Розв'язок 1 Запишемо рівняння (1) таким чином

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda)a^2 - \kappa \tag{3}$$

і продиферніцюємо цей вираз по часу

$$\left(\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right) = \frac{4\pi}{3}G\left[\left(\frac{d\rho_m}{dt} + \frac{d\rho_r}{dt} + \frac{d\rho_\Lambda}{dt}\right)a^2 + (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda)2a\frac{da}{dt}\right] \tag{4}$$

Використовуючи рівняння (2)-(4) отримуємо

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3}Ga[(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) + 3(p_m + p_r + p_\Lambda)] \tag{5}$$

Розв'язок 2 В загальному рівняння (2)-(4) можна записати $\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 3H(\rho_i + \omega_i\rho_i) \to \frac{d\rho_i}{dt} = 3(1+\omega_i)\frac{da}{a} \to \rho_i(a) = \frac{A_i}{a^{3(1+\omega_i)}}$. Таким чином $\rho_m = \frac{A_m}{a^3}$, $\rho_r = \frac{A_r}{a^4}$, $\rho_\Lambda = \frac{A_\Lambda}{a^{3(1+\omega_\Lambda)}}$, де A_i - стала величина. Зауважимо, що у випадку, якщо $\omega_\Lambda = -1$, то $\rho_\Lambda = Const$.

Таким чином, рівняння Фрідмана набуває вигляду

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\left[\frac{A_r}{a^4} + \frac{A_m}{a^3} + \frac{A_\Lambda}{a^{3(1+\omega_\Lambda)}}\right] - \frac{\kappa}{a^2} \tag{6}$$

і очевидно, що з початку моменту виникнення Всесвіту, коли масштабний фактор був дуже малий, домінуючою складовою була радіаційна, потім основний вклад давала нерелятивістська речовина, а зараз динамікою Всесвіту керує темна енергія.

Розв'язок 3

У випадку, коли Всесвіт складається тільки з однієї компоненти, маємо $\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_i(t)$, де $\rho_i(t) = \frac{A_i}{a^{3(1+\omega_i)}}$. Тоді $\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{A_i}{a^{3(1+\omega_i)}}$. Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді $a(t) = act^\alpha$, де α – невідома величина.

$$\frac{\alpha^2}{t^2} = \frac{8\pi}{3}G\frac{A_i}{c^{3(1+\omega_i)}t^{3(1+\omega_i)\alpha}} \to 3(1+\omega_i)\alpha = 2 \to \alpha_i = \frac{2}{3(1+\omega_i)} \to c^{-1} = \left(\frac{3\alpha^2}{8\pi GA_i}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

Таким чином 1) для радіаційного Всесвіту $a(t) = c_r t^{1/2}$, $c_r = \left(\frac{32\pi GA_i}{3}\right)^{1/4}$, $\rho_r(t) = \frac{A_r}{a^4} = \frac{3}{32\pi Gt^2}$, $H(t) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{1}{2t}$, 2) для Всесвіту, у якому домінує $\omega_m = 0$, $\alpha_m = \frac{2}{3}$, $a(t) = c_m t^{2/3}$, $c_m = (6\pi GA_m)^{1/3}$, $\rho_m = \frac{A_m}{((6\pi A_m)^{1/3}t^{2/3})^3} = \frac{1}{6\pi Gt^2}$, $H(t) = \frac{2}{3t}$

Розв'язок 4 Використовуючи знайдений в задачі 3 вираз для $\alpha_i = \frac{2}{3(1+\omega_i)}$, знаходимо, що $a(t) = At^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$, звідки $H(t) = \frac{1}{At^{\frac{2}{3(1+\omega)}}}\frac{d}{dt}At^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = \frac{2}{3(1+\omega)}\frac{1}{t}$

Розв'язок 5

Для випадку, коли Всесвіт плоский і в ньому присутні матерія і випромінювання, маємо $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_r^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right)$. Позначаючи $\frac{a_0}{a} = x$ і використовуючи $\rho_r^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, $\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_{cr}}$, $\Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0}{\rho_{cr}}$ запишемо це рівняння таким чином

$$\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_r^0\frac{1}{x^4} + \Omega_m^0\frac{1}{x^3}\right] \tag{8}$$

Вклад від густин енергій матерії і випромінювання вирівнюється при значенні $x_0 = \frac{\Omega_r^0}{\Omega_m^0}$. В цей момент вік Всесвіту є $t_0 = \frac{1}{H_0}\int\limits_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m^0 x^{-1} + \Omega_r^0 x^{-2}}} = \frac{2}{3H_0}\frac{(\Omega_r^0)^{3/2}}{(\Omega_m^0)^2}$

Розв'язок 6

1. $\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \Omega_m^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \rightarrow t = \frac{1}{H_0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{(\Omega_m^0 x^{-1})^{1/2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}$ (так як Всесвіт складається з однієї матерії, то $\Omega_m^0 = 1$)

2. $\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \Omega_r^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \rightarrow t = \frac{1}{H_0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{(\Omega_r^0 x^{-2})^2} = \frac{1}{2H_0}$

3. Використовуючи результат задачі 5, маємо

$$t = \frac{1}{H_0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m^0 x^{-1} + \Omega_r^0 x^{-2}}} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_r^0}}\int\limits_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}\right) x + 1}} \qquad (9)$$

вводячи змінну $\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0} x + 1 = y$ матимемо

$$t = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_r^0}} \int\limits_0^{\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}+x} \frac{\left(\frac{\Omega_r^0}{\Omega_m^0}\right)(y-1)}{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m^0}}\left[\int\limits_0^{\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}+x} \sqrt{y} dy - \int\limits_0^{\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}+x} \frac{dy}{\sqrt{y}}\right]$$

$$= \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m^0}}\left[\frac{2}{3} y^{3/2}\Big|_0^{\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}+x} - 2y^{1/2}\Big|_0^{\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}+x}\right]$$

$$= \frac{1}{H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_m^0}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0} + x\right)^{3/2} - 2\left(\frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0} + x\right)\right] \qquad (10)$$

Розв'язок 7 $H^2 = H_0^2\left[\Omega_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda^0\right] \rightarrow \ddot{a}\dot{a} = H_0^2[-\Omega_m^0 \frac{a_0^3}{a^2} + 2\Omega_\Lambda a_0]\dot{a}$. Прискорення $\ddot{a}$ змінює свій знак при $-\Omega_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + 2\Omega_\Lambda^0 = 0$, тобто при $(1+z)^3 = \frac{2\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0} \rightarrow z = \left(\frac{2\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m}\right)^{1/3} - 1 \simeq 0.85$

Розв'язок 8 Маємо $\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2\left(\Omega_m^0 \frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda^0$. Розв'язвом цього рівняння є $a(t) = a_0\left(\frac{\Omega_m^0}{\Omega_\Lambda^0}\right)^{1/3}\left[sh(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda^0} H_0 t)\right]^{3/2}$. На даний момент $a(t) = a_0 \rightarrow$ вік Всесвіту $t_0 = \frac{2}{3\Omega_\Lambda}\frac{1}{H_0} arsh\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}} = 1.38 \cdot 10^10$ років.

Розв'язок 9

9.1) $H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho_r = \frac{8\pi}{3} G \frac{\pi^2}{30} g T^4 \rightarrow H(T) = \left(\frac{8\pi^3}{90} g\right)^{1/2} T^2$

9.2) $\rho_r = \rho_r^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 = \frac{\pi^2}{30} g T^4 \rightarrow aT \simeq const$, так як $a(t) \sim t^{1/2}$, то $T \simeq \frac{const}{t^{1/2}}$.

Розв'язок 1 Для Всесвіту, в якому домінує релятивістська речовина $p = \frac{13}{\rho}$, тому $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -2\frac{1}{a}\frac{da}{dt}(\rho + \frac{1}{3}\rho)$, звідси $\rho = \rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^4$, тобто $\rho \sim \frac{1}{a^4}$. Так як з іншого боку $\rho = \alpha T^4$, то $Ta = const$

Розв'язок 2 $H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\alpha_1 T^4$,звідси $H = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\alpha_1 G}T^2$

Розв'язок 3 $\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho}$. Враховуючи, що $aT = const$ ш $\rho = \alpha T^4$ маємо $T\frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\alpha T^4} \to -\left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\alpha}T^2 \to -\frac{dT}{T^3} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\alpha}dt \to \frac{1}{2T^2} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\alpha}t \to T = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32\pi G\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}$

Розв'язок 4 Враховуючи, що $G^{-\frac{1}{2}} = M_{Pl} \simeq 10^{19}$ ГеВ і те, що $\alpha \sim 10$ маємо $t = \sqrt{\frac{3}{32\pi\alpha}}\frac{M_{Pl}}{T^2} = \sqrt{\frac{3}{32\pi 10}}$, так як ГеВ$^{-1} = 10^{-24}$ с, то $t(T = 1\text{МеВ}) = 0.75$ с, $t(T = 1\text{ТеВ}) = 10^{-10}$ с

Розв'язок 5 $aT = const \to \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{T(t)}{T(t_0)} \to T(z) = T(t_0)(1 + z)$

Розв'язок 6 1.Розглянемо ситуацію, коли всі баріони складаються з протонів. 2. Вважаємо, що середовище з електронів, протонів і атомів водню знаходиться в термодинамічній рівновазі.

Нас цікавить температура рекомбінації, тобто температура, при якій стає вигідно утворення атомів водню з протонів і електронів, тобто температури ~ 1 еВ (енергія зв'язку електронів в атомах)

3. При таких температурах електрони і протони являються нерелятивістськими, тобто вирази для рівноважної концентрації мають вигляд:

$$n_e = g_e\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{\mu_e - m_e}{T}}, \quad g_e = 2 \tag{1}$$

$$n_p = g_p\left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{\mu_p - m_p}{T}}, \quad g_p = 2 \tag{2}$$

$$n_H = g_H\left(\frac{m_H T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{\mu_H - m_H}{T}}, \quad g_H = 4 \tag{3}$$

В (1)-(3) хімічні потенціали нневідомі величини, які потрібно виключити. Температура рекомбінації визначається з умови $n_p(T_r) = n_H(T_r)$. Для виключення хім. потенціалів з рівнянь (1)-(3) використаємо (a) закон збереження повного баріонного числа

$$n_p + n_H = n_B \tag{4}$$

або враховуючи баріон-фотонне співвідношення $\frac{n_B(T)}{n_\gamma(T)} = \eta_B = 6.15 \cdot 10^{-10}$ будемо мати $n_p + n_H = 10^{-10}n_\gamma(T)$, де $n_\gamma(T) = \frac{g_\gamma\zeta(3)}{\pi^2}T^3$ (для простоти тут не враховано, що густина числа всіх протонів відрізняється від через наявність ядер гелію). (b) з хімічної рівноваги реакції $p + e = H + \gamma$ слідує

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad (\mu_\gamma = 0). \tag{5}$$

(c) з умови електричної нейтральності середовища отримаємо

$$n_p = n_e \tag{6}$$

Маємо 6 умов (1)-(6) з котрих при кожному значенні температури можна визначити три невідомі густини числа частинок n_e, n_p, n_H і три невідомі хім. потенціали μ_e, μ_p, μ_H. Найпростіший спосіб роз'язання системи (1)-(6):

перемножимо (1) і (2): $n_p \cdot n_e = g_p \cdot g_e \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu_p+\mu_e-m_e-m_p}{T}}$ використаємо (5) і (3), отримаємо

$$n_p \cdot n_e = g_p \cdot g_e \Big(\frac{m_e T}{2\pi}\Big)^{\frac{3}{2}} \Big(\frac{m_p T}{2\pi}\Big)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu_H - m_H + m_H - m_e - m_p}{T}}$$

$$n_p \cdot n_e = g_p \cdot g_e \frac{\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{m_H T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}} g_p \left(\frac{m_H T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu_H - m_H}{T}} e^{-\frac{m_p + m_e - m_H}{T}}$$

Вважаємо, що $\left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq \left(\frac{m_H T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$ та враховуючи $\frac{g_p g_e}{g_H} = 1$ і $m_p + m_e - m_H = \Delta = 13.6$ еВ, а також враховуючи (6) отримаємо:

$$n_p^2 = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} n_H e^{-\frac{\Delta_B}{T}} \tag{7}$$

Введемо безрозмірне співвідношення $X_p = \frac{n_p}{n_B}$, $X_H = \frac{n_H}{n_B}$, тоді для (4) маємо $X_p + X_H = 1$ і (7) можна замінити на $\frac{n_p^2}{n_B^2} = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{n_H}{n_B^2} e^{-\frac{\Delta_H}{T}} \rightarrow$ $X_p^2 n_B = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} X_H e^{-\frac{\Delta_H}{T}} \rightarrow$

$$e^{\frac{\Delta_H}{T}} \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{\frac{3}{2}} n_B X_p^2 + X_p = 1 - \text{рівняння Саха}$$

Враховуючи, що $n_B(T) = \eta_\gamma n_\gamma(T) = 6.15 \cdot 10^{-10} \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$ запишемо це рівняння у вигляді

$$X_p + e^{\frac{\Delta_H}{T}} \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{\frac{3}{2}} 6.15 \cdot 10^{-10} \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 X_p^2 = 1, \rightarrow$$

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} 6.15 \cdot 10^{-10} \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} X_p^2 e^{\frac{\Delta_H}{T}} = 1 \tag{8}$$

Другий доданок

$$\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} 6.15 \cdot 10^{-10} \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} X_p^2 e^{\frac{\Delta_H}{T}} = X_H \tag{9}$$

є відносною концентрацією атомів водню, вираженою через X_p. Звідси видно, що X_H стає вагомим при, тобто при $e^{\frac{\Delta_H}{T}} \gg 10^{10} \rightarrow T \ll \Delta_H$. Момент рекомбінації наступає, коли $X_H(T_r) \simeq X_p(T_r) \sim 1$, тоді з (9) знаходимо температуру рекомбінації

$$\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} 6.15 \cdot 10^{-10} \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\Delta_H}{T}} = 1 \rightarrow$$

$$\frac{\Delta_H}{T_r} = -ln \left[\frac{2\zeta(4)}{\pi^2} 6.15 \cdot 10^{-10} \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \rightarrow$$

$$\frac{\Delta_H}{T_r} = ln\left[\frac{\pi^2}{2\zeta(3)}\frac{1}{6.15}10^{10}\left(\frac{2\pi T_r}{m_e}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

Розв'язавши це рівняння, наближено знаходимо $T_r \sim 0.33$ еВ

Розв'язок 7 $(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = (n_B^0 - n_{\bar{B}}^0)a_0^3$ (індекс 0 означає значення величини на даний момент). Зараз антиречовина у Всесвіті відсутня, тому $n_{\bar{B}}^0 = 0$. Тоді $\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B}a^3 = \frac{n_B^0}{n_B}a_0^3 \to \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B} = \frac{n_B^0}{n_B}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \left|at = const\right| = \frac{n_B^0}{n_B}\left(\frac{T}{T_0}\right)^3$.

Враховуючи, що $n_B \sim \beta T^3$, а $n_\gamma^0 \sim \beta_\gamma T_0^3$, отримуємо

$$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B} = \frac{n_B^0 \beta_\gamma}{\beta T^3}\frac{T^3}{n_\gamma^0} = \frac{\beta_\gamma}{\beta}\frac{n_B^0}{n_\gamma^0} \sim 10^{-9}$$

Розв'язок 8 $\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z \to \frac{d}{dt}\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right) = d(1+z) \to -\frac{a(t_0)}{a(t)}\frac{1}{a}\frac{da}{dt}dt = dz \to dt = -\frac{dz}{(1+z)H(z)} \to t_U = -\int\limits_{\infty}^{z}\frac{dz}{(1+z)H(z)} = \int\limits_{z}^{\infty}\frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_{DE}(1+z)^{3(1+\omega_{DE})}}}$

Розв'язок 1

Маємо, що швидкість обертання навколо центру галактики $v_{circ} = c \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_0}$
Відстань від центру галактики $r_x = d \cdot \beta$ Звідси маса галактики $M_{tot} = \frac{v_{circ}^2 r_x}{G}$

Розв'язок 2

Використовуючь сферично-симетричну модель маємо густину темної матерії в сферы радіусом r_x $\rho_{DM} = \frac{M_{tot} - M_{obs}}{\frac{4}{3}\pi r_x^3}$
Маємо, що $\Delta p \sim m v_{circ}$, об'єм елементарної комірки $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \geq \frac{\hbar^3}{8} \frac{1}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} \sim \frac{\hbar^3}{8 m^3 v_{circ}^3} = 1.5613 \cdot 10^{41}$ кг. Звідси, враховуючи принцип Паулі (не більше двох частинок в елементі фазового об'єму) $m \sim \left(\frac{\rho_{DM} \hbar^3}{16 v_{circ}^3}\right)^{1/4}$
Звідси $m = 5eV$.

Розв'язок 3

Помістимо початок координат в центр галактики. Промінь рухається майже точно паралельно вісі x. Введемо координату кутову ϕ, таку, що $r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} = \frac{r_0}{\cos\phi}$, $x = r_0 \tan\phi$.
Маємо, що мала заміна кута виглядає як $\mathrm{d}\beta = \frac{a_y \cdot \mathrm{d}t}{c}$, де прискорення, перпендикулярне траекторії $a_y = \frac{GM_{tot}}{r^2}\cos\phi$, $\mathrm{d}t = dx/c$. Звідси $\beta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{GM_{tot}}{c^2 r_0}\cos\phi \mathrm{d}\phi = \frac{2GM_{tot}}{c^2 r_0}$

Розв'язок 4

Розглянемо планарну задачу в площині, з координатами x, y, $r^2 = x^2 + y^2$, та враховуючи полярні координати $x = r \cdot \cos\phi$, $x = r \cdot \sin\phi$. Координата x для променя з прицільним параметром r_0 веде себе як $x = r_0 \mathrm{tg}\phi$, $r = \frac{r_0}{\cos\phi}$
Нехай $\beta(\phi)$ — кутове зміщення променя відносно прямолінійної траекторії, в точці з кутовою координатою ϕ. Ми можемо ввести координатну швидкість фотона $v = \frac{\mathrm{d}r}{dt}$. Тоді показник заломлення (беручи до уваги, що $\mathrm{d}s = 0$) $n(x, y) = \frac{v}{c} \approx 1 + \frac{2U}{c^2}$. Задача перетворюється на задачу про рух світла в сферично-симетричному середовищі майже паралельно вісі $0x$ з показником заломлення $n(r)$. Кут падіння веде себе як $i = \phi + \beta(\phi)$. $\mathrm{d}i = \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\phi - \cot\phi \frac{\mathrm{d}n}{n}$,
$\mathrm{d}\beta = -\cot\phi \frac{\mathrm{d}n}{n}$ $\mathrm{d}n = n'(r)\frac{x}{r}\mathrm{d}x = n'(r)\frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi}$
$n'(r) = -\frac{2GM_{tot}}{r^2}$

Звідси $\beta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \frac{2GM_{tot}\cos\phi}{c^2 r_0} = \frac{4GM_{tot}}{c^2 r_0}$

Задача 1

4-імпульс першої частинки $p_1^\nu = \{\frac{m_1 c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}, \frac{m_1 \vec{v_1}}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}\}$, другої $p_2^\nu = \{m_2 c, \vec{0}\}$, частинки, що виникла після зіткнення $p^\nu = \{\frac{Mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\}$.

Згідно закону збереження 4-імпульсу $p_1^\nu + p_2^\nu = p^\nu$ маємо:

1) $(p_1^\nu + p_2^\nu)^2 = (p^\nu)^2 \Rightarrow (p_1^\nu)^2 + 2p_1^\nu p_2^\nu + (p_2^\nu)^2 = (p^\nu)^2$.
Так як $(p^\nu)^2 = m^2c^2$ маємо $m_1^2 c^2 + \frac{2m_1 m_2 c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + m_2^2 c^2 = M^2 c^2 \Rightarrow$
$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}} \Rightarrow E = Mc^2$
2) Закон збереження імпульсу:

$$\frac{m_1 \vec{v_1}}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1}$$

Закон збереження енергії:

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + m_2 c^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2}$$

Ділимо 1 на 2:

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v_1}/\sqrt{1-v_1^2/c^2}}{m_1/\sqrt{1-v_1^2/c^2} + m_2} = \frac{\vec{v_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\sqrt{1-v_1^2/c^2}}$$

Задача 2

4-імпульси до зіткнення: $p_1^\nu = \{\frac{E_0+T_0}{c}, \vec{p_1}\}$, $p_2^\nu = \{\frac{E_0}{c}, \vec{0}\}$, після зіткнення: $p_1^{'\nu} = \{\frac{E_0+T_0}{c}, \vec{p_1'}\}$ $p_2^{'\nu} = \{\frac{E_0}{c}, \vec{p_2'}\}$.

Закон збереження 4-імпульсу запишемо наступним чином:

$$p_1^\nu + p_2^\nu - p_1^{'\nu} = p_2^{'\nu} \tag{3}$$

Піднімаємо до квадрату ліву і праву частини рівності 3 і враховуємо, що $p^\nu p_\nu = \frac{E_0^2}{c^2}$:

$$(p_1^\nu)^2 + (p_2^\nu)^2 + (p_1^{'\nu})^2 - 2p_1^{'\nu}(p_1^\nu + p_2^\nu) + 2p_1^\nu p_2^\nu = (p_2^{'\nu})^2$$

$$\frac{3E_0^2}{c^2} - 2p_1^{'\nu}(p_1^\nu + p_2^\nu) + 2p_1^\nu p_2^\nu = \frac{E_0^2}{c^2} \tag{4}$$

Врахуємо, що $p_1^\nu p_1^\nu = \frac{(E_0+T_0)E_0}{c^2}$, $p_1'^\nu(p_1^\nu + p_2^\nu) = \frac{E_0+T}{c}\left(\frac{E_0+T_0}{c} + \frac{E_0}{c}\right) - \vec{p_1'}(\vec{p_1} + \vec{0}) = \frac{1}{c^2}(E_0+T)(2E_0+T_0) - |\vec{p_1'}||\vec{p_1}|\cos\theta$

Тоді 4 набуває вигляду

$$\frac{2E_0^2}{c^2} - 2\left\{\frac{(E_0+T)(2E_0+T_0)}{c^2} - |\vec{p_1'}||\vec{p_1}|\cos\theta\right\} + \frac{(E_0+T_0)E_0}{c^2} = 0$$

$$|\vec{p}| = \frac{1}{c}\sqrt{(E_0+T)^2 - E_0^2} = \sqrt{T^2 + 2E_0T} \Rightarrow$$

$$-\frac{2E_0T_0}{c^2} - \frac{4E_0T}{c^2} - \frac{2TT_0}{c^2} - \frac{1}{c^2}\sqrt{T^2+2E_0T}\sqrt{T_0^2+2E_0T_0}\cos\theta + \frac{2E_0T_0}{c^2} = 0$$

$$2T(E_0+T_0) = \sqrt{T(T^2+2E_0)T_0(T_0+2E_0)}\cos\theta$$

$$2T^2(E_0+T_0)^2 = T(T^2+2E_0)T_0(T_0+2E_0)\cos^2\theta$$

$$T = \frac{(T+2E_0)T_0(T_0+2E_0)\cos^2\theta}{2(E_0+T_0)^2}$$

$$T = \left(1 - \frac{(T_0^2(T_0+2E_0)\cos^2\theta}{2(E_0+T_0)^2}\right) = \frac{(2T_0E_0(T_0+2E_0)\cos^2\theta}{2(E_0+T_0)^2}$$

$$T = \frac{2E_0T_0(T_0+2E_0)\cos^2\theta}{2(E_0+T_0)^2 - T_0(T_0+2E_0)\cos^2\theta} = \frac{2E_0T_0\cos^2\theta}{2E_0 + T_0\sin^2\theta}$$

Задача 3

1. З закону збереження 4-імпульсу маємо $p_A^\nu = p_B^\nu + p_C^\nu \to (p_A^\nu)^2 = (p_B^\nu + p_C^\nu)^2 \to m_C^2c^2 = m_A^2c^2 + m_B^2c^2 - 2p_A^\nu p_B^\nu$

В лабораторній системі відліку

$$p_A^\nu = \left\{m_Ac, \vec{0}\right\}, p_B^\nu = \left\{\frac{E_B}{c}, \vec{p_B}\right\}$$

Тоді

$$m_C^2c^2 = m_A^2c^2 + m_B^2c^2 - 2m_Ac\frac{E_B}{c}$$

$$E_B = \frac{m_A^2c^2 + m_B^2c^2 - m_C^2c^2}{2m_A}$$

2. Вважаючи, що частинка B - фотон, а частинка C - це частинка A після випромінювання фотону маємо (на основі частини 1):

$$E_B = h\nu \qquad\qquad m_B = 0$$

$$p_A^\nu = \left\{m_A c, \vec{0}\right\}, \qquad p_B^\nu = \{h\nu/c, \hbar\vec{u}\}, \qquad p_C^\nu = \left\{\frac{m_A c^2 - \delta}{c}, -\hbar\vec{u}\right\}$$

$$m_A^2 c^2 - \frac{(m_A c^2 - \delta)^2}{c^2} = 2 m_A h\nu$$

$$h\nu = \delta - \frac{\delta^2}{2 m_A c^2} < \delta$$

3. В цьому випадку $p_A^\nu = E_A/c, \vec{p_A}$, $p_B^\nu = E_B/c, \vec{p_B}$ і $p_C^\nu = E_C/c, \vec{p_C}$, а з $(p_C^\nu)^2 = (p_A^\nu - p_b \nu)^2$ маємо

$$m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2\frac{E_A E_B}{c^2} + 2(E_B^2/c^2 - m_B^2 c^2)^{1/2}(E_A^2/c^2 - m_A^2 c^2)^{1/2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(m_C^2 - m_A^2 - m_B^2)c^2 + 2\frac{E_A E_B}{c^2}}{(E_B^2/c^2 - m_B^2 c^2)^{1/2}(E_A^2/c^2 - m_A^2 c^2)^{1/2}}$$

Задача 4

Нехай P^ν і Q^ν - 4-імпульси стикаючихся протонів, а W - повна енергія в системі центра мас:

$$W^2 = (P^0 + Q^0)^2$$

Враховуючи, що в системі центра мас $\vec{P} = -\vec{Q}$

$$W = (P^\nu + Q^\nu)^2 + (\vec{P} + \vec{Q})^2 = (P^\nu + Q^\nu)^2$$

Як бачимо W інваріантна відносно системи відліку.
В першому експерименті в лабораторній системі відліку

$$P^\nu = \{E, \vec{P}\}$$

$$Q^\nu = \{m, \vec{0}\}$$

Враховуючи, що $E^2 - \vec{P}^2 = m^2$ маємо

$$W^2 = (E + m)^2 - \vec{P}^2 = 2Em + 2m^2 \approx 2Em, \quad \text{при} \quad \gg m$$

$$W \approx \sqrt{2Em}$$

При E=30 ГеВ, m=0,94 ГеВ W ≈7,5 ГеВ

В експерименті з зустрічними пучками в лабораторній системі відліку

$$P^\nu = \{E, \vec{P}\}$$

$$Q^\nu = \{E, -\vec{P}\}$$

тому

$$W^2 = 4E^2 \qquad\qquad W = 2E$$

При =15 ГеВ =30 ГеВ

Щоб досягнути енергії 30 ГеВ у експерименті першого типу необхідна енергія $E = W^2/2m \approx 480$ ГеВ

Розвязок задачі «Ефект Саньяка»

2.1Запишемо вирази для довжини шляху $L^{\pm}$ в лабораторній (нерухомій) системі відліку (знак «+» відповідає хвилі, напрямок руху якої співпадає з напрямком обертання, знак «-» - хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку) :

$L^{\pm} = 2\pi R + R\Omega t^{\pm}$, де R – радіус кільця, Ω – кутова швидкість обертання, $t^{\pm}$ - час, який витрачають хвилі на обхід кільця. Якщо V_φ – швидкість хвилі відносно нерухомого кільця, то відносно рухомого кільця будемо мати в лабораторній системі відліку згідно релятивістському закону додавання швидкостей

$$V_\varphi^{\pm} = \frac{V_\varphi \pm R\Omega}{1 \pm \frac{V_\varphi R\Omega}{c^2}}$$, де c – швидкість світла.

Тоді часи t^+ і t^- визначаються, як відношення $\frac{L^+}{V_\varphi^+}$ і $\frac{L^-}{V_\varphi^-}$ відповідно:

$$t^{\pm} = \frac{e^{\pm}}{V_\varphi^{\pm}} = \frac{2\pi R(1 \pm \frac{V_\varphi R\Omega}{c^2})}{V_\varphi (1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}$$, звідки знаходимо шукану різницю розповсюдження зустрічних хвиль

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}.$$

2.3) зі знайденого виразу слідує, що різниця не залежить від швидкості розповсюдження хвилі, а отже не залежить від того, чи заповнений оптичним середовищем інтерферометр чи ні і не залежить від природи хвиль, які генеруються джерелом.

2.4) для обчислення різниці фаз зустрічних хвиль на виході кільця, зручно перейти в систему відліку k', яка супроводжує обертання кільцевого інтерферометра, в силу того, що інтерференційна картина, фіксується приймачем, який є нерухомим відносно системи, що обертається. Згідно перетворенням Лоренца різниця часів розповсюдження зустрічних хвиль в системі відліку k' є

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$$, а різниця фаз зустрічних хвиль на виході з кільця

$$\Phi_S = \omega \Delta t' = \frac{4S\Omega\omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$$ (S – площа кільця).