Об упрощениях и предположениях в физике

Речь пойдет о пункте А первой задачи Жаутыковской олимпиады 2011 года. Приведу текст условия:

«Тело представляет собой куб, в котором вырезана сферическая полость радиуса R. Внутри сферической полости в нижней точке покоится шайба, геометрическими размерами которой можно пренебречь. Найдите минимальную горизонтальную скорость (при всех возможных отношениях масс куба и шайбы), которую необходимо сообщить шайбе, чтобы в процессе движения куб оторвался от поверхности стола. Трение в системе полностью отсутствует. При каком отношении масс куба и шайбы M/m достигается минимальное значение скорости шайбы?»

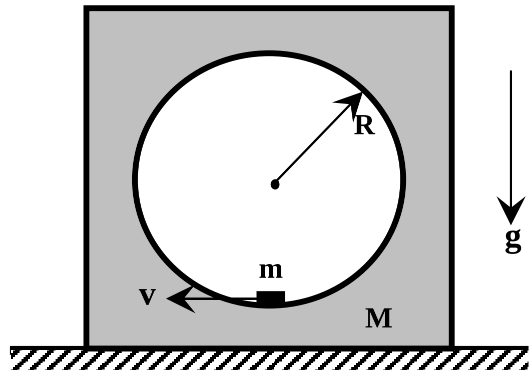
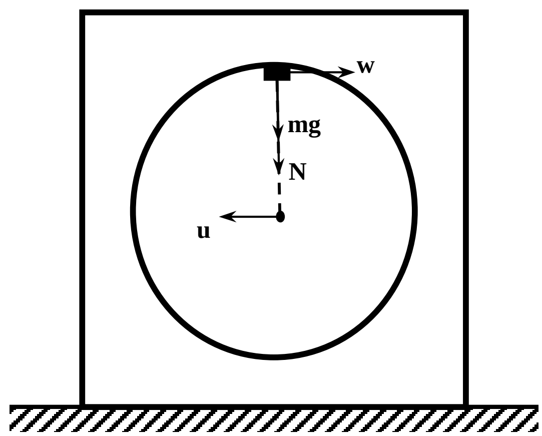


Рисунок из задачи

Звучит довольно интересно, в ней необходимо анализировать движение шайбы в неинерциальной системе отсчета, связанной с кубом. Открываем решение:

«Можно показать, что отрыв куба начинается в тот момент, когда шайба занимает положение, указанное на рисунке»



Из решения

Довольно логичное предположение, хотя.. стоп. При подъеме шайбы угол между центростремительным ускорением и вертикалью уменьшается, но уменьшается и сама скорость! Для проверки гипотезы, принятой авторами без доказательства, приведем полный анализ движения шайбы внутри полости.

Пусть угол между направлением на шайбу и вертикалью в данный момент равен α, скорость куба u, а скорость шайбы относительно куба v. Изначально шайбе придали горизонтальную скорость v_0, когда угол α составлял $180°$. Тогда законы сохранения имеют вид

$$mv_0 = (M+m)u - mv\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$mv_0^2 = Mu^2 + m(v^2+u^2-2vu\cos\alpha) + 2mgR(1+\cos\alpha). \qquad (2)$$

Горизонтальное ускорение куба определяется силой реакции опоры N со стороны шайбы и равно

$$a = \frac{N\sin\alpha}{M}.$$

Для того, чтобы использовать условие отрыва куба, перейдем в систему отсчета, связанную с ним. В этой СО траектория шайбы представляет собой дугу окружности, и на нее действует дополнительная сила инерции

$$F_{\text{in}} = ma = \frac{m}{M}N\sin\alpha. \qquad (3)$$

Запишем уравнение движение шайбы в неинерциальной системе отсчета в проекции на радиальное направление:

$$F_{\text{in}}\sin\alpha + N + mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}. \qquad (4)$$

Используем наконец последнее условие — отрыв куба:

$$N\cos\alpha = Mg. \tag{5}$$

Приведу один из “способов” решения. Исключим из уравнений (1) — (5) величины F_{in}, u, v и α и приведем к безразмерному виду подстановками $m = g = R = 1$:

$$(M+1)\,v^4 + \left(2 + 2M - Mv_0^2\right)v^2 + \left(M^2 + 2M + 1\right) = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно v^2. При малых v_0 это уравнение не имеет решений. Физически это означает, что куб не сможет оторваться. Отрыв же станет возможным при таком минимальном v_0, что данное уравнение имеет хотя бы один корень. В экстремальном случае у уравнения как раз ровно 1 корень, а дискриминант равен нулю:

$$\left(2 + 2M - Mv_0^2\right)^2 = 4\,(M+1)^3\,,$$

откуда

$$v_0^2 = 2\left(1 + \frac{1}{M}\right)\left(1 + \sqrt{1+M}\right).$$

Проанализировав на минимум это выражение, получим $v_0^2 = 8$ при $M = 3$.

Авторы же сразу подставили $\alpha = 0$ в систему уравнений (1) — (5) и решили ее, получив (в безразмерных единицах)

$$v_0^2 = 5 + M + \frac{4}{M}.$$

Минимум этого выражения равен 9 при $M = 2$, что дает минимальное значение $v_0 = 3$, что хуже полученного при точном анализе ответа.

Казалось бы, мы нашли ошибку у авторов. Такие очевидные на первый взгляд предположения часто приводят к ошибкам, видимо, так и случилось в этом случае. В оправдание авторов данной конкретной задачи скажу, что при $M = 3$ и $v = \sqrt{2}$ получим $\cos\alpha = (1+M)/v^2 = 2$, то есть найденный экстремум лежит вне области значений рассматриваемых параметров. Однако, так получилось чисто случайно, и повторение подобных действий может привести к неправильному ответу.