Теоретичний тур, 9-й клас

Задача 1

Монтажник повинен збирати однакові ділянки кола (рис. 1) з резисторів опором R_1=9 кОм. В ящику біля нього міститься однакова кількість резисторів двох різних опорів R_1 і R_2. Він випадковим чином бере з ящика резистор і складає потрібні ділянки кола. Зібравши багато таких ділянок кола, він витратив однакову кількість резисторів обох типів. Вимірювання показали, що середнє арифметичне значення опору зібраних ділянок кола дорівнює 6,7 кОм. Визначте значення опору R_2.

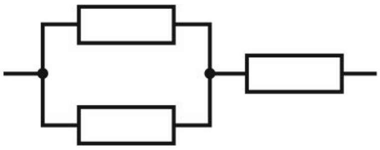
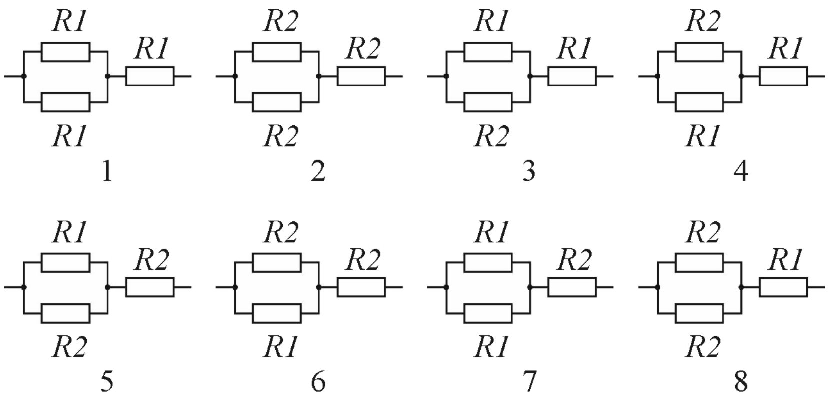


Рис. 1

Розв'язання.

Монтажник випадковим чином вибирав одне з двох можливих значень опорів для кожного з трьох резисторів ділянки кола. Отже, він отримував кожного разу одну з восьми можливих ділянок кола (див. рисунок). Після виготовлення великої кількості таких ділянок можна вважати, що всі наведені варіанти зустрічались однаково часто. Підкреслимо, що ділянки 3 і 4, які мають однакові опори, слід розглядати як різні варіанти, оскільки вони були отримані в результаті різної послідовності дій монтажника. Аналогічно для ділянок 5 і 6.



Опори наведених ділянок кола:

$$r_1 = 1{,}5R_1\,;\; r_2 = 1{,}5R_2\,;\; r_3 = r_4 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_1\,;$$

$$r_5 = r_6 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_2\,;\; r_7 = 0{,}5R_1 + R_2\,;\; r_8 = 0{,}5R_2 + R_1\,.$$

Отже, середнє арифметичне значення опору

$$\bar{r} = \frac{1}{8}(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8) = \frac{R_1R_2}{2(R_1+R_2)} + \frac{5}{8}(R_1+R_2)\,.$$

Звідси отримуємо квадратне рівняння відносно R_2:

$$5R_2^2 + 2R_2(7R_1 - 4\bar{r}) + R_1(5R_1 - 8\bar{r}) = 0\,.$$

Розв'язавши це рівняння, дістаємо два кореня

$$R_2 = \frac{4\bar{r} - 7R_1 \pm \sqrt{(4\bar{r}-7R_1)^2 + 5R_1(8\bar{r}-5R_1)}}{5}\,.$$

Корінь рівняння із знаком „–“ перед квадратним коренем є від'ємним, а отже нефізичним.

Отже, R_2 = 1 кОм.

Відповідь. R_2 = 1 кОм.

Задача 2. На горизонтальній площині вздовж прямої *AB* лежить однорідний брус масою *m* і довжиною *L* (рис. 2). Брус перетинає пряму *AB* в деякій точці *C*. При цьому $DC = x$, $L/2 \le x < L$. Робітнику потрібно перемістити брус так, щоб він лежав на прямій *AB*. Для цього він поруч з брусом в точці *C* забиває вертикальний стрижень. В точці *D* перпендикулярно *DE* прикладає горизонтальну силу *F* і обертає брус навколо стрижня. В залежності від значення *x* знайдіть: величину мінімальної сили *F*; величину реакції R_C з боку стрижня; той бік бруса, з якого потрібно вбити стрижень. Коефіцієнт тертя ковзання між брусом і площиною μ.

Розв'язання. Маса однорідного бруса розподілена рівномірно по його довжині. Тому при обертанні бруса доведеться долати опір сил тертя, які зведемо до двох рівнодійних: $F_1 = \frac{\mu mg}{L}x$ та $F_2 = \frac{\mu mg}{L}(L-x)$.

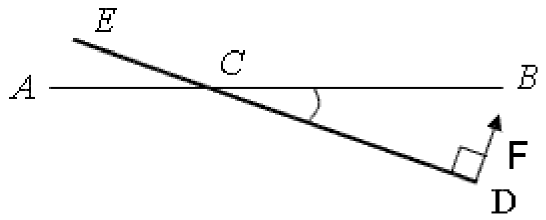


Рис. 2

Під час обертання бруса навколо точки C момент сили F діє в напрямі проти годинникової стрілки, а моменти сил F_1 та F_2 діють в напрямі за годинниковою стрілкою (рис. 3).

Плече сили F_2 дорівнює $\frac{L-x}{2}$; плече сили F_1 - $\frac{x}{2}$.

Сила F забезпечує рівномірне обертання бруса відносно стрижня, що можна описати рівнянням:

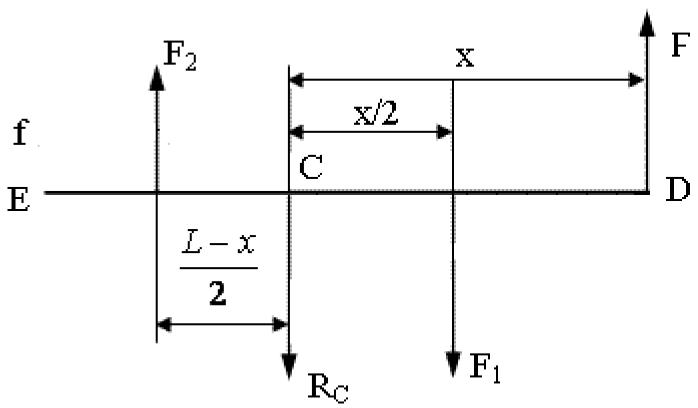


Рис. 3

$$M_x = F \cdot x = F_1 \frac{x}{2} + F_2 \frac{(L-x)}{2} = \frac{\mu mg}{2L}\left(L^2 - 2Lx + 2x^2\right).$$

Звідси можна знайти значення сили F:

$$F = \frac{\mu mg}{2L}\left(\frac{L^2 - 2Lx + 2x^2}{x}\right).$$

Реакція R_c, що при виникає при цьому з беку стрижня, визначаємо з умови рівноваги сил на початку руху бруска під дією сили F:

$$F + F_2 = R + F_1,$$

звідки

$$R_c = F - F_1 + F_2 = \frac{\mu mg}{2L}\left(\frac{L^2 - 2x^2}{x}\right).$$

Знайдемо, при якому значенні *x* реакція $R_C \ge 0$ при $L^2 - 2x^2 \ge 0$, тобто при $x \le \frac{L}{\sqrt{2}}$.

При $x = L/\sqrt{2}$ опора у вигляді вертикального стрижня взагалі не потрібна, бо $R_C = 0$. При подальшому збільшенні *x* формальне використання формули дає значення $R_C < 0$. Це означає, що для забезпечення обертання бруса навколо точки *C* потрібно реалізувати реакцію протилежного напрямку. Отже, щоб брус обертався навколо точки *C* при $x \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$, то стрижень потрібно забивати з протилежної сторони бруса.

Тоді реакція визначається за формулою:

$$R_c = F_1 - F_2 - F = \frac{\mu mg}{2L}\left(\frac{2x^2 - L^2}{x}\right).$$

Знайдемо яку мінімальну силу F має прикласти робітник, щоб перемістити брус:

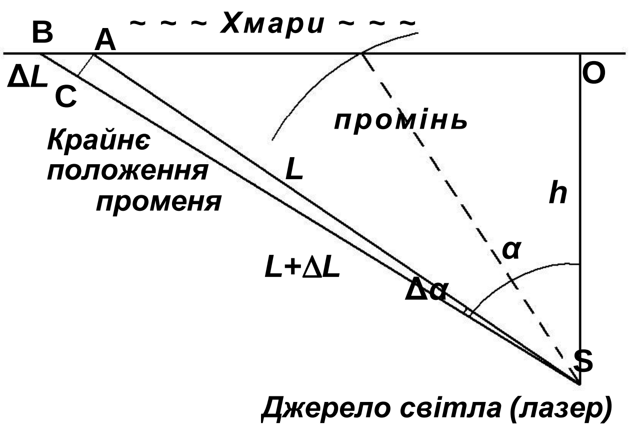
$$F = \tfrac{\mu mg}{2L}\left(\frac{L^2}{x} + 2x - 2L\right) = \frac{\mu mg}{2L}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{2x}\right)^2 - \frac{2L\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} + 2L\sqrt{2} - 2L\right) =$$

$$= \frac{\mu mg}{2L}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{x}} - \sqrt{2x}\right)^2 + 2L\left(\sqrt{2} - 1\right)\right).$$

Мінімальне F буде, якщо вираз $\frac{L}{\sqrt{x}} - \sqrt{2x} = 0$.

$F_{min} = \mu mg\left(\sqrt{2} - 1\right)$, якщо $x = \frac{L}{\sqrt{2}}$, тобто в точці, де $R_c = 0$.

Задача 3 (9-й клас). Промінь потужного лазера обертається навколо горизонтальної осі, перпендикулярної до променя. При повільному обертанні променя, на суцільній однорідній поверхні хмар, що знаходиться на висоті h=10 км спостерігається одна рухома пляма. Швидкість обертання променя збільшують. При якому максимальному періоді обертання променя, на поверхні хмар з'являться дві рухомі плями? Дальність видимості плями від лазерного променя L=20 км.	**Задача 3 (9-й класс).** Луч мощного лазера вращается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной лучу. При медленном вращении луча, на сплошной однородной поверхности облаков, находящейся на высоте h=10 км наблюдается одно движущееся пятно. Скорость вращения луча увеличивают. При каком максимальном периоде вращения луча, на поверхности облаков появятся два движущихся пятна? Дальность видимости пятна от лазерного луча L=20 км.



Розв'язок. Дві плями від одного променя виникають внаслідок зміни шляху, який проходить світло від джерела до хмари при повороті (обертанні) променя. В такому випадку при швидкому обертанні променя він може досягати хмари раніше в положенні, в якому він опиняється пізніше. Це призводить до утворення двох плям, одна з яких рухається в напрямку руху променя, а друга - у протилежному, оскільки в попередніх положеннях світло досягає хмар поступово - тим пізніше, чим більше відстань, яку воно проходить. Очевидно, що найбільша різниця ходу виникатиме на краю опромінюваної частини хмар.

Розглянемо два дуже близькі промені, що падають в крайній видимій точці під кутом 60° (**SB** та **SA**). Кут між цими променями $\Delta\alpha$ вважатимемо малим порівняно із кутом нахилу α. Час повороту променя на кут $\Delta\alpha$ - t_{BA} визначається швидкістю обертання променя (або його періодом обертання, тобто часом, за який промінь робить один оборот - T):

$t_{BA} = \frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\alpha$. За цей час світло променя **SB** повинно подолати різницю відстаней **SB** та **SA** - Δl:

$\Delta l = \Delta t \cdot c$, де c - швидкість розповсюдження світла. З геометричної побудови: **AC**=$\boldsymbol{L}\cdot\Delta\alpha$=$\Delta\boldsymbol{L}\cdot$tg(**SBO**), а кут **SBO** дорівнює $\frac{\pi}{2} - 60^\circ = 30^\circ$. Таким чином, прирівнюючи часи t_{BA} та Δt, отримаємо:

$\frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\alpha = \frac{L}{c \cdot \mathrm{tg}30^\circ} \cdot \Delta\alpha$, звідки $T = \frac{2\pi L}{c \cdot \mathrm{tg}30^\circ} \approx 7{,}256 \cdot 10^{-4}$ с.

Теоретичний тур, 9-й клас

Задача 4.

«Ємність» акумулятора зменшується при багаторазовій зарядці в залежності від напруги, до якої він заряджений. Для акумулятора за один цикл зарядки-розрядки максимальний заряд спадає на 2 мА·год при напрузі 4,2 В і на 10 мА·год при 4,3 В. Акумулятор заряджається автоматичним пристроєм. Спочатку напруга, до якої заряджався акумулятор становила 4,2 В, а початкова ємність – 1 А·год. Потім, внаслідок помилки, зарядний пристрій почав заряджати акумулятор до 4,3 В при досягненні ємності 800 мА·год. При зменшенні «ємності» до 500 мА·год акумулятор замінили. Протягом якого часу працював мобільний телефон із цим акумулятором, якщо його струм споживання становить 40 мА? Скільки б він працював, якби напруга зарядки весь час становила б 4,2 В.

Розв'язування:

1) (бал) Визначимо за скільки циклів зменшується максимальний заряд (N можна визначити з умови, розділивши різницю максимальних зарядів на початку і на при кінці процесу q_0' на спад заряду за один цикл). Коли втрати відсутні, то

$$N_0 = \frac{q_0 - q_0'}{\Delta q}$$

Етапи	1 крок	2 крок	3 крок	…	K крок	…	Останній N крок	Бал
2)	q_0	$q_0 - \Delta q$	$q_0 - 2\Delta q$		$q_0 - k\Delta q$		$q_0 - (N-1)\Delta q$	
3)	$t_1 = \frac{q_0}{I_0}$	$t_2 = \frac{q_0 - \Delta q}{I_0}$	$t_3 = \frac{q_0 - 2\Delta q}{I_0}$		$t_k = \frac{q_0 - k\Delta q}{I_0}$		$t_N = \frac{q_0 - (N-1)\Delta q}{I_0}$	

4) (бал) Повний час становитиме:

$$t_{заг} = \frac{q_0}{I_0}N - \frac{\Delta q}{I_0}\left(0+1+2+\cdots+(N-1)\right) = \frac{q_0}{I_0}N - \frac{\Delta q}{I_0}\frac{(N-1)N}{2} = \frac{q_0}{I_0}N\left(1-\frac{\Delta q}{q_0}\frac{(N-1)}{2}\right).$$

5) (бал) Тоді для першої стадії розрядки $q_0 = 1000\text{ мА}\cdot\text{год}$, $q_0' = 800\text{ мА}\cdot\text{год}$, $\Delta q = 2\text{ мА}\cdot\text{год}$:

$$N_1 = \frac{q_0 - q_0'}{\Delta q} = \frac{1000-800}{2} = 100.$$

Час розрядки акумулятора за даних умов становить:

$$t_{заг} = \frac{q_0}{I_0}N_1\left(1-\frac{\Delta q}{q_0}\frac{(N_1-1)}{2}\right) = \frac{1000\cdot 100}{40}\left(1-\frac{2}{1000}\frac{(100-1)}{2}\right) \approx 2253\text{ год}.$$

6) (бал) Для другої стадії розрядки (після виходу зарядного пристрою з ладу $q_0' = 800\text{ мА}\cdot\text{год}$, $q_0'' = 500\text{ мА}\cdot\text{год}$, $\Delta q_1 = 10\text{ мА}\cdot\text{год}$:

$$N_2 = \frac{q_0' - q_0''}{\Delta q_1} = \frac{800-500}{10} = 30.$$

Час розрядки акумулятора за даних умов становить:

$$t_{заг}' = \frac{q_0'}{I_0}N_2\left(1-\frac{\Delta q_1}{q_0'}\frac{(N_2-1)}{2}\right) = \frac{800\cdot 30}{40}\left(1-\frac{10}{800}\frac{(30-1)}{2}\right) \approx 491\text{ год}.$$

7) (бал) Загальний час розрядження акумулятора приблизно становить:

$$t = t_{заг} + t_{заг}' = 2253 + 491 = 2744\text{ год}.$$

---

8) (бал) Якби збою не було, і зменшення «ємності» акумуляторної батареї мобільного телефону відбувалося б зі сталою швидкістю, то:

$$q_0 = 1000\text{ мА}\cdot\text{год},\ q_0' = 500\text{ мА}\cdot\text{год},\ \Delta q = 2\text{ мА}\cdot\text{год}:$$

$$N_0 = \frac{q_0 - q_0'}{\Delta q} = \frac{1000 - 500}{2} = 250.$$

Час розрядки акумулятора за даних умов становить:

$$t'_{заг} = \frac{q_0}{I_0} N_0 \left(1 - \frac{\Delta q}{q_0} \frac{(N_0 - 1)}{2}\right) = \frac{1000 \cdot 250}{40} \left(1 - \frac{2}{1000} \frac{(250 - 1)}{2}\right) \approx 4694 \text{ год.}$$

Тобто помилка автоматичного зарядного пристрою зменшила час життя батареї приблизно в 1.69 рази.

Задача №5

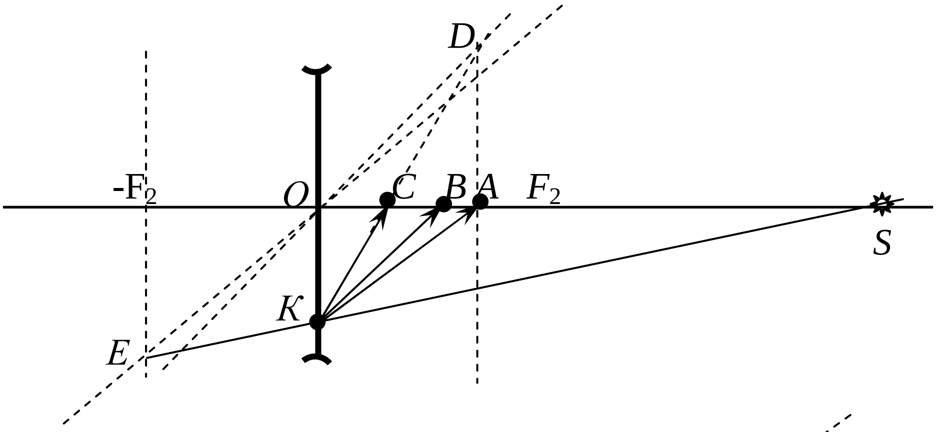
9 клас

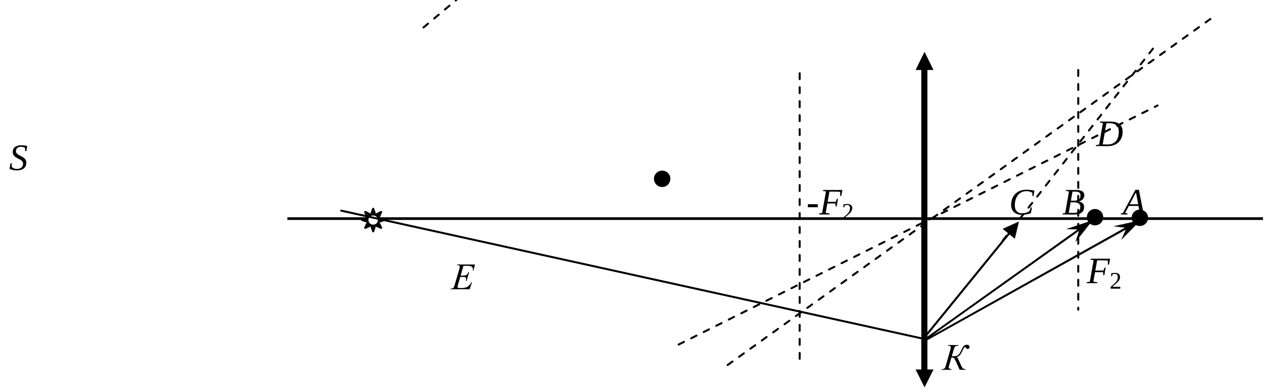
Зображення точкового джерела одержано в точці А (див. Рис. 1) за допомогою тонкої лінзи. Якщо замінити цю лінзу іншою і розташувати її у тому самому місці, можна отримати зображення цього джерела в точці В. Якщо після цього першу лінзу поставити впритул до другої, то зображення переміститься в точку С. Визначте побудовою положення джерела світла

Випадок І. Нехай центр лінзи знаходиться у певній точці на лінії, яка проходить через точки А, В, С. Взагалі можливі наступні розташування лінзи, джерела та його зображень (див. Рис. 1). Нехай промінь від джерела світла потрапляє у точку *К* першої лінзи. Після заломлення у ній промінь КА дає зображення А. Якщо розмістити щільно з цією лінзою другу, то за умовою задачі зображення джерела буде у точці С (промінь КС). Знайдемо побудовою фокальну площину другої лінзи. Скористаємось властивістю зворотності променів. Джерелом у цьому випадку буде світна точка А, а її зображення є точка С. Перетин променя КС з побічною оптичною віссю, яка паралельна до променя АК буде у фокальній площині другої лінзи (F_2). Проведемо симетричну фокальну площину ($-F_2$). Забираємо першу лінзу і отримаємо зображення джерела світла від другої лінзи в точці *B*. Знову використаємо правило зворотності ходу променів з точки *B* в точку *К* (промінь ВК). Після заломлення він перетинається з побічною оптичною віссю у цій фокальній площині у точці Е. Перетин променя EK до вісі АВС дає уявне положення джерела. Див. рисунки 1 і 2.

Рис. 1. Утворення зображень у випадку двох розсіювальних лінз.

Рис. 2 Демонструє випадок утворення дійсних зображень джерел світла.





Речь идет о задаче № 1 в 11 классе и задаче № 5 в 9 классе.

В приведенном решении (не знаю, авторском или жюри) все начинается с того, что мы где-то ставим линзу и от нее начинаем построения. Но положение линзы не задано! Надо бы еще доказать, что от перемещения линзы результат построения не изменится. Этот вопрос даже не обсуждается!

А доказать это просто невозможно: если не задать положение линзы, задача имеет бесчисленное множество решений (т.е. попросту не имеет смысла).

Рассмотрим даже упрощенную задачу: пусть заданная прямая совпадает с главной оптической осью, а про линзы известно, что они собирающие. Пусть S — источник, O — оптический центр линзы. Пусть точки расположены в порядке $S-O-C-B-A$. Обозначим $SO=d$, $OC=f$, $CB=a$, $BA=b$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f+a+b}=D_1, \\ \dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f+a}=D_2, \\ \dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=D_1+D_2. \end{cases}$$

Исключая оптические силы, получаем одно уравнение с двумя неизвестными: $\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{f+a+b}-\dfrac{1}{f+a}$. Иначе: $d=\dfrac{f(f+a+b)(f+a)}{a(a+b)-f^2}$.

Очевидно, изменяя f, мы получаем различные значения d, причем сумма этих величин никак не получается постоянной, т.е. функцией от a, b. Например, задав $f_0=\sqrt{a(a+b)}$, мы получим $d\to\infty$ (т.е. при любом соотношении заданных отрезков годится бесконечно удаленный источник, дающий пучок параллельных лучей). От заданных значений a, b при этом зависят только оптические силы линз:

$$D_1=\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}+a+b},\ D_2=\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}+a}.$$

При изменении f от нуля до f_0 значение d изменяется от нуля до бесконечности…

Подойдем иначе. Пусть мы ***хотим*** поставить источник на расстоянии L перед точкой C. Получится ли это? Другими словами, найдется ли корень в промежутке $[0;L]$ у уравнения $\dfrac{1}{L-f}+\dfrac{1}{f+a+b}+\dfrac{1}{f+a}=\dfrac{1}{f}$? При $f\to 0$ правая часть стремится к бесконечности, а левая — конечна; при $f\to L$ получается как раз наоборот. Таким образом, корень существует при любом L и источник можно поставить где угодно!

<u>Задача кажется более чем странной. Неужели никто из детей этого не заметил? Или их рассуждения не оценили?</u>