Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ГЕОМЕТРИЯ-9

Материалы к урокам по теме: "Кривые второго порядка"

Харьков, 2014 г.

Урок 1. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса

1°. Введение

1) В курсе геометрии мы встречались всего с двумя видами кривых: прямыми и окружностями. Сейчас мы познакомимся с еще одной кривой – эллипсом.

2) Возьмем козу и привяжем ее веревкой к колышку на лугу. Понятно, что через какое-то время коза съест траву внутри окружности, центром которой является колышек, а радиус равен длине веревки.

   Теперь привяжем козу по-другому. Вобьем два колышка. Затем возьмем веревку, длина которой больше расстояния между колышками, и проденем ее через кольцо на ошейнике козы (кольцо может свободно скользить по веревке). После этого привяжем концы веревки к колышкам. В этом случае, область, внутри которой коза съест траву, будет выглядеть так:

3) Граница полученной фигуры обладает следующим свойством: сумма расстояний от любой ее точки до колышков равна длине веревки. Такая кривая называется **эллипсом**, а точки, в которые воткнуты колышки, – **фокусами**.

2°. Точные определения

1) Перейдем к точным определениям.

Определение.

> ***Эллипсом*** *называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.*

> *Пусть M – некоторая точка эллипса. Расстояния от точки M до фокусов называются* ***фокальными радиусами*** *точки M.*

2) При изучении эллипсов обычно используют следующие стандартные обозначения:

   - F_1, F_2 – фокусы; r_1, r_2 – соответствующие фокальные радиусы;
   - $2c$ – расстояние между фокусами (**фокусное расстояние**);

- $2a$ – сумма расстояний от точек, принадлежащих эллипсу, до фокусов.

Из определения эллипса следует, что $a > c$, $\quad r_1 + r_2 = 2a$.

3) У эллипса, очевидно, есть две оси симметрии. Это прямая, проходящая через фокусы, и серединный перпендикуляр к отрезку с концами в фокусах. Оси симметрии эллипса называются **большой** и **малой осями эллипса**, а длины их частей, лежащих внутри эллипса, – **длинами** большой и малой осей. Впрочем, чаще говорят о **длинах полуосей** эллипса.

   Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются **вершинами** эллипса.

4) Рассмотрим окружность $\omega(O; R)$. Пусть X – произвольная точка плоскости. Ранее мы неоднократно отмечали, что если точка X лежит внутри окружности ω, то $OX < R$, а если точка X лежит вне этой окружности, то $OX > R$. Сформулируем аналогичное утверждение для эллипса:

   Утверждение 1.1.

   Сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше $2a$, а сумма расстояний от любой точки вне эллипса до фокусов больше $2a$.

   Указание: Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством треугольника.

3°. Каноническое уравнение эллипса

1) Выведем уравнение эллипса. Для этого ведем систему координат так, чтобы фокусы эллипса имели координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу. Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{1.1}$$

2) Упростим это уравнение, переходя к уравнениям – следствиям:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \Rightarrow \\
&\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что $a > c$. Следовательно, можно ввести новую переменную

$$b = \sqrt{a^2-c^2}.$$

Тогда

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части полученного уравнения на a^2b^2, получаем:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) называют **каноническим уравнением эллипса**.

Урок 2. Завершение вывода канонического уравнение эллипса. Эксцентриситет эллипса

1°. Завершение вывода канонического уравнение эллипса

1) На прошлом уроке мы доказали, что координаты любой точки $M(x; y)$ эллипса удовлетворяют уравнению (1.2). Обратное пока не доказано: мы дважды возводили равенства в квадрат, не контролируя равносильность переходов. Тем не менее, уравнения (1.1) и (1.2) равносильны. Докажем, что из уравнения (1.2) следует уравнение (1.1).

   Пусть координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяет уравнению (1.2). Тогда

   $$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

   Следовательно,

   $$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
   $$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

   Но по определению эллипса $\dfrac{c}{a} < 1$, а из (1.2) следует, что $|x| < a$. Поэтому $a + \dfrac{c}{a}x > 0$. Следовательно, $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$.

   Аналогично $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \dfrac{c}{a}x$. Т. о., $r_1 + r_2 = 2a$, ч. т. д.

2°. Эксцентриситет эллипса. Эллипс как сжатая окружность

1) Введем важное определение:

   > *Величина*
   > $$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{2.1}$$
   > *называется* ***эксцентриситетом*** *эллипса.*

Очевидно, что
$$0 \leqslant \varepsilon < 1.$$
Из сказанного выше следует, что
$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{2.2}$$

2) Из канонического уравнения эллипса (1.2) сразу следует, что длина большой (фокальной) полуоси эллипса равна a, а длина малой полуоси – b. С другой стороны, из (2.1) получаем, что
$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$
откуда
$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \tag{2.3}$$
Т. о., эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса: чем больше ε, тем меньше отношение длин его полуосей. При $\varepsilon = 0$ эллипс вырождается в окружность.

3) Вы, наверное, слышали, что планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце (закон Кеплера). Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных – велики, т. е. близки к единице. Следовательно, планеты движутся почти по окружности, а кометы то приближаются к Солнцу, то удаляются от него.

4) Каноническое уравнение эллипса напоминает уравнение окружности, записанное в виде
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$
Если в этом уравнении заменить y на $\frac{a}{b}\,y$, то придем к уравнению эллипса (1.2). Это означает что эллипс, задаваемый уравнением (1.2), получается из окружности радиуса a путем сжатия в $\frac{a}{b}$ раз вдоль оси ординат. Такой способ построения эллипса с помощью сжатия окружности часто используется на практике.

Урок 3. Директрисы эллипса

1°. Директрисы эллипса

1) Пусть x – абсцисса какой-то точки M эллипса, задаваемого уравнением (1.2). Тогда фокальный радиус r_2 может быть найден по формуле (2.2). Поэтому при $\varepsilon \neq 0$
$$r_2 = \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} - x \right).$$

Обозначим выражение в скобках буквой d:

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Тогда

$$\frac{r_2}{d} = \varepsilon. \tag{3.1}$$

Выясним геометрический смысл d. Поскольку $0 < \varepsilon < 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} > a > x$. Следовательно, $d > 0$. Но тогда d – расстояние от точки M до прямой $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$.

Т. о., мы доказали следующее утверждение:

Утверждение 3.1.

Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса $F_2(c;0)$ и прямой $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ постоянно и равно эксцентриситету эллипса.

> *Прямая $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ называется **директрисой** эллипса.*

2) Директрисой называют и прямую $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$. Аналогично доказательству утверждения 3.1 можно показать, что отношение расстояний от любой точки эллипса до ее "левого" фокуса $F_1(-c;0)$ и директрисы $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ также постоянно и равно эксцентриситету эллипса.

3) Доказанное свойство является характеристическим, т. е. эллипс может быть определен как *геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы) есть величина постоянная, меньшая единицы* (доказательство в другую сторону очевидно).

Урок 4. Оптическое свойство эллипса

1°. Оптическое свойство эллипса

1) Вспомним одну из самых известных геометрических задач: *даны прямая l и две точки F_1 и F_2, лежащие по одну сторону от нее. Требуется найти на прямой l такую точку P, что сумма расстояний от нее до точек F_1 и F_2 будет минимальной.* Как известно, положение искомой точки P определяется следующим образом: отразим, напр., точку F_2 симметрично относительно прямой l и получим точку F_2'. Точка P – это точка пересечения отрезка F_1F_2' и прямой l.

Заметим, что отрезки PF_1 и PF_2 образуют с прямой l равные углы[1]. Очевидно, точка P однозначно определяется этим условием.

[1] В этом случае говорят, что прямая l является внешней биссектрисой угла F_1PF_2.

2) Теперь мы можем доказать следующую интересную теорему:

Теорема 4.1.

Пусть прямая l касается эллипса в точке P. Тогда прямая l – внешняя биссектриса угла F_1PF_2.

Доказательство теоремы: Пусть X – произвольная точка на прямой l, отличная от точки P. Тогда т. X лежит вне эллипса. Поэтому в силу утверждения 1.1 $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$. Следовательно, из всех точек прямой l точка P имеет наименьшую сумму расстояний до точек F_1 и F_2. Но это означает, что углы, образованные отрезками PF_1 и PF_2 с прямой l, равны.

■

3) Теорему 4.1 можно переформулировать, используя физическую терминологию. Известный из физики **принцип Ферма** гласит, что луч света всегда выбирает кратчайший путь. Принимая во внимание вышесказанное, приходим к общеизвестному факту: *если луч света падает на зеркальную поверхность, то отражается он от нее под таким же углом, под которым упал.* Отсюда немедленно получаем следующее утверждение:

Теорема (оптическое свойство эллипса).

Если изогнуть зеркальную полоску по эллипсу, то луч света, выходящий из источника, расположенного в одном фокусе, отразившись от этой полоски, пройдет через второй фокус.

2°. Применение оптического свойства эллипса

1) С помощью теоремы 4.1 можно доказать многие интересные свойства эллипса. Начнем со следующего утверждения:

Утверждение 4.1.

Пусть хорда PQ проходит через фокус F_1 эллипса. Касательные, проведенные к эллипсу в точках P и Q, пересекаются в точке R. Тогда R – центр вневписанной окружности треугольника F_2PQ, а F_1 – точка касания этой окружности и стороны PQ.

2) Из утверждения 4.1 сразу следует, что F_2R – биссектриса угла PF_2Q. Оказывается, этот факт остается верным и в случае, когда данная хорда не проходит через фокус F_1.

Утверждение 4.2.

Пусть XY – произвольная хорда эллипса. Касательные, проведенные к эллипсу в точках X и Y, пересекаются в точке T. Тогда

а) $\angle F_1TX = \angle F_2TY$;

б) прямая F_2T является биссектрисой $\angle XF_2Y$.

Урок 5. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы

1°. Определение гиперболы

1) Познакомимся с еще одной кривой.

Определение.

> ***Гиперболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.*

2) При изучении гипербол используют стандартные обозначения, аналогичные тем, которые уже встречались нам при изучении эллипсов:

- F_1, F_2 – фокусы; r_1, r_2 – соответствующие фокальные радиусы;
- $F_1F_2 = 2c$;
- $|r_1 - r_2| = 2a$.

Из определения гиперболы следует, что $a < c$.

2°. Каноническое уравнение гиперболы

1) Выведем уравнение гиперболы. Для этого ведем систему координат так, чтобы фокусы гиперболы имели координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит гиперболе. Тогда

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

2) Упростим это уравнение, переходя к уравнениям – следствиям:

$$\begin{gathered}\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).\end{gathered}$$

Поскольку $a < c$, можно ввести новую переменную

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Тогда

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части полученного уравнения на a^2b^2, получаем:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) называют **каноническим уравнением гиперболы**.

3) Итак, мы доказали, что координаты любой точки $M(x; y)$ гиперболы удовлетворяют уравнению (5.1). Как и при выводе канонического уравнения эллипса, не все переходы были равносильны. Поэтому надо доказать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (5.1), лежат на рассматриваемой гиперболе.

Пусть координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяет уравнению (5.1). Тогда

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

откуда

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$
$$= \sqrt{(x+c)^2 + (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

Аналогично $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$.

По определению гиперболы $\frac{c}{a} > 1$, а из (5.1) следует, что $|x| \geqslant a$. Разберем два случая:

а) $x > 0$. Тогда $x \geqslant a$. Поэтому $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r_2 = -a + \frac{c}{a}x$. Значит, $r_1 - r_2 = 2a$.

б) $x < 0$. В этом случае $x \leqslant -a$. Тогда $r_1 = -a - \frac{c}{a}x$, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Значит, $r_2 - r_1 = 2a$.

Случай $x = 0$, очевидно, невозможен.

Т. о., $|r_1 - r_2| = 2a$ при всех возможных x, ч. т. д.

Урок 6. Исследование формы гиперболы. Сопряженная гипербола. Равносторонняя гипербола

1°. Исследование формы гиперболы. Сопряженная гипербола

1) Изучим форму гиперболы, задаваемой уравнением (5.1). Для начала заметим, что оси координат являются осями симметрии гиперболы. Их называют

просто **осями** гиперболы. При этом ось абсцисс, проходящую через фокусы, называют **действительной осью** гиперболы, а ось ординат – **мнимой осью** гиперболы.

2) Легко видеть, что гипербола не пересекает свою мнимую ось (ось ординат). Следовательно, она состоит из двух симметричных частей, называемых **правой** и **левой ветвями** гиперболы. Каждая из ветвей гиперболы, в свою очередь, симметрична относительно оси абсцисс.

3) Поэтому для того, чтобы понять, как выглядит гипербола, достаточно рассмотреть первую четверть координатной плоскости. В этом случае из уравнения (5.1) получаем, что

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ x \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Эту функцию легко исследовать по стандартной схеме. Приведем результаты этого исследования.

Функция (6.1) определена при $x \geqslant a$. Ее область значений – все неотрицательные числа. Функция непрерывна на всей области определения, монотонно возрастает и выпукла вверх. Ее график пересекает оси координат в единственной точке с координатами $(a;0)$. Функция (6.1) стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Прямая $y = \dfrac{b}{a}\,x$ является ее наклонной асимптотой.

4) Теперь мы можем нарисовать гиперболу на координатной плоскости. На практике это обычно делают так. Сначала изображают прямоугольник, стороны которого лежат на прямых $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$ (этот прямоугольник называют **основным прямоугольником** гиперболы, а числа a и b – **действительной** и **мнимой полуосями** гиперболы). Затем проводят прямые, содержащие диагонали основного прямоугольника. Эти прямые являются **асимптотами** гиперболы[1]. После этого отмечают точки $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$, в которых гипербола касается основного прямоугольника (эти точки называют **вершинами** гиперболы). Теперь эскиз гиперболы уже легко построить.

5) В курсе астрономии доказывается, что если комета летит мимо Солнца и силы притяжения Солнца недостаточно, чтобы оставить комету в пределах

[1]Греческое слово “асимптота” означает “несовпадающий”, “несливающийся”. Асимптоты гиперболы чертил еще Архимед, однако сам термин появился впервые у Аполлония Пертского (260 – 170 гг. до н. э.)

солнечной системы, то траекторией кометы будет ветвь гиперболы, в фокусе которой находится Солнце.

6) Наряду с гиперболой, задаваемой уравнением (5.1), иногда рассматривают кривую, задаваемую уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6.2}$$

Очевидно, эта кривая также является гиперболой. Ее называют **сопряженной** по отношению к гиперболе (5.1). Фокусы сопряженной гиперболы лежат на оси ординат в точках $\Phi_1(0;-c)$ и $\Phi_2(0;c)$, а вершины – в точках $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;b)$. Основные прямоугольники и асимптоты гипербол (5.1) и (6.2) совпадают.

2°. Равносторонняя гипербола

1) Рассмотрим отдельно гиперболу с равными полуосями $a=b$. Такую гиперболу называют **равносторонней**.

Т. к. основной прямоугольник равносторонней гиперболы представляет собой квадрат, то ее асимптоты перпендикулярны.

2) Каноническое уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=1. \tag{6.3}$$

Перейдем в этом уравнении к новым переменным, совершив поворот осей координат на угол $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$. Выкладки проделаем в общем виде, поскольку полученные формулы понадобятся нам в дальнейшем.

3) Пусть $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{i}'$, $\overrightarrow{j}'$ – орты "старой" и "новой" систем координат соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}'=\cos\varphi\cdot\overrightarrow{i}+\sin\varphi\cdot\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}'=-\sin\varphi\cdot\overrightarrow{i}+\cos\varphi\cdot\overrightarrow{j}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Рассмотрим произвольную точку M. Пусть в "старой" системе координат она имеет координаты $(x;y)$. Тогда ее радиус вектор $\overrightarrow{r}$ записывается так:

$$\overrightarrow{r}=x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}. \tag{6.5}$$

Если в “новой” системе координат точка M имеет координаты $(x'; y')$, то

$$\overrightarrow{r} = x' \cdot \overrightarrow{i}' + y' \cdot \overrightarrow{j}'. \tag{6.6}$$

Подставляя в (6.6) выражения для $\overrightarrow{i}'$ и $\overrightarrow{j}'$ из (6.4) и сравнивая полученное выражение с (6.5), получаем формулы перехода

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y', \\ y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'. \end{cases} \tag{6.7}$$

4) При $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ из (6.7) получаем, что

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-x' + y'\right). \end{cases}$$

Подставляя эти значения в уравнение (6.3), приходим к уравнению равносторонней параболы в “новой” системе координат:

$$2x'y' = a^2.$$

Обозначим $k = \dfrac{a^2}{2}$. Тогда

$$y' = \frac{k}{x'}.$$

Теперь становится понятно, почему в курсе алгебры график функции $y = \dfrac{k}{x}$ называли гиперболой. На самом деле он представляет собой равностороннюю гиперболу.