10 клас

Задача1.

Кінці двох невагомих пружин жорсткостями k_1 і k_2 прикріплені до стіни, так як показано на рис. 1. Спочатку пружини недеформовані, і перша на L довша за другу. Яку мінімальну роботу A треба виконати, щоб вільні кінці пружин встановити на однаковій відстані від стіни?

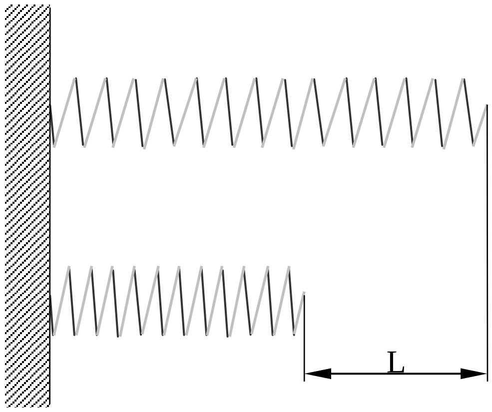


Рис. 1

Розв’язок.

У такій спрощеній системі робота може бути витрачена тільки на збільшення потенціальної енергії пружної деформації пружин. Якщо перша пружина деформується на величину x_1 (при її розтягуванні $x_1 > 0$, а при стисненні $x_1 < 0$), то деформація другої повинна бути

$$x_2 = x_1 + L.$$

Робота як зміна потенціальної енергії обох пружин

$$A = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2}\left(x_1 + \frac{k_2 L}{k_1 + k_2}\right)^2 + \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

При $x_1 = -\frac{k_2 L}{k_1 + k_2}$ (перша пружина стискається, а друга розтягується) останній вираз набуває свого найменшого значення

$$A = \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Задача 2 (10 клас).

Циліндричну посудину, наповнену водою, рівномірно обертають навколо її вертикальної осі симетрії з кутовою швидкістю ω. Паралельний пучок світла, що падає вертикально, відбивається від поверхні води. Визначте відстань від нижньої точки поверхні води до точки, в якій інтенсивність відбитого світла буде найбільшою.

Розв'язок. Розглянувши сили, що діють на невеличкий об'єм води в околі точки A(x_0;y_0) на поверхні, і надають доцентрове прискорення, знаходимо тангенс кута нахилу дотичної:

$$tg\beta = \frac{\omega^2 x_0}{g} \quad . \tag{1}$$

Припустивши, що всі відбиті від поверхні промені перетнуться в точці F(0; F_y), одержимо:

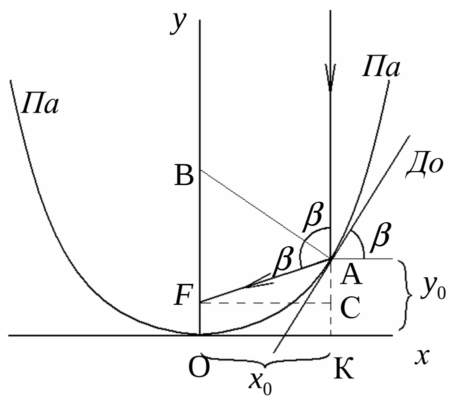
$$y_0 = F_y + x_0 \cdot ctg(\pi - 2\beta) \ . \tag{2}$$

Урахувавши, що ctg (π - 2β) = $\frac{1}{2}(tg\beta - ctg\beta)$, підставимо значення тангенса з (1) до рівняння (2):

$$y_0 = F_y + \frac{1}{2}(\frac{\omega^2 x_0^2}{g} - \frac{g}{\omega^2}) \text{ або } y_0 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 x_0^2}{g} = F_y - \frac{g}{2\omega^2}.$$

Щоб це співвідношення справджувалося для будь-якої точки поверхні, утвореної обертанням графіка функції y(x) навколо осі Oy, функція повинна мати вигляд: $y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$.

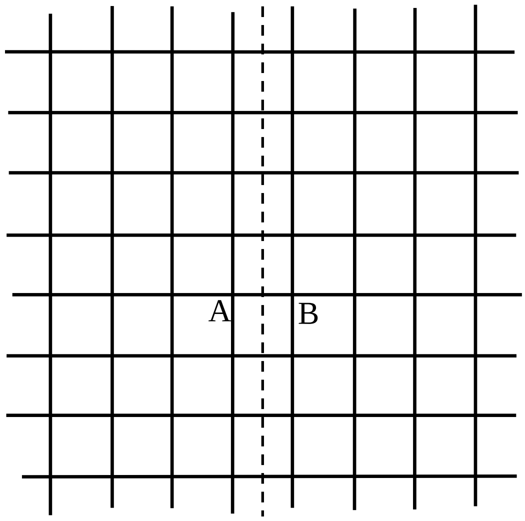
Відповідно, $F_y = \frac{g}{2\omega^2}$.



10 клас

Задача 3.

З тонкого дроту площею перерізу s спаяли сітку з величезною кількістю квадратних комірок. На значному віддаленні від країв сітки до точок А і В, у сусідніх вузлах, приклали напругу U (див. рис.2). Визначте сумарний струм у всіх провідниках, які на рисунку перетинає пунктирна лінія. Знайдіть ділянки дроту, через які струм не йтиме. Доведіть, що у центрі будь-якого квадрату сітки загальне магнітне поле, створене чотирма струмами сторін квадрату, дорівнює нулю. Сторона квадрату дорівнює a, питомий опір матеріалу дроту ρ.



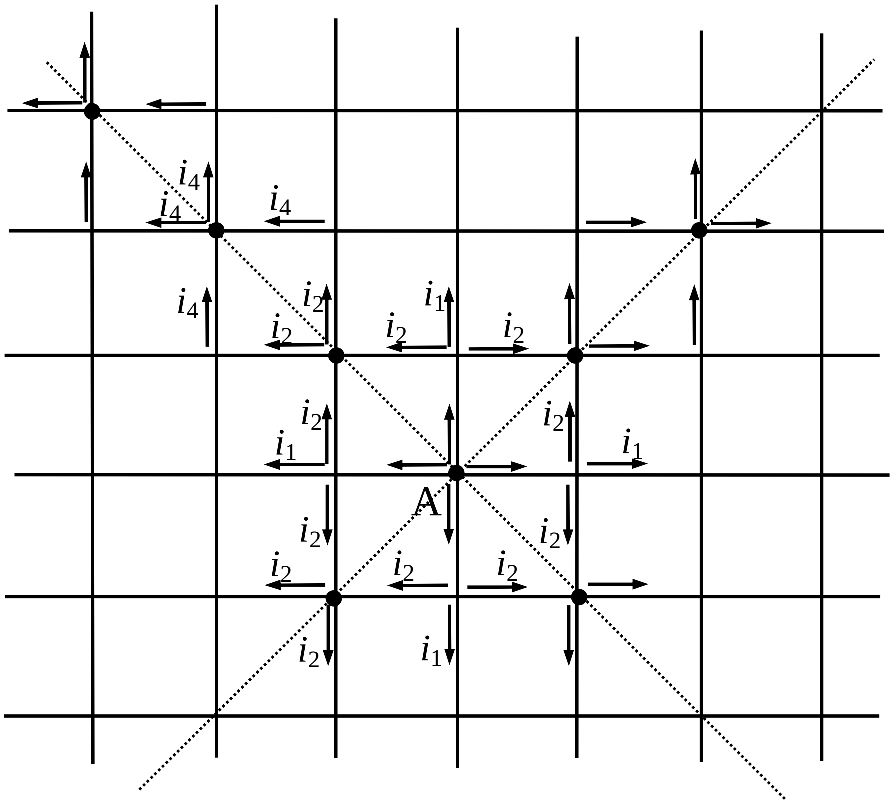
Розв'язок. Припустимо, що на точку А подано додатний потенціал, а на точку В – від'ємний. Тоді струми через усі провідники, які перетинає пунктирна лінія, йтимуть зліва направо. Внаслідок закону збереження електричного заряду сума всіх цих струмів дорівнюватиме струму I, який входить з джерела у точку А і повертається до джерела з точки В. Отже, необхідно знайти струм через джерело. Для цього скористаємось принципом суперпозиції, тобто спочатку розглянемо тільки струми, які виходять з точки А і, внаслідок симетрії, порівну розходяться в усіх чотирьох напрямах. Тобто, від А «навпростець» до В прямуватиме струм $I/4$. Тепер так само (незалежно від А) розглянемо струми, що входять з квадратної сітки у точку В. Аналогічно матимемо, що «навпростець» до В від А прямуватиме струм $I/4$. Нарешті, накладемо один розподіл струмів на інший. По провіднику між точками А і В йтиме струм $I/4+I/4=I/2$, що лише у два рази менше за струм через джерело. Отже, сума струмів через безліч усіх інших провідників, які перетинає пунктирна лінія, також дорівнюватиме $I/2$, або струму через один провідник АВ. Все це добре демонструє стрімке зменшення величин струмів при віддаленні від точок А і В, і правомірність формальної заміни великої сітки на нескінченно велику, а також нехтування її формою десь далеко на краях.

Скористаємося законом Ома і визначимо струм через провідник АВ, на який подано напругу U: $I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{US}{\rho a}$.

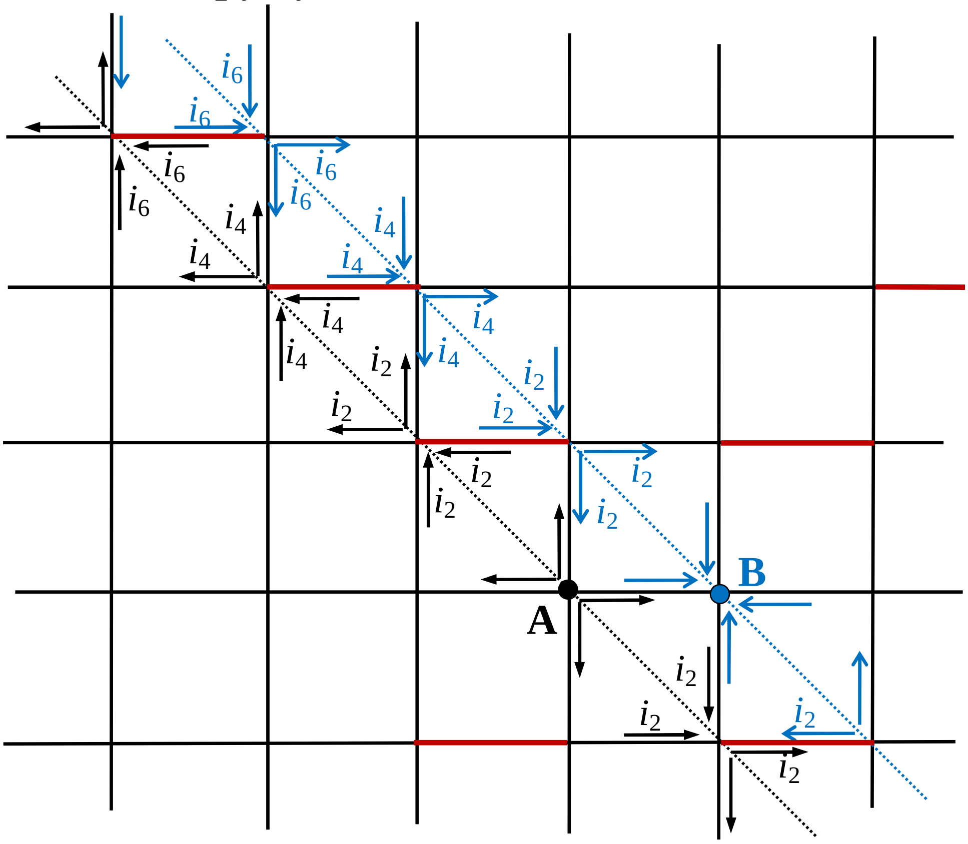
Загальний струм удвічі більший $I = 2\frac{US}{\rho a}$ і дає відповідь на перше питання.

Для того, щоб знайти відповідь на друге питання, тобто знайти ділянки дроту, через які струм не йде, знову скористуємось принципом суперпозиції. Тільки розглянемо розподіл струмів на більших відстанях від точок А і В. Як бачимо з рисунку 1, кожний із струмів $I/4$ ділиться на струм i_1 і два струми i_2. Далі привертає увагу симетрія діагоналей (пунктирні лінії, що проходять через точку А). Внаслідок симетрії у вузли на цих лініях входять і виходять однакові струми. У найближчому діагональному вузлі від точки А $i_2 + i_2 = i_2 + i_2$, у наступному: $i_4 + i_4 = i_4 + i_4$ і так далі. Аналогічну картину, тільки зі зворотними напрямами струмів, дає точка В. Накладемо один діагональний розподіл струмів на інший. Як бачимо з рис. 2, в усіх паралельних АВ дільницях, що розташовані вздовж діагональних напрямів, струми компенсуються.

Нарешті, відповідь на третє питання задачі про магнітне поле у центрі будь-якого квадрату сітки, не потребує знання відповідей на перше і друге питання. Спочатку зрозуміємо, як залежить магнітне поле провідника зі струмом від величину струму. Струм у провіднику I створює певне магнітне поле. Але струм (потік заряджених частинок) I завжди можна уявити як n струмів величиною I/n кожний. Інакше, магнітне

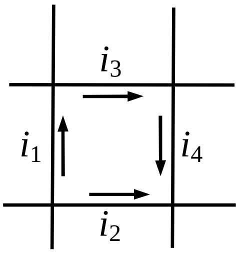


поле струму



I можна обчислити, як суму магнітних полів n струмів величиною I/n кожний. Це можливо, якщо магнітне поле пропорційне величині струму, $B \sim I$. Звичайно, воно ще залежить від відстані, але у нашому випадку (центр квадрата) відстані до сторін є однаковими. Як відомо, лінії магнітного поля прямолінійного провідника охоплюють його в напрямку, який задає рух свердлика. Отже, струм через сторону квадрата створює у його центрі перпендикулярне до площини квадрата магнітне поле.

Тепер розглянемо суму падінь напруги у будь-якому контурі сітки. Вона дорівнюватиме нулю, оскільки сітка не містить джерел струму. Оскільки опори сторін квадрата однакові, рівність нулю суми падінь напруги призведе до того, що сума струмів, які спрямовані за годинниковою стрілкою відносно центру квадрата, дорівнюватиме сумі струмів, які спрямовані проти годинникової стрілки. Це означає, що магнітні поля у центрі квадрата компенсуються. Більш наочно це ілюструє рис. 3.



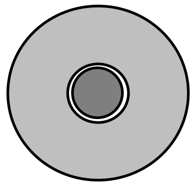
$i_1R + i_3R + i_4R = i_2R$, або $i_1 + i_3 + i_4 = i_2$. Струми i_1, i_3, i_4 створюють у центрі квадрата магнітні поля, спрямовані від нас. А струм i_2 створює поле, спрямоване до нас. Оскільки магнітне поле пропорційне до величини струму, поле струму $i_2 = i_1 + i_3 + i_4$ повністю компенсує поля трьох інших струмів.

Висновок про компенсацію магнітного поля може бути узагальнений на центр будь-якого правильного багатокутника, сторони якого мають однакові опори.

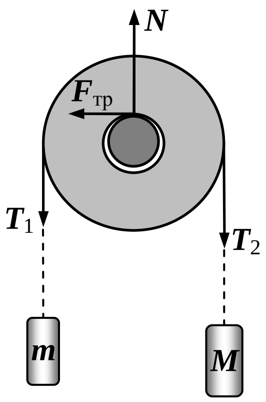
10 клас

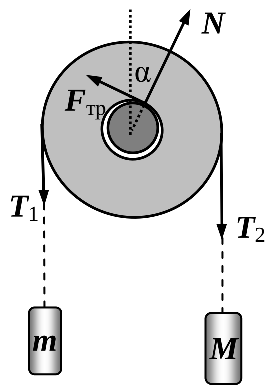
<u>Задача 4.</u>

Два тягарці масами m і M ($m < M$) з'єднали ниткою. Нитку перекинули через невагомий блок, і тягарці обережно відпустили. Знайдіть залежність прискорення a тягарців від відношення їхніх мас $x = m/M$, та побудуйте графік $a(x)$. Блок являє собою диск радіусом R з отвором радіусом $r = R/3$, надітий на горизонтальну вісь трохи меншого, ніж отвір, радіусу (див. рис.). Коефіцієнт тертя між внутрішньою поверхнею блока та віссю $\mu = 0{,}75$. Перекинута через зовнішній обід блоку нитка не проковзує.



Розв'язок. Блок під дією сили натягу нитки буде тиснути на вісь. Сила тертя при цьому заважатиме йому проковзувати. Якщо відношення мас тягарців $x = m/M$ близьке до одиниці, система може взагалі залишитися у стані спокою, і прискорення дорівнюватиме нулю. Здається, що при цьому дотик між блоком і віссю має місце у верхніх точках осі і отвору блоку (рис.1). Це невірно. Щоб у цьому переконатися, достатньо розглянути моменти сил відносно осі обертання, що проходить через ці точки. Моменти сили реакції опори N та сили тертя $F_{тр}$ дорівнюють нулю, а сили натягу нитки мають різні значення T_1 і T_2, але однакові плечі. Отже моменти некомпенсовані, статична рівновага неможлива.





Оскільки $T_2 > T_1$ місце дотику блоку і осі зміститься вправо (рис.2). Як для випадку статичної рівноваги, так і для руху з прискоренням, сума моментів сил на блок дорівнюватиме нулю. Під час руху це обумовлено невагомістю блока. Відносно горизонтальної осі симетрії блока маємо:

$$T_1 R + F_{тр} r - T_2 R = 0 \qquad (1)$$

Для статики це рівняння тривіальне. Для випадку руху з прискоренням у вірності рівняння (1) можна переконатися також з енергетичних міркувань, розглянувши роботу сил натягу і сили тертя. Спроектуємо тепер сили, що діють на блок, на горизонтальний та вертикальним напрями:

$$\begin{aligned} \text{OX}: &\quad N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = 0, \\ \text{OY}: &\quad N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha = T_1 + T_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

У випадку статичної рівноваги певного зв'язку між силою тертя та реакцією опори не існує, можна тільки стверджувати, що $F_{тр} \le \mu N$. Отже, маємо три рівняння і три невідомі $F_{тр}, N, \alpha$ (сили натягу нитки $T_1 = mg,\ T_2 = Mg$). У випадку руху, $F_{тр} = \mu N$ (тут і далі вважатимемо, що максимальна сила тертя спокою дорівнює силі тертя ковзання), і з першого рівняння (2) відразу знаходимо кут: $\mathrm{tg}\alpha = \mu$ $(\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mu^2} = 4/5, \sin\alpha = 3/5)$. Але тепер з'являється інша невідома – прискорення a.

Запишемо для тягарців проекцію другого закону Ньютона на вертикальну вісь

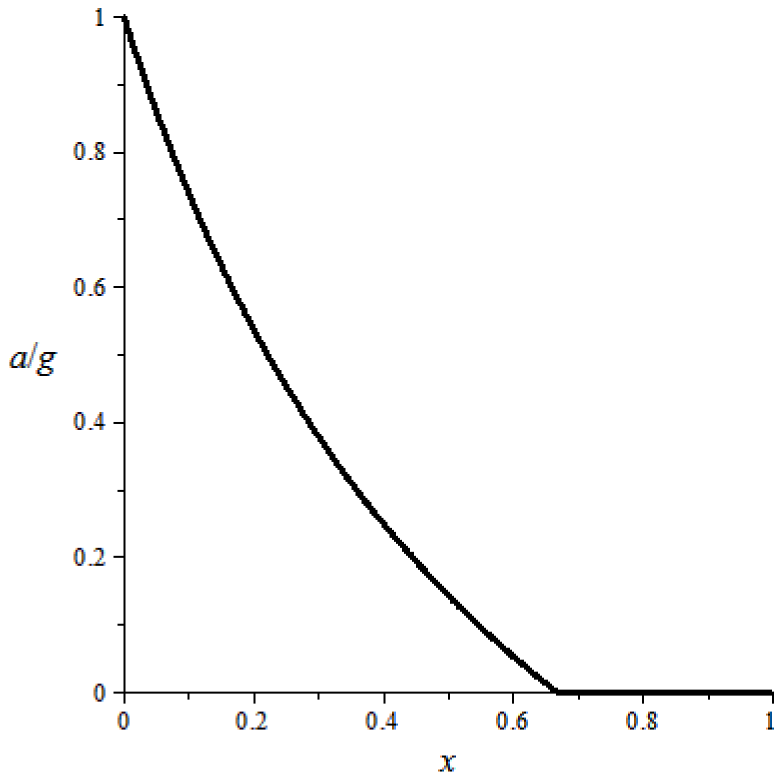
$$\begin{cases} ma = T_1 - mg, \\ Ma = Mg - T_2. \end{cases} \tag{3}$$

і розв'яжемо систему (1), (2), (3) з урахуванням даних задачі.

$a = g\dfrac{2/3 - x}{2/3 + x}$,	якщо $x \le 2/3$,
$a = 0$,	якщо $x \ge 2/3$.

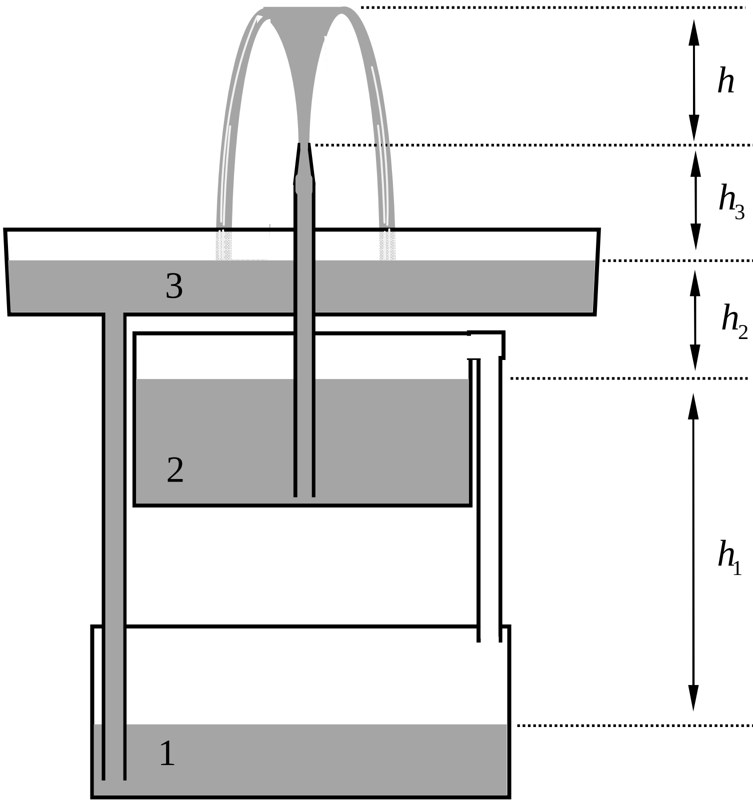
Якщо ж помилково вважати, що дотик між блоком і віссю має місце у верхніх точках осі і отвору (рис.1) і проігнорувати моменти сил (думаю, таких відповідей буде більшість), слід очікувати наступну відповідь: $a = g\dfrac{0{,}6 - x}{0{,}6 + x}$.

Правильний графік функції $a = g\dfrac{2/3 - x}{2/3 + x}$ має наступний вигляд



Задача №5 (10 клас)

Дві тисячі років тому Герон Олександрійський запропонував конструкцію фонтану. Фонтан зображений на схематичному рисунку і складається з трьох сполучених посудин, дві з яких (1 і 2) герметичні щодо доступу повітря. Поясніть принцип дії фонтану. Знайдіть висоту фонтану h, а також швидкості зміни рівня води в усіх посудинах у момент часу, коли $h_1 = 3\,\text{м}$, $h_2 = 1\,\text{м}$, $h_3 = 0{,}5\,\text{м}$, а загальний об'єм повітря у першій і другій посудинах $4\,\text{м}^3$. Площі перерізу посудин $S_1 = 3\,\text{м}^2$, $S_2 = 2\,\text{м}^2$, $S_3 = 4\,\text{м}^2$, площа перерізу вузького отвору, з якого вилітає вода, $S = 1\,\text{см}^2$. Енергетичними втратами під час руху води всередині фонтану, а також товщиною трубок у порівнянні з розмірами посудин знехтувати. Вважати, що атмосферний тиск 10^5 Па і температура повітря залишаються сталими, а прискорення вільного падіння дорівнює $9{,}8\,\text{м/с}^2$.



Розв'язок. Площа перерізу вузького отвору фонтану $S = 1\,\text{см}^2$ досить невелика порівняно з площами перерізу посудин. Отже інтуїтивно здається, що фонтан має працювати досить довго, а рівні води у посудинах змінюватись повільно. Повітря у посудинах 1 і 2 знаходиться під підвищеним тиском, який забезпечує вода, що перетікає з верхньої посудини у найнижчу. Нехтуючи швидкістю руху води у лівій трубці, знаходимо, що цей тиск повинен дорівнювати сумі атмосферного і гідростатичного:

$$P = P_A + \rho g(h_1 + h_2)\,. \tag{1}$$

Повітря тиском $P = P_A + \rho g(h_1 + h_2)$ «видавлює» воду з посудини 2 у трубку, створюючи фонтан. Якби трубка була вищою (подумки збільшуємо h_3 до деякого H_3), то вода б перестала витікати, коли $P = P_A + \rho g(h_2 + H_3)$. Порівнюючи з (1), знаходимо, що за висоти $H_3 = h_1$ вода перестала б витікати. Саме на цю висоту підніматиметься вода у фонтані, тобто $h_3 + h = H_3 = h_1$, звідки

$$h = h_1 - h_3 = 2{,}5\,\text{м}\,.$$

Цей результат можна було отримати інакше скориставшись рівнянням Бернуллі.

Визначимо тепер об’єм води, який за одиницю часу вилітає у вигляді фонтану. Оскільки ми знаємо $h = h_1 - h_3$, із закону збереження енергії $\Delta mgh = \frac{\Delta mv^2}{2}$ знайдемо швидкість води на виході з вузького отвору: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$.
Об’єм води, що за одиницю часу проходить крізь вузький отвір, дорівнює

$$vS = \sqrt{2gh}S = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}S.$$

Саме на цю величину зменшується об’єм води у посудині 2:

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta t} = v_2 S_2 = \sqrt{2gh}S = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}S,$$

Звідки знаходимо швидкість зменшення рівня води у посудині 2.

$$v_2 = \sqrt{2gh}\frac{S}{S_2} = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}\frac{S}{S_2} = 0{,}35\ \text{мм/с}. \quad (2)$$

Вода з посудини 2 попадає у посудину 3, але ж у той самий час якась кількість води витікає з посудини 3 у посудину 1, збільшуючи в останній рівень води. Розглянемо зміну води у посудині 3 за одиницю часу. Вважатимемо, що рівень води у посудині 3 збільшується. Тоді

$$\frac{\Delta V_3}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} - \frac{\Delta V_1}{\Delta t} \qquad \text{або} \qquad v_3 S_3 = v_2 S_2 - v_1 S_1. \quad (3)$$

Необхідне ще одне рівняння для знаходження швидкостей v_1 і v_3. Ми ще не розглянули повітряний зв'язок між посудинами 1 і 2. За рахунок зміни об’ємів води у цих посудинах, змінюється й об’єм повітря V в них:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} - \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_3}{\Delta t} = v_3 S_3.$$

За умовою процес ізотермічний. Отже

$$PV = (P + \Delta P)(V + \Delta V), \quad (4)$$

або

$$P\Delta V + \Delta PV + \Delta P\Delta V = 0.$$

Якщо Δt достатньо малий проміжок часу тоді $\Delta P\Delta V << P\Delta V + \Delta PV$ і їм можна знехтувати.
З попередніх рівнянь $\Delta V = v_3 S_3 \Delta t$, а з рівняння (1) і рисунку $\Delta P = \rho g\Delta(h_1 + h_2) = \rho g(v_3 - v_1)\Delta t$. Підставляємо у (4) і, вважаючи проміжок часу Δt малим, отримуємо:

$$v_1 = v_3\left(1 + \frac{PS_3}{\rho gV}\right). \quad (5)$$

Як бачимо з рівняння (5), знаки швидкостей однакові. Виходить наше припущення, що рівень води у верхній посудині збільшується, вірне! Тепер розвяжемо систему рівнянь (3) і (5).

$$v_1 = v_2 \frac{\left(1 + \frac{PS_3}{\rho gV}\right)}{\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_1}{S_2}\left(1 + \frac{PS_3}{\rho gV}\right)} \approx 0{,}214\ \text{мм/с}, \qquad v_3 = \frac{v_2}{\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_1}{S_2}\left(1 + \frac{PS_3}{\rho gV}\right)} \approx 0{,}014\ \text{мм/с}.$$