

**2013/14. 9 класс. Серия 2. Верю-не-верю.**

1. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ ,  $AO = BO$ ,  $BC = CD$ ,  $AC = OD$ . Найдите угол  $BAC$ .
2. В стране Графландии 2000 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Для каждого из городов посчитали количество выходящих из него дорог. Оказалось, что среди полученных чисел ровно два одинаковых. Чему они могут быть равны?
3. Точки  $X$  и  $Y$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $I$  – центр его вписанной окружности,  $K$  – точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ . Биссектриса внешнего угла при вершине  $B$  пересекает прямую  $XU$  в точке  $P$ , а биссектриса внешнего угла при вершине  $C$  пересекает  $XU$  в точке  $Q$ . Докажите, что площадь четырехугольника  $PKQI$  равна половине площади исходного треугольника.
4. Барон Мюнхгаузен хвастается, что знает замечательный квадратный трехчлен с положительными коэффициентами: он сам имеет целый корень; если ко всем его коэффициентам прибавить по единице, то полученный трехчлен снова будет иметь целый корень; если второй раз прибавить ко всем коэффициентам по единице, то и этот трехчлен будет иметь целый корень. Верите ли вы барону?
5.  $F(x) = x^{2008} - x^{1004} + 1$ . Существуют ли такие различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ , что  $F(a_i)F(a_j)$  делится на  $a_i a_j$  при всех  $i \neq j$ ?
6. Какое наименьшее значение принимает выражение  $\frac{x^6 + y^6 + z^6}{x^3 y^2 z}$  при  $x, y, z > 0$ .