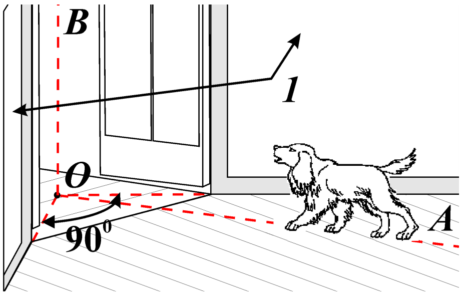
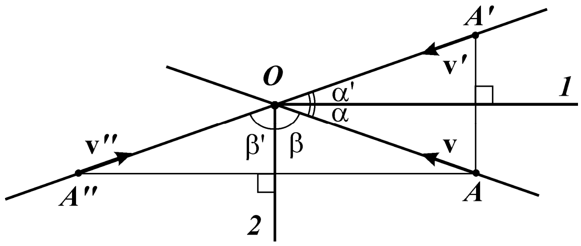
Решения задач III этапа Всеукраинской ученической олимпиады по физике 2012/2013 учебного года, 8-й класс

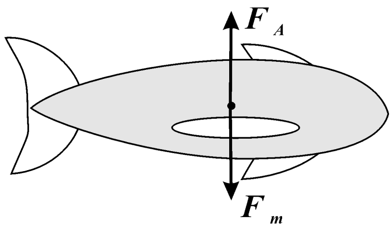
1) Жучка в Зазеркалье Две стены зала, образующие прямой угол, покрыты плоскими зеркалами 1. Жучка бежит из зала к двери, находящейся между стенами, с постоянной скоростью 5 км/ч, по прямой *AO*, проходящей через линию пересечения плоскостей зеркал *OB*. Наблюдатель, находящийся в зале, видит отражения Жучки в обоих зеркалах. Какова скорость одного отражения относительно другого?





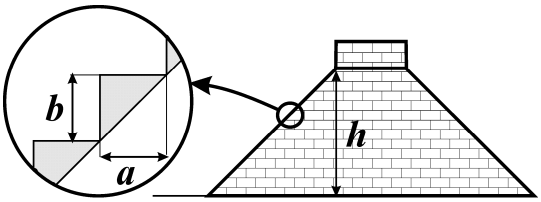
Решение. Траектория собаки и изображение её траектории в зеркале являются зеркально симметричными, поэтому, когда собака оказывается в плоскости зеркала, то она совпадает со своим изображением. Отсюда траектория и оба её изображения в зеркалах пересекаются в т.О. По условию, траектория собаки – прямая. Значит, в силу зеркальной симметрии, изображения траектории тоже являются прямыми. По той же причине, углы $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Угол 1О2 по условию прямой. Так как $\alpha + \beta = 90^0$, то и $\alpha' + \beta' = 90^0$. Поэтому угол A'O A'' = 180^0, а значит, изображения траекторий лежат на одной прямой. В системе отсчёта, связанной с залом, собака и её зеркальное изображение за произвольный интервал времени проходят равные расстояния, поэтому их скорости равны. Значит, скорости обоих изображений v' = v''= 5 км/ч. Так как скорости изображений направлены по прямой навстречу друг другу, то скорость одного изображения относительно другого V = v'+ v''= 10 км/ч.

2) Рыба В теле рыбы имеется непроницаемый пузырь с воздухом. Тело рыбы состоит в основном из воды, и давление внутри рыбы равно давлению наружной воды. На некоторой глубине рыба, практически не шевелясь, может находиться сколь угодно долго. Однако стоит рыбе, сделав несколько движений, изменить глубину, как далее она всплывает до самой поверхности или достигает дна, уже не работая телом и плавниками. Объясните, как и почему это происходит.



Решение. На рыбу в воде действуют сила давления воды на поверхность рыбы, что даёт силу Архимеда F_A, и сила тяжести $F_т$. Сила тяжести постоянна, а сила Архимеда пропорциональна объёму вытесненной воды, т.е., объёму рыбы. Объём рыбы складывается из объёма пузыря и объёма остального тела. Ткани рыбы не обладают высокой сжимаемостью, чего нельзя сказать о пузыре: его объём тем меньше, чем больше давление воды. Пусть на некоторой глубине $F_A = F_т$ и рыба находится в равновесии. Если рыба окажется выше этой глубины, то давление воды на пузырь, согласно известной формуле $p=\rho gh$, уменьшится, и объём пузыря увеличится. Тогда сила Архимеда делается больше, и равновесие нарушается: рыба всплывает. На глубинах ниже равновесной объём пузыря уменьшается, и преобладает сила тяжести: рыба тонет[1].

3) Лестница Пирамида, построенная индейцами племени майя в Чичен-Ица (Мексика) около X в. нашей эры, обладает рядом особенностей, которые отражают религиозные представления майя. Например, если хлопнуть в ладоши, стоя у подножия лестницы, ведущей на вершину пирамиды, то от неё слышится звук, аналогичный чириканью птицы кетсал, почитавшейся индейцами. Оцените частоту и длительность этого звука. Высота лестницы h = 25 м, глубина и высота одной ступеньки равны $a = b$ = 25 см. Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.

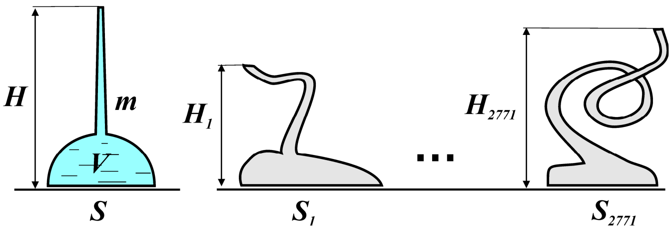


Решение. Звуковая волна, попадающая на лестницу после хлопка, отражается от каждой ступеньки. Причём от дальних ступенек отражение происходит позже, чем от ближних. Интервал времени, отделяющий отражения от соседних ступенек, определяют период основного тона отражённого звука. Для ступенек, расположенных у подножия, он равен $\tau_1 = 2a/c$, где c –

[1] Точно так работает игрушка, известная как «артезианский ныряльщик».

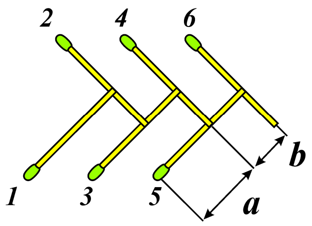
скорость звука. Для ступенек, расположенных ближе к вершине, $\tau_2 = 2\,(a^2+b^2)^{1/2} / c$, тогда как частоты $f_{1,2} = 1 / \tau_{1,2}$. Полагая, что человек должен находиться недалеко от подножия, длительность отражённого сигнала можно оценить как $\tau = 2 \cdot h\, 2^{1/2} / c$. Вычисления дают: $f_1 = 680c^{-1}$, $f2 = 480c^{-1}$, τ=0.21с. [2]

4) <u>Наука и жизнь</u> Опытное производство получило заказ на изготовление крупной партии воронок. Требование заказчика таково, что воронка, поставленная на гладкую горизонтальную поверхность, и заполненная водой, не должна отрываться от поверхности (рис. 3а). Заказчик, получив свой заказ, обнаружил, что форма воронок заметно отклоняется от расчётной, причём случайным образом (рис. 3б). Оказалось, однако, что массы и объёмы всех воронок совпадают, и равны, соответственно, *m* и *V*. Площади же оснований *S* и высоты *H* различаются от образца к образцу. Сформулируйте условие для *S* и *H*, по которому заказчик может отобрать воронки, соответствующие его требованию. Считать, что при заполнении воронок водой опрокидывания воронки не происходит.



Решение. На воронку с водой действуют сила тяжести воды $F_1 = \rho gV$, (ρ -- плотность воды), сила тяжести воронки $F_2 = mg$ и сила давления со стороны горизонтальной поверхности $F = pS = \rho gHS$. Воронка приподнимается, если $F > F_1 + F_2$. Отсюда, чтобы воронка не поднималась, $\rho V + m > \rho HS$.

5) <u>Спички</u> На горизонтальном столе сложена конструкция из спичек, показанная на рис. 4. Первая спичка одним концом опирается на вторую, вторая – на третью, и т.д. Каждая спичка делится предыдущей так, что расстояния от точки касания до концов спички равны *a* и *b*. Первую спичку придавливают к столу так, что она действует на вторую с силой f_1. Массы всех спичек одинаковы и равны *m*. Определите, с какой силой давит предпоследняя спичка на последнюю. Какова будет эта сила, если $a = b$, а число спичек очень велико? Спички считать однородными и тонкими.



Решение. Найдём силу f_n, с которой спичка n давит на спичку n+1. Поскольку спичка однородна, то за счёт массы m её концы будут давить на опоры с силой $F = mg/2$. К F добавляется сила, вызванная давлением предыдущей спички f_{n-1}. По правилу рычага, она равна $q \cdot f_{n-1}$, где $q = b / (a+b)$: $f_n = F + q \cdot f_{n-1}$. Для конструкции, показанной на рисунке,

$$f_2 = F + q \cdot f_1$$
$$f_3 = F + q \cdot f_2 = F + q \cdot F + q^2 \cdot f_1$$
$$f_4 = F + q \cdot f_3 = F + q \cdot F + q^2 \cdot F + q^3 \cdot f_1$$
$$f_5 = F + q \cdot f_4 = F + q \cdot F + q^2 \cdot F + q^3 \cdot F + q^4 \cdot f_1$$

Если добавлять спички по одной со стороны спички 1, то сила f_5 будет расти. Делая правдоподобное допущение, что она не может быть бесконечной [3], приходим к выводу, что в случае очень большого числа спичек сила f_n с ростом n растёт, не превосходя некоторого значения f_∞. Отсюда для больших n $f_n \approx f_{n-1}$, и $f_n \approx F + q \cdot f_n$. При достаточно большом n получим сколь угодно точное равенство

$$f_n = f_\infty = F / (q-1) ,$$

которое известно как сумма бесконечной геометрической прогрессии с q<1.

В частном случае q = 1/2 легко догадаться, что

$$1/2 + (\text{оставшаяся } 1/2)/2 + (\text{оставшаяся } 1/4)/2 + (\text{оставшаяся } 1/8)/2 + \ldots = 1$$

Тогда $f_\infty = 2F$.

---

[2] Подробнее см. работу, посвящённую эху от пирамиды в Чичен-Ица: N.F.Declercq at al, J. Acoust. Soc. Am. **116** (6) p.3328, доступную по ссылке: http://declercq.gatech.edu/papers/NFD-J-16.pdf

[3] Если все спички будут давить друг на друга вблизи концов, опёртых на стол, то каждая спичка оказывает на последующую только силу F. Значит, если q=0, то f_∞ = F. В другом предельном случае, когда спички давят друг на друга в одной точке (сложены в штабель), $f_n = nF$ и f_∞ бесконечно велика (q=1). Сила f_n , а значит, и f_∞ растут с ростом q . Значит, при $0 \le q < 1$ сила f_∞ не принимает бесконечных значений.