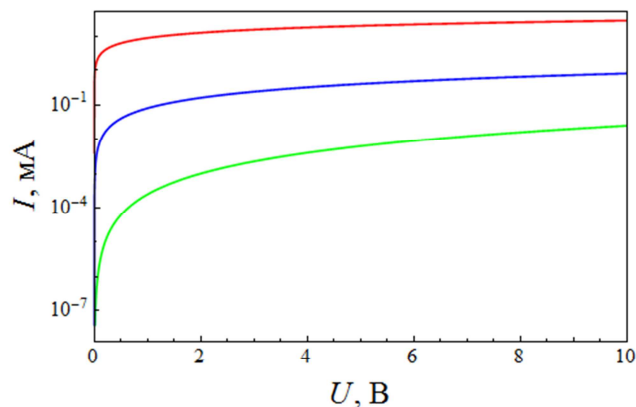
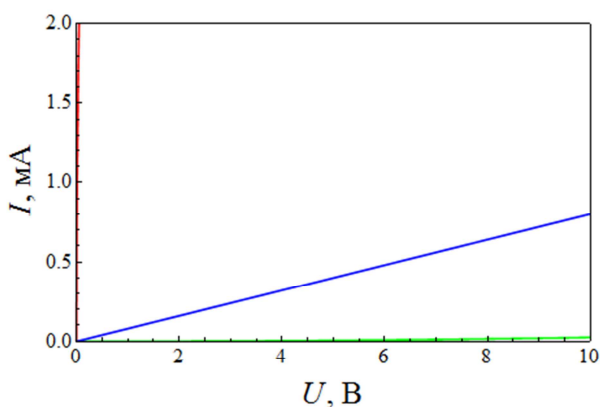
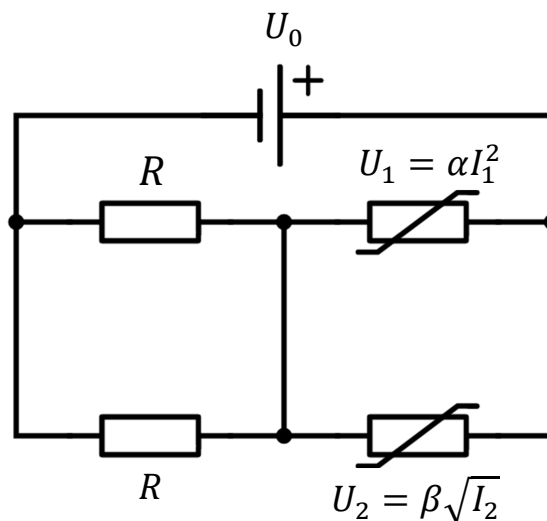


Нелінійна схема

Назначення: теоретичний тур, 9-10 класи

До джерела постійної напруги $U_0 = 5.00$ В під'єднано схему (рис). Обидва резистора мають опір $R = 12.5$ кОм, вольтамперна характеристика двох інших приладів указана на схемі, причому $\alpha = 12.5$ кВ/А², $\beta = 2.00$ кВ/А^{1/2}. Оцініть теплову потужність схеми з точністю не менше ніж 1 %. У якому елементі або елементах виділяється найбільша кількість теплоти?



Можна дати точну відповідь на цю задачу, але значно простіше розв'язати її наближено. Побудуємо вольтамперні характеристики елементів: червона крива – елемент 1, зелена – 2, синя – резистори.

Можна побачити, що струми елементів відрізняються на порядок. Проілюструємо цю ідею кількісно. Обчислимо ефективні, так звані інтегральні, опори елементів за напруги порядку U_0 , за формулою $r = U/I$:

$$r_\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{U_0/\alpha}} = \sqrt{\alpha U_0} = 0.25 \text{ кОм},$$

$$r_\beta = \frac{U_0}{U_0^2/\beta^2} = \frac{\beta^2}{U_0} = 800 \text{ кОм}.$$

Бачимо, що $r_\alpha \ll R \ll r_\beta$, тобто при напрузі U_0 нелінійний елемент 1 поводитиме себе майже як провідник з нехтовно малим опором, а елемент 2 – майже як розрив кола.

Замінімо елемент 1 на провідник та вилучимо елемент 2 з кола. Тоді коло складатиметься лише з двох паралельно під'єднаних до джерела резисторів, і його потужність

$$P = \frac{2U_0^2}{R} = 4 \text{ мВт.}$$

Відповідь на друге питання тепер очевидна: основна частина тепла виділяється в резисторах.

Для порівняння, точна відповідь

Скористаємось методом вузлових потенціалів. У якості нулевого рівня оберемо потенціал від'ємного полюса джерела, тоді на додатному полюсі потенціал U_0 . Нехай потенціал вузла всередині кола дорівнює $U_0 - \varphi$. Запишемо друге правило Кірхгофа (баланс струмів) для цього вузла:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{\varphi^2}{\beta^2} = \frac{2(U_0 - \varphi)}{R}.$$

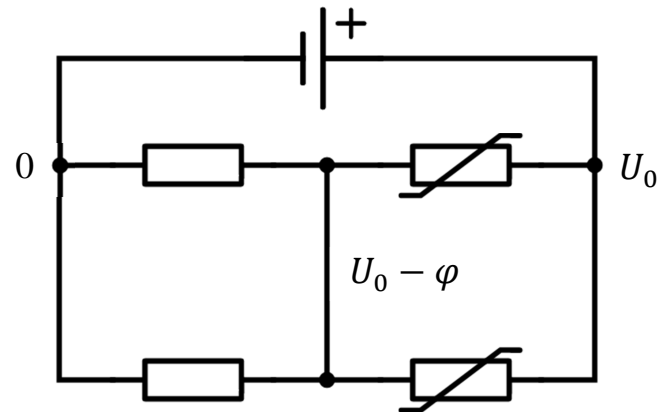
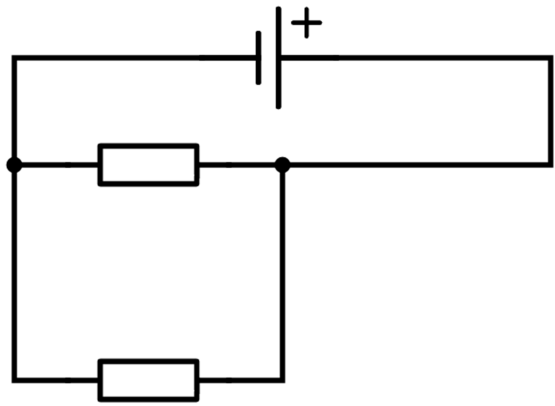
Аналітично це рівняння розв'язати складно, численно ж $\varphi \approx 7.975 \text{ мВ}$ (учні, взагалі-то, мають можливість отримати цей результат, наприклад за допомогою метода половинного ділення). Бачимо, що майже вся напруга падає на резисторах, тобто наближення є розумним. Нарешті, потужність елементів

$$P_\alpha = U_\alpha I_\alpha = \varphi \sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}} = 6.37 \cdot 10^{-6} \text{ Вт,}$$

$$P_\beta = U_\beta I_\beta = \frac{\varphi^3}{\beta^2} = 1.27 \cdot 10^{-13} \text{ Вт,}$$

$$P_R = \frac{(U_0 - \varphi)^2}{R} = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ Вт,}$$

і сумарна потужність $P = P_\alpha + P_\beta + 2P_R = 4.00 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 4.00 \text{ мВт.}$



Критерії оцінювання

Наближений розв'язок

При однакових напругах струми елементів відрізняються порядками – 2.0

Розрахунок ефективних опорів або побудова схематичної вольтамперної характеристики – 0.5

Вилучення елемента β – 0.5

Заміна елемента α на провідник з нульовим опором – 1.0

Розрахунок потужності спрощеної схеми – 0.5

Теплота виділяється в основному в резисторах – 0.5

Точний розв'язок

Використання законів Ома або правил Кірхгофа – 1.0

Отримання кінцевого рівняння на будь-яку введену величину – 0.5

Використання методу половинного ділення або графічний розв'язок – 1.0

Кінцевий результат з похибкою в межах

- $<1\%$: 1.5
- $1\% - 3\%$: 1.0
- $3\% - 10\%$: 0.5

Отримані потужності елементів схеми, теплота виділяється в основному в резисторах – 1.0

Оцінка доданків кінцевого рівняння

Використання законів Ома або правил Кірхгофа – 1.0

Отримання кінцевого рівняння на будь-яку введену величину – 0.5

Аналіз доданків рівняння, нехтування відповідними доданками з β – 1.0

Кінцевий результат з похибкою в межах

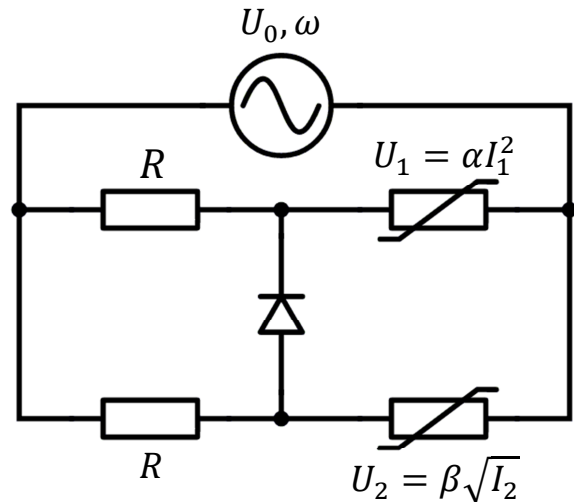
- $<1\%$: 1.5
- $1\% - 3\%$: 1.0
- $3\% - 10\%$: 0.5

Отримані потужності елементів схеми, теплота виділяється в основному в резисторах – 1.0

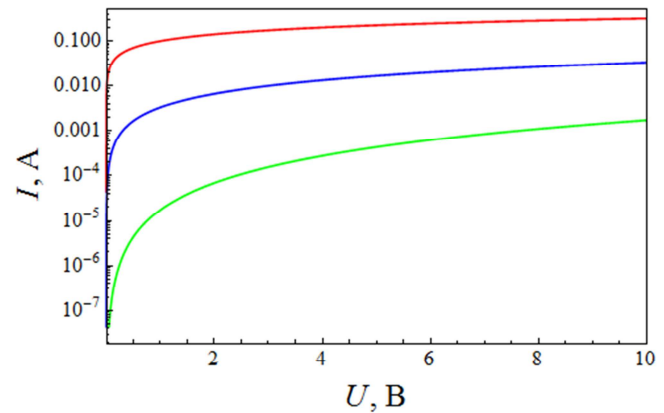
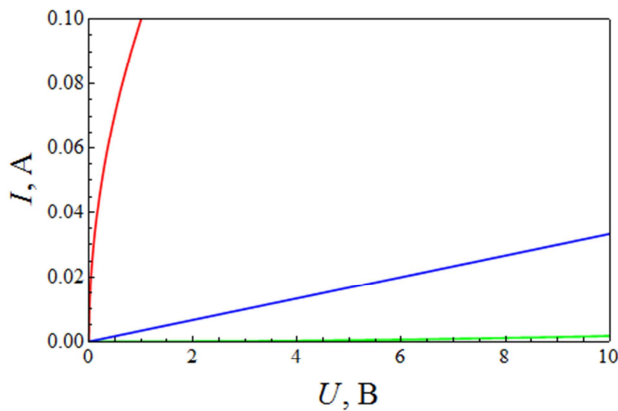
Нелінійна схема [ускладнена версія]

Назначення: теоретичний тур, 11 клас

До джерела синусоїдальної напруги ефективної величини $U_0 = 4.00$ В та частоти $\omega = 100\pi$ с⁻¹ під'єднано схему (рис). Обидва резистора мають опір $R = 300$ Ом, вольтамперна характеристика двох інших приладів указана на схемі, причому $\alpha = 100$ В/А², $\beta = 240$ В/А^{1/2}. Оцініть середню теплову потужність схеми. У якому елементі або елементах виділяється найбільша кількість теплоти? Діод вважайте ідеальним.



Розв'язок



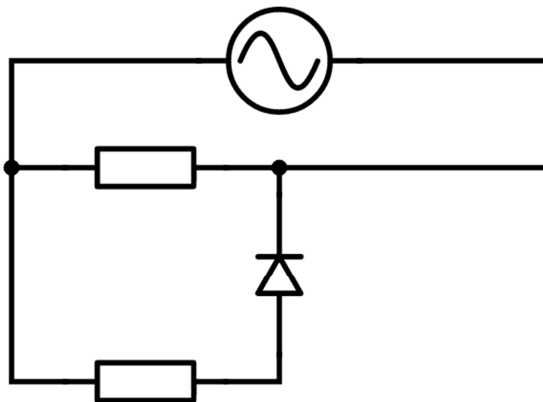
Можна дати точну відповідь на цю задачу, але значно простіше розв'язати її наближено. Побудуємо вольтамперні характеристики елементів: червона крива – елемент 1, зелена – 2, синя – резистори.

Можна побачити, що струми елементів відрізняються на порядок. Проілюструємо цю ідею кількісно. Обчислимо ефективні, так звані інтегральні, опори елементів за напруги порядку U_0 , за формулою $r = U/I$:

$$r_\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{U_0/\alpha}} = \sqrt{\alpha U_0} = 20 \text{ Ом},$$

$$r_\beta = \frac{U_0}{U_0^2/\beta^2} = \frac{\beta^2}{U_0} = 14.4 \text{ кОм}.$$

Бачимо, що $r_\alpha \ll R \ll r_\beta$, тобто при напрузі U_0 нелінійний елемент 1 поводитиме себе майже як провідник з нехтовно малим опором, а елемент 2 – майже як розрив кола. Замінімо елемент 1 на провідник та вилучимо елемент 2 з кола. Тоді коло складатиметься з двох резисторів і діода. При одній з полярностей (плюс справа) діод буде відкритим, при іншій – закритим. Середня ж потужність дорівнюватиме середньому арифметичному потужностей:

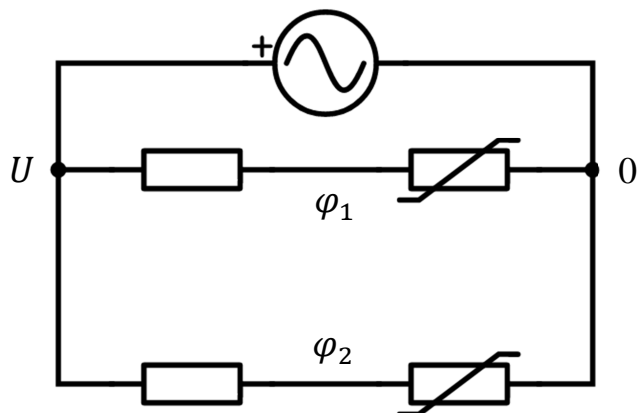


$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{U_0^2}{R} + \frac{U_0^2}{R/2} \right) = \frac{3U_0^2}{2R} = 80 \text{ мВт.}$$

Відповідь на друге питання тепер очевидна: основна частина тепла виділяється в резисторах.

Для порівняння, точна відповідь

Спочатку розглянемо випадок, коли діод закритий. Скористаємось методом вузлових потенціалів. У якості нулевого рівня оберемо потенціал правого полюса джерела, тоді на лівому полюсі потенціал U дорівнює миттєвій напрузі на джерелі. Нехай потенціали вузлів всередині кола дорівнюють φ_1 та φ_2 (рис). Запишемо друге правило Кірхгофа для внутрішніх вузлів:



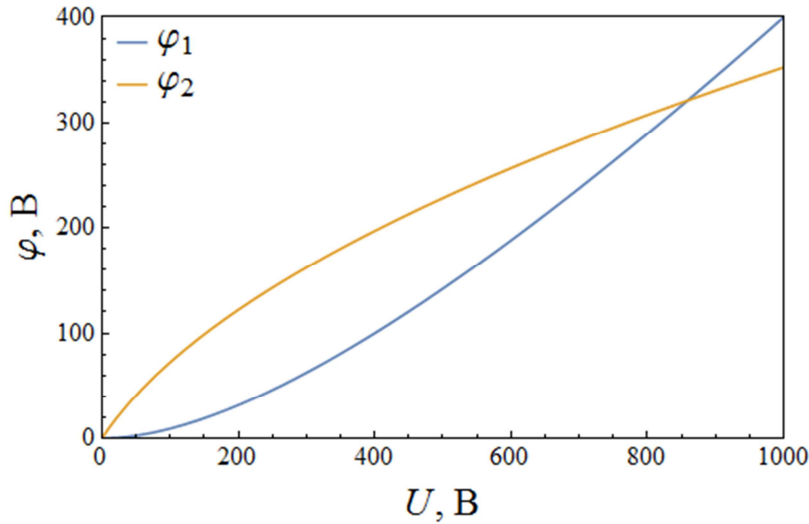
$$\sqrt{\frac{\varphi_1}{\alpha}} = \frac{U - \varphi_1}{R},$$

$$\frac{\varphi_2^2}{\beta^2} = \frac{U - \varphi_2}{R},$$

звідки

$$\varphi_1 = U + \frac{R^2 - R\sqrt{R^2 + 4\alpha U}}{2\alpha},$$

$$\varphi_2 = \frac{-\beta^2 + \beta\sqrt{\beta^2 + 4UR}}{2R}.$$



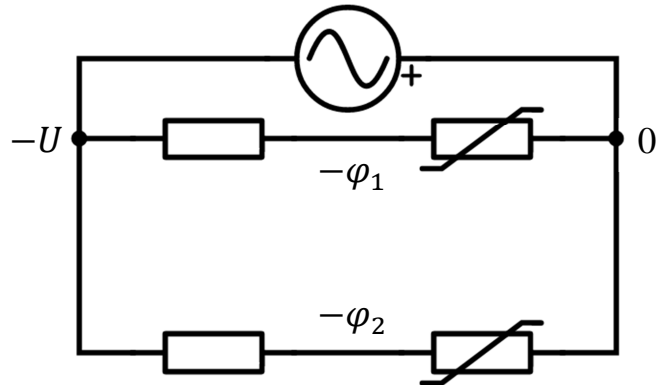
Бачимо, що співвідношення між φ_1 та φ_2 змінюється лише за великих напруг. Це означає, що при одній полярності напруги діод буде відкритим впродовж усієї половини періода, а при інший – закритим. Розглянемо ці 2 випадки.

1. Діод закритий (рис). Тоді струм у верхній гілці

$$i_1 = \frac{U - \varphi_1}{R} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4U\alpha}}{2\alpha},$$

а в нижній

$$i_2 = \frac{U - \varphi_2}{R} = \frac{2UR + \beta^2 - \sqrt{4UR\beta^2 + \beta^4}}{2R^2}.$$



Миттєва потужність схеми

$$P = U(i_1 + i_2) = U \left(\frac{-R + \sqrt{R^2 + 4U\alpha}}{2\alpha} + \frac{2UR + \beta^2 - \beta\sqrt{4UR + \beta^2}}{2R^2} \right).$$

Оскільки у схемі змінного струму $U(t) = U_0\sqrt{2} \sin \omega t$, то виділення тепла за ці півперіода

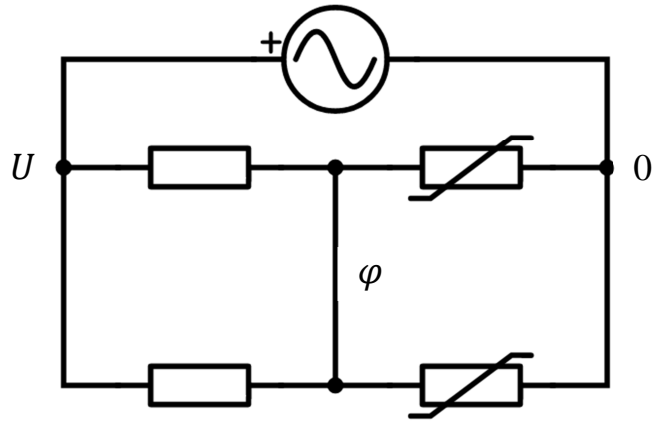
$$Q_1 = \frac{U_0\sqrt{2}}{\omega} \int_0^\pi \left(\frac{-R + \sqrt{R^2 + 4U_0\alpha\sqrt{2} \sin \phi}}{2\alpha} + \frac{2U_0R\sqrt{2} \sin \phi + \beta^2 - \beta\sqrt{4U_0R\sqrt{2} \sin \phi + \beta^2}}{2R^2} \right) \sin \phi d\phi$$

$$= 0.543 \text{ мДж.}$$

2. Діод відкритий (рис). Нехай потенціал вузла всередині кола дорівнює φ . Запишемо друге правило Кірхгофа (баланс струмів) для цього вузла:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{\varphi^2}{\beta^2} = \frac{2(U - \varphi)}{R}.$$

Це рівняння можна звести до рівняння четвертого порядку, яке має аналітичний розв'язок. Проте ми це не робитимемо, а замість цього використовуватимемо численні розрахунки. Струм через коло



$$i = \frac{2(U - \varphi)}{R},$$

і нарешті, шукана кількість теплоти

$$Q_2 = \frac{2U_0\sqrt{2}}{\omega R} \int_0^\pi (U_0\sqrt{2} \sin \phi - \varphi(\phi)) \sin \phi d\phi = 1.04 \text{ мДж}.$$

Середня потужність схеми

$$P = \frac{(Q_1 + Q_2)\omega}{2\pi} = 79.4 \text{ мВт},$$

що на 0.1% відрізняється від наближеної.

Критерії оцінювання

При однакових напругах струми елементів відрізняються порядками – 2.0

Розрахунок ефективних опорів або побудова схематичної вольтамперної характеристики – 0.5

Вилучення елемента β – 0.5

Заміна елемента α на провідник з нульовим опором – 1.0

Розрахунок потужності спрощеної схеми – 0.5

Теплота виділяється в основному в резисторах – 0.5

Оцінка доданків кінцевого рівняння

Використання законів Ома або правил Кірхгофа – 1.0

Отримання кінцевого рівняння на будь-яку введену величину – 0.5

Аналіз доданків рівняння, нехтування відповідними доданками з β – 1.0

Кінцевий результат з похибкою в межах

- $<1\%$: 1.5
- $1\% - 3\%$: 1.0
- $3\% - 10\%$: 0.5

Отримані потужності елементів схеми, теплота виділяється в основному в резисторах – 1.0