9.1. На фото (мал.1) – професор кафедри квантової макрофізики ДНУ В.С.Савчук. Вважаючи, що фото було зроблено з досить великої відстані, визначити: 1) яка вада зору у вченого – короткозорість чи далекозорість; 2) визначити з якомога більшою точністю оптичну силу лінз його окулярів; 3) як зміниться відповідь, якщо припустити, що фото було зроблено з близької відстані (поясніть). Відомо, що при виготовленні окулярів оптичні центри лінз розташовують навпроти зіниць очей, коли людина дивиться вдалину. Для виконання завдання скористуйтеся лінійкою та наведеною моделлю (мал.2), на якій схематично зображено голову людини, лінзи окулярів і хід променів (вигляд зверху). При розрахунках вважати, що R=(10,0±1,0) см. Оцінити точність розрахунків.

Розв'язок: Для розв'язання задачі необхідно за допомогою лінійки виміряти відстань L між краями голови, які можна побачити в очках та відстань l між зірницями (Рис. 1).

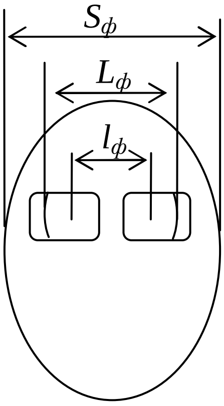


Рис.1.

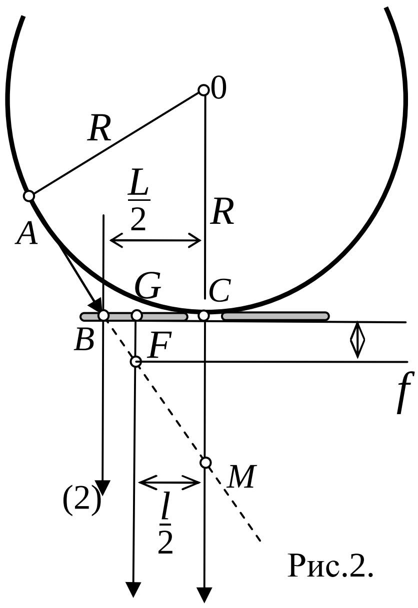


Рис.2.

Після нанесення цих величин на схему, отримаємо Рис. 2. Перетин променя (1), який іде від зірниці та продовження променя AB, який іде від краю голови, дають положення фокуса F лінзи окулярів. Із подібності – трикутників маємо:

$$\frac{h}{f}=\frac{L}{L-l}, \text{ де } h = MC \text{ та } f = FG$$

Враховуючи, що оптична сила D = 1/f, отримуємо

$$Dh=\frac{L}{L-l} \qquad (1)$$

Із подібності трикутників ΔAOM і ΔMBC

$$\frac{2h}{L}=\frac{\sqrt{(R+h)^2-R^2}}{R}=\frac{\sqrt{2Rh+h^2}}{R} \qquad (2)$$

Розв'язуючи (1) і (2) сумісно, отримуємо:

$$D=\frac{4R^2-L^2}{2RL(L-l)}$$

Розміри L і l можна отримати помноживши відповідні розміри на фото $L_ф$ і $l_ф$ масштабний множник $2R/S_ф$, де $S_ф$ – поперечний розмір голови на фото. Тоді

$$D=\frac{S_ф^{\,2}-L_ф^{\,2}}{2RL_ф(L_ф-l_ф)}$$

Похибка оптичної сили: $\Delta D \approx D\left(\frac{2\Delta S_ф}{(S_ф-L_ф)}+\frac{\Delta R}{R}+\frac{\Delta L_ф}{L_ф}+\frac{2\Delta L_ф}{L_ф-l_ф}\right)$.

9.2 У калориметр з гарячою водою вкинули шматочок льоду, температура якого 0°С. Після встановлення теплової рівноваги температура води знизилася на Δt_1=12°С. Коли в калориметр вкинули другий такий самий шматочок льоду, температура води знизилася ще на Δt_2=10°С. На скільки градусів знизиться температура води, якщо в неї вкинути третій такий самий шматочок, який повністю розтане? Теплоємністю калориметра та теплообміном з навколишнім середовищем знехтувати.

Розв'язок:

Запишемо рівняння теплового балансу для першого випадку:

$$c \cdot M \cdot \Delta t_1 = \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot (t_1 - \Delta t_1) \qquad (1)$$

де М – початкова маса води; m – маса шматочку льоду; λ – питома теплота плавлення льоду; c – питома теплоємність води; t_1 – початкова температура води.
Для другого шматочка можна записати аналогічне рівняння:

$$c \cdot (M+m) \cdot \Delta t_2 = \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot (t_1 - \Delta t_1 - \Delta t_2) \qquad (2)$$

Для третього шматочка:

$$c \cdot (M+2m) \cdot \Delta t_3 = \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot (t_1 - \Delta t_1 - \Delta t_2 - \Delta t_3) \qquad (3)$$

Від *(2)* віднімемо (1):

$$\frac{M}{m} = \frac{2 \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{2 \cdot 10}{12 - 10} = 10$$

Віднімаючи від (3) (2), отримуємо:

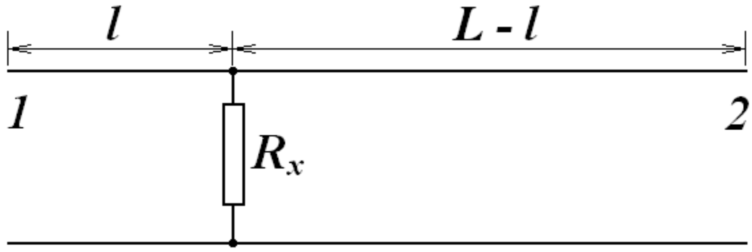
$$(M + 3m) \cdot \Delta t_3 = (M + m) \cdot \Delta t_2 \,;$$

$$\Delta t_3 = \frac{(M + m)}{M + 3m} \cdot \Delta t_2 \,;$$

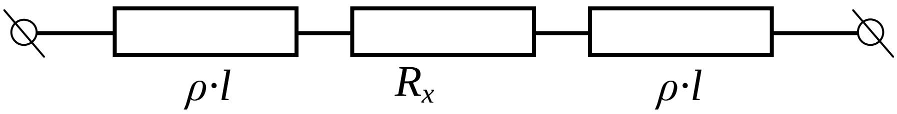
$$\Delta t_3 = 8{,}5°C$$

9.3. У деякій точці двопровідної телефонної лінії невідомої довжини L сталося пошкодження, внаслідок якого між провідниками з’явився опір витоку R_x (мал.3). До обох кінців лінії прибули бригади (№1 та №2). Вони заміряли опори лінії при розімкнутих (R_1 і R_2) та закорочених (r_1 і r_2) протилежних кінцях лінії і отримали значення R_1=4 Ом, R_2=8 Ом, r_1=3,5 Ом. Визначити опір витоку R_x, відстань l до місця пошкодження, загальну довжину лінії L, а також відновити втрачене значення опору r_2. Опір одиниці довжини кожного провідника лінії, складає $\rho=5{,}4\cdot10^{-4}$ Ом/м.

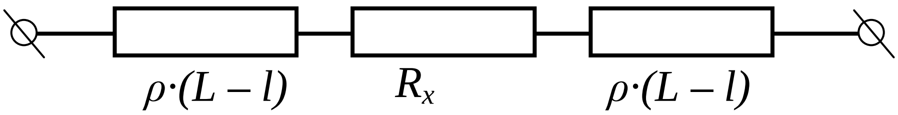
Розв’язок:



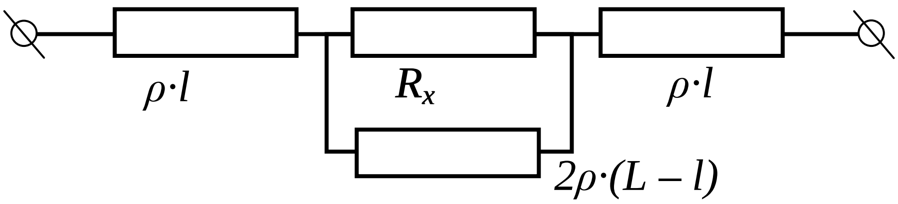
При замірах першої бригади принципові схеми для розрахунків:



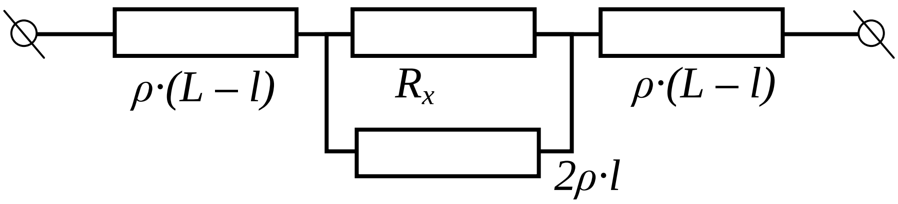
$$R_1 = 2l\cdot\rho + R_x$$



$$R_2 = 2(L-l)\cdot\rho + R_x$$



$$r_1 = 2\cdot l\cdot\rho + \frac{R_x\, 2(L-l)\cdot\rho}{R_x + 2(L-l)\cdot\rho}$$



$$r_2 = 2\cdot(L-l)\cdot\rho + \frac{R_x\, 2\cdot l\cdot\rho}{R_x + 2\cdot l\cdot\rho}$$

Розв’яжемо отриману систему (перших трьох рівнянь) та отримуємо:

$$R_x^{\,2} = R_2\cdot(R_1 - r_1); \qquad l = \frac{(R_1 - R_x)}{2\cdot\rho}; \qquad L = \frac{(R_2 - R_x)}{2\cdot\rho} - l$$

Звідки: R_x = 2 Ом; $l = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{5{,}4\cdot10^{-4}} = 1850$ м; $L = \dfrac{4}{\rho} = \dfrac{4}{5{,}4\cdot10^{-4}} = 7400$ м;

$r_2 = 2\cdot(4-1) + \dfrac{2\cdot2\cdot1}{2+2} = 7$ Ом

4. На дерев'яному колесі водяного млина радіусом R=1м рівномірно розміщені N комірок для набору води (N=21). Коли чергова комірка проходить у верхнє положення, в неї наливається (без початкової швидкості щодо землі) вода масою m=10 кг. Коли комірка проходить нижнє положення, вода виливається з неї зі швидкістю руху крайніх точок колеса (комірки). Знайдіть швидкість обертання колеса, що встановиться, не враховуючи його маси й тертя в осі, вважаючи зіткнення рідини з коміркою колеса: а) абсолютно пружним; б) абсолютно непружним.

Розв'язок:

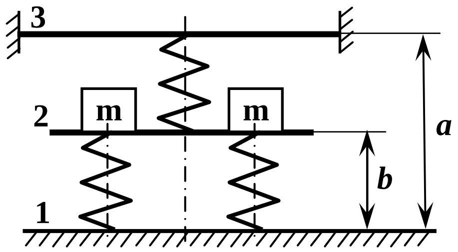
1. При пружному зіткненні води з колесом не відбувається втрат енергії. Тому в стаціонарному режимі кожна порція води m додає колесу млину потенційну енергію $U = mg{\cdot}2R$ і віднімає кінетичну енергію $W = \frac{mV^2}{2}$, де V – швидкість руху крайніх точок колеса. Рівність цих енергій обумовлює незмінність швидкості руху колеса: $mg{\cdot}2R = \frac{mV^2}{2}$, звідки швидкість $V = \sqrt{4gR} \approx 6{,}3$ м/с; або кутова швидкість обертання $\omega = \frac{V}{R} \approx 6{,}3$ рад/с, або $n = \frac{V}{2\pi R} \approx 1$ об/с.

2. При непружному зіткненні відбуваються втрати механічної енергії – частина її перетворюється на тепло. Цю частину можна визначити, скориставшись законами збереження імпульсу (точніше кажучи, законом збереження моменту імпульсу). В цьому випадку, прирівнюючи імпульс (момент імпульсу) колеса з $(N–1)/2$ порціями води ((N+1)/2) призводить до аналогічного результату!) до імпульсу з $\left(\frac{(N-1)}{2}+1\right)$ порціями, отримуємо вираз: $\frac{(N-1)}{2}{\cdot}mV=\left(\frac{(N-1)}{2}+1\right){\cdot}mV_1$ (V_1 – швидкість зовнішніх точок колеса після приєднання чергової порції води масою m), з якого отримаємо швидкість $V_1=\frac{N-1}{N+1}{\cdot}V$, яку і використаємо для визначення втрат механічної енергії при непружному приєднанні порції води:

$$E = \frac{N-1}{2}{\cdot}\frac{mV^2}{2} - \left(\frac{N-1}{2}+1\right){\cdot}\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV^2}{4}{\cdot}\left(N-1{\cdot} - \frac{(N-1)^2}{N+1}\right) \approx \frac{mV^2}{1{,}82} \approx \frac{mV^2}{2}.$$

Прирівнюючи потенціальну енергію U, що набувається за один "цикл" до втрати кінетичної W та теплової енергії E: $U = W + E$, отримаємо лінійну швидкість руху порції води в комірці, або швидкість зовнішніх точок колеса: $mg{\cdot}2R = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{1{,}82}$ => $V \approx \sqrt{1{,}9{\cdot}gR} \approx 4{,}3$ м/с; відповідно швидкість обертання: $\omega = \frac{V}{R} \approx 4{,}3$ рад/с, або $n = \frac{V}{2\pi R} \approx 0{,}68$ об/с.

9.5 Три однакові пружини розміщені між трьома горизонтальними пластинами. Система має вісь симетрії, що співпадає з віссю симетрії верхньої пружини. На рисунку система зображена в кінцевому положенні. Спочатку пластина 3 була рухомою, а два однакові тягарі маси m лежали на ній симетрично. В положенні статичної рівноваги вона була закріплена нерухомо на відстані a від пластини 1. Після цього обидва тягарі були перекладені на рухому пластину 2, яка, перемістившись, зупинилася на відстані b від пластини 1. Знаючи значення m, a, b, знайти жорсткість пружин k та їх довжину l у недеформованому стані. Пластини весь час залишалися горизонтальними. Масою та деформацією пластин знехтувати.



Розв'язання.

Зобразимо систему в трьох характерних положеннях:

початковому (рис. 1), коли тягарі ще не покладені на пластину 3, P=0;

проміжному (рис. 2), коли під дією тягарів, що лежать на рухомій пластині 3, система набула статичної рівноваги, P=2mg;

кінцевому (рис. 3), коли пластина 3 закріплена, тягарі покладені на пластину 2 і вона досягла кінцевого положення статичної рівноваги.

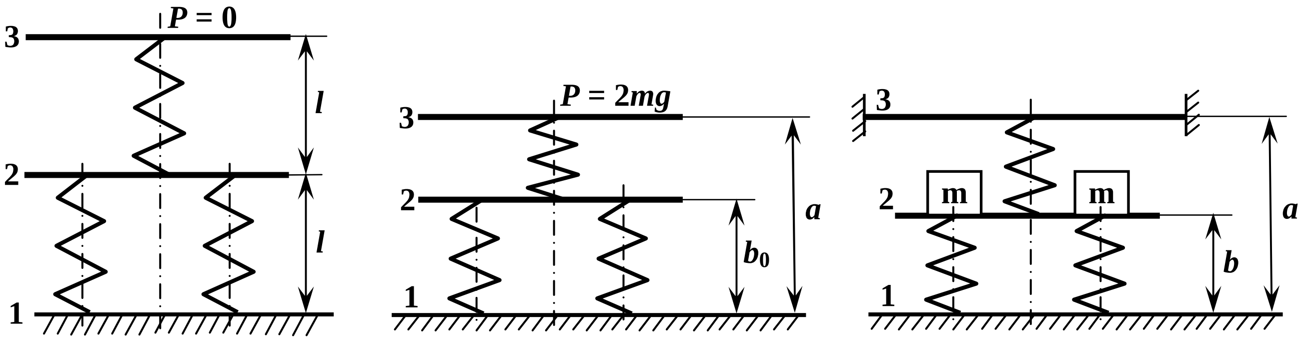


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

При рухомій пластині 3 (рис.2) дві нижні пружини утворюють між собою паралельне з'єднання, а з верхньою пружиною ця пара з'єднана послідовно, бо на кожну групу пружин діє однакова сила P=2mg. Тому

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k},$$

де k_1 – зведена жорсткість системи: $k_1 = \frac{2}{3}k$.

Сумарна деформація системи у проміжному положенні

$$x = 2l - a.$$

З іншого боку,

$$x = \frac{2mg}{k_1} = \frac{2mg}{2k} \cdot 3 = \frac{3mg}{k}.$$

Таким чином, маємо рівняння

$$l = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3mg}{k}\right).$$

Розглянемо систему в кінцевому положенні (рис.3). Під дією тягарів пластина 2 перемістилася на величину $\Delta b = b_0 - b$, тому зведена жорсткість всієї системи

$$k_2 = \frac{2mg}{\Delta b} = \frac{2mg}{b_0 - b}.$$

Деформація кожної нижньої пружини дорівнює $(b_0 - b)$. Деформація верхньої пружини дорівнює $(a-b)-(a-b_0)=b_0-b$, тобто всі три пружини деформовані однаково. Оскільки деформації всіх трьох пружин в даному випадку однакові, то пружини фактично утворюють паралельне з'єднання. Тому

$$k_2 = 3k.$$

Тоді

$$\Delta b = b_0 - b = \frac{2mg}{3k}.$$

Окрім того,

$$l - b_0 = \frac{2mg}{2k} = \frac{mg}{k}.$$

З виразів для Δb та $l - b_0$ маємо

$$l = b + \frac{mg}{k} + \frac{2mg}{3k} = b + \frac{5}{3}\frac{mg}{k}.$$

Урахувавши раніше отримане рівняння для *l*, отримаємо

$$\frac{a}{2} + \frac{3}{2}\frac{mg}{k} = b + \frac{5}{3}\frac{mg}{k}.$$

Звідси

$$k = \frac{mg}{3(a-2b)}.$$

Підставивши вираз для *k* у рівняння для *l*, одержимо відповідь

$$l = 5a - 9b.$$