

Теоретичний тур

8 клас

Задача №1.

На вхід системи опалювання будинку подається вода температурою $T_{\text{вх}}=75^{\circ}\text{C}$ із швидкістю $V=15$ л/хв., а на виході вода має температуру $T_{\text{вих}}=55^{\circ}\text{C}$. При такому обігріванні, якщо на вулиці була температура $T_0=10^{\circ}\text{C}$, температура повітря всередині будинку складала $T_1=18^{\circ}\text{C}$. Після обклеювання вікон будинку термоплівкою температура всередині зросла до $T_2=24^{\circ}\text{C}$. Оцініть щосекундну економію кількості теплоти при незмінних умовах теплообміну, а також щомісячну економію коштів, якщо б для отримання потрібної температури доводилося б використовувати електрообігрівач за тарифу $p=0,76$ грн./ (кВт·год). Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг $^{\circ}\text{C}$), густина води 1000 кг/м³.

Розв'язування:

Розглянемо випадок опалення неутепленого будинку. Кількість теплоти яку отримує будинок рівно кількості теплоти яку будинок віддає у навколишнє середовище. Згідно закону Ньютона потужність теплових втрат прямо пропорційна різниці температур тіл і навколишнього середовища. Баланс теплових потужностей має вигляд

$$P_B = \alpha(T_1 - T_0), \quad (1)$$

де P_B – теплова потужність батареї; α – коефіцієнт, що характеризує умови теплообміну між будинком і навколишнім середовищем.

Теплова потужність батареї в будинку:

$$P_B = c\rho V(T_{\text{вх}} - T_{\text{вих}}) \quad (2)$$

де c – питома теплоємність води; ρ – густина води.

Після застосування термоплівки частина теплової потужності P , що раніше розсіювалася будинком у навколишнє середовище, тепер «повертається» всередину будинку і тим самим підсилює потужність батареї. Рівняння балансу має вигляд:

$$P + P_B = \alpha(T_2 - T_0). \quad (3)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) – (3), отримаємо вираз для зекономленої теплової потужності

$$P = \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} - 1 \right) c\rho V(T_{\text{вх}} - T_{\text{вих}}) = \left(\frac{24 - (-10)}{18 - (-10)} - 1 \right) \cdot 4200 \cdot 10^3 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} (75 - 55) = 4,5 \text{ кВт}.$$

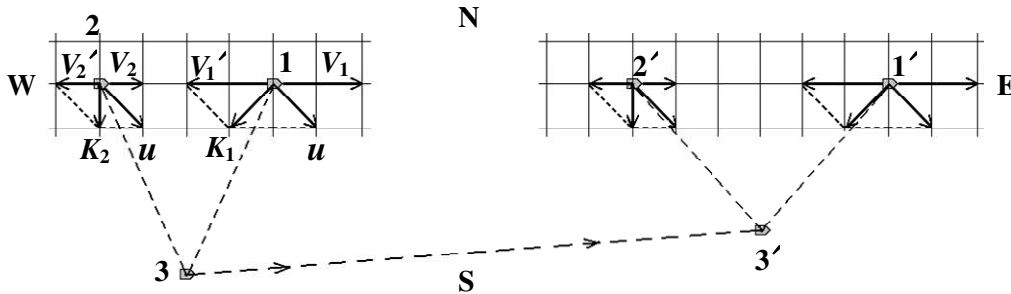
Місячна економія коштів становить:

$$S = pPt = 0,76 \cdot 4,5 \cdot 30 \cdot 24 = 2462,4 \text{ грн}.$$

Задача 2.

Два пароплави рухаються в одному напрямку на схід, один слідом за іншим. Через вітер, що дме строго у південно-східному напрямі, дим із труби першого пароплава, швидкість якого $V_1=40$ км/год, направлений на південний захід, а від другого - прямо на південь. Третій пароплав пливе неподалік зі швидкістю $V_3=34$ км/год, таким чином, що відстань від нього до першого пароплава зберігається сталою і рівною відстані від нього ж до другого. Визначить швидкість третього пароплава відносно першого.

Розв'язок. Якщо перший та другий пароплав рухаються на схід, зі швидкостями V_1 та V_2 , то з урахуванням вітру (під кутом 45°) дим рухається для першого пароплаву на південний захід і на південь - для другого. (В умові задачі відбулась технічна помилка: замість «вітер строго у північно-східному напрямку» правильно було б «у південно-східному»). З трикутника швидкостей знаходимо швидкість вітру $u=28,28$ км/год, результуючий напрямок віднесення диму 1-го пароплава (напрямок зустрічного вітру пароплавів позначено векторами зі штрихами – V_1' та V_2' , напрям диму позначено K_1 та K_2 ,) буде на південний захід. Дим другого зноситиметься на південь (K_2) при його власній швидкості $V_2=20$ км/год.



Далі визначимо напрямок швидкості третього пароплаву.

З рисунка очевидно, що горизонтальна (Західно-Східна) складова цієї швидкості буде середнім арифметичним між швидкостями V_1 і V_2 : $V_{3\text{гор}}=(V_1+V_2)/2=30$ км/год, а вертикальну складову можна визначити із заданого модуля швидкості V_3 : $V_{3\text{верт}}^2=(V_3)^2-(V_{3\text{гор}})^2$, $V_{3\text{верт}}=16$ км/год.

Швидкість 3-го пароплава відносно 1-го визначається як $V_{\text{відн}}^2=(V_1-V_{3\text{гор}})^2+(V_{3\text{верт}})^2$, $V_{\text{відн}} \approx 18,87$ км/год.

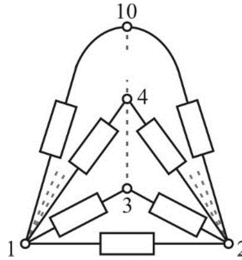
8 клас теортур.

№3

Припустимо, що учень з'єднав усі пари клем одну з одною (приєднав усі $10 \cdot 9/2 = 45$ резисторів). Визначимо опір такого кола між двома клемми 1 і 2. Тоді всі резистори можна розділити на групи:

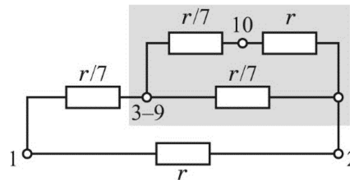
- Перша група — один резистор з'єднує клемми 1 і 2.
- Друга група — 16 резисторів з'єднують клемми 1 і 2 з рештою клем.
- Третя група — 28 резисторів ($8 \cdot 7/2 = 28$) з'єднують решту 8 клем одну з одною.

На рисунку показано лише перший резистор і частину резисторів другої групи. Резистори ж третьої групи з'єднують клемми 3, 4, ..., 8 — середини ділянок з двох резисторів, приєднаних між клемми 1 і 2. Отже, напруга між цими клемми дорівнює нулю. Тому по резисторах третьої групи струм не тече. Еквівалентна схема у цьому випадку містить 9 паралельних ділянок: одну опором r і 8 — опором $2r$. Отже, загальний опір кола $R_0 = r/5 = 9$ Ом.



Подивимося тепер, як змінюється опір через відсутність *одного* з резисторів.

- Якщо це резистор третьої групи, то опір взагалі не зміниться..
- Якщо відсутній резистор між клемми 1 і 2, то опір кола становить $r/4 = 11,25$ Ом. Збільшення опорів є таким, що буде помічено майстром Розглянемо окремо випадок, коли відсутній резистор другої групи. Оскільки всі ці резистори відіграють однакову роль у колі, видалимо резистор між клемми 1 і 10. Сила струму в резисторах, що з'єднують одну з одною клемми 3 — 9, залишається рівною нулю. А от у резисторах третьої групи, що з'єднують клему 10 з клемми 3 — 9, з'явиться струм. Відповідно зміниться еквівалентна схема кола. Сім клем (від третьої по дев'яту) можна подумки об'єднати та розглядати як один вузол кола (3–9). Між цим вузлом і клемою 1 — сім паралельно з'єднаних однакових резисторів, які можна замінити одним з опором $r/7$. Аналогічна ситуація з опором між вузлом 3–9 і клемою 2, а також з опором між вузлом 3–9 і клемою 10 (див. рисунок).



Опір ділянки кола, яку виділено на рисунку сірим кольором, дорівнює $8r/63$. Опір цієї ділянки з послідовно приєднаним резистором $r/7$ дорівнює $17r/63$. Отже, загальний опір кола в цьому випадку становить $17r/80$, тобто приблизно 9,56 Ом. Таку зміну опорів майстер помітить.

Отже, якщо буде видалено навіть один з резисторів першої або другої групи, зміна опорів перевищить 0,2 Ом. Подальше видалення резисторів може тільки збільшувати опір кола. Тому шукана максимальна кількість — 28 резисторів.

Задача 4

Треугольник, вырезанный из однородного оргстекла, при первом взвешивании подвесили за две вершины (рис.1а), а при втором взвешивании – за три вершины (рис.1б). В первом случае левый динамометр показал силу 9 Н, а правый – 12 Н. Чему равны показания каждого из трех динамометров при втором взвешивании?

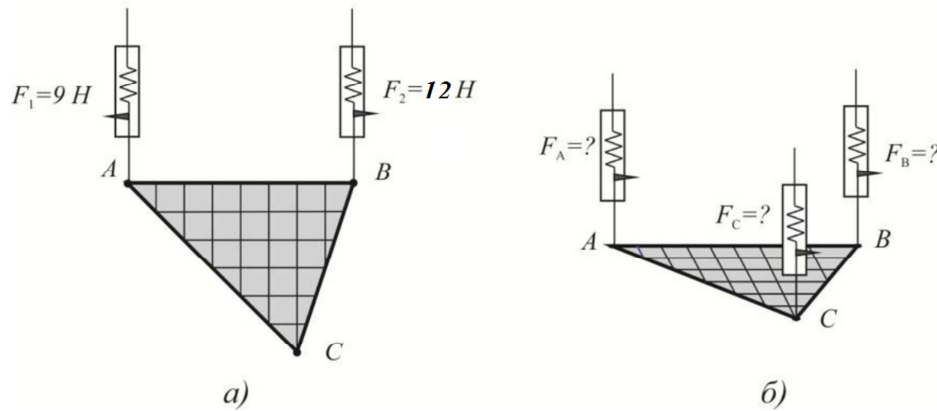


Рис. 1.

Решение.

1) По результатам первого взвешивания находим вес треугольника, он равен – $P = mg = F_1 + F_2 = 21 \text{ Н}$.

2) Если все три динамометра прикреплены к вершинам треугольника, то их показания будут одинаковы (доказательство смотри ниже) и равны $F_A = F_B = F_C = \frac{1}{3} \cdot (F_1 + F_2) = 7 \text{ Н}$.

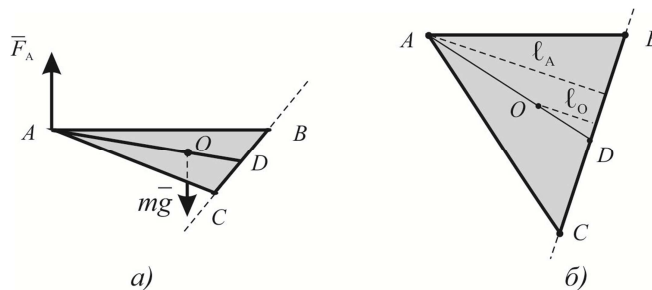


Рис. 2.

Доказательство. Рассмотрим треугольник массы m , подвешенный за три вершины (рис. 2, а). Чтобы найти показания динамометра, прикрепленного к вершине А (силу F_A) проведем мысленно через две другие вершины ось BC . Относительно этой оси треугольник вращают две силы: сила F_A , приложенная к вершине А, и сила тяжести mg , приложенная к центру масс треугольника. Как известно, центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, а сами медианы делятся этой точкой на части в отношении 1: 2. Поэтому $AO = 3OD$ и $\ell_A = 3\ell_O$ (рис. 2, б). Учитывая этот факт из второго условия равновесия (условия моментов)

$$F_A \ell_A = mg \ell_O,$$

получаем $F_A = mg \cdot \ell_O / \ell_A = \frac{mg}{3}$, чтд.

Ответ: во втором взвешивании показания всех динамометров одинаковы и составляют 1/3 веса треугольника, т.е. 7 Н.

8 клас теортур № 5. На початку березня 2017 р. німецький кінооператор опублікував на YouTube ролик, на якому гвинтокрил злітає з майже нерухомим гвинтом. За 3 дні ролик переглянули більше мільйона разів. Після цього автор пояснив, що знімав відео на мобільний телефон з частотою 30 кадрів на секунду. Оцініть, якою насправді могла бути частота обертів гвинта. Визначте, у скільки разів швидкість підйому гвинтокрила менша за швидкість руху кінчиків гвинта. Врахуйте, що швидкості будь-яких частин гвинтокрила не перевищують швидкості звуку (340 м/с). Для відповіді на питання можна скористатися вимірювальною лінійкою і кадрами підйому гвинтокрила. Кадри наведені з інтервалом у 2 с. При перегляді відео гвинт за 6 с дійсно ледь повертається (приблизно на кут 30°).



Розв’язання. За умовою зйомка велася з частотою 30 кадрів на секунду. Гвинт має 5 лопатей, які утворюють між собою кути по $360^\circ/5=72^\circ$. Для того, щоб гвинт здавався нерухомим, необхідно, щоб за час $1/30$ с гвинт повернувся на кут 72° , або $2 \cdot 72^\circ$, або $3 \cdot 72^\circ \dots$ У загальному випадку $n \cdot 72^\circ$, де n – натуральне число. Це відповідає $n/5$ обертів за $1/30$ с, або $6n$ обертів за секунду. Тобто, найменша ($n = 1$) частота обертання гвинта – це 6 обертів за секунду або 360 за хвилину. Наступне можливе значення ($n = 2$) – це 12 обертів за секунду або 720 за хвилину. Визначимо для яких n швидкість кінчика гвинта не перевищує швидкості звуку. Для цього необхідно оцінити довжину лопаті. Її можна порівняти з висотою кабіни гвинтокрила, вздовж якої видно декілька прямокутних ілюмінаторів. Отже, цей гвинтокрил не з самих маленьких для однієї-двох осіб. Його висоту від дна до кріплення гвинта можна оцінити у 3-4 метри. На збільшеному кадрі №1 ми бачимо, що довжина лопаті щонайменше у 2 рази перевищує висоту (див. рис. 1). Візьмемо довжину лопаті $R = 7$ м. Тоді швидкість кінчика лопаті
$$v = \frac{6n \cdot 2\pi R}{1 \text{ с}} \approx 264n \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$
 Як

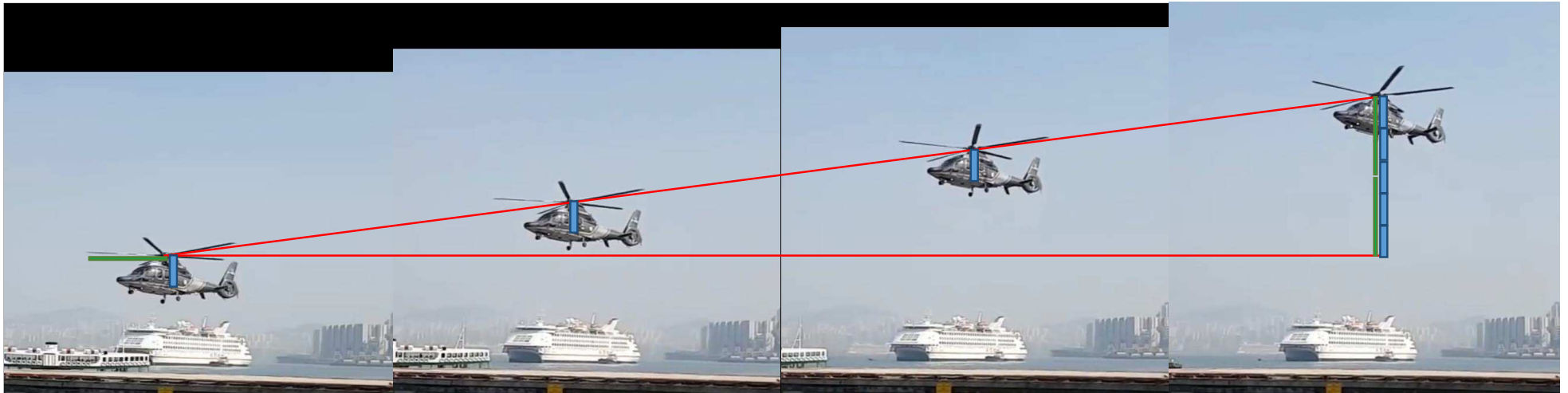
бачимо, підходить тільки $n = 1$. Швидкість кінчика лопаті $v \approx 264 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Вже для $n = 2$ швидкість кінчика лопаті більш ніж у 1,5 рази перевищить швидкість звуку, що призведе до небажаних ефектів.



Рис. 1

Оцінимо тепер швидкість підйому. Згідно з наведеними кадрами (див. рис. 2), гвинтокрил рівномірно піднімається вгору і за $t=6$ с проходить приблизно 5 своїх висот. Але краще і точніше порівняти висоту підйому гвинтокрила безпосередньо з довжиною його лопаті. Як видно з рис. 2 (вузькі прямокутники), за 6 с підйому у висоту підйому вміщується приблизно дві лопаті: $h = 2R$. Отже, швидкість гвинтокрила $u = \frac{h}{t} = \frac{2R}{t}$, а швидкість кінчика лопаті $v = \frac{6 \cdot 2\pi R}{1 \text{ с}}$. Їх відношення $\frac{v}{u} = 36\pi \approx 113$.

Зазначимо, що відповіді на поставлені питання (частота обертів гвинта 360 об/хв і відношення швидкостей $\frac{v}{u} = 36\pi \approx 113$) не залежать від того, з якою точністю ми оцінили висоту кабіни. Оцінка знадобилась тільки для того, щоб обмежити кількість відповідей.



При бажанні, отримані результати можна трохи уточнити, якщо врахувати додатковий кут 30° за 6 с, тобто $1^\circ/6$ за $1/30$ с. Тоді в залежності від напрямку обертання гвинта можливі два кути повороту за $1/30$ с. Це $(72-1/6)^\circ$ і $(72+1/6)^\circ$. Відносна похибка, якої ми припустилися, взявши кут 72° , всього 0,23%. Це значно менше, ніж інші наші похибки, пов'язані з вимірюваннями і особливостями зйомки.