

Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме:
“Неопределенный интеграл”

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (16 часов)

Урок 1. Первообразная функция на промежутке. Основное свойство первообразной. Неопределенный интеграл. Физический смысл неопределенной постоянной. Таблица неопределенных интегралов.

Урок 2. Основные свойства неопределенного интеграла. Использование линейности неопределенного интеграла для нахождения интегралов.

Урок 3. Формула замены переменной.

Урок 4. Упражнения на применение формулы замены переменных.

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: “Линейность. Замена переменной”.

Урок 6. Более сложные интегралы, берущиеся с помощью замены переменной.

Урок 7. Нахождение неопределенных интегралов при помощи тригонометрических подстановок.

Урок 8. (*доп.*) Гиперболические функции.

Урок 9. (*доп.*) Взятие неопределенных интегралов при помощи гиперболических подстановок.

Урок 10. Интегрирование по частям.

Урок 11. (*доп.*) Формулы понижения (рекуррентные соотношения).

Урок 12. Интегралы, содержащие квадратные трехчлены.

Урок 13. *Самостоятельная работа* по теме: “Нахождение неопределенных интегралов – II”.

Урок 14. Обобщающий урок по теме.

Урок 15. **Контрольная работа.**

Урок 16. Анализ контрольной работы.

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C'$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a } + C = -\arccos \frac{x}{ a } + C'$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right + C \quad (\alpha \neq 0)$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{ a } + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right + C$	

Урок 1. Первообразная

Домашнее задание

- 1) Докажите, что функция $F(x) = \ln(-x) + \sqrt{-x}$ является первообразной для функции

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x \in (-\infty; 0).$$

- 2) Будет ли функция F первообразной для f на заданном промежутке, если:

$$(1) F(x) = \sqrt{4x^7 - 1} + 5, \quad f(x) = \frac{14x^6}{\sqrt{4x^7 - 1}}, \quad x \in (3; 4);$$

$$(2) F(x) = \frac{1}{x} + 6x + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad f(x) = 6 - \frac{1}{x^2} - \sin 2x,$$

а) $x \in \mathbb{R}$; б) $x \in (-\infty; 0)$; в) $x \in [0; 5)$; г) $x \in [1; 3]$; д) $x \in (-1; 1)$;

$$(3) F(x) = x|x^2 - 3x - 4|, \quad f(x) = 3x^2 - 6x - 4, \quad x \in (4; 5);$$

$$(4) F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2, & x \geq 2, \end{cases} \quad f(x) = |x - 2|x,$$

а) $x \in \mathbb{R}$; б) $x \in (-\infty; 2)$; в) $x \in (-\infty; 2]$;
г) $x \in [2; \infty)$; д) $x \in (5; 7)$; е) $x \in (-5; 7)$?

Урок 2. Основные свойства неопределенного интеграла

С помощью таблицы простейших интегралов, найдите следующие интегралы:

$$1) \int \left(\frac{1}{3}x^8 - 6x^5 - x^2 - 4 \right) dx;$$

$$2) \int (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx;$$

$$3) \int (3 - x^2)^3 dx;$$

$$4) \int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + 3 \sin x \right) dx;$$

$$5) \int \left(3e^x - 5 \cdot 8^x + \frac{32}{x} \right) dx;$$

$$6) \int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx;$$

$$7) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$8) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$$

$$9) \int \frac{x^2 dx}{1+x^2};$$

$$10) \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$11) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$12) \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

Домашнее задание

С помощью таблицы простейших интегралов, найдите следующие интегралы:

$$1) \int x^2 (5-x)^4 dx;$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$3) \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx;$$

$$4) \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx;$$

$$5) \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$6) \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx;$$

$$7) \int (1 + \sin x + \cos x) dx;$$

$$8) \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

Урок 3. Формула замены переменных

Домашнее задание

Найдите интегралы:

1) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx;$

2) $\int \frac{dx}{2-3x^2};$

3) $\int \frac{dx}{1-\cos x};$

4) $\int \frac{x dx}{4+x^4};$

5) $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$

6) $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{2/3}};$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}};$

8) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$

9) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)};$

10) $\int \frac{dx}{\cos x}.$

Урок 4. Упражнения на метод замены переменной

Найдите интегралы:

1) $\int x(1-x)^{100} dx;$

2) $\int \frac{x^2}{1+x} dx;$

3) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)};$

$$4) \int \frac{dx}{1 + e^x};$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}};$$

$$6) \int x\sqrt{2-5x} dx;$$

$$7) \int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2};$$

$$8) \int \sin^2 x dx;$$

$$9) \int \sin^3 x dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

Домашнее задание

Найдите интегралы:

$$1) \int \frac{x^3}{3+x} dx;$$

$$2) \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx;$$

$$3) \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)};$$

$$4) \int \cos^4 x dx;$$

$$5) \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx;$$

$$6) \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx;$$

$$7) \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx;$$

$$8) \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

Урок 5. Самостоятельная работа №1: “Линейность. Замена переменной”

Домашнее задание

Найдите интегралы:

$$1) \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{1+\sin x};$$

$$3) \int \sin^5 x \cos x dx;$$

$$4) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;$$

$$5) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$$

$$6) \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$$

$$7) \int x^2 (2-3x^2)^2 dx;$$

$$8) \int \frac{x^5}{x+1} dx;$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2+x-2};$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

Урок 6. Более сложные интегралы, берущиеся с помощью замены переменной

Домашнее задание

Найдите интегралы:

- 1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx;$
- 2) $\int x^5 (2-5x^3)^{2/3} dx;$
- 3) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx;$
- 4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx;$
- 5) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$
- 6) $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$
- 7) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}};$
- 8) $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx.$

Урок 7. Нахождение неопределенных интегралов при помощи тригонометрических подстановок

Домашнее задание

Найдите следующие интегралы с помощью тригонометрических подстановок $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$ и т. п. (параметры положительны):

- 1) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}};$
- 2) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}};$
- 3) $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx;$
- 4) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx;$
- 5) $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$

Урок 9. Взятие неопределенных интегралов при помощи гиперболических подстановок

Домашнее задание

1) Найдите интегралы:

$$(1) \int \operatorname{sh}^2 x \, dx;$$

$$(2) \int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$$

2) Применяя гиперболические подстановки $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$ и т. п., найдите следующие интегралы (параметры положительны):

$$(1) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx;$$

$$(2) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \, dx \quad (x \geq a);$$

$$(3) \int \sqrt{(x+a)(x+b)} \, dx \quad (x+a > 0, x+b > 0).$$

Урок 10. Интегрирование по частям

Домашнее задание

Применяя метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

$$1) \int \ln x \, dx;$$

$$2) \int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx;$$

$$3) \int x^2 e^{-2x} \, dx;$$

$$4) \int \arcsin x \, dx;$$

$$5) \int x^2 \arccos x \, dx;$$

$$6) \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx;$$

$$7) \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

Урок 11. Формулы понижения

Домашнее задание

1) Выведите формулу понижения для интеграла $K_n = \int \cos^n x dx$ ($n > 2$) и с ее помощью вычислите $\int \cos^8 x dx$.

2) Выведите формулу понижения для интеграла $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ ($n > 2$) и с ее помощью вычислите $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

3) Найдите интегралы:

$$(1) \int x^5 e^{x^3} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx;$$

$$(4) \int x \sin^2 x dx;$$

$$(5) \int (e^x - \cos x)^2 dx.$$

Урок 12. Интегралы, содержащие квадратные трехчлены

Домашнее задание

Найдите интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1};$$

$$2) \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1};$$

$$3) \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2};$$

$$4) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx;$$

$$5) \int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx;$$

$$6) \int \sqrt{2+x-x^2} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}};$$

$$8) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$$