Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-9

Материалы к урокам по теме: “Тригонометрические функции-I”

Харьков, 2013 г.

Поурочное планирование (17 часов)

Урок 1. Понятие о тригонометрии. Обобщение понятия угла. Радианное измерение дуг и углов. Координатная окружность.

Урок 2. Синус и косинус числового аргумента.

Урок 3. Тангенс и котангенс числового аргумента.

Урок 4. *Самостоятельная работа* по теме: “Определение тригонометрических функций числового аргумента”.

Урок 5. Анализ самостоятельной работы и проверка дополнительного домашнего задания.

Урок 6. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Урок 7. Нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них.

Урок 8. Свойства тригонометрических функций (четность и нечетность, периодичность).

Урок 9. Графики тригонометрических функций. Гармонические колебания и их график.

Урок 10. *Самостоятельная работа* по теме: “Простейшие тригонометрические тождества. Графики тригонометрических функций”.

Урок 11. Формулы приведения. Мнемоническое правило.

Урок 12. Упражнения на формулы приведения.

Урок 13. Упражнения на формулы приведения.

Урок 14. *Самостоятельная работа* по теме: “Формулы приведения”.

Урок 15. Обобщающий урок по теме.

Урок 16. Контрольная работа.

Урок 17. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Обобщение понятия угла

Домашнее задание

1) Определите радианную меру угла, если его градусная мера равна:

   а) $2°$; б) $20°$; в) $10°6'$; г) $225°$; д) $1440°$.

2) Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна:

   а) $0,25\pi$; б) $0,6\pi$; в) $1,5\pi$; г) 12π.

3) Нанесите на координатную окружность точки вида:

   а) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4) Найдите градусную меру центрального угла окружности радиуса $R = 16$, если ему соответствует дуга длиной $l = 4$.

5) Найдите радиус окружности, если центральному углу $\varphi = 210°$ соответствует дуга длиной $l = 20\pi$.

6) Каким должно быть число a, чтобы среди точек, соответствующих числам вида $2\pi a n$ $(n \in \mathbb{Z})$, было бы конечное число различных?

7) Повторите таблицу значений тригонометрических функций.

Урок 2. Синус и косинус числового аргумента

Домашнее задание

Галицкий: 13.8 (б), 13.9 (б) (только для синусов и косинусов), 13.11, 13.12 (д,е), 13.13 (в,г), 13.14 (д,е), 13.15 (в), 13.21 (а), 13.23 (а).

Дополнительное домашнее задание-1

1) Не пользуясь таблицами, найдите значения $\cos 72°$ и $\cos 36°$.

   Указание: Рассмотрите равнобедренный треугольник с углом при основании $72°$.

2) В окружность вписан правильный пятиугольник. Найдите отношение его стороны к радиусу окружности.

   Замечание. *В 1796 году К.Ф.Гаусс доказал (ему было 19 лет, это была его первая научная работа), что правильный многоугольник можно построить при помощи циркуля и линейки в том и только в том случае, когда отношение его стороны к радиусу описанной окружности можно выразить через целые числа с помощью четырех арифметических действий и извлечения квадратного корня. Получив ответ, обратите внимание, что правильный пятиугольник именно таков.*

3) Одна из вершин правильного пятиугольника, вписанного в тригонометрическую окружность, расположена в начале отсчета. Найдите координаты остальных его вершин.

4) Пусть $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Докажите следующие неравенства:

$$\text{а) } \sin\alpha < \alpha; \qquad \text{б) } \alpha < \operatorname{tg}\alpha; \qquad \text{в) } \cos\alpha > 1 - \alpha^2.$$

5) Если для каждого целого n найти число $\sin(\pi n/30)$, сколько различных чисел получится?

6) Каким должно быть число a, чтобы множество чисел вида $\cos(\pi n a)$, где n пробегает все целые числа, было конечным?

7) Существует ли такое натуральное число n, что

а) $|\sin n| < \dfrac{1}{1000}$; б) $|\cos n| < \dfrac{1}{1000}$?

Урок 3. Тангенс и котангенс числового аргумента

Домашнее задание

Галицкий: 13.7 (г), 13.8 (г), 13.17 (а), 13.18 (а), 13.20, 13.25.

Урок 5. Анализ самостоятельной работы и проверка дополнительного домашнего задания

Домашнее задание

Галицкий: 13.14 (в), 13.17 (б), 13.18 (б), 13.19 (б), 13.22 (б).

Урок 6. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

1) В курсе геометрии мы уже получали соотношения, связывающие различные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Эти соотношения справедливы и в общем случае. Выпишем их:

(1) $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ – **основное тригонометрическое тождество**;

(2) $\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$

(3) $\boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

(4) $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

Замечание. Формулы (2) – (4) справедливы при тех α, при которых определены обе части равенства.

2) **Упражнения**.

(1) Могут ли одновременно выполняться равенства

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \ \text{ и } \ \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2,5}\,?$$

(2) Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos^2 5\alpha - 1}{1-\sin^2 5\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$;

в) $\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}$;

г) $\left(\sin\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\right)$;

д) $\sin\alpha\,\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$;

е) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

(3) Докажите тождества:

а) $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha} = \dfrac{3}{2}$.

б) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -2\operatorname{tg}\alpha,\ \ \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Домашнее задание

Галицкий: 13.27, 13.29, 13.30, 13.39 (б), 13.40 (б), 13.41 (б), 13.48 (а).

Урок 7. Нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них

1) Нам часто придется иметь дело с заданиями, в которых требуется найти значение какой-то тригонометрической функции аргумента α по значению другой тригонометрической функции этого же аргумента. Часто эта задача решается неоднозначно. Главная трудность – аккуратно расставить знаки в полученных выражениях.

2) **Упражнения**.

(1) Известно, что $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Найдите $\sin\alpha$.

(2) Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

(3) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3\,\dfrac{15}{16}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

(4) Зная, что $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a^2}{b^2}$, $a \neq 0$, $\sin\alpha < 0$, найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

(5) Найдите значение выражения
$$\frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha},$$
если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

(6) Найдите значение выражения
$$\frac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{\cos\alpha + 2\sin\alpha},$$
если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = 4$.

(7) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$. Найдите
а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

(8) Исключите α из системы
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\cos\alpha}, \\ y = 2\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

(9) Найдите минимальное и максимальное значение выражения
$$A = 2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha.$$

Домашнее задание

1) **Галицкий: 13.44 (б,в), 13.47 (б), 13.49, 13.50, 13.51 (б), 13.52 (б)**.

2) Повторите все, что мы учили о четных и нечетных функциях.

Урок 8. Свойства тригонометрических функций (четность и нечетность, периодичность)

Домашнее задание

1) **Галицкий: 13.16, 13.26, 13.39 (а), 13.42 (б), 13.47 (а), 13.58 (а), 13.59 (б)**.

2) Повторите схему исследования функции.

Дополнительное домашнее задание-2

1) Докажите, что функция $f(x) = \sin x^2$ не является периодической.

2) **(Различные периоды одной функции)**

   а) Числа 5 и 8 являются периодами функции f. Докажите, что число 1 также является периодом функции f.

   б) Подумайте, как можно обобщить результат предыдущей задачи.

3) **(Функция $\boldsymbol{f(x) = \cos x + \cos kx}$)**

   а) Докажите, что функция $f(x) = \cos x + \cos kx$ при рациональном k периодична.

   б) Найдите главный период функции $f(x) = \cos x + \cos 1,01x$.

   в) Докажите, что функция $f(x) = \cos x + \cos kx$ при иррациональном k не является периодической.

4) Функция $y = f(x)$ имеет главный период 2, а функция $y = g(x)$ имеет главный период 6. Может ли функция $y = f(x) + g(x)$ иметь главный период 3 ?

Урок 9. Графики тригонометрических функций. Гармонические колебания и их график

Домашнее задание

1) Постройте графики:

   (1) $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; (2) $y = -2\cos(2x - 1)$;

   (3) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$; (4) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x - 1$.

2) **Галицкий: 13.48 (б), 13.56, 13.57 (а), 13.59 (а), 13.65, 13.69 (б)**.

Урок 10. Самостоятельная работа №2: “Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента”

Домашнее задание

Галицкий: 13.55, 13.58 (б), 13.60, 13.66, 13.70 (а), 13.71.

Урок 11. Формулы приведения. Мнемоническое правило

Домашнее задание

Галицкий: 13.31, 13.32, 13.35 (а), 13.37 (а), 13.38 (а).

Урок 12. Упражнения на формулы приведения

1) Вычислите:

   (1) $\operatorname{tg}\dfrac{74\pi}{3}$;

   (2) $\cos\left(-\dfrac{45\pi}{4}\right)$;

   (3) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{20\pi}{3}\right)$;

   (4) $\sin\dfrac{53\pi}{6}$.

2) Упростите выражение:

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(3\pi-\alpha\right)+\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(11\pi+\alpha\right).$$

3) Докажите тождество:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\pi-\alpha\right)\cdot\sin\left(3\pi+\alpha\right)}{\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-1}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

4) Вычислите:

   (1) $\operatorname{tg}41^\circ\cdot\operatorname{tg}42^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49^\circ$;

   (2) $\cos 20^\circ+\cos 40^\circ+\ldots+\cos 180^\circ$.

5) Приведите к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего 45° (или $\dfrac{\pi}{4}$):

   (1) $\cos 1501^\circ$;

   (2) $\sin\left(-824^\circ\right)$;

   (3) $\operatorname{tg}\dfrac{29\pi}{5}$;

   (4) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{41\pi}{9}\right)$.

Домашнее задание

Галицкий: 13.35 (б), 13.37 (б), 13.38 (б), 13.42 (а), 13.43 (б), 13.53 (а), 13.57 (б).

Урок 13. Упражнения на формулы приведения-2

1) Упростите выражения:

   (1) $\sin(-523^\circ)\cdot\cos(-287^\circ)-\operatorname{ctg}(-296^\circ)\cdot\operatorname{tg}(-604^\circ)$.

   (2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\left(\sin\dfrac{5\pi}{14}-\cos\dfrac{\pi}{7}\right)$;

   (3) $\dfrac{1-2\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}+\dfrac{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}$.

   (4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{4\pi}{5}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi+\beta)\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)$;

   (5) $\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\alpha-\pi)$;

2) Вычислите:

   (1) $\sin 395^\circ\cdot\sin 505^\circ+\cos 575^\circ\cdot\cos 865^\circ+\operatorname{tg}606^\circ\cdot\operatorname{tg}1104^\circ$;

   (2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{11}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{22}$.

3) Найдите $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

4) Известно, что $\operatorname{ctg}(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=a$. Найдите

$$\operatorname{ctg}^2(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}^2(30^\circ+2\alpha).$$

5) Найдите

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+2\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)},$$

если $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{3}{5}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Домашнее задание

1) Приведите выражение к тригонометрической функции аргумента α:

   а) $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2) Докажите, что если α, β, γ – углы треугольника, то

а) $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\dfrac{\gamma}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$;

в) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$; г) $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$.

3) Вычислите: $\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}240^\circ\cdot\operatorname{ctg}210^\circ$.

4) Упростите выражения:

а) $$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)};$$

б) $$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)\sin^2(\alpha+\pi)-$$
$$-\cos^2(\alpha+\pi)\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right);$$

в) $$\left(\frac{\cos(2,5\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(3\pi+\alpha)}-\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

5) Докажите тождество: $$\frac{\sin(\alpha-\pi)\cos(\alpha-2\pi)\sin(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin^2\alpha.$$

Урок 15. Обобщающий урок

Домашнее задание

1) Найдите значение выражения $\dfrac{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

2) Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Найдите $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

3) Известно, что $\operatorname{tg}(50^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(40^\circ-\alpha)=4$. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2(50^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}^2(40^\circ-\alpha)$.

4) Выясните, принимает ли выражение $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)+5$ наибольшее и наименьшее значения, а если принимает, то найдите их.

5) Упростите выражение $\sqrt{4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha+1}-\sqrt{4\cos^4\alpha+4\cos^2\alpha+1}$, если $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$.

6) Известно, что $\cos\alpha - \sin\alpha = \dfrac{1}{5}$. Найдите возможные значения выражения $\cos\alpha + \sin\alpha$.

7) Докажите неравенство: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \leqslant 1$.

8) Вычислите: $\dfrac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 90^\circ}{\sin 91^\circ \cdot \sin 92^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 179^\circ}$.