Задача № 1

8 клас

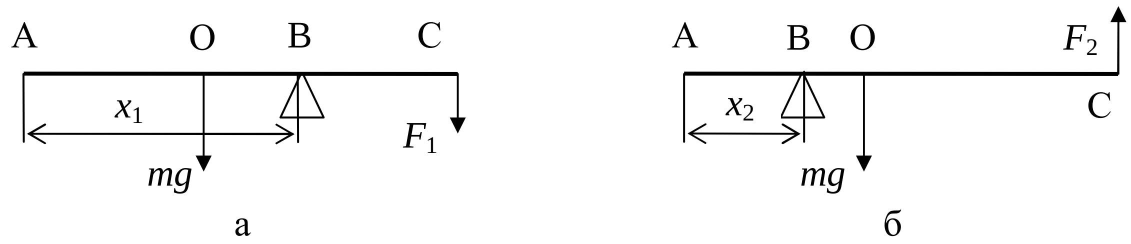


Рис. 1

Для рівноваги коли опора (т. В) зміщена від центра тяжіння (т. О) у бік точки С ($x_1>x_0$ на рис. 1а) момент сили тяжіння повинен бути скомпенсований моментом сили F_1, що спрямована донизу –

$$F_1(L - x_1) = mg(x_1 - x_0).$$

Звідки

$$F_1 = mg\frac{(x_1 - x_0)}{(L - x_1)}. \qquad (1)$$

При рівновазі, коли опора ближча до точки А ($x_2<x_0$ на рис. 1б) момент сили тяжіння компенсується моментом сили F_2, що спрямована догори –

$$F_2(L - x_2) - mg(x_0 - x_2) = 0,$$

або

$$F_2 = mg\frac{(x_0 - x_2)}{(L - x_2)}. \qquad (1)$$

За умовою $F_1 = F_2 = F$. Тоді прирівнюючи праві частини (1) і (2)

$$mg\frac{(x_1 - x_0)}{(L - x_1)} = mg\frac{(x_0 - x_2)}{(L - x_2)}.$$

Звідки знаходимо положення центра тяжіння

$$x_0 = \frac{L(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{2L - (x_1 + x_2)} \qquad (3)$$

Так як F відома, то масу можна знайти як із (1) так і з (2). В обох випадках з урахуванням (3) отримуємо

$$m = \frac{2L - (x_1 + x_2)}{x_1 - x_2}\frac{F}{g}.$$

Задача № 2
Сонячні зайчики

Від круглого сонця за допомогою квадратного дзеркальця можна пускати сонячні зайчики. Такий зайчик за певних умов може мати форму подібну або до дзеркальця, або до сонця. Поясніть причину зміни форми сонячного зайчика. Пояснення проілюструйте малюнком. Вертикальний екран розташуємо перпендикулярно до сонячного променя, відбитого квадратним дзеркальцем. А дзеркальце – під кутом 30º до горизонту так, що дві його горизонталі сторони перпендикулярні до відбитого променя. Визначте освітленість E у центрі цього сонячного зайчика при відстанях $R_1 = 5\,\text{м}$ і $R_2 = 15\,\text{м}$ між дзеркальцем та екраном (відповіді виразити у одиницях освітленості E_0, яку створюють прямі сонячні промені на перпендикулярному до них екрані). Розміри дзеркальця $10\,\text{см} \times 10\,\text{см}$, кут, під яким видно диск сонця, $\alpha = 0{,}5^\circ$. Втратами сонячної енергії під час відбиття променів знехтувати.

<u>Розв'язок.</u> Як відомо, зображення у плоскому дзеркалі будується симетричним (дзеркальним) відбиттям предмету у площині дзеркала. Далі ми просто проводимо промені від зображення крізь дзеркало, неначе зображення це реальний предмет, який знаходиться у якомусь задзеркаллі, а дзеркало – віконце у цей задзеркальний світ. Така техніка побудови променів є зручною, і ми нею скористаємося. Замість променів від сонця, що відбиваються від дзеркальної поверхні, будемо проводити прямі промені від зображення сонця крізь «отвір» дзеркала.

Перший спосіб. Світловий потік від кожної точки поверхні сонця проходить крізь дзеркало у вигляді піраміди (див. рис.1). Оскільки відстань до Сонця дуже велика, промені у цій піраміді практично паралельні і у перпендикулярному перерізі екрану мають вигляд прямокутника зі сторонами $a = 10\,\text{см}$ і $b = a/2 = 5\,\text{см}$ (катет навпроти кута нахилу дзеркала у 30°).
Розглянемо обмежені отвором дзеркала світлові піраміди від кожної крайньої точки сонця. Після

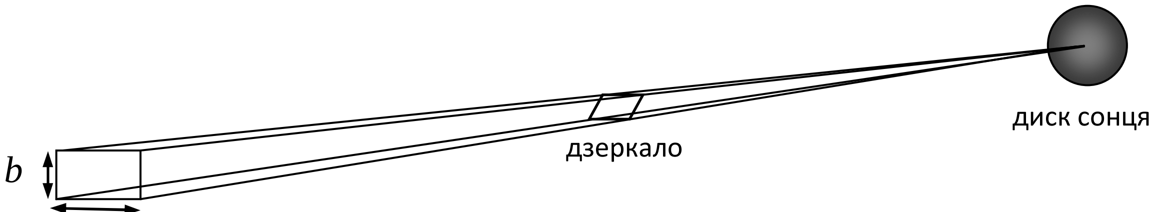


Рис.1

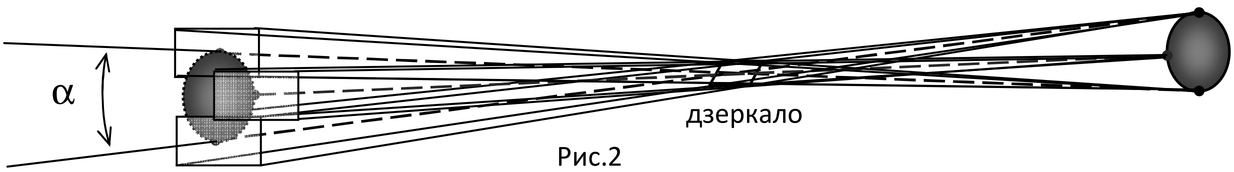


Рис.2

проходженні крізь дзеркало центральні промені цих пірамід будуть утворювати конічну поверхню з вершиною у центрі дзеркала (див. рис.2).

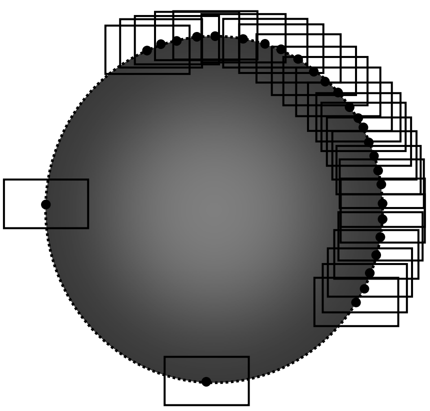


Рис.4

Отже, якщо екран поблизу, малий кут $\alpha = 0{,}5^\circ$, під яким видно диск сонця, не дозволяє розійтися цим прямокутникам, і вони накладаються один на другий, утворюючи на

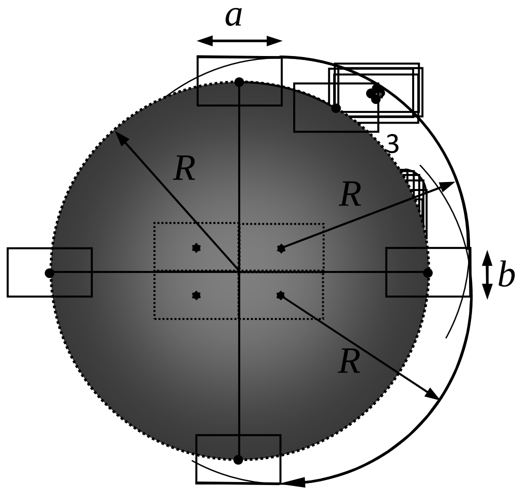


Рис.5*

екрані прямокутник світлової плями з трохи розмитими краями (рис.3).
Якщо екран далеко, крайні прямокутники утворюють собою фігуру, яка сприймається як коло (рис.4). Якщо відстань десь посередині, маємо фігуру проміжної форми (рис.5), обмежену згори і знизу відрізками довжиною 10 см, зліва і справа – відрізками по 5 см і по кутам – розпливчастими круговими дугами (рис. 5*).

Другий спосіб. Розглянемо світлові потоки від усього сонячного диску, що проходять через окремі точки прямокутного отвору 10 см×5 см, і мають вигляд конічних поверхонь з кутом α. (див. рис.7).

З усіх таких світлових конусів зосередимо увагу на тих, чиї вершини дотикаються до сторін отвору і далі на екрані формують границі світлової плями (рис.8). Центральні промені усіх конусів виходять з центру Сонця і можуть вважатися паралельними внаслідок величезної відстані

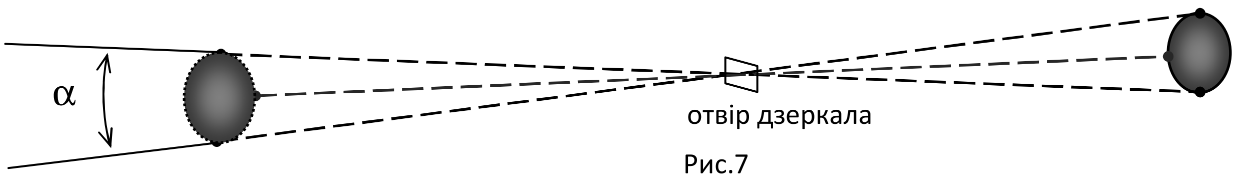


Рис.7

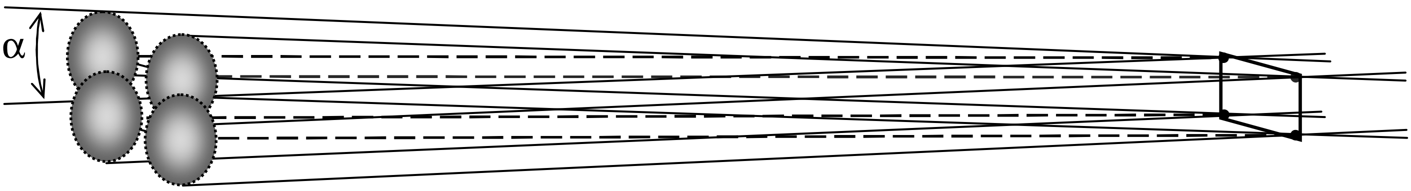


Рис.8

до Сонця. Тоді на поверхні екрану точки центральних променів утворюватимуть такий самий прямокутник зі сторонами $a = 10$ см і $b = 5$ см.

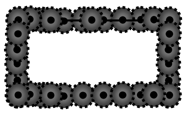


Рис.9

Якщо екран поблизу, малий кут $\alpha = 0{,}5^\circ$, під яким видно диск сонця, не дозволяє розійтися світловим кругам навколо цих точок, і ми отримуємо прямокутник світлової плями з трохи розмитими краями (рис.9). Якщо екран далеко, світлові кола мають значні радіуси і те, що їх центри лежать на невеликому прямокутнику вже не впливає на наше сприйняття загальної форми світлової плями як великого кола (рис.10). Якщо ж відстань десь посередині, маємо фігуру проміжної форми (рис.11), обмежену згори і знизу відрізками по $a = 10$ см, зліва і справа – відрізками по $b = 5$ см і по кутам – круговими дугами радіусами $R = \dfrac{\pi}{720} r$, де r – відстань від дзеркала до екрану. Остання формула отримана з наступних міркувань: діаметр $2R$ світлового кола на віддаленому екрані у

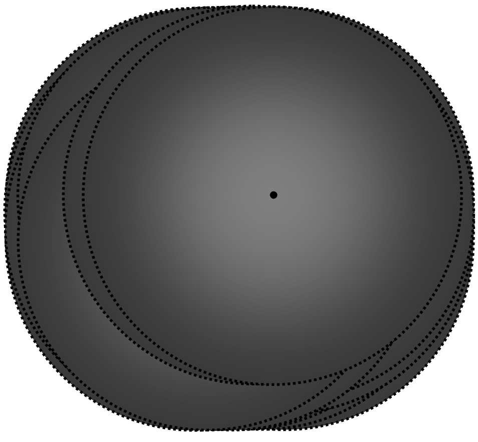


Рис.10

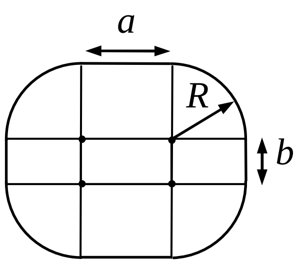


Рис.12

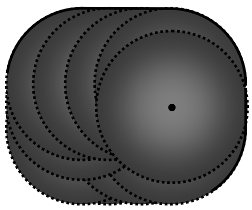


Рис.11

стільки разів менший за довжину кола $2\pi r$, у скільки кут 0,5° менший за 360°. Рис.12 наочно демонструє справжню форму світлового зайчика, пропорції якої можуть змінюватись, але складові (чотири відрізки і чотири чверть кола) залишаються незмінними. Якщо повернути екран або дзеркальце, форма сонячного зайчика буде змінюватись між схожою на сплюснуте коло (еліпс) на великих відстанях і чотирикутника – на незначних.

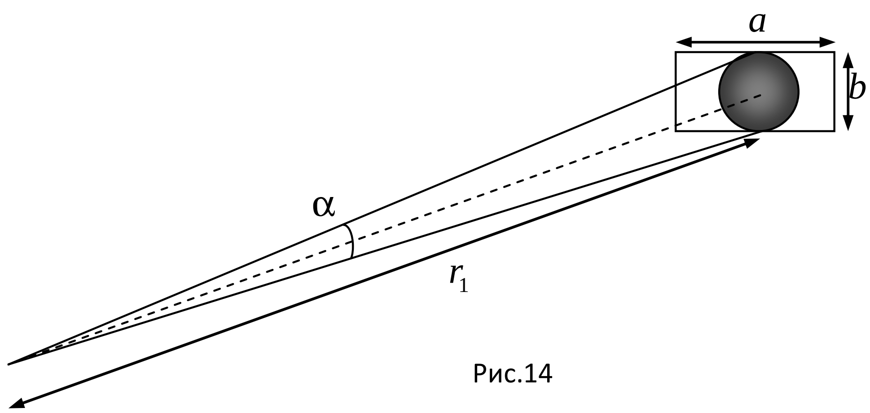


Рис.14

Тепер розберемося з освітленістю. Ми вже розглядали точки на поверхні сонячного диску (як джерела світлового потоку) і точки в прямокутнику дзеркала (як маленькі отвори на шляху світла). Тепер розглянемо точки на поверхні екрану, як споживачів світлового потоку. Оскільки за умовою задачі нас цікавить центральна точка світлової плями на екрані, будемо дивитися з неї на сонце крізь «отвір» дзеркала. Коли відстань r до дзеркала мала, ми бачимо з цієї точки сонце повністю (рис.13). Отже всі промені від сонця попадають у точку, і освітленість дорівнює E_0. Це продовжується, поки дзеркальце, віддаляючись від екрану, не зменшиться у розмірах до дотику з верхніми краями сонячного диску (відстань $r_1 = \frac{360}{\pi} b \approx 5{,}73\,\text{м}$, рис.14). Тобто на відстані $5\,\text{м}$ освітленість E буде дорівнювати E_0. Після $r_1 \approx 5{,}73\,\text{м}$ освітленість буде зменшуватись, оскільки вже не всі промені від сонячного диску досягатимуть точки на екрані. Вважаючи яскравість диску однаковою вздовж всієї його поверхні, отримаємо: освітленість E пропорційна площі S тієї частини сонячного диску, яку ми бачимо крізь прямокутник дзеркала.

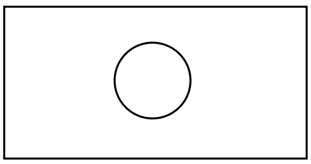


Рис.13

$$\frac{E}{E_0} = \frac{S}{\pi R^2},$$ де $R = \frac{\pi}{720} r$ – радіус проекції сонця на прямокутник дзеркала. Послідовна зміна картинки, яку ми спостерігаємо з центру сонячного зайчика, зображена на рис.15-18. Дзеркальце стане на вигляд меншим ніж сонце, коли діагональ прямокутника співпаде з діаметром сонячного диску ($r \approx 12{,}8\,\text{м}$, рис.17). Після цього освітленість стає обернено пропорційною до квадрату відстані r:

$$E = \frac{ab}{\pi R^2} E_0 = \frac{720^2 ab}{\pi^3} \frac{E_0}{r^2}.$$ Ця залежність зберігатиметься і на більших відстанях, коли дзеркальце буде обмежувати маленьку частинку диску сонця. Тобто, на відстані $r_2 = 15\,\text{м}$ освітленість E буде дорівнювати $E_2 = 0{,}372 E_0$.

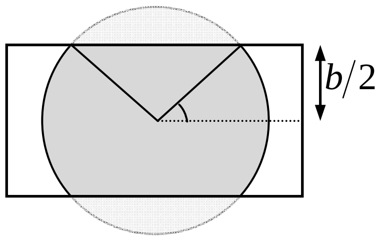


Рис.15

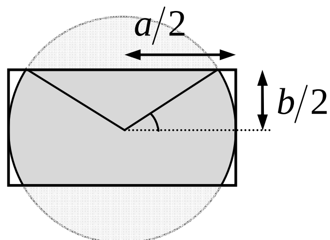


Рис.16

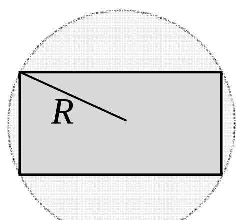


Рис.17

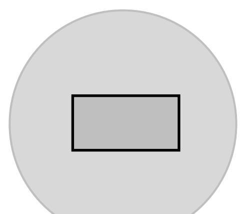


Рис.18

Звичайно, для отримання максимального балу не треба було проводити всі наведені розрахунки, або малювати велику кількість рисунків. Для визначення освітленості можна було просто порівняти кути, під якими видно отвір дзеркальця, з кутом 0,5°, під яким видно диск сонця. Справжню форму зайчика можна було не з'ясовувати, обмежившись поясненням двох крайніх випадків. У даній задачі можна угледіти аналогію з тим, що спостерігається у камері-обскура.

Як бачимо, фізика допомагає нам розуміти навколишній світ у його простих і складних проявах. Головне не пасувати перед труднощами.

Ще один підхід до цієї задачі.

1.Хід променів сонця до екрану зображено на рис.1 відповідно до умови.

2.На цьому ж рисунку виконана побудова зображення сонця у дзеркальці.

Далі будемо працювати з цим зображенням

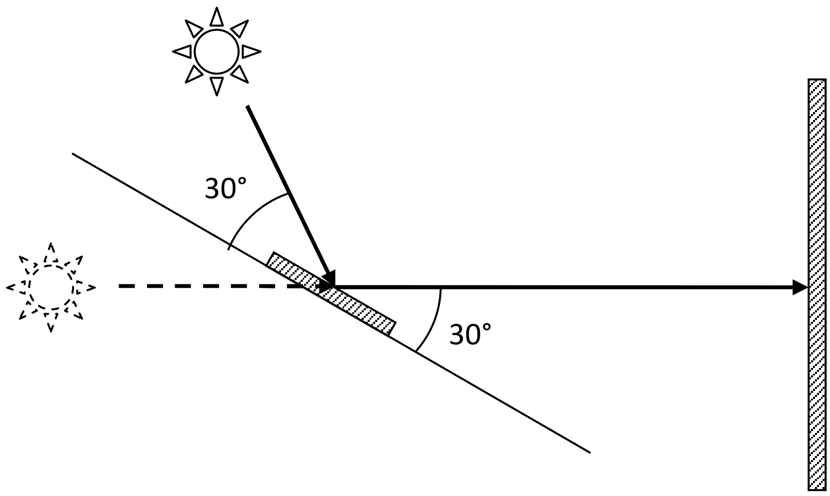


Рис.1

3.По відношенню до зображення дзеркальце виконує роль отвору, але цей отвір буде вже не квадратним, а прямокутним (за рахунок нахилу). На рис.2 показано, що висота такого уявного отвору буде $b=a\bullet\sin30^0=5$ см, а ширина залишиться $a=10$ см. Діагональ цього прямокутника буде мати найбільший лінійний розмір $c=(10^2+5^2)^{1/2}=11{,}8$ см.

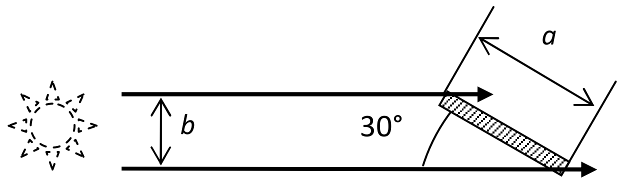


Рис.2

4.За аналогією з камерою обскура зобразимо пучки, що виходять з двох діаметрально протилежних точок сонячного диску, і проходять через краї нашого отвору (рис.3).

5. З рисунку видно, що у його площині обидва пучки перетинаються в межах трикутника, що опирається на дзеркало. Кут при вершині О є кутом, під яким видно диск сонця. Відстань точки О від отвору дорівнює $x=в/tg\alpha= в/\alpha$ де кут має бути записаний в радіанах. Остаточно $x=5\bullet180/0{,}5\pi=573$ см$=5{,}73$ м.

6. На екрані, розміщеному в межах відстані х від отвору, сонячний зайчик матиме форму отвору, а його освітленість у центрі дорівнюватиме E_0.

7.На відстані, більшій ніж X, на екрані починає формуватись зображення сонця. Але до тих пір, поки пучки від діаметрально розташованих точок сонячного диску будуть перекриватись за рахунок максимального лінійного розміру отвору c, зайчик не матиме круглу форму.

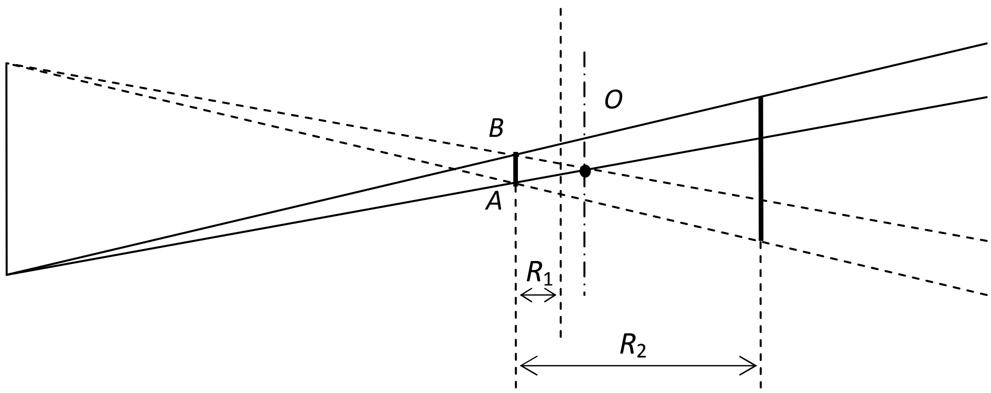


Рис.3

8. Знайдемо відстань Y точки O_1 від отвору, за якою на екрані буде повне зображення сонця.

Y=11,8•180/0,5π=1281 см =12,81 м

9.Таким чином, на відстані R_1=5 м, яка менша за x, освітленість на екрані буде такою ж, як на дзеркалі-отворі $E_1=E_0$.

10.Відстань R_2=15 м, і вона більше за Y. Тому зайчик матиме округлу форму, а освітленість можна порахувати з виразу $E_0 \cdot a \cdot b = E_2 \cdot \pi r^2$, де r- радіус зайчика на екрані. Оскільки лінійні розміри отвору-дзеркальця набагато менші за відстань від нього до екрану, можна вважати, що ми бачимо зайчик на екрані з дзеркала під кутом α. Звідси $r=R_2 \cdot \alpha$. Тоді $E_2=E_0 \cdot a \cdot b/ \pi (R_2 \cdot \alpha)^2$= $0{,}372E_{0.}$

Задача № 3

Вам необхідна пружина жорсткістю 300 Н/м, але у вашому розпорядженні є тільки пружини жорсткістю 500 Н/м і легкі дротяні стержні (див. рис.), які можна використовувати для з'єднання цих пружин. Запропонуйте спосіб отримання необхідної жорсткості, використовуючи мінімальну кількість пружин. Стержні можна розрізати і робити на них петельки для з'єднання. Псувати пружини забороняється. Наведіть розрахунки і зробіть акуратний рисунок конструкції.

Розв'язок.

При послідовному з'єднанні пружин додаються обернені величини $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\ldots$ (1) ,

а при паралельному – самі жорсткості $k=k_1+k_2+k_3+\ldots$ (2)

Отже $\frac{k}{k_0}=\frac{3}{5}$ або $k=\frac{3k_0}{5}=3\cdot\frac{k_0}{5}=300\frac{H}{м}$.

З останнього рівняння знаходимо, що необхідно взяти 7 пружин і скласти схему (рис.1). На рисунку AB і CN є стержні. Причому OA=OB=CD=DN.

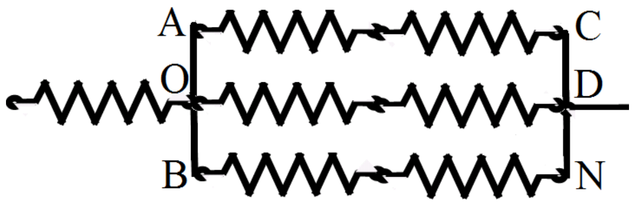


Рис.1

Зрозуміло, що жорсткість системи, яка подана на рис. 2, також дорівнює *k*.

Це дійсно буде так, якщо $\frac{MC}{DM}=\frac{PO}{TP}=\frac{l_2}{l_1}=2$ (3)

Дану умову отримують, розглянувши рівновагу, наприклад, стержня TO. Плечі сил , які діють на нього, будемо знаходити відносно точки P. Крім того, положення точок M і P на стержнях CD та OT повинно бути таким, щоб видовження частин системи DT і CO при її деформації були однаковими. Нехай це видовження дорівнює *x*. Тоді $k_0xl_1=\frac{k_0}{2}xl_2$ Звідси відразу витікає умова (3), тобто $l_2=2l_1$. На основі рис 2. видно, що потрібну систему можна створити на основі чотирьох пружин.

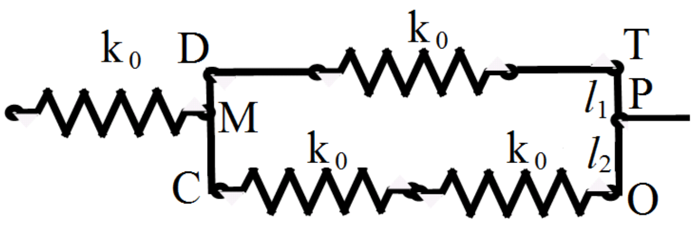


Рис.2

Загалом можна запропонувати систему, яка буде складатися з двох пружин (рис. 3), причому вона буде мати жорсткість $k=300\frac{H}{м}$. На цьому рисунку CD і NP – стержні однакової довжини. M, A, D, P – точки приєднання до стержнів; CM=NA=l_1; CD=NP=l_2. Якщо тепер до точок C і N прикласти однакові за величиною сили *F*, які будуть діяти у протилежних напрямках, то буде здійснюватися деформація цієї системи. Причому пружина MA буде видовжуватися, а пружина DP – стискатися. Напрямки дії цих сил будемо вважати перпендикулярними до стержнів. Величина *F* така, що деформацію системи можна вважати малою.

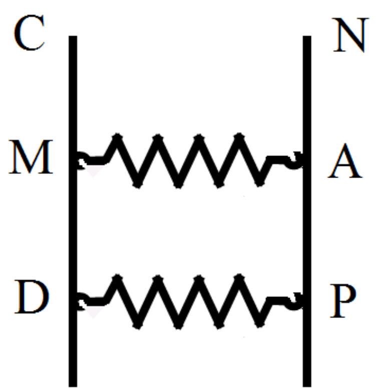


Рис. 3.

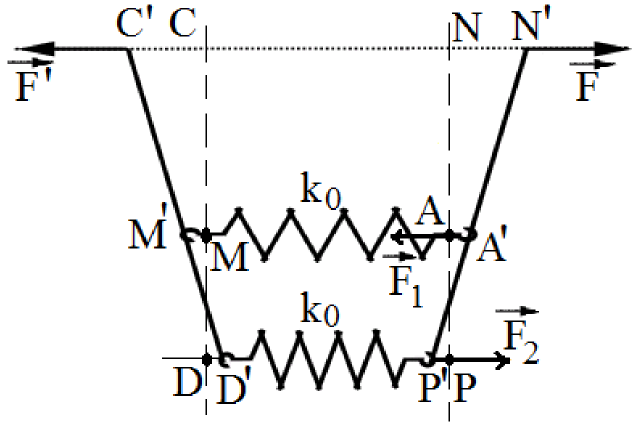


Рис.4.

На рис 4 зображена ця система у деформованому стані . Тут C', N', M', A', D', P' положення точок C, N, M, A, D, P. Нехай NN'=x. Значення 2x має сенс величини деформації нашої системи: $\left|\vec{F'}\right| = \left|\vec{F}\right| = F = 2kx$ Тут к – потрібна жорсткість системи.

Будемо вважати, що AA'=x_1; P'P=x_2

Розглянувши умови рівноваги стержня N'P' запишемо систему рівнянь:

$$2kx + 2k_o x_2 = 2k_o x_1 \quad (4)$$

$$2k_0 l_1 x_1 = 2k_0 x_2 l_2, \quad (5)$$

$$2kxl_1 = 2k_0(l_2 - l_1)x_2, \quad (6)$$

$$\frac{x_2 + x}{l_2} = \frac{x_2 + x_1}{l_2 - l_1} \quad (7)$$

Рівняня (7) одержано з геометричних міркувань . Рівність (4) записана на основі того, що сили F і F_2 повинні бути урівноважені силою F_1. Формула (5) отримана виходячи з того, що плечі сил F_1 і F_2 розраховуються відносно точки N'. У випадку рівняння (6) плечі сил F і F_2 знаходимо відносно точки A'.

Якщо розвязати систему рівнянь (4)-(7) то одержимо:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}, \quad (8)$$

Тут $n = \frac{l_2}{l_1}$. У нас $\frac{k}{k_0} = \frac{3}{5}$, тому

$$n = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \quad (9)$$

Система, яку ми розглянули має тільки дві пружини. Вона має сенс, коли довжина стержнів менша половини довжини пружини.

При відповідній довжині стержнів можна зробити систему, яка буде мати потрібну жорсткість і складатися тільки з однієї пружини. Приклад такої системи показано на рисунку 5.

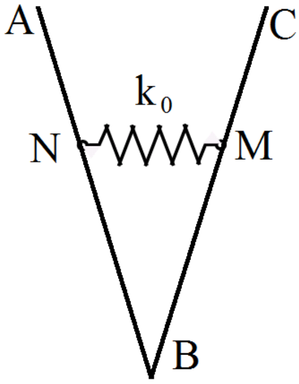


Рис. 5

На ньому AB і CB – стержні, які в точці B з’єзднані шарнірно. В точках N і M пружина приєднана до стержнів. Якщо до точкок A і C прикласти однакові за величиною сили, які діють у протилежних напрямках, то система перейде у деформований стан. Будемо вважати, що ці сили діють паралельно пружині. Тоді, розглянувши рівновагу, наприклад, стержня BC, знаходимо, що потрібна жорсткість **к** системи буде досягнута при $\frac{CB}{MB} = \sqrt{\frac{k_o}{k}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$. (10)

Задача № 4

Розв'язок. По-перше, слід максимально використати лижі. По-друге, фінішувати хлопчик і дівчинка повинні разом, інакше тому, хто фінішував першим, слід було менше користуватися лижами на користь того, хто відстав на фініші, адже результат фіксується по останньому. Позначимо через $t_х$ і $t_д$ час, протягом якого їхали на лижах, відповідно, хлопчик і дівчинка. Зрозуміло, що

$$t_х + t_д < t, \tag{1}$$

де t – загальний час руху. Позначимо довжину замкненої дільниці через $S = 5\,км$. Тоді для руху хлопчика і дівчинки отримаємо

$$\begin{cases} v_х t_х + u_х (t - t_х) = 4S, \\ v_д t_д + u_д (t - t_д) = 4S. \end{cases} \tag{2}$$

Нам потрібне ще одне рівняння, а саме відстань, яку подолали лижі. Чим більшу відстань пройдуть лижі – тим краще, оскільки це означає, що меншу відстань школярі долатимуть пішки. Припустимо, що лижі пройшли повні n дільниць по $S = 5\,км$. Тоді

$$v_х t_х + v_д t_д = nS\,. \tag{3}$$

Чим більше n, тим краще. Звісно, можна підібрати найбільше можливе n (зрозуміло, що $n < 8$ і починати потрібно з $n = 7$). Але ми спробуємо все розрахувати. Виразимо з рівнянь (2) час руху на лижах хлопчика і дівчинки

$$\begin{cases} t_х = \dfrac{4S - u_х t}{v_х - u_х}, \\ t_д = \dfrac{4S - u_д t}{v_д - u_д} \end{cases} \tag{4}$$

та підставимо в (3), звідки знайдемо загальний час руху

$$t = S\frac{4\left(\dfrac{v_х}{v_х - u_х} + \dfrac{v_д}{v_д - u_д}\right) - n}{\dfrac{v_х u_х}{v_х - u_х} + \dfrac{v_д u_д}{v_д - u_д}} = \frac{3}{10}(12 - n)\,год.$$

Тоді $t_х = \dfrac{9n - 8}{45}\,год$, $t_д = \dfrac{3n + 4}{30}\,год$. Підставимо все в (1) і отримаємо обмеження на n:

$$n < \frac{164}{27} = 6\frac{2}{27}.$$

Отже найбільше можливе $n = 6$, $t_х = \dfrac{46}{45}\,год$, $t_д = \dfrac{11}{15}\,год$, а найменший час руху

$$t = 1{,}8\,год = 1\,год\;48\,хв.$$

Розклад руху може бути, наприклад, таким:

1. Дівчинка стартує на лижах, за $t_{д} = \frac{11}{15}$ год проходить відстань $v_{д} t_{д} = 14\frac{2}{3}$ км, тобто майже три кола, двічі обганяючи хлопця, після чого залишає лижі і далі йде пішки. Їй залишається пройти $20\,км - 14\frac{2}{3}\,км = 5\frac{1}{3}\,км$ зі швидкістю $u_{д} = 5\,км/год$, тобто ще $1\frac{1}{15}$ год, а це у сумі з $t_{д} = \frac{11}{15}$ год якраз і складає 1,8 год.
2. Хлопець у момент часу $t_{д} = \frac{11}{15}$ год, коли дівчина залишила йому лижі, пройшов $u_{х} t_{д} = 4\frac{2}{5}$ км і знаходився на відстані $\frac{4}{15}\,км \approx 267\,м$ позаду них. Через час $t' = \frac{2}{45}$ год він дістається лиж і далі до кінця змагання рухається на лижах зі швидкістю $v_{х} = 15\,км/год$, долаючи відстань $15\frac{1}{3}$ км, що залишилась, за час $t'' = 1\frac{1}{45}$ год. Як бачимо, зальний час руху хлопця $t_{д} + t' + t'' = 1{,}8$ год знову таки збігається з t.

Зазначимо, що якби хлопець і дівчина, виходячи із здорового глузду, тримали один одного в полі зору, після кожного обгону залишаючи іншому лижі, то, навіть нехтуючи додатковими затримками на знімання й одягання лиж, відповідь була б на третину (36 хвилин!) більшою. Дійсно, у цьому випадку $n = 4$ і

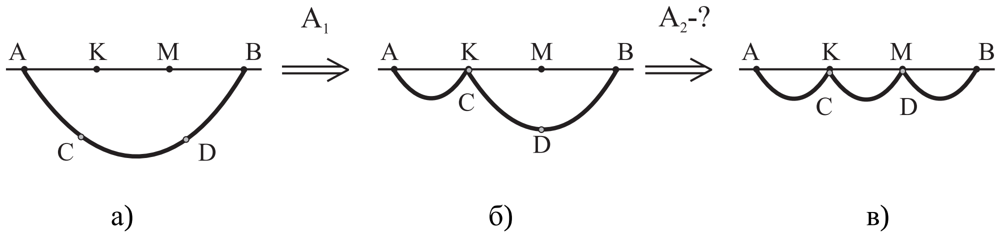
$$t = 2{,}4\text{ год} = 2\text{ год }24\text{ хв.}$$

Саме таким був би найменший час, якби траса була прямою і не можна було заставити лижі пробігти більше 20 км (у нашому випадку пробіг 30 км).

Задача № 5

Задача про ланцюжок 1.

Важкий ланцюжок підвішений між точками A й B (рис.1а). Точки C й D ділять ланцюжок на три рівні частини, а точки K й M ділять на три рівні частини відрізок AB.



Мал. 1

Для того щоб з'єднати точку C із точкою K (мал.1б), потрібно зробити роботу $A_1 = 12\ Дж$. Яку роботу необхідно зробити, щоб після цього підняти точку D до точки M (рис.1в)?

Розв'язання.

Ланцюжки, які зображені на малюнках 1а й 1б, можна розглядати як комбінацію менших ланцюжків, *подібних* вихідному. Скористаємося цим, щоб підрахувати потенційну енергію $E_p = mgh_{ц.м.}$ кожної з них. Нехай потенційна енергія вихідного ланцюжка дорівнює $E_1 = -m_1 g h_1$ (висоту, а точніше «глибину», відраховуємо від рівня AB). Тоді енергія ланцюжка, довжина якого становить $\ell_2 = 2/3 \cdot \ell_1$, дорівнює

$$E_{2/3} = -m_2 g h_2 = -\frac{4}{9} m_1 g h_1 = \frac{4}{9} E_1 .$$

(Його маса й усі розміри, у тому числі висота центру мас, у $2/3$ раза менша, ніж у вихідного ланцюжка).

Аналогічно отримуємо, що потенційна енергія ланцюжка довжиною $\ell_3 = 1/3 \cdot \ell_1$, рівняється

$$E_{1/3} = -m_3 g h_3 = -\frac{1}{9} m_1 g h_1 = \frac{1}{9} E_1 .$$

Повна потенційна енергія ланцюжка, зображеного на малюнку 1а, буде рівнятися $E_а = E_1$, зображеного на малюнку 1б $-E_б = E_{1/3} + E_{2/3} = \frac{5}{9} \cdot E_1$, а на малюнку 1в – $E_в = 3 \cdot E_{1/3} = \frac{3}{9} \cdot E_1$

Робота, яку ми виконуємо з підйому центру мас у першому випадку, рівняється $A_1 = E_б - E_а = \frac{4}{9} \cdot |E_1|$, а в другому – $A_2 = E_в - E_б = \frac{2}{9} \cdot |E_1|$. Звідси відповідь – $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1 = 6\ Дж$.

Відповідь: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1 = 6\ Дж$.