Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-11

Материалы к урокам по теме: "Показательные уравнения"

Харьков, 2015 г.

Поурочное планирование (18 часов)

Урок 1. Простейшие показательные уравнения вида $a^x = b$.

Урок 2. Показательные уравнения вида $a_1^{g_1(x)} = a_2^{g_2(x)}$.

Урок 3. Показательные уравнения вида $(f_1(x))^{g_1(x)} = (f_2(x))^{g_2(x)}$.

Урок 4. *Самостоятельная работа* по теме: "Простейшие показательные уравнения".

Урок 5. Замена переменной как метод решения показательных уравнений.

Урок 6. Решение показательных уравнений методом замена переменной.

Урок 7. Использование монотонности показательной функции при решении уравнений.

Урок 8. Нестандартные методы решения показательных уравнений.

Урок 9. *Самостоятельная работа* по теме: "Метод замены переменной. Нестандартные методы решения показательных уравнений".

Урок 10. Системы показательных уравнений.

Урок 11. Решение систем показательных уравнений.

Урок 12. Задачи с параметрами, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена.

Урок 13. Решение задач с параметрами.

Урок 14. Решение задач с параметрами-2.

Урок 15. *Самостоятельная работа* по теме: "Системы показательных уравнений. Показательные уравнения с параметрами".

Урок 16. Обобщающий урок по теме.

Урок 17. Контрольная работа.

Урок 18. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Простейшие показательные уравнения вида $a^x = b$

1) Мы приступаем к изучению нового типа уравнений.

Определение.

> *Уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени, называются* ***показательными****.*

2) Начнем с простейшего показательного уравнения

$$a^x = b, \quad a > 0, \ a \neq 1. \tag{1.1}$$

Поскольку показательная функция принимает только положительные значения, то при $b \leqslant 0$ уравнение (1.1) решений не имеет. При $b > 0$ уравнение (1.1) имеет единственное решение:

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a b, & \text{при} \quad b > 0; \\ \text{нет решений}, & \text{при} \quad b \leqslant 0. \end{cases}}$$

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $7^{5x} = 3$;

(2) $8^x = 16$;

(3) $0,16^x = \dfrac{5}{2}$;

(4) $\sqrt{11^x} = 17$;

(5) $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x} = 1$;

(6) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;

(7) $\dfrac{1}{9}\sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-3/4}$;

(8) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^9$;

(9) $3^{x+2} - 3^x = 104$;

(10) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$;

(11) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$;

(12) $5^2 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0,04^{-28}, \ x \in \mathbb{N}$;

(13) $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162$;

(14) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

(1) $\sqrt{7^x} = 5^{-2/3}$;

(2) $\left(\dfrac{1}{0,125}\right)^{x^2} = 128$;

(3) $\sqrt[5]{13^{x^2+3x-5}} = 13$;

(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+2} = \dfrac{1}{729}$;

(5) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;

(6) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\dfrac{9}{8}\right)^{x} = \dfrac{27}{64}$;

(7) $2 \cdot 3^{x+2} - 5 \cdot 3^{x-3} = 1443$;

(8) $3^{20x-3} + 9^{10x-1} - 81^{5x-1} - 243^{4x-1} = 864$.

2) **Сканави: 7.059, 7.062, 7.064**.

Урок 2. Показательные уравнения вида $a_1^{g_1(x)} = a_2^{g_2(x)}$

1) Рассмотрим уравнение

$$a^{g_1(x)} = a^{g_2(x)}, \quad a > 0,\ a \neq 1 \tag{2.1}$$

Поскольку показательная функция строго монотонна и определена на всей числовой оси, то это уравнение равносильно уравнению

$$g_1(x) = g_2(x).$$

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$;

(2) $4^x \cdot 5^{x-1} = 0,2 \cdot 20^{3-2x}$;

(3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;

(4) $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} - 7 \cdot 8^{x^2-5x+7} = 0$.

(5) $16^{5-3x} = 0,125^{5x-6}$;

2) Решая уравнение (2.1), мы фактически брали логарифмы от обеих частей. Этот метод может быть обобщен на показательные уравнения более общего типа. Рассмотрим уравнение

$$a_1^{g_1(x)} = a_2^{g_2(x)}, \quad a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_1 \neq 1, a_2 \neq 1. \tag{2.2}$$

Логарифмируя обе его части по одному и тому же основанию, приходим к равносильному уравнению

$$g_1(x)\log a_1 = g_2(x)\log a_2.$$

3) Заметим, что если функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ линейные, то уравнение (2.2) может быть сведено к простейшему уравнению (1.1). Действительно,

$$a_1^{k_1x+b_1} = a_2^{k_2x+b_2} \Leftrightarrow \left(a_1^{k_1}\right)^x \cdot a_1^{b_1} = \left(a_2^{k_2}\right)^x \cdot a_2^{b_2} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1^{k_1}}{a_2^{k_2}}\right)^x = \frac{a_2^{b_2}}{a_1^{b_1}}.$$

4) **Упражнения**. Решите уравнения:

(1) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;

(2) $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$.

(3) $2^{1-x} = 3^{1+x}$;

(4) $4^x - 3^{x+1} = 3^{x+2} - 2^{2x-1}$.

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

(1) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \dfrac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;

(2) $0,25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0,25 \cdot 4^{2x}}$;

(3) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;

(4) $3^{x+1} \cdot 4^x = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$;

(5) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$;

(6) $5^{x-3} - 5^{x-4} - 8 \cdot 5^{x-5} = 2^{x-3}$;

(7) $3^{|x|} = 5^{x^2+3x}$.

2) **Сканави: 7.066, 7.067**.

Урок 3. Уравнения вида $(f_1(x))^{g_1(x)} = (f_2(x))^{g_2(x)}$

1) Рассмотрим функцию
$$\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}. \tag{3.1}$$
Какова ее область определения? Существуют две точки зрения. *Первая* исходит из того, что функция $f(x)$ может принимать только положительные значения. *Вторая* точка зрения позволяет $f(x)$ обращаться в 0 при $g(x) > 0$ и принимать отрицательные значения при тех x, при которых $g(x)$ принимает целые значения.

   В математической литературе доминирует первый подход. В частности, это объясняется тем, что $\varphi(x)$ удобно записывать с помощью экспоненты:
$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln f(x)}.$$
В дальнейшем, говоря о функции (3.1), мы будем всегда полагать, что $f(x) > 0$ (если, конечно, $g(x) \neq const$).

2) Рассмотрим уравнение
$$(f_1(x))^{g_1(x)} = (f_2(x))^{g_2(x)}. \tag{3.2}$$
Очевидно, что при сделанных предположениях оно равносильно уравнению
$$g_1(x)\log f_1(x) = g_2(x)\log f_2(x)$$
(логарифмы берутся по одному и тому же произвольному основанию).

3) Чаще всего приходится иметь дело с частными случаями уравнения (3.2). Начнем с уравнения
$$(f(x))^{g(x)} = 1. \tag{3.3}$$
Из сказанного выше следует, что
$$(f(x))^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x) - \text{ определена}, \end{cases} \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-2} = 1;$

(2) $|x-6|^{x^2-7x+6} = 1;$

(3) $\left(x^2 - 4x + 3\right)^{\sqrt{x-2}} = 1;$

(4) $5^x \cdot 8^{(x-1)/x} = 500$.

4) Теперь рассмотрим уравнение

$$(f(x))^{g_1(x)} = (f(x))^{g_2(x)}\,. \tag{3.5}$$

Легко видеть, что оно решается по следующей схеме:

$$(f(x))^{g_1(x)} = (f(x))^{g_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g_1(x) = g_2(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 1, \\ g_1(x), g_2(x) - \text{ определены.} \end{cases} \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $\sqrt[5]{|x+2|^{x+2}} = \sqrt{|x+2|^{x-3}}$;

(2) $(x-3)^{x^2+x} = (x-3)^{7x-5}$;

(3) $|x-4|^{\sqrt{-x^2+5x-3}} = |x-4|$;

(4) $\left(4-x^2\right)^{-\cos^2 x/(\cos x+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Домашнее задание

1) **Сканави: 7.204, 7.205**.

2) Решите уравнения:

(1) $(x+4)^{x^2+9x+8} = 1$;

(2) $x^{\sqrt{x-1}} = x^{x-3}$;

(3) $\left(1-x^2\right)^{(2+x)^2} = \left(1-x^2\right)^{(8x-2)(x+2)}$;

(4) $|x+5|^{\sqrt{-x^2-x+29}} = |x+5|^3$;

(5) $\left(5-x^2\right)^{\sin\frac{x}{2}/(1-\cos x)} = \sqrt{5-x^2}$.

(6) $7^x \cdot 9^{(x-1)/x} = 147$.

Урок 5. Замена переменной как метод решения показательных уравнений

1) Многие показательные уравнения имеют вид

$$f(a^x) = 0. \tag{5.1}$$

Такие уравнения решают методом замены переменной:

$$t = a^x, \quad t > 0. \tag{5.2}$$

Корни алгебраического уравнения $f(t) = 0$ обычно можно найти одним из ранее изученных способов. Заметим, что нас интересуют только положительные корни этого уравнения.

2) Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы уравнений, которые решаются методом замены переменной. Начнем с уравнений вида

$$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0, \quad A \neq 0. \tag{5.3}$$

После замены (5.2) получаем квадратное уравнение $At^2 + Bt + C = 0$.

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $25^x - 5^x - 20 = 0$;
(2) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$;
(3) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$;
(4) $9^{1-(x-1)^2} - 12 \cdot 3^{-(x-1)^2} + 1 = 0$.

3) Перейдем к рассмотрению уравнений вида

$$Aa^x + Ba^{-x} + C = 0, \quad A \neq 0, B \neq 0. \tag{5.4}$$

Очевидно, их тоже можно решить с помощью замены (5.2). При этом относительно t получим квадратное уравнение $At^2 + Ct + B = 0$.

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 16,5$;
(2) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$;
(3) $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$;
(4) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$;
(5) $9 \cdot 5^{2x-4} + 4 \cdot 5^{8-2x} = 325$;
(6) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

(1) $36^x - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;
(2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;

(3) $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$;

(4) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{1/\cos^2 x} = 80$;

(5) $\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \dfrac{5}{3}$.

2) **Сканави: 7.071, 7.216, 7.217**.

Урок 6. Решение показательных уравнений методом замена переменной

1) Часто приходится встречаться с уравнениями вида

$$Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0. \tag{6.1}$$

Это уравнение – однородное относительно функций $f(x) = a^x$ и $g(x) = b^x$. Разделив обе части (6.1) на b^{2x} и сделав замену $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, придем к квадратному уравнению

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

(2) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x = 7 \cdot 10^x$;

(3) $4^{2x+1} + 2^{2x+6} = 4 \cdot 8^{x+1}$;

(4) $15 \cdot 9^{1/x} - 34 \cdot 15^{1/x} + 15 \cdot 25^{1/x} = 0$;

2) Рассмотрим уравнение вида

$$A\left(a^{2x} + k^2 \cdot a^{-2x}\right) + B\left(a^x + k \cdot a^{-x}\right) + C = 0. \tag{6.2}$$

Оно решается с помощью замены

$$t = a^x + k \cdot a^{-x}.$$

Заметим, что мы встречались с похожими уравнениями при изучении возвратных рациональных уравнений.

Упражнения. Решите уравнения:

(1) $4^{x+0,5} + \dfrac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \dfrac{1}{2^x}\right)$;

(2) $7^{4x} - 7^{3x+1} + 10 \cdot 7^{2x} + 7^{x+1} + 1 = 0$;

(3) $3^{2x} - \dfrac{18}{3^{2x}} - \left(3^x + \dfrac{6}{3^x}\right) = 2$.

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

2) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x$;

3) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{x/2}$;

4) $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$;

5) $9^{x+0,5} + 3 \cdot 9^{-x} + 26 = 16 \cdot (3^x + 3^{-x})$.

6) $4^x + 2^{4-2x} - 3 \cdot \left(2^x - 2^{2-x}\right) - 8 = 0$;

7) $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$.

Урок 7. Использование монотонности показательной функции при решении уравнений

Монотонность показательной функции довольно часто можно использовать при решении показательных уравнений. Обычно соображения монотонности позволяют узнать, сколько корней имеет данное уравнение. Затем остается подобрать нужное количество корней.

Упражнения. Решите уравнения:

1) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$;

2) $7^{6-x} = x + 2$;

3) $6^{x-1} = \sqrt{38 - x}$;

4) $4^{1/x} - 1 = 3^{2x-1}$.

5) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$;

6) $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = 6\,\dfrac{1}{7} \cdot 14^{x/2}$;

7) $3^{1+x} - 2 \cdot 3^{1-x} = 7$;

8) $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$;

9) $4^{-1/x} - 5 \cdot 6^{-(1+x)/x} = 9^{-1/x}$;

10) $4^x - (19 - 3x) \cdot 2^x + 34 - 6x = 0$.

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $4^{x-2} + 6^{x-3} = 100$;

2) $2^x = 3 - x$;

3) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;

4) $7 \cdot 49^x = 4 \cdot 16^x - 3 \cdot 28^x$;

5) $9^{x-2} + 6^{x-2} = 2^{2x-3}$;

6) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x = 9 \cdot 2^{2x+2}$;

7) $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} = 4 \cdot 9^{1/x}$.

8) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

9) $9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0$.

Урок 8. Нестандартные методы решения показательных уравнений

1) Решите уравнения:

   (1) $4^x - 2^{x+1} + 5 = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$;

   (2) $5^x + 5^{2-x} = 10 \sin \dfrac{\pi x}{2}$;

   (3) $7^{\operatorname{tg} x} + 7^{\operatorname{ctg} x} = 14$;

   (4) $4^{\sin^2 \pi x} + 4^{\cos^2 \pi x} = -8x^2 + 12|x| - \dfrac{1}{2}$;

   (5) $3 \cdot 2^{1-x} + 7x = 10$.

2) Найдите число корней уравнения

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2.$$

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

   (1) $64^x - 2^{3x+1} + 7 = 6\cos 3x$;

   (2) $2^{\cos x} + 2^{\sin x} = 2^{1-\sqrt{2}/2}$;

(3) $3^{-x-1} + 2x + 1 = 0$;

2) Найдите число корней уравнения

$$3^x + 3^{2-x} = -x^2 + 6x - 2.$$

3) Решите уравнение: $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

Урок 9. Самостоятельная работа №2: "Показательные уравнения"

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $4^{x^2-x} - 17 \cdot 2^{x^2-x+2} + 256 = 0$;
2) $3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} - 8^{(\sqrt{x}-1)/2} - 4 = 0$;
3) $2^x - 3^{x/2} = 1$;
4) $3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}$;
5) $4^{-1/x} + 6^{-1/x} = 2 \cdot 9^{-1/x}$;
6) $\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{x-3}} + \left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{x-3}} = 18$;
7) $8 \cdot 4^{1/x} + 8 \cdot 4^{-1/x} - 54 \cdot 2^{1/x} - 54 \cdot 2^{-1/x} = -101$.

Урок 10. Системы показательных уравнений

1) Системы показательных уравнений чаще всего с помощью замены переменных сводятся к системам алгебраических уравнений.

   Упражнения. Решите системы уравнений:

   (1) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}; \end{cases}$

   (2) $\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$

2) Иногда удается решить одно из уравнений системы относительно какой-то переменной (либо исходной, либо введенной).

   Упражнения. Решите системы уравнений:

$$(1)\ \begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15; \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64; \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5, \\ \dfrac{3\,(x+y)}{x-y} + \dfrac{5\,(x-y)}{x+y} = 8. \end{cases}$$

Домашнее задание

Сканави: 7.134, 7.138, 7.148, 7.287, 7.288, 7.339.

Урок 11. Решение систем показательных уравнений

Решите системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 3^{x+y+1} + 7 \cdot 3^{y-2} = 8, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 25 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2} = \dfrac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+y+14} = \sqrt{x+y+12}; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} 2-y = x^{x/y^2}, \\ (x-2)\,(x+3) = y\,(y-5)\,; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leqslant 8. \end{cases}$$

Домашнее задание

Решите системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x^y = y^x, \\ x^x = y^{9y}; \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 2^{2y} = 4x, \\ x^y = 4096; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{x-y} = y^{x+y}, \\ \sqrt{x} \cdot y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x-1)(x+5) = y(y+6), \\ (x+1)^{(x+1)/y^2} = 2+y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1+xy} = \sqrt{x+1}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{x^2+y^2} = 16^{x+y}, \\ 2^{x^2} + 8 \cdot 2^{y^2} = 8 \cdot 16^x + 16^y. \end{cases}$

Урок 12. Задачи с параметрами, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена

1) Часто приходится иметь дело со следующей задачей:

> Дано уравнение
> $$a\,q^{2x} + b\,q^x + c = 0. \tag{12.1}$$
> Требуется выяснить, когда это уравнение
> - имеет два различных действительных корня;
> - имеет один действительный корень;
> - не имеет действительных корней.

2) Очевидно, что для ответа на поставленные вопросы надо сделать замену $t = q^x$ и рассмотреть характеристическое уравнение
$$a\,t^2 + b\,t + c = 0. \tag{12.2}$$
Количество решений уравнения (12.1) равно количеству положительных решений уравнения (12.2).

3) Поставленная задача обычно легко решается, если корни уравнения (12.2) находятся в "явном" виде, т. е. выражаются через коэффициенты без использования радикалов.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение
$$9^x - (a+1) \cdot 3^x + 3a - 6 = 0$$

имеет единственный действительный корень?

Ответ: При $a \in (-\infty; 2] \cup \{5\}$. **Решение:** Пусть $t = 3^x$. Тогда $t^2 - (a+1)\,t + 3a - 6 = 0$. Это уравнение при всех a имеет корни $t_1 = 3$, $t_2 = a - 2$. Поскольку первый корень всегда положителен, необходимо, чтобы второй корень был либо неположителен ($a \leqslant 2$), либо равен 3 ($a = 5$).

Упражнения.

(1) При каких значениях параметра a уравнение

$$49^x + 5 \cdot 7^x - a^2 + a + 6 = 0$$

не имеет действительных корней?

(2) При каких значениях параметра a уравнение

$$25^{x+0{,}5} - (5a+2) \cdot 10^x + a \cdot 4^{x+0{,}5} = 0$$

имеет два различных действительных корня?

4) Существенно сложнее обстоит дело в случае, когда корни уравнения (12.2) не могут быть выражены через значение параметра без использования радикалов. В этом случае надо использовать графические соображения либо применять теорему Виета.

- Уравнение (12.1) имеет два различных действительных корня т. и т. т., когда уравнение (12.2) имеет два различных положительных корня. Для этого н. и д., чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ ac > 0, \\ ab < 0. \end{cases}$$

- Уравнение (12.1) имеет один действительный корень т. и т. т., когда либо корни уравнения (12.2) разных знаков, либо один корень этого уравнения положителен, а другой равен нулю, либо уравнение (12.2) имеет один положительный корень (кратный или, при $a = 0$, просто единственный). Эти требования равносильны выполнению условий

$$\left[\begin{array}{l} ac < 0, \\ \begin{cases} c = 0, \\ ab < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} b^2 = 4ac, \\ ab < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ bc < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

- Уравнение (12.1) не имеет действительных корней т. и т. т., когда либо уравнение (12.2) не имеет действительных корней, либо все его корня неположительны. Эти требования равносильны выполнению условий

$$\left[\begin{array}{l} b^2 < 4ac, \\ \begin{cases} ac > 0, \\ ab > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} c = 0, \\ ab \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ bc \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Если старший коэффициент уравнений (12.1) и (12.1) не зависит от параметра, выписанные выше условия существенно упрощаются.

Упражнения.

(1) При каких значениях параметра a уравнение

$$169^x - (a-1) \cdot 13^x + 2a + 3 = 0$$

имеет единственный действительный корень?

(2) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-4) \cdot 64^x + (p+1) \cdot 8^x + 2p - 1 = 0$$

не имеет решений.

Домашнее задание

1) Решите уравнение $12 \cdot 4^{x-3} + 27 = a + a \cdot 2^{2x-4}$ при всех значениях параметра a.

2) Решите уравнение $36^x - a\,(a+1)\,6^x + a^3 = 0$ при всех значениях параметра a.

3) При каких значениях параметра a уравнение

$$100^x - (a+1) \cdot 10^x + 2a - 2 = 0$$

имеет два различных действительных корня?

4) При каких значениях параметра a уравнение

$$121^x - (a+7) \cdot 11^x + 4a + 12 = 0$$

имеет единственный действительный корень?

5) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^x + \left(a^2+5\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет решений.

6) При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 3^{2x} - (2a-1)\cdot 3^x - 1 = 0$$

имеет два различных действительных корня?

Урок 13. Решение задач с параметрами

1) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $e^{|x|} = \dfrac{2a+1}{a^2-1}$ имеет хотя бы один действительный корень.

2) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(a+\frac{1}{3}\right)x^2 + a^2$$

имеет единственное решение?

3) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5\,|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

4) При каких значениях параметра a уравнения

$$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16 \quad \text{и} \quad |a-9|\cdot 3^{x-2} + a\cdot 9^{x-1} = 1$$

равносильны?

Домашнее задание

1) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(0,3)^{x^2} = \dfrac{2-a}{a+3}$ имеет хотя бы один действительный корень.

2) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3^x + 3^{-x} = \left(a^2 - a\right)\cdot\cos x$$

имеет ровно один действительный корень.

3) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}=2\,(a-1)\,x^{2}+\frac{1}{2}\,a^{2}$$

имеет единственное решение?

4) При каких значениях параметра a уравнения

$$3^{x}+3^{x+3}=3^{x+1}+25 \quad \text{и} \quad |a-4|\cdot 2^{x}+a\cdot 4^{x}=4$$

равносильны?

5) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$4^{x}+2^{x+2}+7=p-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Урок 14. Решение задач с параметрами-2

1) При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{4x-x^{2}}=\frac{2a-1}{|a|-1}$$

имеет ровно один действительный корень?

2) При каких значениях параметра a уравнение

$$2^{3x+1}+3\cdot 4^{x}-3\cdot 2^{x+2}+4=a^{2}-4a$$

имеет ровно один действительный корень?

3) Определите количество корней уравнения $a\cdot 2^{x}+2^{-x}=1$ в зависимости от значений параметра a.

4) Определите количество корней уравнения

$$|x-a|=x\cdot(3-x)\cdot 3^{3x-x^{2}-|x-a|}$$

в зависимости от значений параметра a.

Домашнее задание

1) При каких значениях параметра a уравнение

$$2^{|x-1|} = a^2 - a - 1$$

имеет ровно один действительный корень?

2) При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{4x+1} - 8 \cdot 27^x - 2 \cdot 3^{2x+1} + 8 \cdot 3^{x+1} = a^2 - 2a$$

имеет ровно один действительный корень?

3) Определите количество корней уравнения $2^{|x|} = 4^x + a$ в зависимости от значений параметра a.

4) Решите уравнение $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ при всех значениях параметра a.

Урок 16. Обобщающий урок

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

   (1) $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1 - 6 \cdot 3^x + 3^{2(x+1)}}$;

   (2) $5^{3x} + 5^{3(1-x)} + 15\left(5^x + 5^{1-x}\right) = 216$.

2) Решите системы уравнений:

   (1) $\begin{cases} 3 \cdot x^{2y-1} = 4, \\ x^{y+1} = 6; \end{cases}$

   (2) $\begin{cases} 4^{x+y} = 27 + 9^{x-y}, \\ 8^{x+y} - 21 \cdot 2^{x+y} = 27^{x-y} + 7 \cdot 3^{x-y+1}. \end{cases}$

3) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4^x + 3 = a \cdot (2^x + 1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$4^x + 2 = a \cdot 2^x \cdot \sin(\pi x)$$

имеет ровно один действительный корень.