Урок 11. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

1°. Упражнения на использование формулы общего члена

1) Между числами -6 и 3 вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовывали арифметическую прогрессию.

2) Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 7x + a = 0$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 19x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

3) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, в которой $a_k = m$, $a_m = k$ $(k \neq m)$. Найдите a_{k+m}.

2°. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

1) Справедливо следующее утверждение:

Теорема 11.1 (**характеристическое свойство арифметической прогрессии**).

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, и, наоборот, если каждый член последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то последовательность является арифметической прогрессией:

$$\{a_n\} - \textit{арифметическая прогрессия} \;\Leftrightarrow\; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\; n \geqslant 2.$$

Замечание. Если речь идет о конечной арифметической прогрессии, то в формулировке теоремы 11.1 слова “каждый член, начиная со второго” должны быть заменены на слова “каждый член, кроме первого и последнего”.

Доказательство теоремы:

Необходимость: Если $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, то, с одной стороны, $a_n = a_{n-1} + d$, а с другой стороны, $a_n = a_{n+1} - d$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

Достаточность: Пусть $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Тогда $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Обозначим эту величину d. Из полученного равенства следует, что d не зависит от номера n. Но, очевидно, $a_{n+1} = a_n + d$. Следовательно, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

■

2) Доказанное нами характеристическое свойство объясняет, почему арифметическая прогрессия получила такое название.

3) Теорема 11.1 может быть обобщена. А именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 11.2.

> *Пусть k, m, p, q – натуральные числа, причем $k+m=p+q$. Тогда*
> $$a_k + a_m = a_p + a_q.$$
> *В частности,*
> $$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_{i+1} + a_{n-i}.$$

Указание: Для доказательства проще всего воспользоваться формулой общего члена (10.1).

Замечание. В случае конечной арифметической прогрессии эту теорему часто формулируют так: *"суммы членов, равноотстоящих от концов, равны"*.

4) **Упражнения**.

(1) При каких x значения выражений x^2-4, $5x+3$ и $3x+2$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

(2) При каких y значения выражений y^2-2y, $3y+5$, $4y+13$ и $2y^2-y+25$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

(3) Числа a_k, a_n, a_m являются членами арифметической прогрессии (не обязательно последовательными). Известно, что $n = \dfrac{k+m}{2}$. Докажите, что
$$3\left(a_k^2 + a_n^2 + a_m^2\right) = \left(a_k + a_n + a_m\right)^2 + 6\left(a_k - a_n\right)^2.$$

Домашнее задание

1) Восьмой и десятый члены арифметической прогрессии равны соответственно $3,5$ и $2,7$. Найдите девятый член этой прогрессии.

2) Докажите, что значения выражений $(a+b)^2$, a^2+b^2, $(a-b)^2$ при любых a и b являются последовательными членами арифметической прогрессии.

3) При каких y значения выражений y^2+1, y^2+y и $8y-10$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

4) При каких x значения выражений $3x+4$, $2x+3$, x^2 и $2x^2+x$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии?

5) Какие четыре числа надо вставить между числами 4 и -5, чтобы они вместе с данными числами образовывали арифметическую прогрессию?

6) Докажите, что если $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, разность которой отлична от нуля, то при $n > 2$

$$a_1 a_n < a_2 a_{n-1}.$$

7) Докажите, что если корни уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ образуют арифметическую прогрессию, то $q = 0,09\,p^2$.