть 1. «Магнитное поле»

1.1 Покажите, что модуль вектора индукции магнитного поля на оси катушки на расстоянии z от ее центра определяется формулой

$$B_z = \mu_0 I N \frac{R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}, \quad (1)$$

где I - сила тока в катушке. Вычислите значение величины

B_0 при силе тока в катушке $I_0 = 1,0 \text{ А}$.



1.2 Можно, считать, что проекция вектора индукции на ось катушки B_z на заданном расстоянии от центра остается постоянной в поперечном сечении на небольшом расстоянии от оси. Найдите радиальную составляющую вектора магнитной индукции B_r , как функцию расстояний до центра катушки z и до ее оси r .

Часть 2. «Опилки»

2.1 При движении опилок в масле на отдельную частицу действует сила сопротивления, которая пропорциональна диаметру частицы и ее относительной скорости

$$F = \beta v.$$

Определите численное значение параметра β , если известно, что скорость оседания опилок в неподвижном масле равна $0,10 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$.

В дальнейшем используйте обозначение этой величины и ее численное значение.

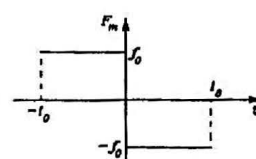
2.2 При помещении опилок в магнитное поле, каждая частица приобретает наведенный магнитный момент $p_m = \chi \frac{B}{\mu_0} V$, где V - объем частицы, χ - магнитная восприимчивость материала, которая для используемых опилок равна $\chi = 800$. Магнитным гистерезисом материала опилок и их взаимодействием следует пренебречь.

Покажите, что сила, действующая на отдельную частицу пропорциональна квадрату силы тока в кольце.

Простейшей системой, обладающей магнитным моментом является контур с током, магнитным моментом такого контура является произведение площади контура на силу тока в нем $p_m = IS$.

2.3 Найдите зависимость силы, действующей на отдельную частицу опилок со стороны магнитного поля кольца, от расстояния до центра кольца, $F_m(z)$ при силе тока в катушке $I_0 = 1,0 \text{ А}$. Считайте, что частица находится на оси системы. Постройте график этой зависимости.

Для дальнейших расчетов сделаем еще одно упрощение - будем считать, что сила притяжения опилок к центру кольца постоянная и равна f_0 на расстоянии равном l_0 , а на больших расстояниях пренебрежимо мала. В качестве величины f_0 возьмите половину максимального значения силы $F_m(z)$, а в качестве l_0 - удвоенное расстояние от центра кольца, до точки, в которой сила $F_m(z)$ максимальна.



Определите численное значение величины l_0 , а также коэффициент пропорциональности A между параметром f_0 и квадратом силы тока в кольце $f_0 = AI^2$.

Также в дальнейшем используйте эти параметры и их численные значения.

Часть 3. «Течение и расход»

3.1 Найдите зависимость концентрации опилок в потоке масла от расстояния до центра кольца при скорости течения масла равной u .

3.2 Какую дополнительную разность давлений на масло создает сила магнитного взаимодействия опилок с полем кольца при скорости течения масла равной u ?

3.3 Чему равно относительное изменение расхода масла $\frac{\delta q}{q_0}$, при силе тока через катушку $I_0 = 1,0 \text{ А}$? Как зависит относительное изменение расхода масла от силы тока в катушке?

3.4 При какой силе тока в катушке течение масла прекратится?