ВОДЯНАЯ СТУПА ДЛЯ ШЛИФОВКИ РИСА

A. Введение

Рис является главным национальным продуктом для подавляющего большинства людей во Вьетнаме. Чтобы получить белый рис от него необходимо отделить сначала его кожуру ("обдирка"), а затем отруби ("шлифовка"). Горные регионы северного Вьетнама богаты водными струями, и люди, живущие в этих регионах, используют *водные устройства (ступки)* для шлифовки риса. Рисунок 1 показывает одно из таких устройств, а рисунок 2 − принцип его работы.

A. Конструкция и принцип работы.

2.1. Конструкция

Водная ступа, показанная на рис. 1, состоит из:

Ступы, на самом деле просто деревянная емкость для риса.

Рычаг, который представляет собой деревянный ствол с концами разной длины. Он может вращаться вокруг некоторой горизонтальной оси. *Дубинка (пестик)* прикреплена перпендикулярно к рычагу с его короткой стороны. Длина дубинки такова, что она может прикасаться к рису в ступе, когда рычаг лежит горизонтально. На длинном конце рычага вырезано углубление для образования сосуда для воды. Форма этого сосуда очень важна для действия устройства.

2. Режимы работы.

Ступа может работать в двух режимах.

Рабочий режим. В этом режиме, ступа совершает некоторый рабочий цикл, проиллюстрированный на рис. 2.

Шлифовка риса происходит благодаря энергии, передаваемой от дубинки к рису в стадии (f) на рис. 2. Если, по какой-то причине, дубинка не может прикасаться к дну ступки, говорят, что устройство не работает.

Мертвый режим с поднятым рычагом. В стадии (c) рабочего цикла (рис. 2) когда угол наклона рычага α увеличивается, количество воды в сосуде уменьшается. В определенный момент времени, количество воды становится достоточным для уравновешивания рычага. Обозначим значение угла наклона в этот момент через β. Если рычаг расположен под углом β и его начальная угловая скорость равна нулю, он останется навсегда в этом положении. Это и есть мертвый режим с поднятым рычагом. Устойчивость этого положения рычага зависит от скорости Φ натекания воды в сосуд. Если Φ превышает некоторое значение Φ_2, только мертвый режим стабилен, и ступа переходит в него из любого начального положения, то есть не может перейти в рабочий режим. Другими словами, Φ_2 является минимальной скоростью течения, при превышении которой устройство перестает работать.

Рис. 1
Водная рисошлифующая ступка

Рабочий цикл ступы.

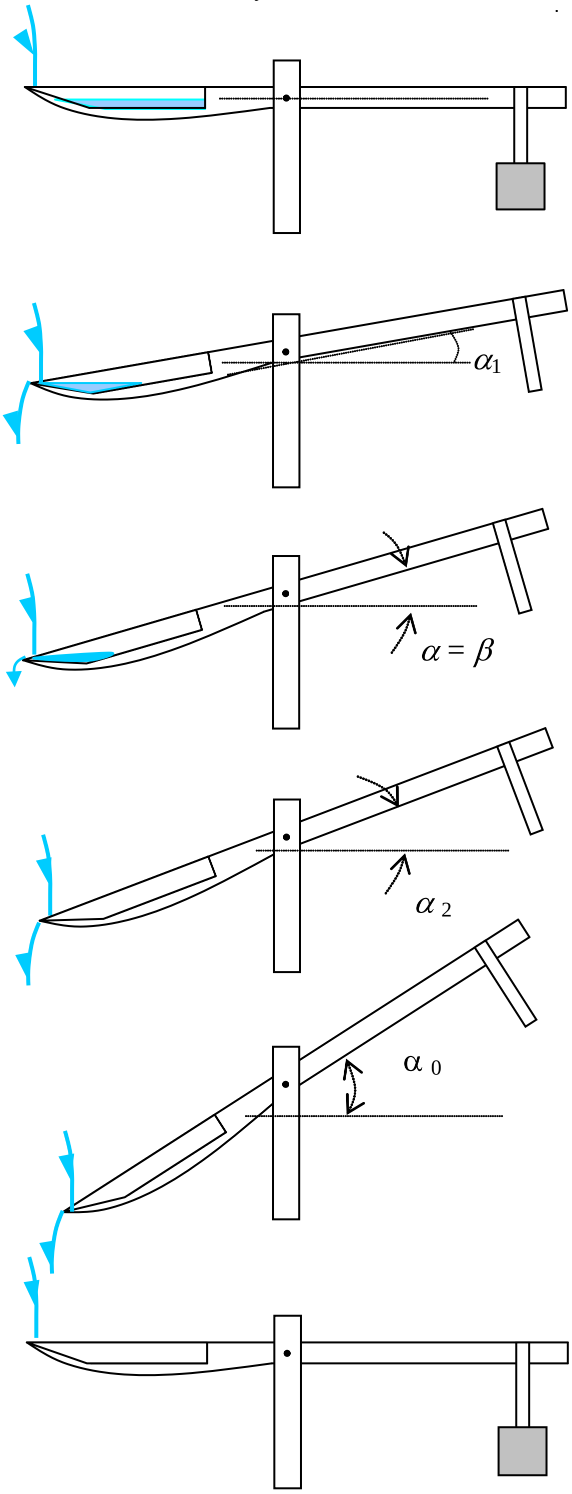


Рис. 2

a) В начальный момент сосуд пуст, дубинка покоится в ступке. Вода течет в сосуд с маленькой скоростью, но рычаг остается в горизонтальном положении некоторое время.

b) В некоторый момент количество воды в сосуде достаточно для поднятия рычага. Вода перекает к более отдаленной стороне сосуда, наклоняя рычаг еще быстрее. Вода начинает вытекать при $\alpha = \alpha_1$.

c) Угол α продолжает увеличиваться, вода продолжает вытекать. При некотором значении угла наклона, $\alpha = \beta$, сумарный вращающий момент становится равным нулю.

d) Угол α продолжает расти, вода продолжает вытекать до тех пор, пока сосуд не опрожнится.

e) Угол α продолжает расти по инерции. Благодаря форме сосуда, втекающая вода сразу вытекает из него. Движение рычага по инерции продолжается до тех пор, пока угол α не достигает максимального значения α_0.

f) Когда сосуд пуст, вес рычага возвращает его назад в начальное горизонтальное положение. Дубинка делает тяжелый удар по ступке (с рисом внутри него) и начинается новый цикл.

C. Задача

Рассмотрим водную рисошлифующую ступку (рис. 3).

Масса рычага (с дубинкой, но без воды) равна $M = 30$ кг,

Центр масс рычага находится в точке G. Рычаг вращается вокруг оси T (точка T на рисунке).

Момент инерции рычага вокруг T равен $I = 12$ кг$\cdot$м^2.

Когда есть вода в сосуде, масса воды обозначается m, центр масс воды – точкой N.

Угол наклона рычага к горизонту обозначается α.

Основные размеры устройства и сосуда и сосуда приведены на рис. 3.

Пренебрегайте трением в оси вращения и силой, возникающей из-за натекания воды в сосуд. Считайте, что поверхность воды всегда горизонтальна.

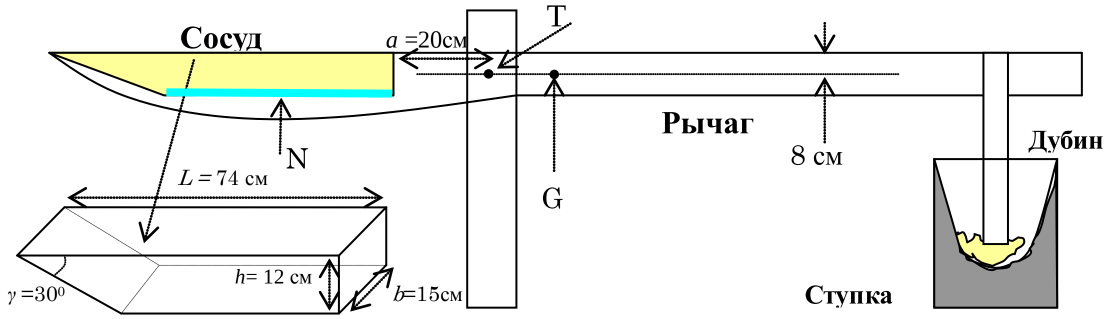


Рис. 3. Конструкция и размеры устройства

1. Параметры устройства.

В начальный момент сосуд пуст и рычаг расположен горизонтально. Затем вода втекает в сосуд до тех пор, пока рычаг не начинает поворачиваться. Масса воды в сосуде в этот момент равна $m = 1.0$ кг.

1.1. Определите расстояние от центра масс G рычага до оси вращения T. Известно, что линия GT горизонтальна, когда сосуд пуст.

1.2. Вода начинает вытекать из сосуда, когда угол между рычагом и горизонтальной осью достигает некоторого значения α_1. Вода полностью выливается из сосуда, когда значение этого угла становится равным α_2. Вычислите значения углов α_1 и α_2.

1.3. Пусть $\mu(\alpha)$ – суммарный вращающийся момент (относительно оси T), создаваемый весом рычага и воды в сосуде. При некотором угле $\alpha = \beta$ этот момент становится равным нулю $\mu(\alpha)$ = 0. Рассчитайте значения угла β и массы m_1 воды в сосуде в этот момент.

2. Параметры рабочего режима.

Пусть вода втекает в сосуд с малой постоянной скоростью. **Количество воды, втекающей в сосуд, за время движения рычага, пренебрежимо мало**. В этой части задачи пренебрегайте изменением момента инерции системы в рабочем цикле.

2.1. Нарисуйте схематический график зависимости вращающего момента μ от угла α, $\mu(\alpha)$, в течение рабочего цикла. Приведите явные значения и $\mu(\alpha)$ при углах α_1, α_2, и $\alpha = 0$.

2.2. Используя график, нарисованный в 2.1., дайте геометрическую интерпретацию значений общей работы W_{total}, произведенной моментом сил тяжести $\mu(\alpha)$; и работы W_{pounding}, совершенной дубинкой над рисом, за один цикл.

2.3. С помощью графика, изображающего зависимость $\mu(\alpha)$, оцените максимальный угол отклонения α_0 и W_{pounding} (предполагая, что кинетическая энергия воды, текущей в сосуд и из него пренебрежимо мала.) Можете заменить кривые ломанными линиями, для облегчения расчетов.

3. Мертвый режим.

Пусть вода втекает в сосуд с постоянной скоростью натекания (массы в единицу времени) Φ. В данной части необходимо учитывать количество воды, втекающей в сосуд при движении рычага.

3.1. Будем считать, что сосуд **всегда наполнен водой** (которая переливается через его край)

3.1.1. Нарисуйте примерный график зависимости вращающего момента μ от угла α в окрестности $\alpha = \beta$. К какому виду равновесия принадлежит положение рычага при $\alpha = \beta$?

3.1.2. Найдите аналитическую формулу для вращающего момента $\mu(\alpha)$ как функции $\Delta\alpha$, когда $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, причем $\Delta\alpha$ мало.

3.1.3. Запишите дифференциальное уравнение движения рычага, который движется с нулевой начальной скоростью от начального положения $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ мало). Покажите, что это движение с хорошей точностью является гармоническими колебаниями. Рассчитайте их период τ .

3.2. При заданной скорости натекания Φ, сосуд наполнен водой все время, только в том случае, когда рычаг движется достаточно медленно. Амплитуда гармонических колебаний зависит от Φ . Определите значение Φ_1 скорости натекания Φ (в кг/с) такое, чтобы рычаг мог совершать гармонические колебания с амплитудой 1°.

3.3. Если скорость Φ велика настолько, что при колебательном движении рычага, когда угол наклона изменяется от α_2 до α_1, то сосуд всегда остается наполненым водой. В этом случае устройство не может действовать в рабочем режиме. Допуская, что движение рычага является гармоническими колебаниями, оцените минимальную скорость течения Φ_2, при которой устройство перестает функционировать в рабочем режиме.

Принцип экстремума

Всего баллов: 10

A Принцип экстремума в механике

Рассмотрим гладкую горизонтальную плоскость xy (Рис. 1). Она разделена на две области I и II линией AB, которая удовлетворяет уравнению $x = x_1$. Потенциальная энергия точечной частицы массы m равна нулю ($V = 0$) в области I и $V = V_0$ в области II. Частица начинает двигаться из начала координат O со скоростью v_1 по прямой, направленной под углом θ_1 к оси x. Она достигает точки P в области II, имея скорость v_2, направленную под углом θ_2 к оси x. Силой тяжести и релятивистскими эффектами можно пренебречь во всех пунктах этой задачи.

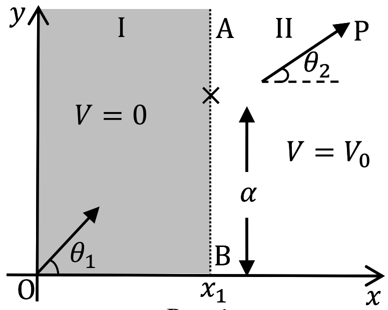


Рис. 1

A1	Получите выражение для v_2 через m, v_1 и V_0.	**0.2**
A2	Выразите v_2 через v_1, θ_1 и θ_2.	**0.3**

Определим величину, называемую действием $A = m\int v(s)ds$, где ds — бесконечно малый элемент длины вдоль траектории частицы массы m, движущейся со скоростью $v(s)$. Интеграл берется вдоль траектории. Например, для частицы, движущейся с постоянной скоростью v по окружности радиуса R, действие A за один оборот равно $2\pi mRv$. Можно показать, что для частицы с постоянной энергией E, из всех возможных траекторий между двумя фиксированными точками реализуется та, вдоль которой действие A, определенное выше, имеет экстремум (минимум или максимум). Это утверждение известно как принцип наименьшего действия (ПНД).

A3	ПНД подразумевает, что траектория частицы, движущейся между двумя фиксированными точками в области постоянного потенциала, — это прямая. Пусть координаты двух фиксированных точек O и P (Рис. 1) — это $(0,0)$ и (x_0, y_0) соответственно; а (x_1, α) — это координаты точки на границе, где частица переходит из области I в область II. Отметим, что величина x_1 фиксирована, и действие A зависит только от координаты α. Получите выражение для действия $A(\alpha)$. Используя ПНД, получите соотношение между v_1/v_2 и упомянутыми координатами.	**1.0**

B Прицип экстремума в оптике

Луч света переходит из среды I в среду II с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно. Эти две среды разделены линией, параллельной оси x. Луч света распространяется под углом i_1 к оси y в среде I и под углом i_2 в среде II. Чтобы получить траекторию луча, воспользуемся другим принципом экстремума (максимума или минимума) — принципом наименьшего времени Ферма.

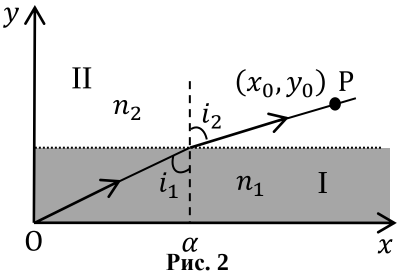


Рис. 2

B1	Принип утверждает, что между двумя фиксированными точками луч света движется по такому пути, что время движения имеет экстремум. Получите соотношение между $\sin i_1$ и $\sin i_2$, исходя из принципа Ферма.	**0.5**

На Рис.3 схематически показана траектория лазерного луча, падающего горизонтально на раствор сахара, в котором концентрация сахара уменьшается с высотой. Следовательно, показатель преломления раствора также уменьшается с высотой.

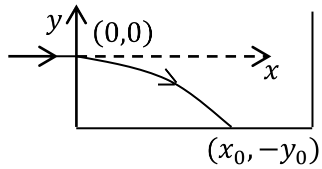


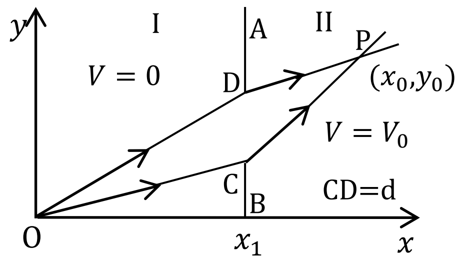
Рис. 3: Сосуд с раствором сахара

B2	Пусть показатель преломления $n(y)$ зависит только от y. Используя уравнение, полученное в пункте B1, получите выражение для углового коэффициента касательной к пути луча dy/dx. Выразите его через показатель преломления n_0 (при $y = 0$) и $n(y)$.	**1.5**
B3	На Рис. 3 показано, что лазерный луч направлен горизонтально из начала координат $(0,0)$ в раствор сахара. Он входит в раствор на расстоянии y_0 от дна сосуда. Считайте, что $n(y) = n_0 - ky$, где n_0 и k — положительные константы. Получите выражение для траектории лазерного луча в таком	**1.2**

	сосуде, т.е. найдите, как x зависит от y и остальных параметров задачи. Примечание: $$\int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + \text{const}, \quad \text{где } \sec\theta = 1/\cos\theta \text{ или}$$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{const}$$	
B4	Рассчитайте значение x_0 точки, в которой луч падает на дно сосуда. Считайте, что $y_0 = 10.0$ см, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050$ см$^{-1}$.	**0.8**

C Принцип экстремума и волновая природа материи

Теперь исследуем связь между ПНД и волновой природой движущейся частицы. Для этого предположим, что частица, движущаяся из точки O в точку P может выбирать все возможные траектории. Будем искать траекторию, соответствующую взаимоусиливающей интерференции волн де Бройля.

C1	Пусть частица переместилась на бесконечно малое расстояние Δs вдоль своей траектории. Свяжите изменение фазы $\Delta\varphi$ ее волны де Бройля с изменением действия ΔA и постоянной Планка.	**0.6**
C2	Вспомните задачу из пункта A, где частица движется из точки O в точку P (Рис. 4). Пусть между двумя областями, вдоль их границы AB, установлена непрозрачная перегородка. В ней есть небольшая щель CD ширины d, причем $d \ll (x_0 - x_1)$ и $d \ll x_1$. Рассмотрим две крайние траектории OCP и ODP, причем OCP соответствует классической траектории, рассмотренной в части A. Найдите в первом приближении разность фаз $\Delta\varphi_{CD}$ между двумя траекториями.  **Рис. 4**	**1.2**

D Интерференция волн материи

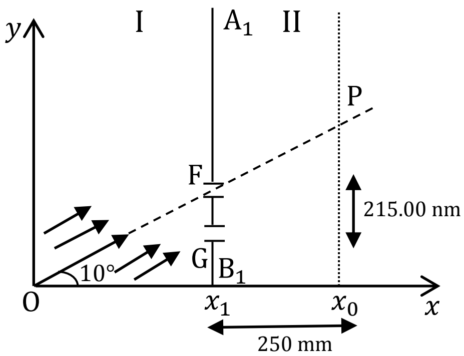


Рис. 5

Электронная пушка, находящаяся в точке O, направляет коллимированный пучок электронов на узкую щель в точке F в непрозрачной перегородке A_1B_1. Перегородка расположена на линии $x = x_1$, так что OFP — это прямая. P — это точка на экране при $x = x_0$ (Рис. 5). Скорость в области I равна $v_1 = 2.0000 \times 10^7$ м/с, угол $\theta = 10.0000^\circ$. Потенциал в области II выбран так, что скорость $v_2 = 1.9900 \times 10^7$ м/с. Расстояние $x_0 - x_1$ равно 250.00 мм. Взаимодействием между электронами пренебречь.

D1	Рассчитайте ускоряющий потенциал U_1, считая, что электроны ускоряются в точке O из состояния покоя.	**0.3**
D2	В перегородке A_1B_1, ниже щели F на расстоянии 215.00 нм (1 нм = 10^{-9}м), проделали еще одну такую же щель G. Разность фаз между волнами де Бройля, пришедшими в точку P через щели F и G, может быть представлена как $2\pi\beta$. Вычислите β.	**0.8**
D3	Чему равно наименьшее расстояние Δy от точки P до точки на экране, в которой вероятность обнаружить электрон равна нулю? Примечание: $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$.	**1.2**
D4	Луч имеет квадратное сечение 500 нм × 500 нм, длина установки — 2 м. Какова минимальная плотность потока электронов I_{min}, если в среднем в установке в любой момент времени имеется хотя бы один электрон? Плотность потока электронов — это количество электронов, проходящих в единицу времени через единичную площадку по нормали к ней.	**0.4**

Нелинейная динамика в электрических цепях (10 баллов)

Прежде чем приступить к выполнению этого задания, прочитайте инструкцию.

Введение

Бистабильные нелинейные полупроводниковые элементы (например, тиристоры) широко используются в электронике в качестве переключателей и генераторов электромагнитных колебаний. С помощью тиристоров обычно управляют переменными токами в силовой электронике, например преобразуют мегаваттные переменные токи в постоянные. Бистабильные элементы также могут быть модельными системами для изучения самоорганизации в физике (это рассматривается в части B этой задачи), в биологии (часть C) и в других областях современной нелинейной динамики.

В этой задаче мы изучим неустойчивости и нетривиальные динамические свойства электрических цепей, содержащих элементы с нелинейными вольт-амперными характеристиками. Мы также рассмотрим возможные применения подобных схем в электронике и в моделировании биологических систем.

Часть A. Стационарные состояния и неустойчивости (3 балла)

На рисунке 1 показана так называемая **S-образная** вольт-амперная характеристика нелинейного элемента X. В диапазоне напряжений между $U_\mathrm{h} = 4.00$ В (удерживаемое напряжение) и $U_\mathrm{th} = 10.0$ В (пороговое напряжение) эта вольт-амперная характеристика многозначна. График на рисунке 1 является ломанной (каждая ветвь представляет собой отрезок). Если верхнюю ветвь графика продлить, то она пройдет через начало координат. Это приближение хорошо описывает реальные тиристоры.

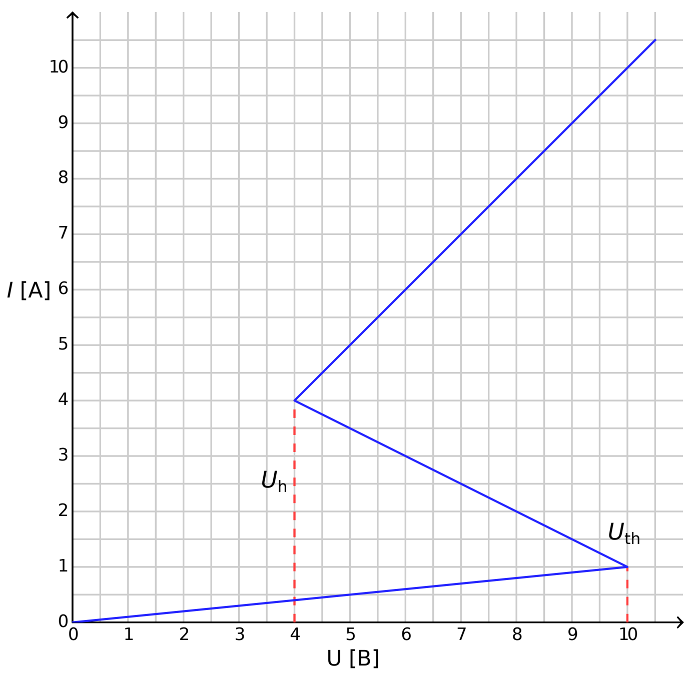


Рисунок 1: Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента X.

A.1 С помощью графика определите сопротивление R_{on} элемента X на верхней ветви вольт-амперной характеристики и R_{off} на нижней ветви соответственно. Средняя ветвь описывается уравнением **0.4pt**

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Найдите значения параметров I_0 и R_{int}.

Элемент X соединен последовательно (рисунок 2) с резистором R, катушкой индуктивности L и идеальным источником напряжения $\mathcal{E}$. Если электрическая цепь находится в стационарном состоянии, то сила тока постоянна во времени, $I(t) = \text{const}$.

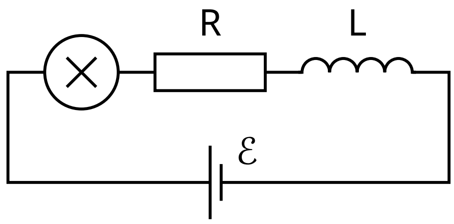


Рисунок 2: Электрическая цепь с элементом X, резистором R, катушкой индуктивности L и источником напряжения $\mathcal{E}$.

A.2 Сколько возможных стационарных состояний может иметь электрическая цепь, изображенная на рисунке 2, при некотором заданном значении $\mathcal{E}$ и при $R = 3.00\ \Omega$? Каким будет ответ при $R = 1.00\ \Omega$? **1pt**

A.3 Пусть в электрической цепи, показанной на рисунке 2, $R = 3.00\ \Omega$, $L = 1.00$ мкГн и $\mathcal{E} = 15.0$ В. Определите значения сила тока $I_{\text{stationary}}$ и напряжения $V_{\text{stationary}}$ на нелинейном элементе X в стационарном состоянии. **0.6pt**

Пусть электрическая цепь на рисунке 2 находится в стационарном состоянии с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Стационарное состояние называется устойчивым, если после небольшого изменения тока (увеличения или уменьшения) значение тока возвращается к стационарному состоянию. Однако, если система продолжает уходить от стационарного состояния, то оно называется неустойчивым.

A.4 Используйте численные значения заданные в **A.3** и изучите стабильность стационарного состояния с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Является ли стационарное состояние устойчивым или неустойчивым? **1pt**

Часть B. Бистабильные нелинейные элементы в физике: радиопередатчик (5 баллов)

В этой части мы исследуем новую схему электрической цепи (рисунок 3). Нелинейный элемент X соединен с конденсатором емкостью $C = 1.00$ мкФ параллельно. Этот блок включен последовательно с резистором $R = 3.00\ \Omega$ и идеальным источником постоянного напряжения $\mathcal{E} = 15.0$ В. Оказывается, что в этой цепи возникают колебания. За время одного периода колебаний свойства элемента X "перескакивают" по вольт-амперной характеристике с одной ветви на другую.

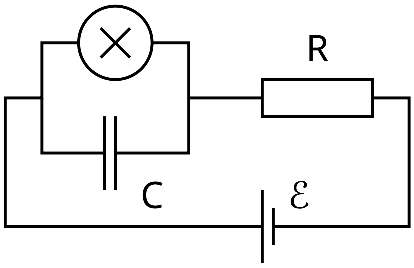


Рисунок 3: Электрическая цепь, состоящая из элемента X, конденсатора C, резистора R и источника напряжения $\mathcal{E}$.

B.1	Нарисуйте цикл одного колебания на вольт-амперной характеристике, в том числе, укажите направление колебания (по часовой или против часовой стрелки). Обоснуйте свой ответ с помощью уравнений и схем.	1.8pt

B.2	Найдите формулы для времён t_1 и t_2, в течение которых система находится на каждой из ветвей вольт-амперной характеристики во время периода колебаний. Определите их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний T, полагая, что временем, необходимым для скачкообразного перехода между ветвями вольт-амперной характеристики, можно пренебречь.	1.9pt

B.3	Оцените среднюю мощность P, рассеянную нелинейным элементом в течение одного колебания. Достаточно привести порядок величины.	0.7pt

Электрическая цепь, показанная на рисунке 3, может использоваться для создания радиопередатчика. Для этого элемент X подключается к одному из концов антенны длины s. Антенна — это длинный прямой провод. Противоположный конец провода свободный. В антенне образуется стоячая электромагнитная волна. Скорость электромагнитной волны в антенне такая же, как и в вакууме. Передатчик настроен на основную гармонику системы с периодом T (из пункта **B.2**).

B.4	Каково оптимальное значение s, если считать, что оно не может быть больше 1 км?	0.6pt

Часть C. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 балла)

В этой части задачи мы рассмотрим применение бистабильных нелинейных элементов к моделированию биологических процессов. Нейрон в человеческом мозге обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Эта свойство называется возбудимостью. Благодаря этому свойству импульсы могут распространяться в сети связанных нейронов, которые образуют нервные системы. Полупроводниковый чип, предназначенный для имитации возбудимости и распространения импульса, называется нейристором.

Попробуем смоделировать простой нейристор, используя электрическую схему с исследованным ранее нелинейным элементом X. Для этого напряжение $\mathcal{E}$ в схеме на рисунке 3 уменьшается до $\mathcal{E}' = 12.0$ В. Колебания прекращаются и система переходит в свое стационарное состояние. Затем напряжение быстро увеличивается до $\mathcal{E} = 15.0$ В и спустя некоторое время τ ($\tau < T$) возвращается обратно к $\mathcal{E}'$ (Рис. 4). Оказывается, что есть некоторое критическое значение τ_{crit}, такое, что поведение системы качественно отличается при $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и при $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

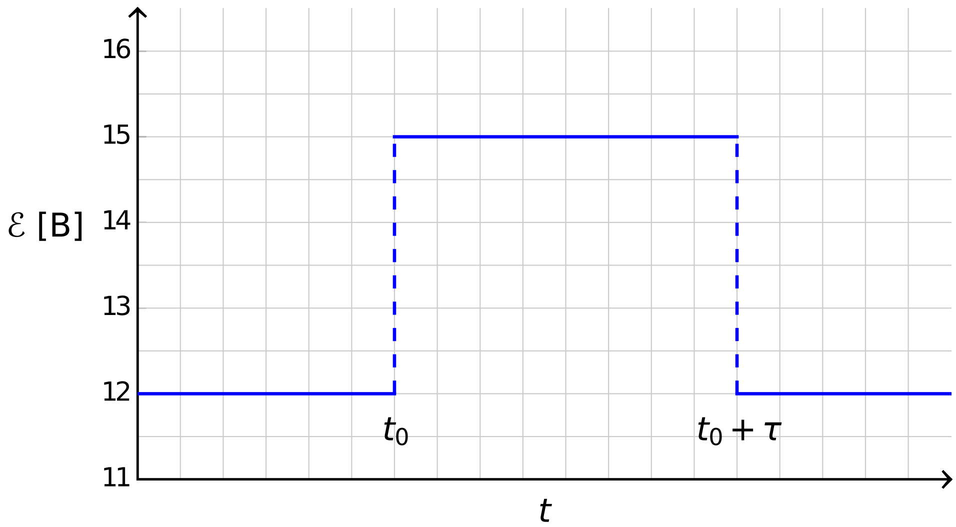


Рисунок 4: Напряжение источника как функция времени.

C.1	Схематически нарисуйте графики временной зависимости тока $I_X(t)$ через нелинейный элемент X для $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и для $\tau > \tau_{\text{crit}}$.	1.2pt

C.2	Найдите выражение для критического времени τ_{crit} и его численное значение, при котором происходит изменение поведения системы.	0.6pt

C.3	Является ли схема нейристором при $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ с?	0.2pt