

| | |
|--|---|
| Реєстраційний номер | 396970 |
| Назва олімпіади | Всеукраїнська учнівська інтернет-олімпіада з фізики |
| Прізвище, ім'я та по батькові учасника | Шумаєв Олександр Ігорович |
| Рік народження | 1999 |
| Область | Харківська |
| Місто | Харків |
| Повна назва навчального закладу | Фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області |
| Клас, до якого перейшов учень | 10 |
| Клас, за який виконується конкурсне завдання | 11 |
| Статус | учень |
| Електронна адреса учасника | sashashumaev@rambler.ru |

Задача № 1

Условие: Миномет установлен у основания некоторой горы под углом $\alpha = 1,5$ радиана к горизонту. Минометный расчет ведет записи о том, насколько далеко падают мины в зависимости от их начальной скорости. Определите по этим данным высоту и примерную форму горы.

| | | | | | | | | | | |
|-------------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| v_0 , м/с | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 |
| l , м | 0,710576 | 1,611942 | 2,85057 | 4,45474 | 6,48101 | 8,9838 | 12,0195 | 15,6393 | 19,879 | 24,7493 |
| v_0 , м/с | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 | 82 | |
| l , м | 30,2305 | 36,2765 | 42,8294 | 49,8405 | 57,2941 | 65,2363 | 73,8201 | 83,4179 | 95,0382 | |

Решение: Сопротивлением воздуха при решении задачи пренебрегаем. Введем систему координат, как на рис. 1.1. Рассмотрим движение снаряда, выпущенного из начала координат со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Его координаты при таком движении зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t \cos \alpha$ и $y(t) = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2$ соответственно. Выразив t из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.1)$$

Перейдем к полярным координатам (l, φ) . Будем искать полярные углы φ точек падения снарядов. Координаты точек падения снаряда $x = l \cos \varphi$ и $y = l \sin \varphi$. Подставим их в уравнение (1.1) и разделим обе его части на x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl \cos \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

откуда, с использованием тождества $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha \cos \varphi}$ получим

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{gl \cos^2 \varphi}{2v_0^2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Такое уравнение невозможно решить стандартными способами, оно приводится к уравнению четвертой степени с громоздким решением.

Попробуем тогда найти приближенное решение. Элементарными преобразованиями уравнение (1.2) приводится к виду

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos^2 \varphi} = \frac{gl}{2v_0^2 \cos \alpha}.$$

График зависимости левой части $f(\varphi)$ этого уравнения от переменной φ изображен на рис. 1.2. Так как для всех 19 пар данных $\{l_i, v_{0i}\}$ из условия левая часть $\varepsilon_i = gl_i/(2v_{0i}^2 \cos \alpha)$ меньше, чем $f(0) = \sin \alpha$, то уравнение имеет единственный корень, близкий к $\pi/2$ (он соответствует пересечению изображенного графика с прямой $g(\varphi) = \varepsilon_i$, а функция, изображенная на графике, очень быстро убывает при φ , близком к α). Так как и угол α близок к $\pi/2$, то будем считать углы α и φ близкими между собой. А именно, применим приближения $\sin(\alpha - \varphi) \approx \alpha - \varphi$ и $\cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi) \approx \pi/2 - \varphi$. Уравнение (1.2) примет вид

$$\alpha - \varphi = \frac{gl}{2v_0^2 \cos \alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2,$$

которое легко привести к виду

$$q\varphi^2 - \varphi(q\pi - 1) + \left(\frac{q\pi^2}{4} - \alpha \right) = 0, \quad q = \frac{gl}{2v_0^2 \cos \alpha}.$$

Получили квадратное уравнение, корни которого

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2q} \left(q\pi - 1 \pm \sqrt{(q\pi - 1)^2 - q\pi^2 + 4\alpha} \right).$$

Во всех случаях искомым корень — с плюсом перед радикалом (второй корень не подходит, так как он не соответствует примененным приближениям). В таблице представлены решения этого уравнения для всех случаев, представленных в условии, в порядке их перечисления. Как далее выяснится, ошибка по сравнению с точным решением $\Delta\varphi = 0,001^\circ$.

| | | | | | | | | | |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\varphi,^\circ$ | 85,7915 | 85,7645 | 85,7517 | 85,7419 | 85,7326 | 85,7229 | 85,7126 | 85,7018 | 85,6907 |
| 85,6797 | 85,6695 | 85,6604 | 85,6528 | 85,6466 | 85,6416 | 85,6373 | 85,6328 | 85,6266 | 85,6151 |

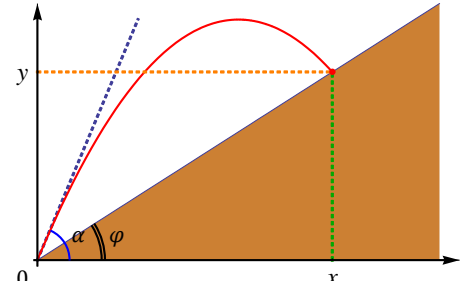


Рис. 1.1. Схема установки, описываемой в задаче. Миномет расположен в начале координат.

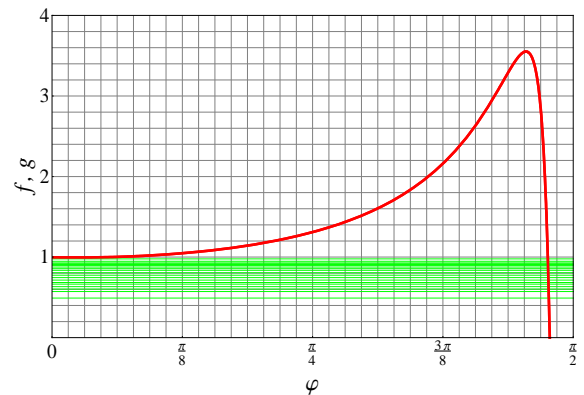


Рис. 1.2. График $f(\varphi) = \sin(\alpha - \varphi) / \cos^2 \varphi$, где $\alpha = 1,5$ рад. Зеленым цветом изображены прямые $g(\varphi) = \varepsilon_i$.

По полученным данным полярные углы φ всех точек близки, то есть форма горы близка к линейной. Однако с точностью, заданной в условии, можно утверждать, что гора выпукла вверх. Форму этой кривой можно аппроксимировать прямой с углом наклона, равным среднему полученных величин φ : $\bar{\varphi} = 85,69^\circ$. Высота горы $H = l_{19} \sin \varphi_{19} = 94,7601$ м.

Сравним полученный приближенный результат с точным. Уравнение (1.2) решили с помощью программы *Mathematica*¹. Полученные данные иллюстрирует следующая таблица:

| | | | | | | | | | |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\varphi,^\circ$ | 85,7918 | 85,7648 | 85,7521 | 85,7423 | 85,7330 | 85,7234 | 85,7131 | 85,7023 | 85,6912 |
| 85,6803 | 85,6701 | 85,6610 | 85,6534 | 85,6472 | 85,6423 | 85,6380 | 85,6335 | 85,6273 | 85,6159 |

Как видим, отличие от приближенного решения в четвертом знаке после запятой.

Ответ: Высота $H = 94,7601$ м, форма — кривая с выпуклостью вверх, которую можно аппроксимировать наклонной плоскостью, образующей угол $\varphi = 85,69^\circ$ с горизонтом.

¹ Имеется в виду программа компании Wolfram Research, Inc., см. www.wolfram.com/mathematica

Задача № 2

Условие: Шар массой $2m$ бросают вертикально вверх со скоростью v_0 . К шару привязана легкая абсолютно жесткая нить длиной $l < v_0^2/2g$, к другому концу которой привязан шар массой m . Через какое время t и на какой высоте h шары столкнутся?

Решение: Рассмотрим движение шаров до столкновения. Вначале первый (тяжелый) шар движется вверх равнозамедленно, а второй (легкий) покоится. Когда тяжелый шар достигнет высоты l , нить натянется, и произойдет “удар” через нить (то, что он достигнет этой высоты, следует из неравенства в условии). Непосредственно перед этим его скорость $u_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$. Дальнейшее сильно зависит от свойств нити и шаров, например от жесткости и упругости нити и модуля Юнга вещества шаров. Разберем два крайних случая: абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара.

1. *Абсолютно упругий удар.* В этом случае в результате удара сохраняются и импульс, и механическая энергия. Скорости u_1 и u_2 шаров (см. рис. 2.1) непосредственно после него определяются соответствующими законами сохранения:

$$\begin{cases} 2mu_0 = 2mu_1 + mu_2, \\ mu_0^2 = mu_1^2 + \frac{mu_2^2}{2}. \end{cases}$$

Эти уравнения легко привести к виду:

$$2(u_0 - u_1) = u_2, \quad (2.1)$$

$$2(u_0^2 - u_1^2) = u_2^2. \quad (2.2)$$

Разделив уравнение (2.2) на (2.1) с учетом условия $u_0 \neq u_1$, получим

$$u_0 + u_1 = u_2. \quad (2.3)$$

Решая систему линейных уравнений (2.1) и (2.3), получим $u_1 = u_0/3$ и $u_2 = 4u_0/3$.

После такого перераспределения скоростей оба шара будут двигаться с ускорением g , направленным вниз. Перейдем в систему отсчета, связанную с легким шаром. В этой системе отсчета тяжелый шар движется равномерно со скоростью $u'_2 = u_1 - u_2 = -u_0$ (вниз). Так как начальное расстояние между шарами l , то время между моментом максимального расстояния между шарами и моментом столкновения $t_2 = l/u_0$.

Найдем время t_1 между началом движения и моментом максимального расстояния между шарами. По формуле равноускоренного движения

$$v_0 - u_0 = gt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 - u_0}{g}. \quad (2.4)$$

Заметим, что эта формула верна и во втором случае (абсолютно неупругого удара через нить). Искомое время

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 - u_0}{g} + \frac{l}{u_0} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gl}}{g} + \frac{l}{\sqrt{v_0^2 - 2gl}} = \frac{v_0}{g} \left(1 - \sqrt{1 - k} + \frac{k}{2\sqrt{1 - k}} \right), \quad (2.5)$$

где

$$k = \frac{2gl}{v_0^2}, \quad 0 < k < 1.$$

Найдем высоту, на которой произошло столкновение, при помощи уравнения движения легкого шара. Этот шар двигался вверх равнозамедленно с ускорением g и начальной скоростью $u_2 = 4u_0/3$ в течение времени t_2 . По формуле равноускоренного движения

$$h = u_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{4l}{3} - \frac{gl^2}{2(v_0^2 - 2gl)} = l \left(\frac{4}{3} - \frac{k}{4(1 - k)} \right) = l \cdot \frac{16 - 19k}{12(1 - k)}. \quad (2.6)$$

Выражение, определяемое формулой (2.6), в принципе может быть меньше нуля (а именно, при $k > 16/19$). Это соответствует случаю, когда легкий шар столкнется с опорой перед столкновением с тяжелым шаром. Будем считать это столкновение абсолютно неупругим. Тогда после этого легкий шар останется лежать на опоре, а столкновение шаров произойдет, когда тяжелый шар упадет на опору. Соответственно $h = 0$. Найдем время t_2 падения тяжелого шара. Его скорость непосредственно перед столкновением $u_3 = \sqrt{u_1^2 + 2gl} = v_0 \sqrt{1 + 8k}/3$. Тогда из формулы равноускоренного движения

$$t_2 = \frac{u_1 + u_3}{g} = \frac{v_0}{3g} (\sqrt{1 - k} + \sqrt{1 + 8k}). \quad (2.7)$$

Полное время с учетом формул (2.4) и (2.7) получим

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1 - k} + \frac{1}{3}\sqrt{1 + 8k} \right). \quad (2.8)$$

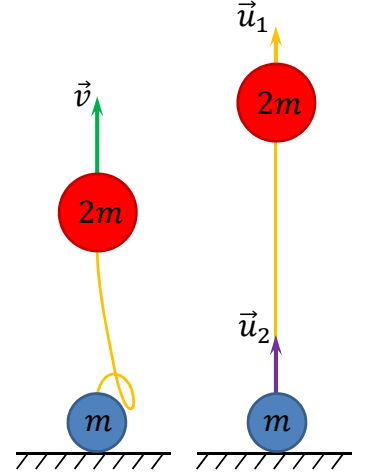


Рис. 2.1. Слева изображен момент до “удара”. Справа — момент непосредственно после него.

2. *Абсолютно неупругий удар.* В этом случае сохраняется импульс, но не механическая энергия. Скорости же шаров уравниваются: $u_1 = u_2$. С учетом уравнения (2.1) получим $u_1 = u_2 = 2u_0/3$.

Проанализируем далее движение шаров, как в предыдущем случае. Особенность этого случая в том, что легкий шар неизбежно столкнется с опорой перед столкновением с тяжелым шаром. Считая это столкновение абсолютно неупругим, приходим к выводу: $h = 0$. Соответственно, столкновение между шарами произойдет, когда тяжелый шар упадет на опору. Скорость тяжелого шара в этот момент

$$u_3 = \sqrt{u_1^2 + 2gl} = \frac{2v_0}{3} \sqrt{1 + \frac{5k}{4}}.$$

Тогда по формуле равноускоренного движения время полета тяжелого шара до падения на опору

$$t_2 = \frac{u_1 + u_3}{g} = \frac{2v_0}{3g} \left(\sqrt{1 - k} + \sqrt{1 + \frac{5k}{4}} \right). \quad (2.9)$$

Полное время с учетом формул (2.4) и (2.9)

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{1 - k} + \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{5k}{4}} \right).$$

Ответ: (здесь $k = 2gl/v_0^2$)

1. При абсолютно упругом ударе (через нить)

а. при $0 < k \leq 16/19$: $t = \frac{v_0}{g} \left(1 - \sqrt{1 - k} + \frac{k}{2\sqrt{1 - k}} \right)$ и $h = l \cdot \frac{16 - 19k}{12(1 - k)}$,

б. при $16/19 < k < 1$: $t = \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1 - k} + \frac{1}{3}\sqrt{1 + 8k} \right)$ и $h = 0$.

2. При абсолютно неупругом ударе $t = \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{1 - k} + \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{5k}{4}} \right)$ и $h = 0$.

Задача № 3

Условие: Подъемник поднимается и опускается в шахте, глубина которой $L = 400$ м, за $t_0 = 40$ с. Сначала он разгоняется с постоянным ускорением, а затем с тем же по модулю ускорением замедляется. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы подъемника по сравнению с неподвижными часами? Подъемник находится в движении в течение $T = 5,0$ ч ежедневно.

Решение: Рассмотрим движение подъемника в шахте. Считаем, что в течение одного цикла разгона-остановки он движется ускоренно ровно половину пути (соответственно, половину времени), а остальную половину движется замедленно. Найдем его ускорение a при таком движении. Подъемник проходит путь $L/2$ за время $t_0/4$, при этом его начальная или конечная скорость равна нулю. По формуле равноускоренного движения

$$\frac{L}{2} = \frac{a \left(\frac{t_0}{4} \right)^2}{2},$$

откуда

$$a = \frac{16L}{t_0^2}.$$

В отсутствие перегрузок период колебаний маятника $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Чтобы показать правильное время, за время t_0 маятник должен совершить $n_0 = t_0/T_0$ колебаний. При движении лифта с ускорением удобно перейти в неинерциальную систему отсчета, т.е. произвести замену $g \rightarrow g \pm a$. Соответственно, периоды колебаний маятника при двух направлениях ускорения равны

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = T_0 \left(1 + \frac{a}{g} \right)^{-1/2} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} = T_0 \left(1 - \frac{a}{g} \right)^{-1/2}.$$

Тогда количество колебаний, совершенных маятником за эти промежутки времени, равны соответственно

$$n_1 = \frac{t_0}{2T_1} = \frac{n_0}{2} \sqrt{1 + \frac{a}{g}} \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{t_0}{2T_2} = \frac{n_0}{2} \sqrt{1 - \frac{a}{g}}.$$

Найдем отставание ΔT часов за один день. Относительное отставание (отношение абсолютного отставания к промежутку времени, измеренному неподвижным наблюдателем) равно

$$\eta = \frac{n_0 - n_1 - n_2}{n_0} = 1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{g}} + \sqrt{1 - \frac{a}{g}} \right).$$

Тогда отставание часов в течение одного дня (считаем, что за день произошло целое количество циклов разгона-остановки)

$$\Delta T = \eta T = T \left(1 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{16L}{gt_0^2}} + \sqrt{1 - \frac{16L}{gt_0^2}} \right] \right).$$

Проверим размерность:

$$[\Delta T] = \text{с} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2} + \sqrt{1 - \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2} \right] \right) = \text{с}.$$

Найдем численное значение:

$$\{\Delta T\} = 5 \cdot 3600 \left(1 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{16 \cdot 400}{9,8 \cdot 40^2}} + \sqrt{1 - \frac{16 \cdot 400}{9,8 \cdot 40^2}} \right] \right) = 396; \quad \Delta T = 396 \text{ с}.$$

Ответ: $\Delta T = T \left(1 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{16L}{gt_0^2}} + \sqrt{1 - \frac{16L}{gt_0^2}} \right] \right) = 396 \text{ с}.$

Задача № 4

Условие: Какой минимальный заряд q нужно закрепить в нижней точке сферической полости радиуса R , чтобы в поле тяжести небольшой шарик массы m и заряда Q находился в верхней точке полости в положении устойчивого равновесия?

Решение: При решении задачи будем пренебрегать размером шарика. Шарик может находиться в верхней точке полости благодаря электростатическому отталкиванию от заряда внизу. Так как расстояние между зарядами $l = 2R$, то по закону Кулона сила электрического взаимодействия зарядов

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{l^2} = \frac{Qq}{16\pi\epsilon_0 R^2},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная. Равновесие должно быть устойчиво по отношению к малому смещению шарика в любом направлении. Достаточно рассмотреть смещения в двух направлениях: вниз и по касательной к поверхности полости. Для равновесия в первом направлении электростатическая сила должна быть не менее силы тяжести. При минимально возможном q эти силы равны: $F_{\text{el}} = mg$, откуда

$$q = \frac{16\pi\epsilon_0 mg R^2}{Q}. \quad (4.1)$$

Найдем минимальный заряд q , необходимый для того, чтобы при отклонении по касательной шарик вернулся в исходную точку. Пусть он отклонился от равновесия на малый угол φ (см. рис. 4.1). Рассмотрим движение шарика вдоль оси Ox , направленной перпендикулярно радиусу, проведенному из центра полости к шарiku. Так как длина хорды окружности радиуса R с центральным углом φ равна асимптотически $R\varphi$, то новое расстояние между зарядами $l' = \sqrt{l^2 - R^2\varphi^2} \approx l^2 - R^2\varphi^2/2$. Изменение расстояния квадратично по φ , им пренебрежем. Соответственно, при небольшом смещении шарика электрическая сила не изменится по модулю. Для устойчивости достаточно равенство нулю проекции результирующей сил, действующих на шарик¹. Проекция силы реакции опоры $N_x = 0$, силы тяжести $mg_x = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi$, электрической силы $F_{\text{el}x} = F_{\text{el}} \sin(\varphi/2) \approx F_{\text{el}}\varphi/2$. Тогда из условия устойчивости получим

$$mg = \frac{F_{\text{el}}}{2} = \frac{Qq}{32\pi\epsilon_0 R^2},$$

откуда

$$q = \frac{32\pi\epsilon_0 mg R^2}{Q}.$$

В этом случае ответ в два раза больше, чем по формуле (4.1). Соответственно, второе требование сильнее, оно и является определяющим.

Ответ: $q = \frac{32\pi\epsilon_0 mg R^2}{Q}$.

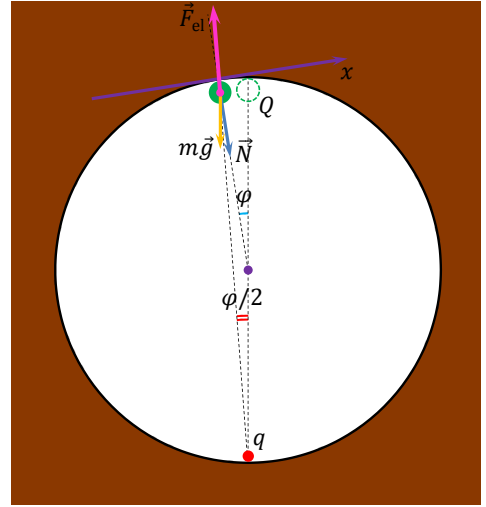


Рис. 4.1.

¹ На самом деле равнодействующая должна быть ненулевой и направленной противоположно отклонению шарика. При ее стремлении к нулю приходим к уравнению, как в решении.

Задача № 5

Условие: Изучите и опишите зависимость скорости вытекания жидкости из высокого цилиндрического сосуда от диаметра отверстия в дне цилиндра, сделанного с помощью швейной иглы.

Цель эксперимента: определить зависимость скорости истечения жидкости из круглого отверстия от его радиуса.

Оборудование: вода, труба пластмассовая “сотка” диаметром 110 мм и длиной около 1,2 м, трансмиссия от трубы “редукция” 110 мм — 50 мм, крепление трубы, пластмассовые бутылки и крышки от них, пластиковые стаканчики, металлическая пластина толщиной 0,1 мм, оптический проектор-увеличитель “TV-microscope”, весы электронные, секундомер (на телефоне), набор иголок различных диаметров, игла от шприца диаметром 0,8 мм, клей силиконовый, клеевой пистолет, паяльник, ножницы, линейка (см. рис. 5.1).

Теоретические сведения: В первом приближении, если считать воду идеальной жидкостью, скорость ее истечения из маленького отверстия не зависит от его радиуса и равна $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота сосуда. В действительности же из-за диссипации энергии скорость должна уменьшиться. Точный расчет этого уменьшения сложен, его мы проводить не будем. Вообще говоря, скорость воды в отверстии ввиду вязкости будет разной по сечению: вблизи краев отверстия близка к нулю, а в его центре — максимальна.

Оценим по порядку величины поправку $\delta v \ll v$ к скорости за счет вязкого трения вблизи отверстия, отбрасывая численные коэффициенты порядка единицы. Считаем, что диссипация происходит в области длиной порядка радиуса R отверстия. Рассмотрим малый цилиндрический слой жидкости длины $h \sim R$ (значок \sim означает равенство по порядку), радиуса r и толщины Δr . В качестве его скорости возьмем среднюю скорость истечения (оценочный расчет!). Его масса $\Delta m \sim \rho R r \Delta r$. За время Δt через выделенный объем пространства пройдет жидкость массой $\delta m \sim \rho R v \Delta r \Delta t$. Так как поток стационарный, можно считать, что кинетическую энергию теряет именно вытекающая из выделенного объема жидкость. Ее скорость изменилась за счет диссипации на малую величину δv , а энергия — на $\delta W \sim \delta m v \delta v \sim \rho R v^2 \Delta r \Delta t \delta v$. Суммируя по слоям, получим полное изменение энергии:

$$W \sim \rho v^2 R^2 \Delta t \delta v. \quad (5.1)$$

Эта работа совершается против сил вязкого трения. Сила вязкого трения, действующая на выделенный элемент жидкости, $\delta F_{\text{тр}} \sim \eta r h \Delta v / \Delta r \sim \eta R r \Delta v / \Delta r$, где Δv — разность скорости выделенного элемента и соседнего, η — вязкость жидкости. Выделившаяся на одном слое теплота $\delta Q \sim F_{\text{тр}} \Delta v \Delta t \sim \eta R r \Delta v^2 \Delta t / \Delta r$. Применяя приближение $\Delta v / \Delta r \sim v / R$, получим $\delta Q \sim \eta r v \Delta v \Delta t$. Просуммировав по слоям, получим выделившуюся теплоту:

$$Q \sim \eta R v \Delta t. \quad (5.2)$$

Сравнивая выражения (5.1) и (5.2), получим:

$$\delta v \sim \frac{\eta}{\rho R}.$$

Относительное изменение скорости $\delta v / v$ есть не что иное, как обратное число Рейнольдса. При подстановке вполне жизненных значений $\eta = 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 1000$ кг/м³, $R = 10^{-3}$ м и $v = 1$ м/с получим $\delta v / v = 10^{-3}$, что при любой грубости приближений пренебрежимо мало. Для того, чтобы относительное изменение скорости достигло 10%, радиус отверстия должен быть порядка $R = 10^{-5}$ м. Для дырок, сделанных швейной иглой, эффектом вязкости можно пренебречь.

Остается сделать вывод, что основную роль при формировании струи будут играть турбулентные образования и мелкие неровности вблизи отверстия.

Постановка эксперимента: В качестве цилиндрического сосуда в эксперименте использовали пластмассовую трубу диаметром $D = 100$ мм и толщиной $d = 3$ мм, так что потерями на вязкость в самой трубе можно пренебречь. Снизу к ней присоединили редукцию на 50 мм, в которую затем вставили наконечник пластиковой бутылки с резьбой (см. рис. 5.2). На его надевались съемные заглушки с отверстиями. Заглушка представляет собой крышку с проделанной в ней дыркой, в которую вставлена металлическая пластина с отверстием. Все щели были наглухо залиты силиконовым клеем. Размер проделанного отверстия измеряли предварительно при помощи проектора, на который вместе с пластинкой была для сравнения помещена игла от шприца. Согласно стандарту эта игла имеет диаметр $x = 0,8$ мм. При помощи линейки измеряли размеры изображений объектов на экране. Если на экране диаметр отверстия d' , а диаметр иглы x' , то истинный диаметр отверстия

$$d = \frac{d' x}{x'}. \quad (5.3)$$



Рис. 5.1. Оборудование: 1 — паяльник, 2 — ножницы, 3 — игла от шприца, 4 — пластиковый стаканчик, 5 — алюминиевая пластинка, 6 — линейка, 7 — пластиковая бутылка с водой, 8 — набор иголок, 9 — весы, 10 — проектор-увеличитель, 11 — клеевой пистолет, заряженный клеем.

Соответственно, площадь отверстия $S = \pi d^2/4$. Погрешность при измерении линейкой $\Delta x' = \Delta d' = 0,5$ мм. Тогда погрешность в диаметре определяется по формуле

$$\Delta d = d \sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{x'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d'}{d'}\right)^2}. \quad (5.4)$$

Погрешность в площади определяется по формуле

$$\Delta S = \frac{1}{2} \pi d \Delta d = \frac{1}{2} \pi d^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{x'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d'}{d'}\right)^2}. \quad (5.5)$$

Измерения скорости истечения проводили так. Вначале в трубу заливали воду и далее поддерживали ее уровень постоянным. Затем под струю на некоторое время подставляли пластиковый стаканчик. Перед экспериментом измеряли массу m_0 пустого стаканчика, после эксперимента — массу m стаканчика с водой. Время t , в течение которого струя попадала в стаканчик, измеряли при помощи секундомера на телефоне. Зная эти величины, определяли скорость по формуле

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{m - m_0}{\rho S t}, \quad (5.6)$$

где ρ — плотность воды. Измеренная таким образом скорость является усредненной по сечению. Так как в середине скорость близка к $\sqrt{2gh}$, а вблизи краев равна нулю, то ответ может отличаться от $\sqrt{2gh}$ на несколько десятков процентов. Погрешность в измерении массы $\Delta m = 0,01$ г соответствует классу точности весов, а погрешность в измерении времени определяется скоростью реакции человека и равна примерно $\Delta t = 0,3$ с. Тогда погрешность скорости определяется по формуле

$$\Delta v = v \sqrt{2 \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} = v \sqrt{2 \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta x'}{x'}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta d'}{d'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \quad (5.7)$$

Результаты эксперимента: При калибровке проектора был сделан замер размера изображения иглой от шприца, он составил $x' = 2,9$ см. Для измерения скорости отобрали 8 значений диаметра, причем для каждого значения измерения проводили трижды. При измерении скорости истечения жидкости были получены следующие результаты:

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--|
| d' , см | 1,7 | | | 2,1 | | | 2,5 | | | 2,7 | | | |
| $\Delta d'$, см | 0,05 | | | | | | | | | | | | |
| d , мм | 0,47 | | | 0,58 | | | 0,69 | | | 0,74 | | | |
| Δd , мм | 0,02 | | | | | | | | | | | | |
| S , мм ² | 0,17 | | | 0,26 | | | 0,37 | | | 0,44 | | | |
| ΔS , мм ² | 0,01 | | | 0,02 | | | | | | | | | |
| m , г | 20,19 | 20,49 | 20,25 | 29,93 | 30,45 | 30,27 | 41,76 | 42,39 | 41,61 | 49,76 | 49,76 | 50,40 | |
| v , м/с | 3,5 | 3,6 | 3,5 | 3,5 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,5 | 3,7 | 3,7 | 3,7 | |
| d' , см | 3,0 | | | 3,4 | | | 3,7 | | | 4,0 | | | |
| $\Delta d'$, см | 0,05 | | | | | | | | | | | | |
| d , мм | 0,83 | | | 0,94 | | | 1,02 | | | 1,10 | | | |
| Δd , мм | 0,02 | | | | | | | | | | | | |
| S , мм ² | 0,54 | | | 0,69 | | | 0,82 | | | 0,96 | | | |
| ΔS , мм ² | 0,03 | | | | | | 0,04 | | | | | | |
| m , г | 59,77 | 58,60 | 59,02 | 78,40 | 77,75 | 76,99 | 91,70 | 90,60 | 88,78 | 102,59 | 105,64 | 105,78 | |
| v , м/с | 3,6 | 3,5 | 3,5 | 3,7 | 3,7 | 3,6 | 3,7 | 3,6 | 3,5 | 3,5 | 3,6 | 3,6 | |

Величины d' и m были получены из эксперимента, остальные же были вычислены при помощи формул (5.3), (5.4), (5.6) и (5.7). Во всех случаях измерения проводили в течение времени $t = 30$ с. Погрешность скорости $\Delta v = 0,2$ м/с. По полученным данным построен график (см. рис. 5.3). Можно сделать вывод, что скорость истечения не зависит от размеров отверстия.

Выводы: Для нескольких значений диаметров круглых отверстий были найдены соответствующие значения скорости истечения воды. Эти величины равны с точностью до погрешности, что дает основания предполагать, что скорость не зависит от диаметра сечения в миллиметровом диапазоне. Таким образом, эксперимент не опроверг теоретическое предположение, что вязкость внесет вклад в скорость истечения. Однако во время проведения эксперимента были обнаружены действия неровностей в отверстиях. Иногда струя воды внезапно изменяла свое направление, а скорость истечения при этом уменьшалась в разы. Потом выяснилось, что в отверстие попадали микрочастицы и частично его загораживали. Результаты таких измерений отбрасывали.



Рис. 5.2. В верхнем левом углу изображены некоторые заглушки, в левом нижнем — измерение диаметра отверстия при помощи микроскопа. Справа изображена установка для измерения скорости истечения.

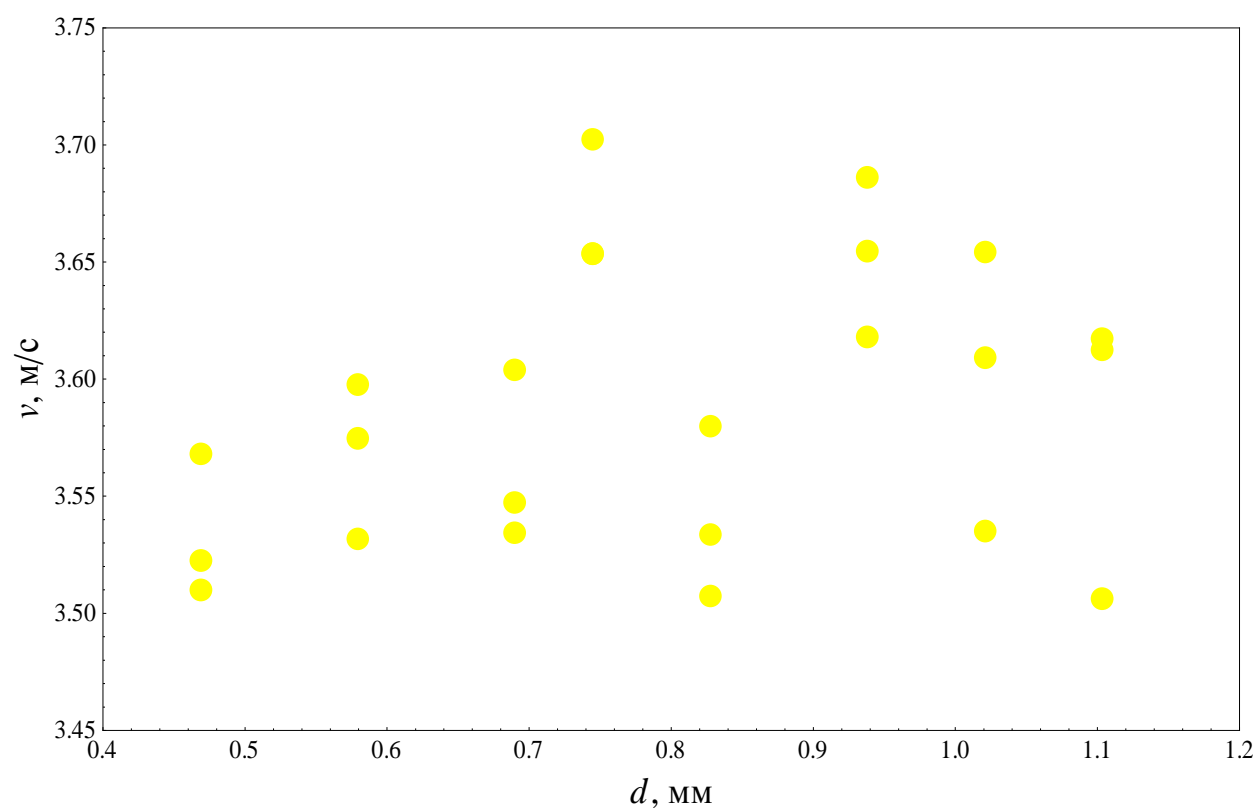


Рис. 5.3. График зависимости скорости истечения от диаметра отверстия.