Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-11

Материалы к урокам по теме:
“Преобразование логарифмических выражений”

Харьков, 2015 г.

Поурочное планирование (14 часов)

Урок 1. Логарифмическая функция. Понятие логарифма.

Урок 2. Формулы логарифмирования.

Урок 3. Формула перехода к другому основанию и ее следствия.

Урок 4. Некоторые свойства логарифмов. Преобразование арифметических выражений, содержащих логарифмы.

Урок 5. Преобразование алгебраических выражений, содержащих логарифмы.

Урок 6. *Самостоятельная работа* по теме: “Преобразование логарифмических выражений”.

Урок 7. Выражение одних логарифмов через другие.

Урок 8. Сравнение значений логарифмических выражений. Метод приведения к общему основанию.

Урок 9. Метод разделяющего числа.

Урок 10. Различные методы сравнения значений логарифмических выражений.

Урок 11. *Самостоятельная работа* по теме: “Выражение одних логарифмов через другие. Сравнение логарифмических выражений”.

Урок 12. Обобщающий урок по теме.

Урок 13. Контрольная работа.

Урок 14. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Понятие логарифма

1°. Логарифмическая функция

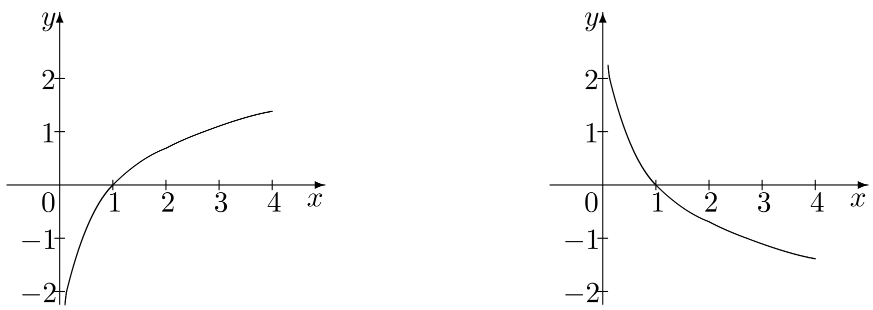
1) Показательная функция $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ строго монотонна. Следовательно, существует обратная к ней функция $g(x) = f^{-1}(x)$.

Определение.

> *Функцию, обратную показательной, называют* ***логарифмической*** *и обозначают* $\log_a x$. *При этом число* a *называют* ***основанием логарифма***.

2) В математическом анализе встречаются, в основном, логарифмы с основанием e. Такие логарифмы называют **натуральными** и обозначают $\ln x$. В прикладных науках чаще всего используют **десятичные** логарифмы, т. е. логарифмы с основанием 10. Их обозначают $\lg x$.

3) Поскольку логарифмическая функция $g(x) = \log_a x$ обратна показательной функции $f(x) = a^x$, то график функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x)$ относительно биссектрисы I-III координатных углов.



а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$

4) Перечислим **свойства логарифмической функции**. Их можно либо доказать непосредственно, либо вывести, опираясь на общую теорию взаимно обратных функций.

   (1) Функция $g(x) = \log_a x$ определена при всех положительных x.

   (2) Областью значений функции $g(x) = \log_a x$ является вся числовая ось.

   (3) Функция $g(x) = \log_a x$, очевидно, не является ни четной, ни нечетной.

   (4) Функция $g(x) = \log_a x$ непериодична.

   (5) Функция $g(x) = \log_a x$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$.

   (6) График функции $g(x) = \log_a x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (т. к. график показательной функции $f(x) = a^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$).

(7) График функции $g(x) = \log_a x$ имеет единственную точку пересечения с осями координат $(1;0)$, т. е.

$$\boxed{\log_a 1 = 0.} \tag{1.1}$$

(8) Функция $g(x) = \log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $a < 1$. Экстремумов логарифмическая функция не имеет.

(9) Функция $g(x) = \log_a x$ на всей области определения выпукла вверх при $a > 1$ и выпукла вниз при $a < 1$.

2°. Логарифм числа

1) Пусть, по-прежнему, $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Т. к. $f(x)$ и $g(x)$ – взаимно обратные функции, то $f(g(x)) = x$. Следовательно,

$$\boxed{a^{\log_a x} = x.} \tag{1.2}$$

2) Равенство (1.2) называют **основным логарифмическим тождеством** и часто используют для определения логарифма:

Определение.

> ***Логарифмом числа*** **x** ***по основанию*** **a** *называют показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить данное число x.*

Замечание. При таком подходе необходимо выяснять, существует ли $\log_a x$, единственен ли он. Вводя логарифмическую функцию как обратную показательной, мы сразу ответили на все эти вопросы.

3) Из того, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, следует также, что $g(f(x)) = x$, т. е.

$$\boxed{\log_a a^x = x.} \tag{1.3}$$

4) Подставляя в (1.3) $x = 1$ получаем, что

$$\boxed{\log_a a = 1.} \tag{1.4}$$

Впрочем, равенство (1.4) сразу следует из определения логарифма.

5) **Упражнения**.

(1) Вычислите:

а) $\log_{1/3} 9$;

б) $\log_{100} 1000$.

(2) При каких значениях x справедливы следующие неравенства:

а) $\lg(5x-1) < \lg(4x+1)$;

б) $\log_{0,5} x > \log_{0,5} \dfrac{x}{2}$;

в) $\log_x 4 > \log_x 3$.

(3) Постройте графики функций:

а) $y = \log_{1/2}(4x-8)$; б) $y = \ln(6-2x)$.

Домашнее задание

1) Вычислите:

(1) $\log_{1/2} 64$; (2) $\log_7 \sqrt[5]{343}$;

(3) $\log_{1000} \sqrt[5]{10}$; (4) $\dfrac{4^{\log_4 48}}{3^{\log_3 16}}$.

2) При каких значениях x справедливы неравенства:

(1) $\log_7 x < \log_7 2x$; (2) $\log_{1/4}\left(x^2-1\right) \geqslant \log_{1/4}(2x+14)$;

(3) $\log_x \sqrt{2} < \log_x 1,2$; (4) $\log_x \sin\dfrac{\pi}{4} < \log_x \sin\dfrac{\pi}{3}$;

3) Что больше: $\log_a N$ или $\log_a \dfrac{1}{N}$, если:

(1) $a > 1$, $N > 1$; (2) $a < 1$, $N > 1$;

(3) $a > 1$, $0 < N < 1$; (4) $a < 1$, $0 < N < 1$?

4) Найдите область определения следующих функций:

(1) $\ln(-4x-6)$; (2) $\log_2(x-4) + \log_{1/9}(4-x)$.

5) Постройте графики функций:

(1) $y = \log_{1/3}|x|$; (2) $y = \left|\log_3(x+2)\right|$.

6) Постройте ГМТ, задаваемые равенствами:

(1) $|y| = \ln(x-1)$; (2) $|y| = \left|\log_4(2x-1)\right|$.

Урок 2. Формулы логарифмирования

1°. Повторение

1) Вычислите:

(1) $\lg\left(10\sqrt[3]{100}\right)$;

(2) $\ln\log_7 7$;

(3) $5^{1-\log_5 2}$;

(4) $9^{\log_3 6-1,5}$;

(5) $\log_{1/3}\log_2 512$;

(6) $\log_{0,5}\sqrt[3]{10+\lg 0,01}$.

2) Найдите область определения следующих функций:

(1) $\ln(3-2x)+\lg\left(4-x^2\right)$;

(2) $\log_{x/(6-x)}\left(x^2-3x+2\right)$.

3) Постройте график функции $y=\sqrt{\lg\sin x}$.

2°. Формулы логарифмирования

1) Сейчас мы познакомимся с несколькими очень важными свойствами логарифмов. Пусть a – положительное действительное число, не равное 1. Тогда:

- Для любого $x>0$ и произвольного действительного α

$$\boxed{\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x;} \tag{2.1}$$

Доказательство: Из определения логарифма сразу следует, что

$$a^{\log_a x^\alpha}=x^\alpha, \qquad a^{\alpha\log_a x}=\left(a^{\log_a x}\right)^\alpha=x^\alpha.$$

Но показательная функция строго монотонна, т. е. принимает каждое свое значение только один раз. Следовательно, $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$.

- Для любых $x>0$ и $y>0$

$$\boxed{\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y;} \tag{2.2}$$

Доказательство: Из определения логарифма сразу следует, что

$$a^{\log_a(xy)}=xy, \qquad a^{\log_a x+\log_a y}=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=xy.$$

Но показательная функция строго монотонна, т. е. принимает каждое свое значение только один раз. Следовательно, $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

- Для любых $x>0$ и $y>0$

$$\boxed{\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y.} \tag{2.3}$$

Доказательство: Равенство (2.3) можно доказать точно так же, как и равенство (2.2). А можно воспользоваться уже доказанными формулами (2.1) и (2.2):

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a\left(xy^{-1}\right)=\log_a x+\log_a\left(y^{-1}\right)=\log_a x-\log_a y.$$

2) Формулы (2.1) – (2.3) называются **формулами логарифмирования**. Они позволяют свести нахождение логарифмов от сложных рациональных выражений к нахождению логарифмов сомножителей.

Упражнения.

(1) Вычислите:

а) $2\log_{1000} 5 + \log_{1000} 40$;

б) $\log_3 \sin\dfrac{\pi}{6} - \log_3 \cos\dfrac{\pi}{6}$.

(2) Выразите $\ln\dfrac{a^3\sqrt[5]{b^2}}{c\sqrt{pq^3}}$ через $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$, $\ln p$ и $\ln q$.

(3) Выразите $\lg x$ через $\lg 2$ и $\lg 3$, если $x = \sqrt{\dfrac{24\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}}$.

3) Иногда приходится иметь дело с обратной задачей: нахождением числа по его логарифму. Такую операцию называют **потенцированием**. И здесь формулы логарифмирования часто бывают полезны.

Упражнения.

(1) Найдите x, если $\log_a x = \log_a c + b$.

(2) Найдите x, если $\ln x = \dfrac{2}{3}\ln(a+b) - \dfrac{1}{3}\ln(a-b) + \dfrac{2}{3}\ln a - \dfrac{1}{3}\ln b$.

4) При работе с логарифмами часто делают ошибки, связанные с неправильным применением формул логарифмирования. Надо помнить, что вообще говоря,

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(xy) \neq \log_a x \cdot \log_a y, \quad \log_a\frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

Также ни в коем случае нельзя выносить минус из под знака логарифма:

$$\log_a(-x) \neq -\log_a x.$$

Домашнее задание

1) Найдите область определения следующих функций:

(1) $\lg\dfrac{2x-1}{5-x} - \ln\left(x^2-1\right)$;

(2) $\log_{x^2}(3x-2)$.

2) Является ли равенство $\log_2\left(x^2-4\right) = \log_2(x-2) + \log_2(x+2)$ тождеством? В какой области оно выполняется?

3) Постройте график функции $y = \log_x x$.

4) Вычислите:

   (1) $\log_2 10 - \log_2 5$;

   (2) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

5) Упростите выражение: $\log_a \dfrac{2}{1} + \log_a \dfrac{3}{2} + \ldots + \log_a \dfrac{n+1}{n}$.

6) Прологарифмируйте по основанию a следующие выражения:

   (1) $x = \sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$; (2) $x = \sqrt[3]{\dfrac{a^2 b\sqrt{m}}{b^2 + c^2}}$;

7) Найдите x, если:

   (1) $\log_a x = \dfrac{1}{3}\left(\log_a b - \dfrac{2}{5}\log_a c + \log_a d + 4\right)$;

   (2) $\log_a x = 3\left(\dfrac{1}{4}\log_a y + \dfrac{7}{3}\left(\log_a z - \dfrac{1}{5}\left(\log_a t + 2\log_a w\right)\right)\right)$.

Урок 3. Формула перехода к другому основанию и ее следствия

1°. Формула перехода к другому основанию

1) Как уже упоминалось, в математическом анализе встречаются в основном натуральные логарифмы. Однако в школьном курсе алгебры приходится преобразовывать выражения, в которые входят логарифмы с различными основаниями. Поэтому достаточно часто возникает необходимость выразить логарифмы по одному основанию через логарифмы по другому основанию. Делается это с помощью формулы

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},} \tag{3.1}$$

которую называют **формулой перехода к другому основанию**.

Доказательство: Прологарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$ по основанию b:

$$\log_b a^{\log_a x} = \log_b x.$$

С учетом (2.1) отсюда сразу же получаем, что $\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$. Осталось разделить обе части последнего равенства на $\log_b a$. ■

2) Формулу (3.1) можно переписать в виде $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$. Меняя обозначения, получаем изящное равенство

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.} \tag{3.2}$$

3) **Упражнения**. Вычислите:

(1) $7^{\frac{\ln \ln 2}{\ln 7}}$;

(2) $\dfrac{\log_5 0,125}{\log_5 22 - \log_5 11}$;

(3) $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$.

2°. Следствия из формулы перехода к другому основанию

1) Пусть a и b – два положительных числа, не равные 1. Подставляя в (3.1) $x = b$, сразу же получаем, что

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.} \tag{3.3}$$

Эта формула часто используется при преобразовании логарифмических выражений.

2) В курсе алгебры нам неоднократно будут встречаться логарифмы, основание которых представляет собой степень какого-то числа. При преобразовании таких логарифмов бывает полезной следующая формула:

$$\boxed{\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b, \quad k \neq 0.} \tag{3.4}$$

Доказательство: Из (3.1) сразу следует, что $\log_{a^k} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^k} = \frac{\log_a b}{k}$.

∎

3) **Упражнения**. Вычислите:

(1) $5^{\frac{1}{\log_2 5}}$;

(2) $10,1^{\frac{2}{\lg 10,1}}$;

(3) $2^{-1-\log_4 3}$;

(4) $\log_4 \dfrac{1}{5} + \log_2 6 + \dfrac{1}{2} \log_4 \dfrac{25}{81} - \log_{16} 64$;

(5) $\log_{125} 5 - \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2} + \log_{2,5} 0,4$;

(6) $\log_3 5 \cdot \log_{0,2} 9$;

(7) $\log_{64} 7 \cdot \log_{49} 6 \cdot \log_{6\sqrt{6}} 4$;

(8) $\dfrac{\log_2 72}{\log_{18} 2} - \dfrac{\log_2 12}{\log_{81} 2}$.

Домашнее задание

1) Вычислите:

(1) $3^{\frac{1}{\log_5 3}}$;

(2) $5^{1+2\log_{0,2} 2}$;

(3) $27^{\log_9 2}$;

(4) $\sqrt{25^{1/\log_6 5} + 49^{1/\log_8 7}}$;

(5) $a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}$.

(6) $\log_{1/8} (\log_2 3 \cdot \log_3 4)$;

(7) $\log_{15} 20 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18 \cdot \log_{20} 19$;

(8) $3^{\log_{1/3} 0{,}04} + \log_{25} \left(3 + 2\sqrt{2}\right) - \log_{1/5} \left(\sqrt{2} - 1\right)$.

2) Докажите, что

(1) $\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_{a^2} N} + \dfrac{1}{\log_{a^3} N} + \dfrac{1}{\log_{a^4} N} + \dfrac{1}{\log_{a^5} N} = 15 \log_N a$;

(2) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$.

Урок 4. Некоторые свойства логарифмов. Преобразование арифметических выражений, содержащих логарифмы

1°. Повторение

Вычислите:

1) $7^{\log_{49} 9}$;

2) $\left(3\,\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{0,3} 7}$;

3) $\log_2 3 \cdot \log_9 8$;

2°. Некоторые свойства логарифмов

1) При работе с логарифмами бывает полезна следующая немного неожиданная формула:
$$\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.} \tag{4.1}$$
Доказательство: $a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$.

■

Упражнения. Вычислите:

(1) $4^{\log_7 11} - 11^{\log_7 4}$;

(2) $3^{\log_2 5 - 1} : 5^{\log_2 3}$;

2) Из формулы (3.1) перехода к другому основанию следует, что отношение логарифмов с одинаковыми основаниями не зависит от этого основания:
$$\boxed{\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}.} \tag{4.2}$$
Действительно, и левая, и правая часть (4.2) равны $\log_y x$.

3) Воспользовавшись основным свойством пропорции, из (4.2) сразу же получаем, что
$$\boxed{\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x.} \tag{4.3}$$
Равенство (4.3) означает, что при перемножении логарифмов можно менять местами аргументы сомножителей. Отметим, что соотношение (3.2) является частным случаем (4.3).

4) В заключение выведем еще одно интересное свойство логарифмов. Пусть a, b, x, y – положительные действительные числа, не равные единице. Из (3.2) следует, что
$$\log_a y = \log_a b \cdot \log_b y = \log_a x \cdot \log_x y.$$
Отсюда сразу же получаем, что
$$\boxed{\log_a b = \log_x y \;\Leftrightarrow\; \log_a x = \log_b y.} \tag{4.4}$$

Упражнение. Найдите $\log_{a/\sqrt{b}}\left(a^2\sqrt[3]{b}\right)$, если $\log_a 2 = \log_b 3$.

3°. Упражнения на преобразование арифметических выражений, содержащих логарифмы

Вычислите:

1) $0,25 \cdot \lg^2 4 + \lg 2 \cdot \lg 25 + \lg^2 0,2$;
2) $4^{3\log_{2\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{10}\right)-4\log_4\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$;
3) $\log_4\left(7-4\sqrt{3}\right)+\log_8\left(26+15\sqrt{3}\right)$;
4) $\log_6 4\left(\log_4 6+\log_6 4+2\right)\left(\log_4 6-\log_{24} 6\right)-\log_4 6$;

Домашнее задание

1) Вычислите:
   (1) $5^{\log_3 11}-11^{\log_9 25}$;
   (2) $10^{3-\lg 4}-49^{\log_7 15}$;
   (3) $4^{1-\log_5 3}\cdot 9^{\log_5 2}$;
   (4) $(0,5\ \lg 25-2\ \lg\cos 45^\circ)\cdot\log_2^3\left(-\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
   (5) $3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}$;
   (6) $\dfrac{3\log_3^2 45-2\log_3 45\cdot\log_3 5-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 5}$;
2) **Сканави: 7.006, 7.008**.
3) Найдите $\log_{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{b}}(ab)$, если $\log_3 a=\log_5 b$.

Урок 5. Преобразование алгебраических выражений, содержащих логарифмы

1) Упростите выражения:
   (1) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$;
   (2) $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a\frac{a}{b}}$;
   (3) $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a}-3^{\log_{27}\left(a^2+1\right)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49} a}-5^{0,5\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)$;

(4) $\dfrac{1}{5}\left(2a^{\log_2 b}+3b^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{a}}\right)$;

(5) $\dfrac{\log_x y-\log_{\sqrt{x}/y^3}\sqrt{y}}{\log_{x/y^4} y-\log_{x/y^6} y}:\log_y\left(x^3y^{-12}\right)$.

(6) $\left(1+2^{\frac{\lg a}{\lg\sqrt{2}}}-a^{1+\frac{1}{\log_4 a^2}}\right)^{1/2}-3\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

2) Докажите, что

(1) $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

(2) $\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N=\dfrac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc} N}$.

3) Найдите $\log_{a\sqrt{b}}\dfrac{\sqrt{b}}{a^2}+\log_{b\sqrt{a}}\left(a\sqrt{b}\right)+\dfrac{1}{4}\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[5]{a}$, если известно, что $\log_a b=\dfrac{1}{2}$.

Домашнее задание

Сканави: 7.009, 7.011, 7.012, 7.151, 7.152, 7.153, 7.155, 7.156.

Урок 6. Самостоятельная работа №1: "Преобразование логарифмических выражений"

Домашнее задание

1) Вычислите: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{3}{\log_3 5}}$.

2) Прологарифмируйте по основанию a выражение $x=\sqrt[11]{\dfrac{a^4b^{-3}c^2\sqrt{m+n}}{d^{-3}y^{-1/8}}}$.

3) Найдите x, если $\log_a x=\dfrac{1}{4}\left(\log_a y+\dfrac{3}{7}\left(\log_a z-2\right)\right)$.

4) Найдите область определения функций $f(x)=\log_{(2x-1)/x}\left(\sqrt{x+1}-x\right)$.

5) Упростите выражение: $\dfrac{a^{\sqrt{\log_a b}}}{b^{\sqrt{\log_b a}}}$.

Урок 7. Выражение одних логарифмов через другие

1) Известно, что $\log_3 5 = a$. Найдите $\log_9 15$.
2) Зная, что $\log_{12} 2 = a$, найдите $\log_6 32$.
3) Зная, что $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$, найдите $\log_{30} 8$.
4) Известно, что $\lg 196 = a$, $\lg 56 = b$. Найдите $\lg 0,175$.
5) Известно, что $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$. Найдите $\log_{35} 28$.
6) Пусть $\log_{98} 14 = a$. Выразите $\log_2 7$ через a.
7) Известно, что $\log_{12} 27 = a$. Найдите $\log_6 16$.
8) Зная, что $\log_{18} 128 = a$, $\log_{15} 20 = b$, найдите $\log_5 2$.

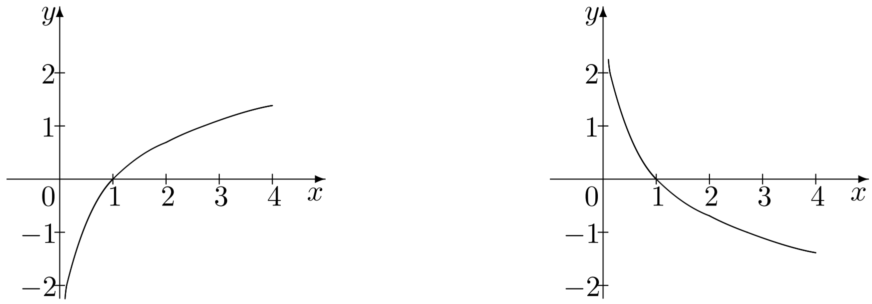
Домашнее задание

1) Известно, что $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.
2) Зная, что $\log_3 5 = a$, найдите $\log_{75} 45$.
3) Найдите $\log_{12} 30$, если $\log_2 3 = a$, $\log_5 2 = b$.
4) Известно, что $\log_{15} 3 = a$, $\log_{15} 2 = b$. Найдите $\log_5 90$.
5) Известно, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\lg 56$.
6) Пусть $\log_{21} 14 = a$, $\log_{28} 24 = b$. Найдите $\log_2 3$ и $\log_2 7$.
7) Известно, что $\log_2 507 = a$, $\log_2 351 = b$. Найдите $\log_2 14,625$.
8) Известно, что $b = 8^{1/(1-\log_8 a)}$, $c = 8^{1/(1-\log_8 b)}$. Найдите зависимость a от c.

Урок 8. Сравнение значений логарифмических выражений. Метод приведения к общему основанию

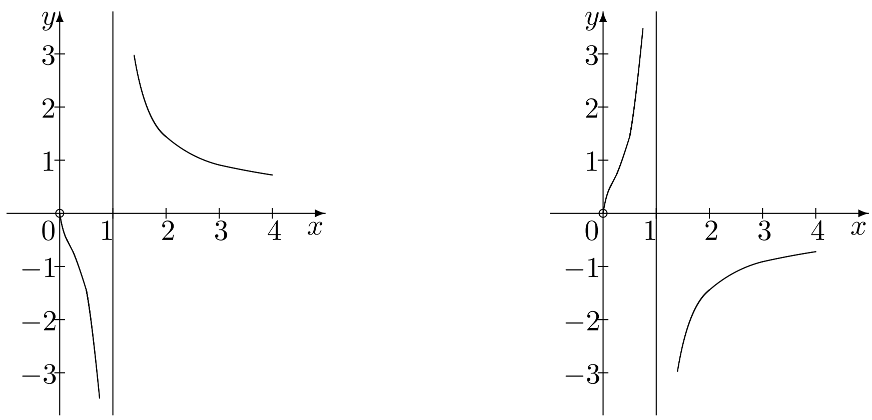
1°. Простейшие задачи на сравнение значений логарифмических выражений

1) Для того, чтобы сравнить два логарифма с одинаковыми основаниями, надо пользоваться тем, что функция $f(x) = \log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$:



а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$

2) Для того, чтобы сравнить два логарифма с одинаковыми аргументами, но разными основаниями, надо помнить, что функция $g(x) = \log_x a$ при $a > 1$ монотонно убывает на каждом из промежутков $(0;1)$ и $(1;+\infty)$, а при $0 < a < 1$ монотонно возрастает на каждом из этих промежутков. Графики функции $g(x)$ выглядят так:



а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$

Впрочем, можно пользоваться и тем, что $\log_x a = \dfrac{1}{\log_a x}$, сводя задачу к сравнению выражений, содержащих логарифмы с одинаковыми основаниями. В этом случае надо очень внимательно следить за знаками логарифмов.

3) **Упражнения**.

(1) Между какими соседними целыми числами находится число $A = \log_{1/7} 81$?

(2) Сравните $\log_{1/2} 3$ и $\log_{1/2} 4$.

(3) Найдите ближайшее к $\log_3 58$ целое число.

(4) Сравните $1 - \log_2 3$ и $\log_2 5 - \log_2 7$.

(5) Сравните $\log_3 5$ и $\log_4 5$.

(6) Сравните $\log_{\sqrt{2}-1} 0,3$ и $\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} 0,3$.

(7) Сравните $\log_8 23$ и $1,5$.

(8) Сравните $\log_{2/3} 7$ и $-4,5$.

2°. Метод приведения к общему основанию

1) Если сравниваемые логарифмы имеют разные основания и разные аргументы, то прежде всего надо попытаться привести их к одному основанию или одному аргументу.

   Пример. Докажите, что $\log_2 7 < \log_4 81$.

   Решение: Очевидно, $\log_4 81 = \dfrac{1}{2}\log_2 81 = \log_2 9 > \log_2 7$.

2) **Упражнения**.

   (1) Сравните $2\log_{1/3}\dfrac{1}{4}$ и $3\log_{27} 15$.
   (2) Сравните $\log_6 72$ и $\log_3 18$.
   (3) Докажите, что $\log_{14} 448 > \log_5 40$.
   (4) Сравните $\log_8^2 5 - 2\log_8 5$ и $\log_4^2 3 - 2\log_4 3$.

Домашнее задание

1) Между какими соседними целыми числами находится число $\log_2 17$?
2) Найдите ближайшее к $\log_{1/7} 143$ целое число.
3) Сравните значения следующих выражений:

   (1) $\log_{1/3} 5$ и $\log_{1/4} 5$;
   (2) $-\log_{2/\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ и $2\log_{\sqrt{3}/2}\sqrt{0,7}$;
   (3) $\log_{0,1} 6$ и $\log_{0,01} 4\pi^2$;
   (4) $\log_3 5 - \log_{1/3} 2$ и $\log_9 7 + \log_3 4$;
   (5) $\log_{0,5}^2 6 + 2\log_{0,5} 6$ и $\log_{0,5}^2 5 + 2\log_{0,5} 5$;
   (6) $\log_3 6$ и $\log_{18} 72$.

Урок 9. Метод разделяющего числа

1°. Повторение

1) Сравните $8^{\log_5 7}$ и $7^{\log_5 8}$.
2) Сравните $\log_{0,1}\sin\dfrac{3\pi}{7}$ и $\log_{0,1}\cos\dfrac{3\pi}{7}$.
3) Сравните $3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866$ и $\log_2 1863$.

2°. Метод разделяющего числа

1) Все задачи на сравнение значений логарифмических выражений, с которыми мы встречались ранее, решаются с помощью приведения логарифмов к общему основанию. В более сложных случаях приходится использовать специальные приемы. Сейчас мы познакомимся с одним из них, называемым **методом разделяющего числа**.

2) Суть метода состоит в том, чтобы подобрать число, которое больше одного из сравниваемых выражений, но меньше второго из них.

   Пример. Сравните $\log_2 10$ и $\sqrt[3]{26}$.

   Решение: Поскольку $\log_2 10 > 3$, а $\sqrt[3]{26} < 3$, то $\log_2 10 > \sqrt[3]{26}$.

3) **Упражнения**.

   (1) Сравните $2\log_7 3$ и $\log_{0,1} 0,2$.

   (2) Сравните $2 - (\log_2 3)^{-1}$ и $\log_{1,5} 3$.

   (3) Докажите, что $\log_2 3 > \log_3 5$.

   (4) Сравните $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$.

Домашнее задание

1) Сравните значения следующих выражений:

   (1) $\log_2 \sin \dfrac{2\pi}{9}$ и $\log_4 \left(1 + \cos \dfrac{4\pi}{9}\right) - \dfrac{1}{2}$.

   (2) $\log_2 13$ и $2^{\sqrt{5}}$;

   (3) $\log_{\sqrt{5}} 2$ и $\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \left(\sqrt{5} - 2\right)$;

   (4) $\log_2 3$ и $\log_5 8$;

2) Докажите, что $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

3) Известно, что $\log_2 3 = a$. Найдите $\log_{162} 54$.

Урок 10. Различные методы сравнения значений логарифмических выражений

Мы уже умеем решать задачи на сравнение логарифмических выражений с помощью приведения логарифмов к общему основанию и с помощью метода разделяющего числа. Сейчас мы познакомимся с еще несколькими методами.

1) **Метод сравнения дробных частей**. Если сравниваемые выражения имеют одинаковую целую часть, то иногда удобнее сравнивать их дробные части.

Пример. Сравните $\log_5 7$ и $\log_{13} 17$.

Решение: Очевидно, оба логарифма лежат между 1 и 2. Поэтому сравним дробные части данных логарифмов, т. е. $\log_5 7 - 1$ и $\log_{13} 17 - 1$. Но

$$\log_5 7 - 1 = \log_5 \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{17}{13} = \log_{13} 17 - 1.$$

Ответ: $\log_5 7 > \log_{13} 17$.

Замечание. Метод сработал благодаря тому, что $\dfrac{7}{5} > \dfrac{17}{13}$.

Упражнения.

(1) Докажите, что $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ при всех натуральных $n > 1$.

(2) Сравните $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$.

2) **Метод приведения к одному аргументу**. Если сравниваемые выражения могут быть представлены как функции от одной и той же величины, то задача сводится к проверке неравенства $f(x) < g(x)$ при заданном x.

Пример. Докажите, что $\log_{14} 98 > \log_{56} 784$.

Решение: $\log_{14} 98 = 1 + \log_{14} 7$, $\log_{56} 784 = 1 + \log_{56} 14$. Следовательно, достаточно доказать, что $\log_{14} 7 > \log_{56} 14$. Но

$$\log_{14} 7 = \frac{1}{\log_7 14} = \frac{1}{1 + \log_7 2} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\log_2 7}} = \frac{\log_2 7}{\log_2 7 + 1},$$

$$\log_{56} 14 = \frac{1}{\log_{14} 56} = \frac{1}{1 + 2\log_{14} 2} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\log_2 7 + 1}} = \frac{\log_2 7 + 1}{\log_2 7 + 3}.$$

Надо доказать, что $\dfrac{x}{x+1} > \dfrac{x+1}{x+3}$ при $x = \log_2 7$. Легко проверить, что при $x > 1$ это неравенство верно, а $\log_2 7 > 1$.

Упражнения.

(1) Докажите, что $\log_3 7 > \log_7 27$.

(2) Сравните $\log_{15} 675$ и $\log_{75} 84375$.

3) **Функциональный метод**. Иногда сравниваемые выражения представляют собой одну и ту же функцию $f(x)$ при различных значениях аргумента. В этом случае можно попытаться исследовать $f(x)$ на монотонность.

Пример. Сравните $\dfrac{2\log_{1/7} 3 - 1}{\log_{1/7} 3 + 1}$ и $\dfrac{2\log_{49} 0,2 - 1}{\log_{49} 0,2 + 1}$.

Решение: Сравниваемые выражения представляют собой значения функции $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 - \dfrac{3}{x+1}$ при $x = \log_{1/7} 3$ и $x = \log_{49} 0,2$ соответственно. Заметим, что $\log_{1/7} 3 = -\log_7 3 = \log_7 \dfrac{1}{3}$, а $\log_{49} 0,2 = \dfrac{1}{2}\log_7 \dfrac{1}{5} = \log_7 \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Поскольку $\dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, то $-1 < \log_{1/7} 3 < \log_{49} 0,2$. Но при $x > -1$ функция $f(x)$ монотонно возрастает. Следовательно, $f\left(\log_{1/7} 3\right) < f\left(\log_{49} 0,2\right)$.

Ответ: $\dfrac{2\log_{1/7} 3 - 1}{\log_{1/7} 3 + 1} < \dfrac{2\log_{49} 0,2 - 1}{\log_{49} 0,2 + 1}$.

Домашнее задание

1) Сравните значения следующих выражений:

(1) $\log_3 7$ и $\log_5 9$;

(2) $\dfrac{\log_2 7 - 2}{\log_2 7 - 3}$ и $\dfrac{\log_4 47 - 2}{\log_4 47 - 3}$;

(3) $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

(4) Сравните $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

2) Докажите, что $\log_4 3 > \log_3 2$.

3) Докажите, что $\log_5 14 > \log_7 18$.

4) Известно, что $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$. Найдите $\log_{25} 24$.

Урок 12. Обобщающий урок

1) Найдите $\log_{n\sqrt{m}} \dfrac{m}{n^2}$, если $\log_m n = 3$.

2) Постройте график функции $y = \left|\log_{1/2} \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right|$.

3) Упростите: $\left(\left(\dfrac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} - 1\right)^{1/2} + \left(\dfrac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} + 1\right)^{1/2}\right) \cdot \sqrt{2} \cdot \log_a^{1/2} b$.

Домашнее задание

1) Сравните:

а) $\log_2 3$ и $\log_3 2$;

б) $\log_{1/2} 3$ и $\log_3 1,1$;

в) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\log_{0,5} 7}$ и $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\log_2 6}$.

2) Найдите $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, если $\log_{a/b} a = -2$.

3) **Сканави: 7.003, 7.157, 7.160**.

4) Упростите выражение: $\dfrac{\log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right) \cdot \lg a \cdot \log_a^{1/2} 100}{\left(\lg a \cdot 2^{\log_2 \lg a}\right)^{1/2} \cdot \lg^{-1/2} a^2}$.

5) Упростите выражение: $\dfrac{1 - \log_{1/a} \dfrac{1}{(a-b)^2} + \log_a^2 (a-b)}{\left(1 - \log_{\sqrt{a}} (a-b) + \log_a^2 (a-b)\right)^{1/2}}$.