Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ГЕОМЕТРИЯ-8

Материалы к урокам по теме:

“Векторы на плоскости (афинные задачи)”

Харьков, 2013 г.

Поурочное планирование (23 часа)

Урок 1. Понятие вектора. Длина вектора. Коллинеарные вектора. Сонаправленные и противоположно направленные векторы. Равенство векторов.

Урок 2. Сумма двух векторов. Правило треугольника. Формула "прокола" точкой. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов. Сумма нескольких векторов. Правило многоугольника.

Урок 3. Вычитание векторов. Решение задач на сложение и вычитание векторов.

Урок 4. Умножение вектора на число и его свойства. Единичные векторы. Лемма о коллинеарных векторах. Лемма о неколлинеарных векторах.

Урок 5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Координаты суммы и разности векторов. Координаты произведения вектора на число. Критерий коллинеарности векторов в координатах.

Урок 6. Составляющие вектора. Неравенство треугольника.

Урок 7. Понятие линейного пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Размерность пространства. Базис. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в данном базисе.

Урок 8. *Самостоятельная работа* по теме: "Действия над векторами. Разложение вектора по базису".

Урок 9. Деление отрезка в данном отношении.

Урок 10. Радиус-вектор точки.

Урок 11. Упражнения на разложение векторов по базису.

Урок 12. Применение векторов к доказательству некоторых теорем планиметрии.

Урок 13. Решение задач с помощью векторов

Урок 14. *Самостоятельная работа* по теме: "Деление отрезка в данном отношении".

Урок 15. Радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника. Радиус-вектор точки пересечения биссектрис треугольника.

Урок 16. Нахождение точек пересечения прямых с помощью метода неопределенных коэффициентов. Радиус-вектор точки пересечения двух чевиан треугольника. Радиус-вектор ортоцентра треугольника.

Урок 17. Теорема Чевы в векторной форме.

Урок 18. Теорема Менелая в векторной форме.

Урок 19. Формула Гамильтона. Прямая Эйлера.

Урок 20. *Самостоятельная работа* по теме: "Применение векторов к решению планиметрических задач".

Урок 21. Обобщающее занятие по теме.

Урок 22. Контрольная работа.

Урок 23. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Понятие вектора. Равенство векторов

1°. Понятие вектора

1) Что такое отрезок AB? Это фигура, содержащая т. т. A, B и все точки прямой AB, лежащие между ними. Точки A и B называют **граничными точками** отрезка. Они полностью равноправны, т. е. отрезки AB и BA представляют собой один и тот же геометрический объект.

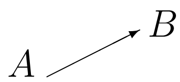
2) А что такое направленный отрезок?

Определение.

> ***Направленным отрезком (вектором)*** *называется отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом. Любая точка плоскости также считается вектором, который называется нулевым.*

3) **Обозначения:**

- На чертежах вектор обычно изображают отрезком со стрелкой:



- Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$. Разумеется, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – это разные векторы.
- Иногда векторы обозначают маленькими латинскими буквами: $\overrightarrow{a}$ или $\bar{b}$.
- Нулевой вектор обозначают $\overrightarrow{0}$, $\bar{0}$ или просто 0.

4) Важную роль в дальнейшем будет играть понятие длины вектора.

Определение.

> ***Длиной (модулем) вектора*** $\overrightarrow{AB}$ *называется длина отрезка AB. Длину нулевого вектора полагают равной нулю.*

Длину вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\overrightarrow{a}|$. Иногда (если это не может вызвать недоразумения) длину вектора $\overrightarrow{a}$ обозначают просто a.

2°. Равенство векторов

1) В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим определением:

Определение.

> *Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.*

Обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

2) **Упражнение.** Дана трапеция $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке P. Укажите пары коллинеарных векторов, концы которых находятся в вершинах трапеции или в точке P.

3) Геометрически очевидно, что два коллинеарных вектора направлены либо одинаково, либо противоположно. Дадим строгое определение:

Определение.

> *Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются **сонаправленными (противоположно направленными)**, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через их начала.*
> *Два ненулевых вектора, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если один из соответствующих лучей содержит другой, и **противоположно направленными** в противном случае.*

Если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, то пишут $\overrightarrow{a} \upuparrows \overrightarrow{b}$. Если же векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ противоположно направлены, то пишут $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$.

4) Теперь мы можем дать определение равных векторов:

Определение.

> *Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.*

Замечание. В этом определении слово “коллинеарны”, конечно, излишне.

5) Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одинаковыми буквами. Фактически, символом $\overrightarrow{a}$ обозначают не один направленный отрезок, а множество (класс) всех векторов, равных какому-то конкретному направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$. В этом случае говорят о т. н. “свободных” векторах.

Домашнее задание

1) Точки S и T являются серединами боковых сторон MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы:

   а) $\overrightarrow{NL}$ и $\overrightarrow{KL}$; б) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

2) Определите вид четырехугольника $ABCD$, если:

   а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$;

   б) $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{DC}$, а векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны.

Урок 2. Сложение векторов

1) Определим операцию сложения двух векторов:

Определение.

> *Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – два вектора. Возьмем произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$. Затем от точки B и отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется* ***суммой*** *векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:*
>
> $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

Описанный алгоритм часто называют “**правилом треугольника**”.

2) В определении суммы двух векторов фигурирует произвольная точка A. Поэтому надо проверить корректность определения. Другими словами, надо доказать, что сумма $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ не зависит от выбора точки A.

3) Из правила треугольника сразу следует, что если A, B, C – произвольные точки, то
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{2.1}$$
Эту формулу обычно называют “**формулой прокола точкой**”.

4) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – два неколлинеарных вектора. Тогда, для того, чтобы найти сумму $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, можно отложить от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ и построить на этих векторах параллелограмм $OACB$. Очевидно, что тогда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Этот алгоритм называют “**правилом параллелограмма**”.

5) **Свойства сложения векторов.**

   (1) Коммутативность: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

(2) Ассоциативность: $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$;

(3) Существование нейтрального элемента: $\exists\, \overrightarrow{0} : \forall\, \overrightarrow{a}\ \ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;

(4) Существование противоположного элемента: $\forall\, \overrightarrow{a}\ \exists\, (-\overrightarrow{a}) : \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$.

Т. о., множество векторов представляет собой абелеву группу по сложению.

6) **Упражнение.** Длины двух ненулевых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ заданы. Как следует направить эти векторы, чтобы длина вектора $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ была:

   а) наименьшей; б) наибольшей ?

7) Поскольку сложение векторов ассоциативно, то можно складывать три и более векторов.

Определение.

> ***Суммой нескольких векторов*** *называется вектор, полученный в результате последовательного прибавления каждого следующего вектора к сумме предыдущих.*

8) Геометрически складывать нескольких векторов можно с помощью т. н. **правила многоугольника**: если A_1, A_1, …, A_n – произвольные точки, то $\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ (фактически это обобщение формулы (2.1) “прокола точкой”).

9) Отметим один интересный факт: если сумма нескольких векторов равна 0, то существует многоугольник, стороны которого соответственно параллельны этим векторам и равны длинам этих векторов.

Домашнее задание

1) Дан четырехугольник $ABCD$, O – произвольная точка плоскости. Известно, что $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

2) Дан параллелограмм $ABCD$, M – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$.

3) Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите:

   а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$.

4) В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$. Найдите:

   а) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

5) Пусть $|\overrightarrow{a}| = 8$, $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 2$. В каких пределах может изменяться $|\overrightarrow{b}|$?

Урок 3. Вычитание векторов. Решение задач на сложение и вычитание векторов

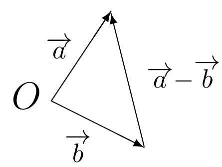
1°. Вычитание векторов

1) На предыдущем уроке мы доказали, что множество векторов на плоскости представляет собой абелеву группу по сложению, причем роль нейтрального элемента играет нулевой вектор, а вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$, – это вектор $\overrightarrow{BA}$. Теперь мы можем естественным образом определить операцию вычитания векторов:

$$\boxed{\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right).}$$

2) Геометрически операцию вычитания векторов обычно выполняют так:

Для того, чтобы получить разность двух векторов, надо отложить их от одной точки и провести вектор от конца вычитаемого к концу уменьшаемого.



3) Чрезвычайно полезны формулы “прокола точкой”, легко получаемые из формулы (2.1):

- Пусть O – произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- Пусть C – произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

2°. Решение задач на сложение и вычитание векторов

1) Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. Выразите через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ векторы

   а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

2) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом т. и т. т., когда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.

3) На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABDF$, $ACMN$, $BCPQ$. Докажите, что $\overrightarrow{FN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QD} = 0$.

4) Пусть O – центр правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, а X – произвольная точка плоскости. Докажите, что:

   а) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = 0$;

   б) $\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n} = n \cdot \overrightarrow{XO}$.

Домашнее задание

1) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

2) Упростите выражения:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD}$; б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}\right)$.

3) Пусть X, Y и Z – произвольные точки. Докажите, что векторы
$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{YZ},\ \overrightarrow{q} = \left(\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ}\right) + \overrightarrow{YZ},\ \overrightarrow{r} = \left(\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XY}\right) - \overrightarrow{ZX}$$
– нулевые.

4) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите через векторы $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AD}$ следующие векторы:
а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$.

5) Даны точки A и B. Найдите геометрическое место таких точек X, что
$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{BX}|.$$

6) Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$, то $ABCD$ – прямоугольник.

Урок 4. Умножение вектора на число и его свойства. Леммы о коллинеарных и неколлинеарных векторах

1°. Умножение вектора на число и его свойства

1) Мы уже умеем складывать и вычитать векторы. Введем еще одну операцию над векторами:

Определение.

> ***Произведением вектора*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a}}$ ***на число*** $\boldsymbol{\alpha}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{b}$*, что:*
> (1) $\overrightarrow{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$ *при* $\alpha > 0$ *и* $\overrightarrow{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{a}$ *при* $\alpha < 0$;
> (2) $\left|\overrightarrow{b}\right| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{a}|$.

Обозначение: $\overrightarrow{b} = \alpha \cdot \overrightarrow{a}$ или просто $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$.

Очевидно, что $0 \cdot \overrightarrow{a} = \alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ для $\forall\,\overrightarrow{a}$ и $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$.

2) **Свойства умножения вектора на число**

(1) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;

(2) $\alpha\left(\beta\overrightarrow{a}\right) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$.

3) **Распределительные (дистрибутивные) законы**

(1) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$;

(2) $\alpha\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$.

4) В будущем нам часто придется иметь дело с векторами, длина которых равна единице. Такие векторы называют **единичными**. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{e} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ является единичным.

С единичными векторами связано следующее полезное утверждение:

Теорема 4.1.

Пусть $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, причем $\overrightarrow{a}$ неколлинеарен вектору $\overrightarrow{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{c} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} + \dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$ направлен по биссектрисе угла AOB.

2°. Леммы о коллинеарных и неколлинеарных векторах

1) Сформулируем и докажем часто использующийся при решении задач признак коллинеарности двух векторов:

Теорема 4.2 (лемма о коллинеарных векторах)**.**

Для того, чтобы вектор $\overrightarrow{b}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\overrightarrow{a}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, что $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$.

Доказательство теоремы: Достаточность утверждения сразу следует из определения умножения вектора на число. Докажем необходимость. Пусть $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$. Определим число k следующим образом:

$$k = \begin{cases} \dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}, & \text{если } \overrightarrow{a} \upuparrows \overrightarrow{b}; \\ -\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}, & \text{если } \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\overrightarrow{b} \upuparrows k\overrightarrow{a}$ и $|\overrightarrow{b}| = |k\overrightarrow{a}|$, т. е. $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$.

■

2) В качестве следствия из леммы о коллинеарных векторах легко получить следующее важное утверждение:

Теорема 4.3 (лемма о неколлинеарных векторах).

Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – неколлинеарные векторы. Тогда, если $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=0$, то $x=y=0$.

Доказательство теоремы: Пусть, напр., $x\neq 0$. Тогда $\overrightarrow{a}=-\dfrac{y}{x}\overrightarrow{b}$, откуда в силу леммы о коллинеарных векторах сразу следует, что $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$.

■

3) **Упражнение.** Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – неколлинеарные векторы. При каких m векторы $\overrightarrow{c}=(m-2)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}=(2m+1)\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ будут коллинеарными?

Домашнее задание

1) На отрезке AB длиной 18 см взяли точку C так, что $BC=6$ см. Выразите
   а) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
   б) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$;
   в) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.
2) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите
   а) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
   б) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$;
   в) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.
3) В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка M так, что $AM:MC=1:3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$.
4) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN=2NC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$.
5) Дан неразвернутый угол AOB. Пусть $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{m}=\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}-\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$ и $\overrightarrow{n}=\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}-\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ направлены по биссектрисам углов, смежных с данным.
6) Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, M – середина стороны EF. Найдите векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BM}$, если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$.
7) Векторы $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ неколлинеарны. При каких значениях x векторы $\overrightarrow{a}=x\overrightarrow{m}-7\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{b}=8\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{n}$ будут коллинеарными?

Урок 5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Критерий коллинеарности векторов в координатах

1°. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

1) Введем следующее определение:

Определение.

> ***Линейной комбинацией векторов*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a_1}}$***,*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a_2}}$***, ... ,*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a_n}}$ *называется выражение вида* $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{a_n}$*, где* $x_k \in \mathbb{R}$.

2) Познакомимся с еще одним термином:

Определение.

> *Если вектор* $\overrightarrow{a}$ *представлен в виде линейной комбинации векторов* $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{a_n}$*, то говорят, что* ***вектор*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a}}$ ***разложен по векторам*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a_1}}$***,*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a_2}}$***, ... ,*** $\boldsymbol{\overrightarrow{a_n}}$.

3) Имеет место следующая теорема:

Теорема 5.1 (о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам)**.**

Любой вектор $\overrightarrow{c}$ *на плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$*:*

$$\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}, \tag{5.1}$$

причем коэффициенты разложения x *и* y *определяются однозначно.*

Доказательство теоремы:

а) Существование. Отложим векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ от некоторой точки O. Пусть $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$. Проведем через точку C прямые, параллельные прямым, содержащим векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Обозначим точки пересечения A и B. Тогда $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Но по лемме о коллинеарных векторах $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{b}$. Следовательно, $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$.

б) Единственность. Пусть $\overrightarrow{c} = x_1\overrightarrow{a} + y_1\overrightarrow{b} = x_2\overrightarrow{a} + y_2\overrightarrow{b}$. Тогда

$$(x_1 - x_2)\overrightarrow{a} + (y_1 - y_2)\overrightarrow{b} = 0.$$

По лемме о неколлинеарных векторах отсюда сразу же получаем, что $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$.

■

4) Введем еще одно новое понятие:

*Говорят, что два неколлинеарных вектора на плоскости образуют **базис**. Поэтому разложение (5.1) называют **разложением вектора $\overrightarrow{c}$ по базису $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$**, а пару чисел (x, y) – **координатами вектора $\overrightarrow{c}$ в базисе $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$**.*

Замечание. С точным значением термина “базис” мы познакомимся через несколько уроков.

5) Если понятно, о каком базисе идет речь, то часто вместо разложения (5.1) пишут просто $\overrightarrow{c}(x, y)$. Конечно, если взять другой базис, то координаты вектора изменятся. Единственный вектор, который не меняет своих координат при переходе к другому базису – это нулевой вектор: в любом базисе он имеет координаты $(0, 0)$.

6) Далее мы постоянно будем пользоваться следующими очевидными утверждениями.

Утверждение.

(1) Пусть векторы $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ имеют в некотором базисе координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ соответственно. Тогда вектор $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$ имеет в этом базисе координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
(2) Пусть вектор $\overrightarrow{r}$ имеет в некотором базисе координаты $(x; y)$, α – произвольное действительное число. Тогда вектор $\alpha\overrightarrow{r}$ имеет в этом базисе координаты $(\alpha x, \alpha y)$.

Следствие.

Противоположные векторы имеют противоположные координаты и, обратно, если два вектора имеют противоположные координаты, то они противоположны.

2°. Критерий коллинеарности векторов в координатах

1) Мы уже умеем проверять, коллинеарны векторы или нет, пользуясь леммой о коллинеарных векторах. Познакомимся с еще одним методом. Начнем со следующего определения:

Определение.

Пусть в некотором базисе векторы $\overrightarrow{p} \neq 0$ и $\overrightarrow{q}$ имеют координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ соответственно. Будем говорить, что ***координаты векторов $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ пропорциональны****, если существует такое число t, что*

$$\begin{cases} x_2 = t\,x_1; \\ y_2 = t\,y_1. \end{cases}$$

Координаты нулевого вектора будем считать пропорциональными координатам любого вектора.

Замечание. Если координаты вектора $\overrightarrow{p}$ не равны 0, то условие пропорциональности векторов $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ можно записать в виде $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1}$.

2) Теперь мы можем сформулировать критерий коллинеарности векторов:

Теорема 5.2 (критерий коллинеарности векторов в координатах)**.**

Векторы $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$, заданные своими координатами в некотором базисе, коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

3) **Упражнения.**

(1) Векторы $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ неколлинеарны. При каких значениях x векторы $\overrightarrow{a} = 15\,\overrightarrow{m} + x\,\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{b} = x\,\overrightarrow{m} + 5\,\overrightarrow{n}$ будут коллинеарными?

(2) Пусть в некотором базисе даны векторы $\overrightarrow{a}(-3; 1)$, $\overrightarrow{b}(4; -3)$, $\overrightarrow{c}(0; -5)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ образуют базис и найдите координаты вектора $\overrightarrow{c}$ в этом базисе.

Домашнее задание

1) Даны векторы $\overrightarrow{a}\,(1; -2)$ и $\overrightarrow{b}\,(-3; -1)$. Каковы координаты векторов:

а) $2\overrightarrow{a}$; б) $-3\,\overrightarrow{b}$; в) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$; г) $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$; д) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$?

2) Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если:

а) $\overrightarrow{a}\,(-2; 1)$, $\overrightarrow{b}\,(4; -2)$; б) $\overrightarrow{a}\,(1; -3)$, $\overrightarrow{b}\,(1; 3)$;

в) $\overrightarrow{a}\,(3; -2)$, $\overrightarrow{b}\,(-3; 2)$; г) $\overrightarrow{a}\,(0; -1)$, $\overrightarrow{b}\,(1; 0)$;

д) $\overrightarrow{a}\,(1; 0)$, $\overrightarrow{b}\,(3; 0)$?

3) Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны. Каковы их недостающие координаты:

а) $\overrightarrow{a}\,(1; -2)$, $\overrightarrow{b}\,(3; \ldots)$; б) $\overrightarrow{a}\,(-2; \ldots)$, $\overrightarrow{b} = (\ldots; -2)$;

в) $\overrightarrow{a}\,(-1; \ldots)$, $\overrightarrow{b} = (2; \ldots)$?

4) Даны векторы $\overrightarrow{a}\,(1;2)$, $\overrightarrow{b}\,(-2;-1)$ и $\overrightarrow{c}=(-4;4)$. Запишите каждый из них как линейную комбинацию двух других.

5) Даны векторы $\overrightarrow{a}\,(7;2)$, $\overrightarrow{b}\,(4;1)$ и $\overrightarrow{c}\,(1;3)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ образуют базис и найдите координаты вектора $2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ в базисе $\{\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}\}$.

6) Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ неколлинеарны. При каких значениях x векторы $\overrightarrow{c}=(x+5)\overrightarrow{a}+(x+2)\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}=(2x-5)\overrightarrow{a}-(2x+2)\overrightarrow{b}$ будут коллинеарными?

Урок 6. Составляющие вектора. Неравенство треугольника

1°. Составляющие вектора

1) В физике о разложении векторов по двум неколлинеарным векторам часто говорят, используя другую терминологию. Познакомимся с ней.

Определение.

> *Пусть $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. Тогда говорят, что* ***вектор $\overrightarrow{c}$ разложен на составляющие $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$****.*

2) Теперь можно переформулировать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам:

Теорема 6.1.

Пусть заданы две пересекающиеся прямые. Любой вектор $\overrightarrow{c}$ можно разложить на составляющие, лежащие на этих прямых.

Замечание. Если вектор $\overrightarrow{c}$ направлен вдоль одной из упомянутых прямых, то его составляющая по этой прямой – сам вектор $\overrightarrow{c}$.

3) **Упражнения.**

(1) а) Может ли длина одной из двух составляющих вектора быть больше длины самого вектора?

б) Может ли длина обеих составляющих вектора быть больше длины самого вектора?

(2) Даны два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ с общим началом.

а) Пусть $\overrightarrow{b}$ – составляющая вектора $\overrightarrow{a}$. Нарисуйте вторую составляющую $\overrightarrow{c}$ вектора $\overrightarrow{a}$.

б) Пусть $\overrightarrow{a}$ – составляющая вектора $\overrightarrow{b}$. Нарисуйте вторую составляющую $\overrightarrow{d}$ вектора $\overrightarrow{b}$.

Как связаны между собой векторы $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{d}$?

2°. Неравенство треугольника

1) В седьмом классе мы познакомились с *неравенством треугольника:* каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон:

$$|a - b| < c < a + b.$$

Вспоминая определение суммы и разности векторов, приходим к следующему неравенству, тоже называемому “неравенством треугольника”:

Теорема 6.2 (Неравенство треугольника)**.**

Для произвольных векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ справедливо неравенство

$$\big||\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|\big| \leqslant \big|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\big| \leqslant |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|, \tag{6.1}$$

причем в первом неравенстве равенство достигается т. и т. т., когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ противоположно направлены, а во втором – т. и т. т., когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены.

2) Из теоремы 6.2 сразу следует еще один критерий коллинеарности векторов:

Теорема 6.3.

Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда в одном из неравенств (6.1) *достигается равенство.*

3) **Упражнения.**

(1) Пусть $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 2$. В каких пределах может изменяться $|\overrightarrow{c}|$, если $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$.

(2) Пусть $|3\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}| = 13$, $|7\overrightarrow{a} - 12\overrightarrow{b}| = 7$. Оцените величины:
а) $|\overrightarrow{a}|$; б) $|\overrightarrow{b}|$; в) $|\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|$; г) $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$.

Домашнее задание

1) На плоскости задана декартова система координат XOY и произвольная точка A.

а) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$ и его составляющие вдоль осей OX и OY;

б) При каком положении точки A составляющие вектора $\overrightarrow{OA}$ будут равной длины?

в) Какое положение на плоскости должна занимать точка A, чтобы горизонтальная составляющая вектора $\overrightarrow{OA}$ была длиннее вертикальной?

2) Точки K и M – середины соответственно сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$.

а) Нарисуйте составляющие по прямым AB и AD векторов:

1) $\overrightarrow{AM}$; 2) $\overrightarrow{BM}$; 3) $\overrightarrow{KM}$.

б) Нарисуйте составляющие по прямым AK и AM векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DB}$; 3) $\overrightarrow{BM}$.

3) Пусть длина одной из двух составляющих вектора равна длине самого вектора. В каких границах лежит длина другой его составляющей?

4) а) Можно ли вектор длиной 10 разложить на две составляющих длиной 1?

б) А на две составляющих длиной 100?

в) В каких случаях вектор заданной длины можно разложить на две составляющих также заданной длины?

5) Точка K – середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Разложите векторы

а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{DK}$

по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

6) Пусть $|3\overrightarrow{m}+13\overrightarrow{n}|=5$, $|2\overrightarrow{m}+9\overrightarrow{n}|=2$. В каких пределах может изменяться:

а) $|\overrightarrow{m}|$; б) $|\overrightarrow{n}|$; в) $|\overrightarrow{m}|-|\overrightarrow{n}|$; г) $|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|$?

7) Пусть $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=1$, $|100\overrightarrow{a}+99\overrightarrow{b}|<1$. Оцените величины:

а) $|\overrightarrow{a}|$; б) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$.

Урок 7. Понятие линейного пространства

1°. Понятие линейного пространства

1) Сейчас мы познакомимся с одним из важнейших математических понятий:

Определение.

Множество E, на котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие условиям:

(I) 1.1. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c}\in E\quad\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$;

1.2. $\exists\,\overrightarrow{0}\in E\;:\;\forall\,\overrightarrow{a}\in E\quad\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$;

1.3. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a}\in E\;\;\exists\,(-\overrightarrow{a})\in E\;:\;\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$;

1.4. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\in E\quad\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$;

(II) 2.1. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a}\in E\quad 1\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$;

2.2. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a}\in E,\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad\alpha\,(\beta\,\overrightarrow{a})=(\alpha\beta)\,\overrightarrow{a}$;

(III) 3.1. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a}\in E,\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{a}=\alpha\,\overrightarrow{a}+\beta\,\overrightarrow{a}$;

3.2. *Для* $\forall\,\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\in E,\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\quad\alpha\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\alpha\,\overrightarrow{a}+\alpha\,\overrightarrow{b}$,

называется ***линейным (или векторным, или аффинным) пространством****, а его элементы –* ***векторами*** *этого пространства.*

2) **Примеры линейных пространств.**

(1) Пусть E – множество направленных отрезков на плоскости с обычными правилами сложения и умножения на число. На прошлых уроках мы доказали, что это множество является линейным пространством.

(2) Рассмотрим множество E, состоящее из наборов n чисел (т. н. “векторов-строк”): $E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$. Суммой векторов $\overrightarrow{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\overrightarrow{b}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ назовем вектор-строку $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$, а произведением вектор-строки $\overrightarrow{a}$ на число $\lambda\in\mathbb{R}$ назовем вектор-строку $\lambda\,\overrightarrow{a}=(\lambda\,x_1,\lambda\,x_2,\ldots,\lambda\,x_n)$. Легко показать, что определенное таким образом множество является линейным пространством.

(3) Пусть E – множество всех многочленов, степень которых не превосходит n. Операции сложения многочленов и умножения на число определим обычным образом. Очевидно, мы получили еще один пример линейного пространства.

2°. Линейно независимые и линейно зависимые векторы. Размерность пространства

1) Распространим понятие линейной комбинации векторов на произвольное линейное пространство:

Определение.

Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{\boldsymbol{a_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{a_2}}$, ..., $\overrightarrow{\boldsymbol{a_n}}$ *называется любой вектор вида* $\overrightarrow{a} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{a_k}$, *где* $\alpha_k \in \mathbb{R}$. *Множество всех линейных комбинаций векторов* $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ *называется* **линейной оболочкой** *этих векторов.*

2) Введем следующее определение:

Определение.

Векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ *называются* ***линейно независимыми****, если из того, что их линейная комбинация* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{a_k}$ *равна нулю, следует, что все коэффициенты* $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *В противном случае векторы называются* ***линейно зависимыми****.*

3) Переформулируем лемму о неколлинеарных векторах, используя последнее определение:

Теорема 7.1 (лемма о неколлинеарных векторах)**.**

Любые два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы.

4) С другой стороны, из теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам получаем очевидное следствие:

Утверждение.

Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

5) Следовательно, максимальное количество линейно независимых векторов на плоскости равно двум. Переформулируем это утверждение. Для этого нам понадобится следующее определение:

Определение.

Размерностью *линейного пространства называется максимально возможное количество линейно независимых векторов в этом пространстве.*

Т. о.,

Пространство векторов на плоскости – двумерное пространство.

3°. Базис

1) Введем следующее определение:

Определение.

> *Система векторов $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ называется **полной**, если любой вектор пространства E представим в виде линейной комбинации этих векторов.*

2) Теперь теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам можно сформулировать следующим образом:

   Теорема 7.2.

   Любые два неколлинеарных вектора на плоскости образуют полную систему векторов.

3) Дадим еще одно важное определение:

Определение.

> *Полная линейно независимая система векторов называется **базисом**.*

4) Объединяя теоремы 7.1 и 7.2, приходим к окончательному результату:

   Теорема 7.3.

   Любые два неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис.

Урок 9. Деление отрезка в данном отношении

1) Пусть даны две точки A, B и число $k > 0$. Сколько существует на прямой AB точек M таких, что $AM : MB = k$? Ответ очевиден: таких точек две. Одна из них принадлежит отрезку AB (говорят, что она делит отрезок AB в отношении k внутренним образом), а вторая лежит вне отрезка AB (говорят, что она делит отрезок AB в отношении k внешним образом)

2) Перейдем теперь к направленным отрезкам:

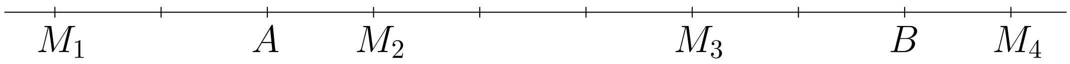
Определение.

> *Говорят, что точка M, лежащая на прямой AB, **делит направленный отрезок $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ в отношении $\mathbf{k}$**, если $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{MB}$.*

   Очевидно, что при $k > 0$ точка M лежит на отрезке AB, а при $k < 0$ – вне этого отрезка. Если $k = 0$, то точка M совпадает с точкой A. Если $k = 1$, то точка M является серединой отрезка AB.

   Заметим, что отрезок не может быть разделен в отношении $k = -1$. Действительно, при $k = -1$ получаем, что $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MB}$, т. е. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} = 0$.

3) **Упражнение.** В каком отношении делят направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ точки M_1, M_2, M_3, M_4 ?



4) Пусть точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k, т. е. $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{MB}$. Прибавляя к обеим частям последнего равенства $k\,\overrightarrow{AM}$, получаем, что $(k+1)\,\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, откуда

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1}\,\overrightarrow{AB}. \tag{9.1}$$

Эта формула будет нами неоднократно использоваться. В частности, из нее тотчас же следует, что существует одна и только одна точка, делящая направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $k \neq -1$ (существование легко доказать, повторяя все выкладки в обратном порядке).

5) Возьмем на отрезке AB точку M так, что $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Найдем, в каком отношении точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Из (9.1) следует, что $t = \dfrac{k}{k+1}$, откуда $k = \dfrac{t}{1-t}$. Т. о., если $AM : AB = t$, то

$$\overrightarrow{AM} = \frac{t}{1-t}\,\overrightarrow{MB}. \tag{9.2}$$

6) При решении задач очень часто будет использоваться следующая теорема:

Теорема 9.1.

Пусть точка M делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении k, O – произвольная точка плоскости. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}}{1+k}. \tag{9.3}$$

Доказательство теоремы: По условию $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$. Но $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$. Поэтому

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right),$$

откуда сразу следует, что

$$(1+k)\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}.$$

Разделив обе части последнего равенства на $1+k$, получаем (9.3).

■

7) Особенно красивый вид формула (9.3) принимает при $k = 1$, т. е. в случае, когда M – середина отрезка AB:

Если точка M – середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}. \tag{9.4}$$

8) Иногда при решении задач вместо теоремы 9.1 используют следующее утверждение:

Теорема 9.2.

Пусть O – произвольная точка плоскости. Для того, чтобы точка M принадлежала прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое действительное число t, для которого

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}. \tag{9.5}$$

Доказательство теоремы:

Достаточность. Пусть выполнено (9.5). Тогда $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = -t\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$, откуда $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$. Но последнее равенство означает, что точка M лежит на прямой AB.

Необходимость. Если точка M совпадает с точкой B, то $t = 1$. В противном случае $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{1+k}\,\overrightarrow{OA} + \dfrac{k}{1+k}\,\overrightarrow{OB}$, откуда $t = \dfrac{k}{1+k}$.

■

9) В процессе доказательства теоремы мы получили полезное утверждение:

Утверждение.

Пусть O – произвольная точка плоскости. Тогда если $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, то выполнено соотношение (9.5). *Обратно, если выполнено соотношение* (9.5), *то $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.*

10) В заключение решим два упражнения:

   (1) В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, а точка E – середина AM. Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.

   (2) Точка K делит сторону BC треугольника ABC в отношении $BK : KC = 3 : 5$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.

Домашнее задание

1) Точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 лежат на прямой AB, причем первые три делят отрезок AB на четыре равные части. Точка M_4 симметрична точке A относительно точки B, а точка M_5 симметрична точке B относительно точки A. Найдите отношения, в которых каждая из данных точек делит вектор $\overrightarrow{AB}$.

2) Точка M делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении $k \neq 0$. Докажите, что точка M делит вектор $\overrightarrow{BA}$ в отношении $\dfrac{1}{k}$.

3) Точка M не совпадает с серединой C отрезка AB и делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Найдите отношение, в котором точка M делит вектор $\overrightarrow{AC}$.

4) Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

5) Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Урок 10. Радиус-вектор точки

1°. Радиус-вектор точки

1) Выберем некоторую точку плоскости O, которую в дальнейшем будем называть **начальной точкой**. Затем поставим в соответствие произвольной точке M вектор $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OM}$, который будем называть **радиус-вектором** точки M.

2) Очевидно, что точки A и B совпадают тогда и только тогда, когда их радиус-векторы равны (при фиксированной начальной точке). Это позволяет задавать точки плоскости при помощи векторов.

3) Радиус-векторы очень часто используются при решении задач. Это объясняется тем, что многие формулы при помощи радиус-векторов записываются гораздо компактнее. Так, напр., формула “прокола точкой” может быть записана так:
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}.$$

   Замечание. Обычно радиус-вектор точки обозначают той же буквой, что и саму точку, напр., $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$.

4) При помощи радиус-векторов очень удобно записывать формулы, доказанные на прошлом уроке.

- Теорема 9.1 может быть записана так:

Если точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k, то
$$\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}}{1+k}. \qquad (10.1)$$

- Необходимое и достаточное условие принадлежности точки M прямой AB может быть переформулировано следующим образом:

Точка M лежит на прямой AB т. и т. т., когда существует такое действительное число t, что
$$\overrightarrow{m} = (1-t)\,\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}. \qquad (10.2)$$

5) Докажем с помощью радиус-векторов следующее полезное утверждение:

Пусть M – середина отрезка AB, а N – середина отрезка CD. Тогда
$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}. \qquad (10.3)$$

Доказательство: Действительно,
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{n} - \overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2} - \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} = \frac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}}{2} + \frac{\overrightarrow{d} - \overrightarrow{a}}{2} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2},$$
ч. т. д.

□

2°. Решение задач с использованием радиус-векторов

1) Точка P – середина медианы AM треугольника ABC. Выразите радиус-вектор точки P через радиус-векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ вершин треугольника ABC.
2) Точки M_1, M_2, …, M_n являются серединами сторон произвольного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$. Докажите, что $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{m_2} + \ldots + \overrightarrow{m_n}$.
3) На стороне AB треугольника ABC расположена точка K, причем $AK = BC$. Пусть P – середина BK, M – середина AC. Найдите $\angle APM$, если $\angle ABC = \beta$.

Домашнее задание

1) Отрезок AB разделен на пять равных частей. Выбрав произвольно начальную точку, выразите радиус-векторы точек деления через векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

2) Точки M и N делят направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ в одном и том же отношении k. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{1+k}\,\overrightarrow{AC} + \dfrac{k}{1+k}\,\overrightarrow{BD}$.

3) Пусть M – точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при произвольном выборе начальной точки справедливо соотношение $\overrightarrow{m} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}\right)$.

4) Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых диагонали пересекаются в точках O и O_1 соответственно. Докажите, что

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}\right).$$

5) Докажите, что точки A, B и C с радиус-векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют три числа x, y и z, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{b} + z\,\overrightarrow{c} = 0 \quad \text{и} \quad x + y + z = 0.$$

Урок 11. Решение задач на разложение векторов по базису

1) Дан прямоугольный треугольник ABC. Пусть D – основание высоты, опущенной на гипотенузу AB. Разложите вектор $\overrightarrow{CD}$ по векторам $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$.

2) Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны AB взята такая точка M, что B – середина AM. Точка N лежит на стороне AD, причем $AN : ND = 3 : 1$. На луче BN взята такая точка F, что N – середина BF. Разложите вектор $\overrightarrow{MF}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{d}$.

3) В параллелограмме $ABCD$ точки K и M – середины сторон BC и CD соответственно. Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{m}$.

4) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $3 : 1$, P – точка пересечения диагоналей, Q – точка пересечения продолжений боковых сторон, M – середина стороны CD. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в базисе $\left\{\overrightarrow{PQ}; \overrightarrow{PM}\right\}$.

Домашнее задание

1) Точка M – середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

2) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причем $BC : AD = k$. Точка M – середина стороны CD. Разложите векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ по базису $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$.

3) Концы отрезка MN лежат соответственно на сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$, причем $BM : MC = m : n$, $CN : ND = p : q$. Точка T – середина отрезка MN. Разложите векторы $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{CT}$ по базису $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$.

4) Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

5) Точки M и N лежат соответственно на сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$, причем $BM : MC = DN : NC = 1 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{b}$.

Урок 12. Применение векторов к доказательству некоторых теорем планиметрии

С помощью векторов можно легко доказать многие известные теоремы планиметрии.

1) Начнем с теоремы о средней линии треугольника.

Теорема 12.1 (о средней линии треугольника)**.**

Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Доказательство теоремы: Пусть M и N – середины соответственно сторон AB и BC треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{n} - \overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2} - \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} = \frac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

■

2) С помощью векторов легко может быть доказана и теорема о средней линии трапеции:

Теорема 12.2 (о средней линии трапеции)**.**

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство теоремы: Пусть M и N – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Т. к. основания AD и BC трапеции параллельны, то векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны. Но тогда в силу (10.3) вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен каждому из векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$, т. е. средняя линия трапеции параллельна основаниям. Поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ сонаправлены, то $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AD}|$. Поэтому $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$, ч. т. д.

■

3) Формула (10.3) позволяет так же легко доказать и обратную теорему:

Теорема 12.3 (обратная теореме о средней линии трапеции).

Пусть M и N – середины соответственно сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Тогда если $MN = \dfrac{BC+AD}{2}$, то $BC \parallel AD$, т. е. $ABCD$ – либо трапеция, либо параллелограмм.

Доказательство теоремы: Пользуясь неравенством треугольника, из (10.3) получаем, что $|\overrightarrow{MN}| \leqslant \dfrac{|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AD}|}{2}$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ сонаправлены. Но по условию $MN = \dfrac{BC+AD}{2}$. Следовательно, $\overrightarrow{BC} \upuparrows \overrightarrow{AD}$, т. е. $BC \parallel AD$, ч. т. д.

■

4) С помощью векторов легко доказать еще одну уже известную нам теорему:

Теорема 12.4.

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, пересекаются в точке, которая является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей этого четырехугольника.

Замечание. *На самом деле справедливо более сильное утверждение: середины всех трех отрезков совпадают.*

Доказательство теоремы: Легко показать, что радиус-векторы середин всех трех отрезков равны $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$. Следовательно, середины всех этих отрезков совпадают.

■

5) В заключение докажем с помощью векторов еще одну известную теорему:

Теорема 12.5 (о биссектрисе внутреннего угла треугольника).

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Доказательство теоремы: Воспользуемся следующим стандартным приемом: вместо того, чтобы доказывать, что биссектриса угла C делит сторону AB треугольника ABC в нужном отношении, возьмем на стороне AB точку M такую, что $AM : MB = AC : BC$. Тогда $\overrightarrow{AM} = \dfrac{AC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB}$. Применяя формулу (9.3), находим, что

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{AC}{BC}\cdot\overrightarrow{CB}}{1+\frac{AC}{BC}} = \frac{BC\cdot\overrightarrow{CA} + AC\cdot\overrightarrow{CB}}{AC+BC} = \frac{AC\cdot BC}{AC+BC}\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{AC} + \frac{\overrightarrow{CB}}{BC}\right).$$

В силу теоремы 4.1 отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{CM}$ направлен по биссектрисе угла, образованного векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, ч. т. д.

■

Домашнее задание

1) Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM : MB = AN : NC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

2) При помощи векторов докажите, что середины боковых сторон и середины диагоналей трапеции лежат на одной прямой.

3) Докажите при помощи векторов теорему о биссектрисе внешнего угла треугольника: если биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке D, то отрезки DA и DB пропорциональны сторонам AC и BC.

4) Докажите при помощи векторов утверждение, обратное теореме о средней линии треугольника: если отрезок с концами на двух сторонах треугольника параллелен третьей стороне и равен половине этой стороны, то данный отрезок – средняя линия треугольника.

5) Точки M, K, N и L – середины соответственно сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q – середины отрезков MN и KL. Докажите с помощь векторов, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

Урок 13. Решение задач с помощью векторов

Сейчас мы познакомимся с некоторыми приемами, которые бывают полезны при решении различных задач.

1) Точки M и M_1 – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На сторонах AB и CD этого четырехугольника взяты соответственно точки N и N_1 так, что $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{DN_1}{DC} = \lambda$. Отрезки MM_1 и NN_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $NK = KN_1$, $\dfrac{M_1K}{M_1M} = \lambda$.

2) Сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна его полупериметру. Докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм.

3) Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой.

4) Дан четырехугольник $ABCD$, середины сторон AD и BC которого, а также точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой. Докажите, что $AD \parallel BC$.

Замечание. Это утверждение является обратным к утверждению предыдущей задачи.

5) Три равные окружности радиуса R пересекаются в точке M. Пусть A, B и C – три другие точки их попарного пересечения. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R.

Домашнее задание

1) Пусть точки M_1 и M_2 – середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите с помощью векторов, что середины отрезков A_1A_2, M_1M_2 и B_1B_2 лежат на одной прямой.

2) Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

3) Точки K, N, L, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, причем $AK : KB = DL : LC = \alpha$, $AM : MD = BN : NC = \beta$. Докажите, что точка P пересечения отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях, т. е. $MP : PN = \alpha$, $KP : PL = \beta$.

4) *Задача о четырёх пятаках.* Четыре окружности радиуса R пересекаются по три в точках M и N, и по две в точках A, B, C и D. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Урок 15. Радиус-векторы точки пересечения медиан и точки пересечения биссектрис треугольника

1°. Радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника

1) С помощью векторов легко получить еще одно доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника:

Теорема 15.1.

> *Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* $2 : 1$*, считая от вершины.*

Доказательство теоремы: Пусть M_1 – точка, которая делит медиану AA_1 в отношении $AM_1 : M_1A_1 = 2 : 1$. Тогда $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MA_1}$. Взяв в качестве начальной произвольную точку, получаем отсюда, что $\overrightarrow{m_1} = \dfrac{\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a_1}}{3}$. Но $\overrightarrow{a_1} = \dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2}$. Поэтому $\overrightarrow{m_1} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$.

Полученное выражение симметрично относительно $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Следовательно, точки M_2 и M_3, делящие в отношении $2 : 1$ медианы BB_1 и CC_1, имеют такой же радиус-вектор. Но это означает, что точки M_1, M_2 и M_3 совпадают.

■

2) При доказательстве этой теоремы мы получили важную формулу, выражающую радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника через радиус-векторы его вершин:

$$\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}. \tag{15.1}$$

Эта формула будет неоднократно использоваться нами в дальнейшем.

3) Формула (15.1) справедлива при любом выборе начальной точки. Если же в качестве начальной точки взять точку пересечения медиан треугольника ABC, то получим красивое соотношение

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0. \tag{15.2}$$

Замечание. Из равенства (15.2) следует, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам треугольника ABC.

4) Справедливо и обратное утверждение:

Теорема 15.2.

Если для некоторой точки M справедливо соотношение (15.2), *то M – точка пересечения медиан треугольника ABC.*

Доказательство: Действительно, пусть M_1 – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда, взяв в качестве начала точку M, из (15.1) получаем, что

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3},$$

откуда, с учетом (15.2), $\overrightarrow{MM_1} = 0$. Но это означает, что точки M и M_1 совпадают.

■

5) **Задача.** В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Точка K – середина отрезка MN. Медианы треугольника BCD пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, K и P лежат на одной прямой.

2°. Радиус-вектор точки пересечения биссектрис треугольника

1) Теперь с помощью векторов докажем теорему о пересечении биссектрис треугольника:

Теорема 15.3.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит данную биссектрису в отношении $\dfrac{a+b}{c}$, считая от вершины. Здесь c – сторона, к которой проведена биссектриса, а a и b – две другие стороны.

Доказательство теоремы: Пусть N – точка на биссектрисе CC_1, для которой $CN : NC_1 = (a+b) : c$. Тогда $\overrightarrow{CN} = \dfrac{a+b}{c}\overrightarrow{NC_1}$. Взяв в качестве начальной произвольную точку, отсюда получаем, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{c} + \frac{a+b}{c}\vec{c_1}}{1 + \frac{a+b}{c}} = \frac{c\,\vec{c} + (a+b)\,\vec{c_1}}{a+b+c}. \tag{$*$}$$

С другой стороны, $AC_1 : C_1B = b : a$, откуда $\overrightarrow{AC_1} = \dfrac{b}{a}\overrightarrow{C_1B}$. Поэтому

$$\vec{c_1} = \frac{\vec{a} + \frac{b}{a}\vec{b}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a\,\vec{a} + b\,\vec{b}}{a+b}.$$

Подставляя выражение для $\vec{c_1}$ в $(*)$, получаем, что

$$\vec{n} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c}. \tag{$**$}$$

Выражение $(**)$ симметрично относительно $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Следовательно, точка P, делящая биссектрису AA_1 в отношении $\dfrac{b+c}{a}$, и точка Q, делящая биссектрису BB_1 в отношении $\dfrac{a+c}{b}$, имеют такой же радиус-вектор. Но это означает, что эти точки совпадают. ■

2) При доказательстве теоремы мы получили формулу, выражающую радиус-вектор точки пересечения биссектрис треугольника через радиус-векторы его вершин:

$$\boxed{\vec{i} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c}. \tag{15.3}}$$

Замечание. Здесь a, b и c – длины сторон BC, AC и AB, а не длины соответствующих векторов.

Домашнее задание

1) Даны точки $A(-2;5)$, $B(4;3)$ и $C(1;-2)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

2) Пусть M и N – точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}\right)$.

3) На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

4) Дан треугольник ABC, O – произвольная точка плоскости. Пусть P, Q и R – точки пересечения медиан соответственно треугольников AOB, BOC и COA. Докажите, что точка O и точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR лежат на одной прямой.

5) Докажите, что четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину четырехугольника с точкой пересечения медиан треугольника, образованного тремя оставшимися вершинами, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины четырехугольника.

Урок 16. Метод неопределенных коэффициентов. Радиус-вектор точки пересечения двух чевиан треугольника. Радиус-вектор ортоцентра треугольника

1°. Метод неопределенных коэффициентов

Сейчас мы познакомимся с одним из важнейших методов решения афинных задач с помощью векторов – методом неопределенных коэффициентов.

1) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AM : MD = p : q$. Найдите отношение, в котором точка N пересечения отрезков BM и AC делит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$.

2) Дан четырехугольник $ABCD$, стороны которого AD и BC не параллельны. На прямых BD и AC взяты соответственно точки M и N так, что $AM \parallel BC$, $BN \parallel AD$. Докажите, что $MN \parallel CD$.

2°. Радиус-вектор точки пересечения двух чевиан треугольника

1) Метод, с которым мы только что познакомились, может быть применен для доказательства следующей общей теоремы:

Теорема 16.1 (о радиус-векторе точки пересечения чевиан треугольника)**.**

Пусть точки B_1 и A_1 делят направленные отрезки $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ в отношениях p и q соответственно, причем $p+q \neq -1$. Тогда прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, и радиус-вектор точки пересечения K выражается через радиус-векторы вершин треугольника ABC по формуле

$$\overrightarrow{k} = \frac{p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{p+q+1}. \tag{16.1}$$

Доказательство теоремы:

(1) Выберем сперва в качестве начальной точку A. Пусть $\left\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ – базис.

Поскольку $K \in AA_1$, то найдется такое действительное число α, что $\overrightarrow{k} = \alpha\,\overrightarrow{a_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{k} = \alpha\,\dfrac{\overrightarrow{c} + q\,\overrightarrow{b}}{1+q} = \dfrac{\alpha q}{1+q}\,\overrightarrow{b} + \dfrac{\alpha}{1+q}\,\overrightarrow{c}$.

С другой стороны, $K \in BB_1$. Значит, найдется такое действительное число β, что $\overrightarrow{k} = (1-\beta)\,\overrightarrow{b} + \beta\,\overrightarrow{b_1} = (1-\beta)\,\overrightarrow{b} + \dfrac{\beta}{1+p}\,\overrightarrow{c}$.

Сравнивая полученные выражения для $\overrightarrow{k}$, получаем (в силу единственности разложения по базису) следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha q}{1+q} = 1-\beta, \\ \dfrac{\alpha}{1+q} = \dfrac{\beta}{1+p}, \end{cases}$$

откуда $\beta = \dfrac{1+p}{1+p+q}$. Т. о., $\overrightarrow{k} = \dfrac{q\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{p+q+1}$. Итак, мы доказали, что $\overrightarrow{AK} = \dfrac{q\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{p+q+1}$.

(2) Возьмем теперь в качестве начальной произвольную точку O. Тогда

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + \frac{q\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{p+q+1} = \\ = \frac{p\,\overrightarrow{OA} + q\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right)}{p+q+1} = \frac{p\,\overrightarrow{OA} + q\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{p+q+1}.$$

Но это и означает, что $\overrightarrow{k} = \dfrac{p\,\overrightarrow{a} + q\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{p+q+1}$.

■

2) Из теоремы 16.1 сразу же следуют формулы (15.1) и (15.3), выражающие радиус-векторы точки пересечения медиан и точки пересечения биссектрис треугольника через радиус-векторы его вершин.

Более того, с помощью этой теоремы можно получить еще одну полезную формулу, выражающую радиус-вектор точки пересечения высот треугольника через радиус-векторы его вершин:

Радиус-вектор точки пересечения высот треугольника выражается через радиус-векторы вершин треугольника по формуле

$$\overrightarrow{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,\overrightarrow{a} + \operatorname{tg}\beta\,\overrightarrow{b} + \operatorname{tg}\gamma\,\overrightarrow{c}}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}, \tag{16.2}$$

где $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ и $\gamma = \angle ACB$.

Доказательство: Пусть AA_1 и BB_1 – высоты треугольника ABC. Рассматривая отдельно случаи остроугольного и тупоугольного треугольника, получаем, что $p = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}$, $q = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$. Подставляя эти выражения в (16.1), получаем формулу (16.2).

■

Домашнее задание

1) На плоскости даны точки $A(1;2)$, $B(2;1)$, $C(3;-3)$, $D(0;0)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются и найдите отношение, в котором точка пересечения делит диагональ AC.

2) Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E делит направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в отношении k_1, а точка F делит направленный отрезок $\overrightarrow{DC}$ в отношении k_2. Отрезки BE и AF пересекаются в точке M. Найдите отношение, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AF}$.

3) Дан треугольник ABC. Точка A_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении k_1, а точка B_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{CA}$ в отношении k_2. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если прямая MC параллельна прямой AB, то $k_1k_2 = -1$.

4) Докажите, что в треугольнике ABC справедливо тождество
$$\operatorname{tg}\alpha\,\overrightarrow{HA} + \operatorname{tg}\beta\,\overrightarrow{HB} + \operatorname{tg}\gamma\,\overrightarrow{HC} = 0.$$

Урок 17. Теорема Чевы в векторной форме

1) Ранее мы неоднократно обращались к теореме Чевы. Еще в седьмом классе мы познакомились с частной формой этой теоремы (мы доказывали ее либо с помощью теоремы о пропорциональных отрезках в треугольнике, либо через площади). Позднее было сформулировано и доказано обобщение теоремы Чевы.

2) Используя векторную терминологию, теорему Чевы можно переформулировать следующим образом:

Теорема 17.1 (Чевы)**.**

Пусть точки A_1, B_1, C_1 делят направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ в отношениях k_1, k_2, k_3 соответственно, причем $k_1k_2k_3 \neq 0$ (т. е. точки B и A_1, C и B_1, A и C_1 не совпадают). Тогда если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то
$$k_1k_2k_3 = 1. \qquad (17.1)$$
Обратно, если выполнено соотношение (17.1), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Доказательство теоремы: Приведем два доказательства теоремы Чевы.

1-й способ:

(1) Необходимость: Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Докажем, что $k_1k_2k_3 = 1$. Возьмем точку M в качестве начальной. Пусть $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ (здесь α и β – некоторые действительные числа). Выразим α и β через k_1, k_2, k_3. Для этого заметим, что

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{\overrightarrow{b} + k_1\overrightarrow{c}}{1+k_1} = \frac{\alpha k_1\overrightarrow{a} + (1+\beta k_1)\overrightarrow{b}}{1+k_1}.$$

Но $\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a}$. Следовательно, $1 + \beta k_1 = 0$, откуда $\beta = -\dfrac{1}{k_1}$.

Аналогично

$$\overrightarrow{b_1} = \frac{\overrightarrow{c} + k_2\overrightarrow{a}}{1+k_2} = \frac{(\alpha+k_2)\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}}{1+k_2}.$$

Но $\overrightarrow{b_1} \parallel \overrightarrow{b}$. Следовательно, $\alpha + k_2 = 0$, откуда $\alpha = -k_2$.

Осталось заметить, что

$$\overrightarrow{c_1} = \frac{\overrightarrow{a} + k_3\overrightarrow{b}}{1+k_3}.$$

Поскольку $\overrightarrow{c_1} \parallel \overrightarrow{c}$, то $\dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{\beta}{k_3}$, откуда $\dfrac{\alpha k_3}{\beta} = 1$. Подставляя в последнее равенство полученные значения α и β, получаем, что $k_1k_2k_3 = 1$.

(2) Достаточность: В эту сторону доказательство стандартное. Если никакие две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 не имеют общей точки, то эти прямые параллельны. Если же, напр., прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то прямая CM обязательно пересечет AB. Действительно, в противном случае $k_1k_2 = -1$ (см. задачу 2 из д/з к уроку 15), а, значит, $k_3 = -1$, что невозможно.

Пусть прямые CM и AB пересекаются в точке C_2, причем точка C_2 делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\widetilde{k}_3$. Тогда по доказанному выше $k_1k_2\widetilde{k}_3 = 1$. Следовательно, $\widetilde{k}_3 = k_3$. Это означает, что точки C_1 и C_2 совпадают, ч. т. д.

2-й способ: Еще одно доказательство теоремы Чевы можно получить, воспользовавшись формулой (16.1) для радиус-вектора точки пересечения двух чевиан треугольника.

(1) Необходимость: Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Тогда, поскольку точка A_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{CB}$ в отношении $\dfrac{1}{k_1}$, а точка B_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{CA}$ в отношении k_2, радиус вектор точки M может быть представлен в виде

$$\overrightarrow{m} = \frac{k_2\overrightarrow{a} + \frac{1}{k_1}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{k_2 + \frac{1}{k_1} + 1} = \frac{k_1k_2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + k_1\overrightarrow{c}}{k_1k_2 + 1 + k_1}. \tag{$*$}$$

Аналогично, поскольку точка C_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k_3, а точка B_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ в отношении $\dfrac{1}{k_2}$, радиус вектор точки M может быть представлен в виде

$$\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{a} + k_3\overrightarrow{b} + \frac{1}{k_2}\overrightarrow{c}}{k_3 + \frac{1}{k_2} + 1} = \frac{k_2\overrightarrow{a} + k_2k_3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{k_2k_3 + 1 + k_2}. \tag{$**$}$$

Возьмем точку C в качестве начальной и сравним коэффициенты разложения в $(*)$ и $(**)$. Сразу же получаем, что $k_1k_2k_3 = 1$.

(2) Достаточность: Здесь все еще проще. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 попарно пересекаются. Обозначим M_1 точку пересечения прямых AA_1 и BB_1, M_2 – точку пересечения прямых BB_1 и CC_1, M_3 – точку пересечения прямых AA_1 и CC_1. Из формулы (16.1) сразу следует, что если $k_1k_2k_3 = 1$, то радиус-векторы точек M_1, M_2 и M_3 совпадают.

Пусть теперь какие-то две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (напр., прямые AA_1 и BB_1) не пересекаются. Тогда $k_1k_2 + 1 + k_1 = 0$. Домножая обе части этого равенства на k_3 и учитывая, что $k_1k_2k_3 = 1$, получаем, что $k_1k_3 + 1 + k_3 = 0$. Но это означает, что прямые BB_1 и CC_1 не пересекаются. Т. о., прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны.

■

Домашнее задание

1) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты такие точки P, M и N, что отрезки AM, BN и CP пересекаются в одной точке и сумма векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CP}$ равна нулю. Докажите, что P, M и N – середины сторон треугольника ABC.

Урок 18. Теорема Менелая в векторной форме

1) Теорема Менелая дает необходимое и достаточное условие того, что три точки лежат на одной прямой. Ранее мы доказывали ее с помощью обобщенной теоремы Фалеса. Векторы позволяют дать короткую формулировку теоремы Менелая (без деления на случаи) и легко ее доказать.

Теорема 18.1 (Менелая).

Пусть точки A_1, B_1, C_1 делят направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ в отношениях k_1, k_2, k_3 соответственно. Для того, чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$k_1k_2k_3 = -1. \tag{18.1}$$

Доказательство теоремы: Возьмем точку C в качестве начальной. Тогда

$$\overrightarrow{c_1} = \frac{\overrightarrow{a} + k_3\,\overrightarrow{b}}{1 + k_3}. \tag{$*$}$$

Выразим векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ через векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{b_1}$. Т. к. $\overrightarrow{a_1} = \dfrac{1}{1+k_1}\,\overrightarrow{b}$, то $\overrightarrow{b} = (1+k_1)\,\overrightarrow{a_1}$. Т. к. $\overrightarrow{b_1} = \dfrac{k_2}{1+k_2}\,\overrightarrow{a}$, то $\overrightarrow{a} = \dfrac{1+k_2}{k_2}\,\overrightarrow{b_1}$. Подставляя эти выражения в $(*)$, получаем:

$$\overrightarrow{c_1} = \frac{1+k_2}{(1+k_3)\,k_2}\,\overrightarrow{b_1} + \frac{(1+k_1)\,k_3}{1+k_3}\,\overrightarrow{a_1}.$$

По теореме 9.2 точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой т. и т. т., когда

$$\frac{1+k_2}{(1+k_3)\,k_2} + \frac{(1+k_1)\,k_3}{1+k_3} = 1.$$

Преобразуем последнее равенство:

$$\frac{1+k_2}{(1+k_3)\,k_2}+\frac{(1+k_1)\,k_3}{1+k_3}=1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1+k_2+k_2k_3\,(1+k_1)=k_2\,(1+k_3) \;\Leftrightarrow\; k_1k_2k_3=-1.$$

Теорема доказана.

■

2) Пользуясь теоремой Менелая, легко доказать следующее интересное утверждение:

Утверждение (Предложение Паша).

Если прямая не проходит через вершины треугольника и пересекает одну из его сторон, то она пересекает одну из двух других сторон и не пересекает третью сторону.

Доказательство: Поскольку данная прямая пересекает одну из сторон треугольника во внутренней точке, то в равенстве (18.1) один из сомножителей положителен. Поэтому один из двух других сомножителей положителен, а второй – отрицателен. Но это и означает, что данная прямая пересекает одну из двух оставшихся сторон во внутренней точке, а другую – во внешней.

■

Замечание. *(1) Часто предложение Паша берут в качестве одной из аксиом геометрии. То, что нам удалось его доказать, означает, что мы заменили в системе аксиом это утверждение другим, ему равносильным. Каким именно, установить трудно: ведь мы при изучении планиметрии не приводили полный список аксиом.*

(2) С предложением Паша связана одна интересная история. В 1945 году, на VIII Московской математической олимпиаде, при решении одной геометрической задачи надо было воспользоваться предложением Паша. Члены жюри полагали, что этот факт очевиден. Однако один из участников олимпиады, восьмиклассник Ю.Добрушин, дописав решение до этого места, добавил: "Я долго пытался доказать, что прямая не может пересекать все три стороны треугольника во внутренних точках, но не смог этого сделать, т. к. с ужасом понял, что я не знаю, что такое прямая!" За это чистосердечное признание в "неумении" решить задачу Добрушин был награжден первой премией.

3) **Задача.** На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты соответственно такие точки M и N, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

Домашнее задание

1) Точки M и N лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC, причем $\dfrac{AC}{AM} = p$, $\dfrac{BC}{BN} = q$. Точка P лежит на отрезке AN, причем $\dfrac{AP}{AN} = \dfrac{q}{p+q-1}$. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.

2) Точка M, лежащая на стороне AD параллелограмма $ABCD$, делит направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в отношении k. Точка N лежит на прямой AC. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка N делит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ в отношении $\dfrac{k}{k+1}$.

3) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах A, B и C пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Урок 19. Формула Гамильтона. Прямая Эйлера

1) С ортоцентром треугольника связана одна очень красивая и полезная формула:

Теорема 19.1 (Формула Гамильтона[1]).

Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, O – центр описанной окружности. Тогда

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{19.1}$$

Доказательство теоремы: Пусть $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Отрезок OK – диагональ ромба $OAKB$. Поэтому $OK \perp AB$. Следовательно, $OK \parallel CH$. Пусть $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Четырехугольник $OCPK$ – параллелограмм. Поэтому $CP \parallel OK$ и, значит, точка P принадлежит высоте, проходящей через вершину C. Аналогично доказывается, что точка P принадлежит другим высотам треугольника ABC. Следовательно, точки P и H совпадают. Теорема доказана.

■

Замечание. *(1) Позднее мы познакомимся с еще одним способом доказательства формулы Гамильтона, использующим скалярное произведение векторов.*

(2) Доказывая формулу Гамильтона, мы попутно получили еще одно доказательство уже хорошо известного нам факта: расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем

[1] Уильям Гамильтон (1805-1865) – ирландский математик, один из основателей векторной алгебры и векторного анализа. Именно У.Гамильтон в своих “Лекциях о кватернионах” (1853) впервые ввел термины “вектор” и “скаляр”.

расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.

2) Формула (15.1), выражающая радиус-вектор точки M пересечения медиан треугольника ABC через радиус-векторы его вершин, справедлива при любом выборе начальной точки. Если же в качестве начальной точки взять центр O описанной окружности, то, с учетом (19.1), получим, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}. \tag{19.2}$$

Из формулы (19.2) сразу следует уже известная нам теорема:

Теорема 19.2 (О прямой Эйлера).

В треугольнике ABC центр O описанной окружности, точка M пересечения медиан и точка H пересечения высот лежат на одной прямой, причем $OM : MH = 1 : 2$.

3) С помощью формулы Гамильтона легко доказать еще один хорошо известный факт:

Утверждение.

Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

Доказательство: Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, E – точка, симметричная точке H относительно стороны BC, A_1 – основание высоты, опущенной на BC. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OE}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}}{2}$.

Пусть N – точка пересечения прямой AH с описанной окружностью, D и K – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые BC и AA_1 соответственно. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OK}$. Но $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$, $\overrightarrow{OK} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON}}{2}$. Поэтому $\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON}}{2}$.

Сравнивая полученные выражения для $\overrightarrow{OA_1}$, видим, что точки E и N совпадают.

■

4) Решим несколько задач с использованием формулы Гамильтона.

(1) Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1},$$

где O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно.

(2) В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, которые пересекаются в точке P. Докажите, что

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

(3) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_1, H_2, H_3, H_4 – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что прямые AH_1, BH_2, CH_3 и DH_4 пересекаются в одной точке.

Домашнее задание

1) В окружность с центром O вписаны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Пусть H_1 и H_2 – ортоцентры этих треугольников. Докажите, что

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}.$$

2) Докажите с помощью формулы Гамильтона, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

3) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что точки пересечения высот треугольников BCD, CDA, DAB и ABC являются вершинами четырехугольника, равного четырехугольнику $ABCD$.

4) На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого – с тремя оставшимися, то в середине отрезка, соединяющего ортоцентры этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься водолазам на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

Вопросы к зачету

1. Понятие вектора. Коллинеарные и неколлинеарные векторы. Сонаправленные и противоположно направленные векторы. Равенство векторов.
2. Сумма двух векторов. Правило треугольника. Правило параллелограмма. Законы сложения векторов. Сумма нескольких векторов. Правило многоугольника. Вычитание векторов. Построение разности векторов.
3. Умножение вектора на число. Законы умножения вектора на число.
4. Лемма о коллинеарных векторах. Лемма о неколлинеарных векторах.
5. Теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. Составляющие вектора. Теорема о разложении вектора на составляющие.
6. Неравенство треугольника.
7. Понятие линейного пространства. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Размерность линейного пространства. Полная система векторов. Понятие базиса линейного пространства.
8. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в данном базисе. Координаты суммы и разности векторов. Координаты произведения вектора на число. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
9. Радиус-вектор точки. Деление отрезка в данном отношении. Теорема о радиус-векторе точки, лежащей на прямой.
10. Теорема о том, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, пересекаются в точке, которая является серединой каждого из этих отрезков, а также серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей этого четырехугольника.
11. Теорема о средней линии треугольника. Теорема о средней линии трапеции.
12. Теорема о биссектрисе внутреннего и внешнего углов треугольника.
13. Теорема о пересечении медиан треугольника. Радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника.
14. Теорема о пересечении биссектрис треугольника. Радиус-вектор точки пересечения биссектрис треугольника.
15. Теорема о радиус-векторе точки пересечения чевиан треугольника.
16. Радиус-вектор точки пересечения высот треугольника.
17. Формула Гамильтона. Прямая Эйлера.
18. Теорема Чевы.
19. Теорема Менелая. Предложение Паша.