Эксперимент № 2 старшей лиги

1. По наклону графика в первой точке излома (мной определен как 6 K/min, или 0.1 K/s) можно получить массу воды в момент конца таяния льда:

$$m_1 = \frac{P}{c\,dT/dt} = 1.4 \text{ kg}.$$

2. Средний расход жидкости на наклонном участке посчитать довольно несложно. Наклон во второй точке излома составляет приблизительно 45 K/min или 0.75 K/s, что соответствует массе воды $m_2 = 0.2$ kg. Соответственно, средний расход жидкости на этом участке $\langle\mu\rangle_{12} = 0.17$ kg/min. Если же рассматривать все время эксперимента, необходимо знать начальное количество льда и воды, а также конечное количество воды в калориметре.

3. Эту величину нетрудно найти из условия теплоизолированности. Считаем, что в калориметре нет маленьких кусков льда, которые могут покинуть сосуд через отверстие. Тогда исходная масса льда

$$m_\text{i} = \frac{Pt_{01}}{\lambda} = 0.53 \text{ kg}.$$

4. С имеющейся оценкой расхода жидкости странным является то, что оставшиеся 200 грамм кипятка не вытекли из калориметра за 1-2 минуты, а продолжали пребывать там аж 5 минут. Расход же в испарение

$$\mu_\text{evap} = \frac{P}{L} = 0.016 \text{ kg/min},$$

что для такой дырки в сосуде пренебрежимо мало.

Сделаем оценку сверху, без учета испарения жидкости. Рассмотри цилиндрический сосуд площадью сечения S и площадью дырки $S_0 \ll S$. Скорость истечения жидкости $v = \sqrt{2gh}$, соответственно из сохранения объема

$$S\frac{dh}{dt} = -S_0\sqrt{2gh},$$

откуда

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{S_0}{S}t\right)^2.$$

Тогда время опустошения сосуда

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{S}{S_0}.$$

Исходная масса жидкости в сосуде $m_0 = \rho S h_0$, а расход жидкости в начальный момент времени

$$\mu_0 = \rho S_0\sqrt{2gh_0}.$$

Комбинируя эти соотношения, получим

$$h(t) = h_0\left(1 - \frac{\mu_0 t}{2m_0}\right)^2.$$

Так как за время нагревания объем жидкости изменился в 7 раз, то конечный расход не может отличаться от среднего более, чем в $\sqrt{7}$ раз. Соответственно, максимальная масса оставшейся жидкости

$$m_{\max} = 0.04 \text{ kg}.$$

Учитывая все сделанные приближения, можно сказать, что жидкости там вообще почти (или совсем) не останется.

Теория старшей лиги

1. Считаем, что одинаковые по массе звезды расположены в противоположных углах ромба. Пусть полудиагонали ромба a и b, а массы звезд M и m при концах соответствующих диагоналей. Запишем равновесие системы (ω — угловая частота):

$$M\omega^2 a = \frac{GM^2}{4a^2} + 2\frac{GMma}{(a^2+b^2)^{3/2}},$$
$$m\omega^2 b = \frac{Gm^2}{4b^2} + 2\frac{GMmb}{(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

Исключим угловую частоту:

$$\frac{M}{4a^3} + \frac{2m}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{m}{4b^3} + \frac{2M}{(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

Обозначим $m/M = \mu$, $a/b = x$. Подставим:

$$\mu\left(\frac{2}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{4x^3}.$$

Выражения слева и справа одного знака тогда и только тогда, когда x лежит в диапазоне от $\sqrt{3}/3$ до $\sqrt{3}$. Следовательно, острый угол ромба не меньше 60 градусов. Для заданных в условии острых углов

$$\mu(88^\circ) = 1.06,$$
$$\mu(62^\circ) = 9.42,$$

а равновесной конфигурации с острым углом 36° не существует. Стоит заметить, что предельная конфигурация с острым углом 60 градусов соответствует $\mu \to \infty$ (или $\mu \to 0$) и является устойчивым решением задачи трех тел. Вершины острых углов называют точками Лагранжа двойной системы тяжелых звезд, которые находятся в вершинах тупых углов, и в них находятся легкие объекты-спутники.

2. Цепь заметно упрощается, если ее “сложить пополам”. Тогда ее можно посчитать как обычную полубесконечную. Сопротивление (в единицах R)

$$r = \frac{1+\sqrt{21}}{5+\sqrt{21}}.$$

3. Запишем закон движения в виде $v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2gx}$, где $v_0 = B$, $g = A/2$. Считаем, что $T < v_0/g = 2B/A$, так что брусок не остановился до соударения со вторым бруском. Скорость бруска непосредственно до столкновения $v = v_0 - gT$, непосредственно после $u = v/2$, а координата точки столкновения

$$x_{\text{imp}} = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

Считаем, что на второй брусок действует такое же силовое поле, как и на первый. Тогда высота подъема двух брусков

$$H = x_{\text{imp}} + \frac{u^2}{2g} = \frac{v_0^2 - \frac{3}{4}v^2}{2g} = \frac{v_0^2 + 6v_0 gT - 3g^2T^2}{8g} = \frac{4B^2 + 12ABT - 3A^2T^2}{16A}.$$

4. Считаем, что глубина $H > L$ и отсчитывается от нижнего торца пробирки. Пусть α — доля объема пробирки, занятая газом. Тогда давление внутри пробирки

$$p_{\text{in}} = p_0 + \rho_0 g(H - \alpha L).$$

Из закона Менделеева-Клапейрона

$$p_1 = \alpha p_{\text{in}}.$$

Комбинируя эти соотношения, получим:

$$\rho_0 gL\alpha^2 - (p_0 + \rho_0 gH)\alpha + p_1 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{p_0 + \rho_0 gH \pm \sqrt{(p_0 + \rho_0 gH)^2 - 4p_1\rho_0 gL}}{2\rho_0 gL}.$$

Устойчивым является только решение с минусом. Очевидно, это решение всегда положительно. Также, по физическому смыслу $\alpha \leqslant 1$, что приводит к дополнительному условию:

$$p_1 \leqslant p_0 + \rho_0 g(H - L).$$

Также не стоит забывать про положительность дискриминанта:

$$(p_0 + \rho_0 gH)^2 \geqslant 4p_1\rho_0 gL.$$

Это условие не выполняется при выполненном первом для очень длинных трубок, погруженных сравнительно неглубоко. В таких случаях равновесия у такой системы вообще не будет наблюдаться.

Теория младшей лиги

1. В свободном состоянии два стакана вместе создают вращающий момент

$$M_1 = \rho a^4 g \cos\alpha \left(\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{3}\right),$$

препятствующий движению. Погружение тела в верхний стакан создаст компенсирующий момент

$$M_2 = \rho a^2 g h \cos\alpha \left(l_0 + h \operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{2} \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \operatorname{tg}\alpha\right) \right),$$

где

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{H}{l_0 + \dfrac{a}{2}},$$

а $h = V/a^2$ — объем погруженного тела, приведенный к размерности длины. При равенстве моментов $M_1 = M_2$ система начнет выходить из равновесия. Очевидно, при дальнейшем движении оба момента будут изменяться пропорционально, так что равенство моментов вначале (а точнее, момент M_2 должен быть чуть-чуть больше) является достаточным условием перекатывания рычага. Запишем это условие:

$$a^2 \left(\frac{1}{6} \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{3} \right) = h \left(l_0 + h \operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{2} \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \operatorname{tg}\alpha\right) \right).$$

Решение этого уравнение имеет вид

$$h = \frac{-\left(l_0 + \dfrac{a}{2} \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \operatorname{tg}\alpha\right) \right) + \sqrt{\left(l_0 + \dfrac{a}{2} \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \operatorname{tg}\alpha\right) \right)^2 + 4a^2 \operatorname{tg}\alpha \left(\dfrac{1}{6} \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{3} \right)}}{2 \operatorname{tg}\alpha},$$

второй корень отрицательный. Численно $h = 0.384$ cm, что соответствует $V = 6.14$ cm^3. Если пренебречь малыми по сравнению с l_0 слагаемыми в уравнении, можно получить $h = 0.392$ cm и $V = 6.27$ cm^3.

2. В однородной поглощающей среде освещенность убывает в зависимости от расстояния по закону

$$E(r) = A \frac{e^{-\alpha r}}{r^2},$$

где α — параметр поглощения. При помощи величин из условия можно найти $\alpha = 0.0204\,\mathrm{m}^{-1}$ и $A = 416.7\ \mathrm{lux} \cdot \mathrm{m}^2$. Далее находим “большое расстояние” $L = 80.38$ m, и наконец, освещенность после последней сдвижки $E_\mathrm{f} = 11.42$ mlux.

Можно решить задачу приближенно, ответ при этом получается хоть и не совсем, но близкий. Без поглощения освещенность на расстоянии 4 m от экрана равнялась бы 25 lux. Так как поглощение уменьшает интенсивность излучения пропорционально на каждом малом участке пути, то можно утверждать, что затухание умножает интенсивность на 0.96 за каждые 2 метра пути. Вдалеке вклад поглощения в убывание освещенности становится сравним с вкладом отдаления. Если пренебречь вторым, получим освещенность $E_\mathrm{f} \approx 12$ mlux. Как видим, ответ довольно неточный, так что необходимо искать методы оценки “большого расстояния”, что сводит задачу к первому методу.

3. (та, что 8-й класс) Из графиков нетрудно найти все требуемые величины. Второй мальчик догонит первого в момент времени $t = 3$ min 20 s, средние скорости $v_1 = 3.14$ m/s и $v_2 = 3.57$ m/s соответственно. За 7 минут второй мальчик пробежит больше, чем первый. Соответственно, от длины дистанции зависит очередность на финише: если дистанция короче 760 метров, первый придет первым, иначе наоборот.

4. Сила, действующая на боковую поверхность конуса, равна векторной разности силы Архимеда и силы давления на основание. Так как давление линейно возрастает с глубиной, то сила давление на дно

$$F_1 = \rho g H S.$$

Сила же Архимеда

$$F_{\text{А}} = \rho g \frac{Sh}{3}.$$

Соответственно, сила давления на боковую поверхность

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + F_{\text{А}}^2} = \rho g S \sqrt{H^2 + \frac{h^2}{9}}.$$