Метод математической индукции

Используется при доказательстве соотношений между выражениями, зависимыми от некоторой переменной n, принимающей натуральные значения. В принципе, эта переменная может быть не только числом, но и элементом произвольного счетного множества E.

Типичная схема доказательства:

1°. База индукции. Доказываем утверждение для $n = 1(0, 2, ...)$.

2°. Индуктивный переход. Доказываем, что если утверждение верно для $n = k$, то оно верно для $n = k + 1$.

На основании 2° с использованием 1° последовательно получаем, что утверждение верно для $n = 1$, для $n = 2$, …, для любого натурального n.

Возможны вариации метода. Можно доказывать утверждение для четных или нечетных n, для делителей 3 и т.п. В индуктивном переходе можно пользоваться несколькими предыдущими шагами, для этого необходимо соответствующее число баз. Особое место занимает метод подъема и спуска. Доказательство выглядит так:

1°. База индукции.

2°. Подъем. Доказываем, что если утверждение верно для $n = k$, то оно верно для $n = 2k$ (или $n = rk$, где $r \in \mathbb{Z}$).

3°. Спуск. Доказываем, что если утверждение верно для $n = k$, то оно верно для $n = k - 1$.

На основании 2° с использованием 1° последовательно получаем, что утверждение верно для $n = 1$, для $n = 2$, …, для любого натурального n, являющегося степенью двойки. Далее, на основании 3° получаем, что утверждение верно для любого натурального n (ведь для любого натурального n существует такое натуральное m, что $2^m > n$).

Методом математической индукции можно доказать полезные соотношения для сумм:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{gathered}}$$

Метод математической индукции также используется при решении задач на делимость и доказательстве неравенств. Например, можно доказать, что $7^{2n} - 1$ делится на 24 при любом натуральном n; а также $(1+x)^n \geq 1+nx$ при любом натуральном n и произвольном $x \geq -1$ (неравенство Бернулли).

Неравенство Коши между средними:

Для произвольного набора неотрицательных чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$ справедливо неравенство:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

причем раенство достигается тогда и только тогда, когда все a_i равны.

Доказывается оно при помощи метода подъема-спуска (существует и другое доказательство, основанное на лемме Коши).

Последовательности

Последовательностью называют отображение множества натуральных чисел на некоторое подмножество множества действительных чисел. Обозначают чаще всего $\{a_n\}$.

Последовательность можно задать формулой общего члена, то есть определить зависимость $a(n)$. Часто последовательности задают при помощи метода математической индукции, т.е. выражают n-й член последовательности через некоторое количество предыдущих членов. Такой способ называется рекуррентным.

Арифметической прогрессией называют последовательность $\{a_n\}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым числом d, называемым **разностью** арифметической прогрессии. Она задана следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n + d. \end{cases}$$

Геометрической прогрессией называют последовательность $\{b_n\}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое ненулевое число q, называемое **знаменателем** геометрической прогрессии. Она задана следующим образом:

$$\begin{cases} b_1 = b, \\ b_{n+1} = b_n q, q \neq 0. \end{cases}$$

Последовательностью Фибоначчи называют последовательность $\{F_n\}$, первые два члена которой равны 1, а каждый следующий член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Она задана следующим образом:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Существует также формула общего члена последовательности Фибоначчи (**формула Бине**):

$$\boxed{F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{2\varphi - 1}}$$

Здесь $\varphi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ – золотое сечение. Оно также является пределом отношения соседних чисел Фибоначчи при больших n.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии:

Последовательность является арифметической прогрессией т. и т.т., когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:

$$\{a_n\} \text{ – арифметическая прогрессия } \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1.$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии:

Последовательность является геометрической прогрессией т. и т.т., когда квадрат каждого ее члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов:

$$\{b_n\} \text{ – геометрическая прогрессия } \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}, n > 1.$$

При этом любое b_i должно быть либо одного знака со своими соседями, либо противоположных знаков.

Из этих свойств можно получить интересное следствие:

Если натуральные числа m, n, p, q таковы, что $m + n = p + q$, то выполнены равенства:

$$a_m + a_n = a_p + a_q,$$

$$b_m b_n = b_p b_q,$$

где $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле:

$$\boxed{S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} = a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии может быть найдена по формуле:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$$

Произведение первых n членов геометрической прогрессии может быть найдено по формуле:

$$\boxed{P_n^2 = (b_1 b_n)^n}$$

Тригонометрия

Радианом (рад) называют центральный угол, вырезающий на окружности дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Радианной мерой угла называют отношение данного угла к углу в 1 рад.

Таким образом, из определения радианной меры угла и формулы для длины окружности получаем, что полный угол равен 2π рад.

Синусом угла α (обозначают $\sin\alpha$) называют ординату точки единичной окружности, соответствующей углу α.

Косинусом угла α (обозначают $\cos\alpha$) называют абсциссу точки единичной окружности, соответствующей углу α.

Тангенсом угла α (обозначают $\operatorname{tg}\alpha$) называют отношение синуса угла α к его косинусу:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Котангенсом угла α (обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$) называют отношение косинуса угла α к его синусу:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Синус и косинус определены на всей числовой оси, тангенс не определен в точках вида $\pi/2 + \pi k$, котангенс не определен в точках вида πk (здесь $k \in \mathbb{Z}$).

Между тригонометрическими функциями существуют следующие соотношения:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ – } \textbf{основное тригонометрическое тождество},\\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\\ \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha},\\ \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}.\end{gathered}}$$

Эти формулы справедливы для тех и только для тех α, при которых обе части равенства определены.

Функцию f называют **четной**, если область D ее определения симметрична относительно точки $x = 0$, а при замене знака аргумента значение функции не изменяется:

$$\boxed{f(x) \text{ – } \textit{четная} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\colon x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f),\\ \forall x \in D(f)\colon f(x) = f(-x).\end{cases}}$$

Функцию f называют **нечетной**, если область D ее определения симметрична относительно точки $x = 0$, а при замене знака аргумента изменяется знак функции, а ее модуль не изменяется:

$$\boxed{f(x) - \textit{нечетная} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x: x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f), \\ \forall x \in D(f): f(x) = -f(-x). \end{cases}}$$

Функции синуса, тангенса и котангенса являются нечетными, а функция косинуса – четной.

Функцию f называют **периодической**, если существует действительное число T такое, что для любого $x \in D(f)$ функция определена в точках $x + T$ и $x - T$, а ее значения в этих точках равны значению в точке x:

$$\boxed{f(x) - \textit{периодическая} \Leftrightarrow \exists T: \begin{cases} \forall x: x \in D(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - T \in D(f), \\ x + T \in D(f), \end{cases} \\ \forall x \in D(f): f(x) = f(x - T) = f(x + T). \end{cases}}$$

Каждое из чисел T называют **периодом** функции f, а наименьшее положительное среди этих чисел – **главным периодом** этой функции (далее под периодом функции будем понимать именно главный период).

Функции синуса и косинуса являются периодическими с периодом 2π, а функции тангенса и котангенса – с периодом π. Эти утверждения можно доказать, исходя из определения тригонометрических функций через единичную окружность.

Зависимость $f(x)$ такую, что функция f зависит от аргумента x по закону синуса или косинуса, называют **гармоническим колебанием**. **Частотой** ν гармонического колебания называют величину, обратную периоду:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

Можно доказать, что сумма гармонических колебаний одинаковой частоты также является гармоническим колебанием этой же частоты. Для доказательства этого факта удобно воспользоваться методом **хитрого умножения**.

Иногда бывает полезно привести выражение, содержащее тригонометрические функции, к виду, в котором аргументы этих функций будут принадлежать первой четверти. Обеспечить это позволяют **формулы приведения**:

$$
\boxed{\begin{gathered}
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\,,\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\,,\\
\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg} x\,,\\
\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg} x\,,\\
\sin(x+\pi)=-\sin x\,,\\
\cos(x+\pi)=-\cos x\,,\\
\operatorname{tg}(x+\pi)=-\operatorname{tg} x\,,\\
\operatorname{ctg}(x+\pi)=-\operatorname{ctg} x\,.
\end{gathered}}
$$

Для приведения углов тригонометрических функций в интервал $x \in [0, \pi/4]$ можно воспользоваться **формулами дополнительного угла**:

$$
\boxed{\begin{gathered}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\,.\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\,,\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x\,,\\
\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x\,.
\end{gathered}}
$$

Трудно запомнить наизусть все эти формулы. Для быстрого выведения каждой из них можно воспользоваться **мнемоническим правилом**: при добавлении к аргументу величины, кратной $\pi/2$, но не кратной π, по другую сторону равенства функция изменяется на кофункцию. При добавлении к аргументу величины, кратной π, изменения не происходит. Для определения знака полученного выражения проще всего подставить некоторый угол, принадлежащий первой четверти, и поставить такой знак, чтобы тождество выполнялось. Например, необходимо упростить $\sin(x + 9\pi/2)$. Используя первый пункт мнемонического правила, получаем, что это равно $\cos x$ с некоторым знаком. Подставляя $x = 0$, получаем, что $\sin(9\pi/2) = 1 > 0$. Тогда в тождестве необходимо поставить справа знак “+”. Окончательно имеем $\sin(x + 9\pi/2) = \cos x$.

Тригонометрические функции нескольких аргументов

В некоторых разделах математики (например, в математическом анализе), а также в физике, широко встречаются тригонометрические функции суммы, разности аргументов и т.п. Для выражения тригонометрических функций суммы или разности через функции слагаемых можно воспользоваться формулами **синуса суммы** и **косинуса суммы**:

$$
\boxed{\begin{gathered}
\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,,\\
\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,.
\end{gathered}}
$$

Аналогичные формулы существуют для **синуса разности** и **косинуса разности**:

$$
\boxed{\begin{gathered}
\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,,\\
\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,.
\end{gathered}}
$$

В принципе, эти формулы можно получить из формул синуса и косинуса суммы из соображений четности, заменяя аргумент β на $-\beta$.

Складывая эти формулы, нетрудно получить:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)),\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)). \end{aligned}}$$

В таком виде выражение особенно удобно для интегрирования. Произведя несложную замену переменных, можно получить:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x+\sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\\ \sin x-\sin y &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right),\\ \cos x+\cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\\ \cos x-\cos y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}}$$

Здесь $x=(\alpha+\beta)/2$, $y=(\alpha-\beta)/2$. В таком виде выражение удобно логарифмировать.

Произведя несложные операции над полученными выше формулами, можно получить:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha},\\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha},\\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\\ \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\\ \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta &= \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\\ \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta &= \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\\ \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta &= -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}. \end{aligned}}$$

Из этих формул при подстановке $\beta = \alpha$ можно получить интересные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента (**формулы двойного** и **тройного угла**):

$$\boxed{\begin{gathered}
\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,\\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\,,\\
\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\\
\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\alpha},\\
\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,,\\
\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,,\\
\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},\\
\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.
\end{gathered}}$$

Решая полученные уравнения, можно вывести **формулы половинного угла**:

$$\boxed{\begin{gathered}
\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\\
\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{gathered}}$$

А также **формулы понижения степени**:

$$\boxed{\begin{gathered}
\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\\
\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\\
\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4},\\
\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}.
\end{gathered}}$$

Иногда бывает удобно выразить тригонометрическое выражение через некоторую универсальную переменную. В качестве такой переменной может выступить тангенс половинного угла. Соответствующие формулы, выражающие тригонометрические функции угла α через $\operatorname{tg}\alpha/2$, называются **формулами универсальной подстановки**:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\\ \cos\alpha &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}}$$

В некоторых разделах физики (особенно в геометрической оптике) бывает полезно заменить тригонометрическую функцию аргумента на некую степенную сумму при условии, что аргумент малый (то есть по модулю намного меньше 1, в оптике такое приближение называют параксиальным). Для этого используются известные приближенные формулы $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Более точно эти приближения выглядят так:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots,\\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots,\\ \operatorname{tg} x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots,\\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\cdots.\end{aligned}}$$

Наиболее употребительны первые члены приближения для синуса и тангенса, более редко используется второй член в формуле для косинуса. Остальные члены разложения в сумму используются крайне редко.

Также эти приближения могут помочь при решении некоторых других задач. Пусть необходимо найти приближенную формулу для упрощения выражения $\sin(x+\varepsilon)$ при малом ε. Не зная определения производной, можно сделать это при помощи приближений малого аргумента: $\sin(x+\varepsilon) = \sin x\cos\varepsilon + \cos x\sin\varepsilon \approx \sin x + \varepsilon\cos x$. Формулы для таких приближений имеют вид:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x+\varepsilon) &= \sin x + \varepsilon\cos x,\\ \cos(x+\varepsilon) &= \cos x - \varepsilon\sin x,\\ \operatorname{tg}(x+\varepsilon) &= \operatorname{tg} x + \frac{\varepsilon}{\cos^2 x},\\ \operatorname{ctg}(x+\varepsilon) &= \operatorname{ctg} x - \frac{\varepsilon}{\sin^2 x}.\end{aligned}}$$

Вообще говоря, именно так можно вывести формулы для производных тригонометрических функций.

Степень с рациональным показателем

Корнем натуральной **степени** n числа a называется такое число x, n-я степень которого равна a. Обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Нахождение корня n-й степени числа a называется **извлечением корня**. Число a называется **подкоренным выражением**, n – **показателем корня**. При нечетном n существует корень n-й степени из любого действительного числа a. При четном n существуют два корня n-й степени из положительного числа a. Чтобы устранить двузначность определения, вводится понятие **арифметического корня**:

*Если $a \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то существует одно и только одно неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число и называется **арифметическим корнем степени** n.*

При $a < 0$ двузначности определения корня числа нет.

Свойства арифметического корня (здесь $a, b \geq 0$; $m, n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},\\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\\ \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n,\\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\\ \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}.\end{gathered}}$$

Введем определение **степени с рациональным показателем** через определение арифметического корня. Если $a \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$; то $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ по определению. Ввести аналогичное определение для $a < 0$ не представляется возможности. Показывает это следующий контрпример:

$$-2 = (-8)^{-1/3} = (-8)^{-2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

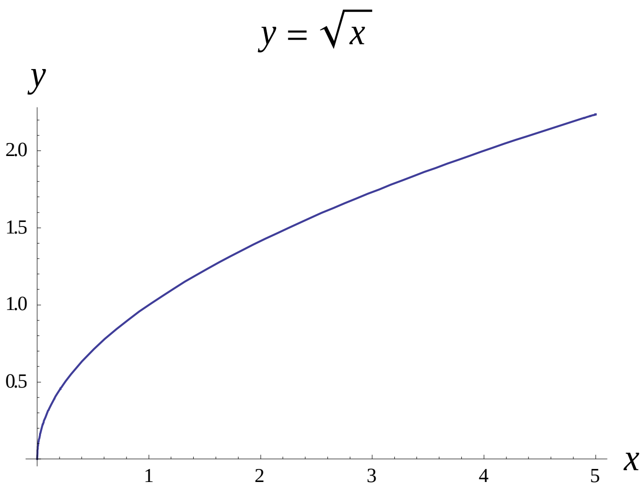
График функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$ представляет собой ветвь параболы, симметрично отраженной от прямой $y = x$, при четных n; или две ветви параболы, симметрично отраженные относительно той же прямой, при нечетных n.

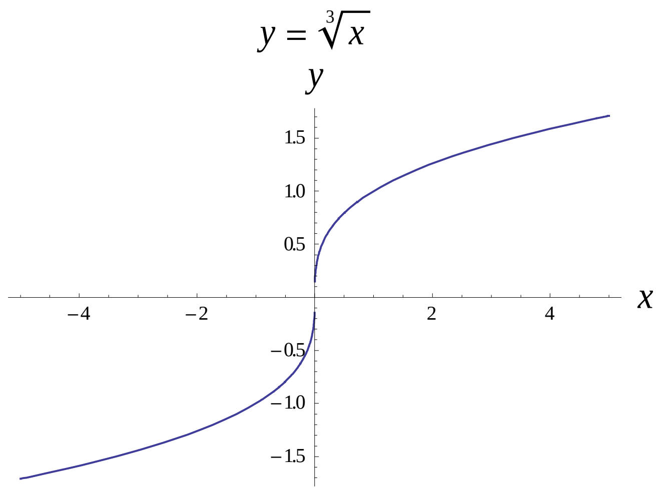
График функции $y = x^k$ ($k \in \mathbb{Q}$) представляет собой ветвь параболы при $k > 0$ и $k \neq 1$; луч прямой при $k = 0$ и $k = 1$; ветвь гиперболы при $k < 0$.

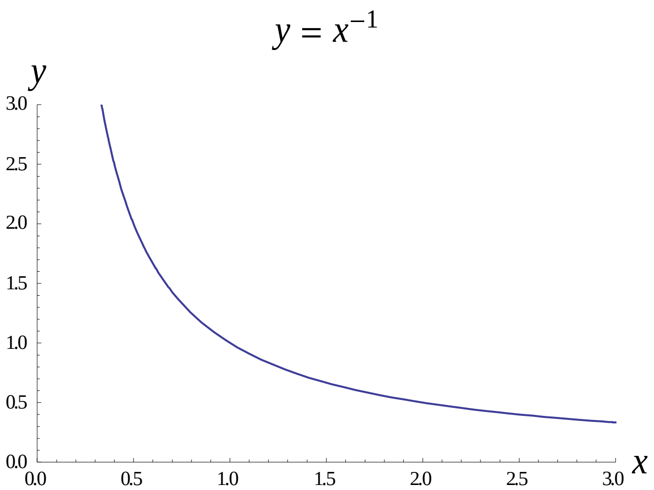
Свойства степени с рациональным показателем ничем не отличаются от свойств степени с целым показателем:

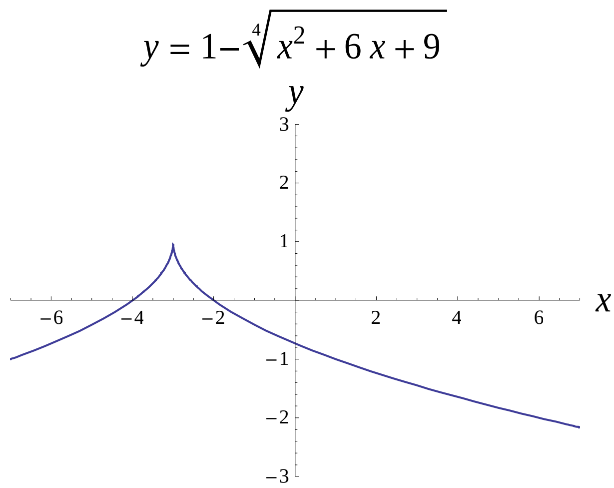
$$\boxed{\begin{gathered}(ab)^n = a^n b^n,\\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\\ a^{m+n} = a^m a^n,\\ a^{mn} = (a^m)^n.\end{gathered}}$$

На рисунках изображены графики некоторых степенных функций.









Выражения типа $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ называются **двойными радикалами**. Избавиться от двойного радикала (т.е. от радикала под радикалом) можно тогда, когда число $a^2 - b$ является точным квадратом. Подтверждает это следующая формула:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Также избавиться от одного из радикалов можно, если выражение под внешним корнем является квадратом некоторого выражения. Обнаружить это возможно, например, подбором.

Изредка удается избавиться и от квадратного корня под кубическим. Для этого необходимо, чтобы выражение под кубическим корнем являлось кубом некоторого выражения. Обнаружить это возможно только подбором.

Иррациональные уравнения

Рассмотрим некоторые типы иррациональных уравнений. Здесь $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые функции переменной x (предполагается, что уравнения типа $g(x) = 0$ решить нетрудно); C – некая константа, не зависимая от x.

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}}$$

Кажется, что условие равносильности перехода (нижнее неравенство) имеет вид $f(x) \geq 0$, но это не так. При возведении в квадрат условие $f(x) \geq 0$ сохранилось в уравнении, ведь $g^2(x) \geq 0$ при любом x. Условие же неотрицательности $g(x)$ потеряно по той же причине. Это утверждение можно обобщить на случай корня четной степени n, тогда вместо $g^2(x)$ в уравнении должно стоять $g^n(x)$.

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}}$$

В этом случае можно подставить корни уравнения в более простое неравенство. Не нужно проверять оба неравенства, ведь выполнение одного из них и уравнения автоматически означает выполнение второго.

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = C \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = C^2, \\ C \geq 0. \end{cases}}$$

Это утверждение следует из первого при подстановке $g(x) = C$.

$$\boxed{\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = C \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = C^2, \\ C \geq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = C^2, \\ C \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}}$$

Здесь, как и во втором примере, не нужно последнее неравенство. Оно выполняется автоматически при условии остальных неравенств.

$$\boxed{g(x)\sqrt{f(x)} = g(x)h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = h^2(x), \\ h(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.}$$

Пример более сложного уравнения, сводящегося к совокупности систем.

В принципе, все эти уравнения можно решить по-другому: делать следственные переходы, не заботясь о равносильности, а в конце подставить корни в исходное уравнение. Такой метод удобнее, когда корень целый или выражения с обеих сторон уравнения простые. Таким же образом можно решить и более сложные уравнения.

$$\boxed{\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{f(x)+g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} f(x)=0, \\ g(x)=0, \\ f(x)+g(x)=0. \end{array}\right.}$$

Это утверждение доказывается возведением в куб исходного выражения.

$$\boxed{\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)} \Rightarrow 3\sqrt[3]{f(x)g(x)h(x)}=h(x)-f(x)-g(x).}$$

В этом утверждении переход следственный. Чтобы он стал равносильным, необходимо *невыполнение* равенства $f(x)=g(x)=-h(x)$.

В более сложных уравнениях удобнее использовать **метод замены**. Некоторое иррациональное выражение (или даже несколько) заменяем на переменную (или переменные). Получаем простое для решения уравнение или систему уравнений. В случае, когда система получилась симметричная, удобно ввести замену переменных $\alpha=a+b$ и $\beta=ab$. После решения уравнения с заменой необходимо решить уравнение типа “выражение = корень” для всех получившихся корней. Такой метод позволяет решить однородные и симметричные уравнения со сложными выражениями от переменной.

В системах иррациональных уравнений более пригоден метод замены, ведь зачастую трудно избавиться от одной из переменных, выразив ее через другую.

Иррациональные неравенства

Эта тема – усложненное продолжение предыдущей. При решении иррациональных (да и вообще, произвольных) неравенств уже нельзя делать следственные переходы (за редким исключением), ведь в ответах часто будут получаться интервалы, которые невозможно проверить подстановкой. Необходимо четко следить за равносильностью переходов. Здесь $f(x)$ и т.п. – функции переменной x, a – некая константа.

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\geq g^2(x), \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\leq 0, \end{cases} \\ f(x)\geq g^2(x). \end{array}\right.}$$

Случай $g(x)>0$ аналогичен соответствующему иррациональному уравнению. Случай же $g(x)\leq 0$ показывает различие уравнений и неравенств. Условие $g(x)>0$ во второй системе оказывается излишним: случай $g(x)\leq 0$ попадает в систему с менее строгим неравенством ($f(x)\geq 0$ – следствие неравенства $f(x)\geq g^2(x)$).

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)< 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)> g^2(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)< 0, \end{cases} \\ f(x)> g^2(x). \end{array}\right.}$$

Здесь по сравнению с предыдущим неравенством удобнее отнести случай $a=0$ к другому “блоку”. Как и в предыдущем случае, неравенство $g(x)\geq 0$ излишнее.

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}}$$

Во втором случае в этом неравенстве при возведении в квадрат условие $f(x) \geq 0$ более не сохраняется (по сравнению с предыдущими неравенствами), приходится добавить его отдельно. Кроме того, в отличие от предыдущих случаев, при $g(x) < 0$ решений нет.

$$\boxed{\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}}$$

Здесь, как и в предыдущем примере, в случае $g(x) < 0$ решений нет.

При решении иррациональных неравенств часто помогает метод замены. Так, можно ввести одну, а то и две переменные, получить на них сравнительно простое неравенство или систему неравенств, а далее решить их обычными методами. Необходимо внимательно следить за ограничениями на переменные.