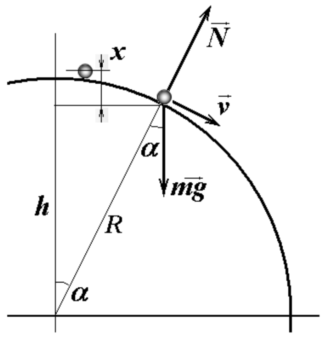
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1

1A (2 балла)

Запишем для тела второй закон Ньютона в проекции на радиус

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N \qquad (1)$$



и закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgx \qquad (2)$$

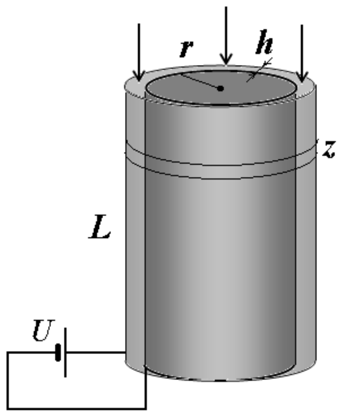
Из системы уравнений (1) и (2) получаем при $N = 0$ условие отрыва:

$$h = 2x,$$

где $h = R\cos\alpha$ — высота тела над центром сферы. Таким образом, тело оторвётся, когда его высота над центром будет вдвое больше высоты, на которую он опустился от начального положения. Поэтому $h = \frac{2}{3}h_0$.

1B (3 балла)

Выделим тонкий слой воды толщиной z, перпендикулярный оси системы. Этот слой воды пройдет через нагреватель за время $\tau = \frac{L}{v}$, где v — искомая скорость течения. Вода будет нагреваться за счет теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока. Это количество теплоты определяется по закону Джоуля–Ленца



$$Q = \frac{U^2}{R}\tau. \qquad (1)$$

Здесь R — электрическое сопротивление выделенного слоя воды. Учитывая, что электрический ток протекает перпендикулярно поверхностям цилиндров, это сопротивление равно

$$R = \rho\frac{h}{2\pi rz}. \qquad (2)$$

Вся выделяющая в слое теплота идет на ее нагревание, поэтому может быть определена по формуле $Q = cm\Delta t$. Масса выделенного слоя равна $m = V\gamma = 2\pi rzh\gamma$. Уравнение теплового баланса имеет вид

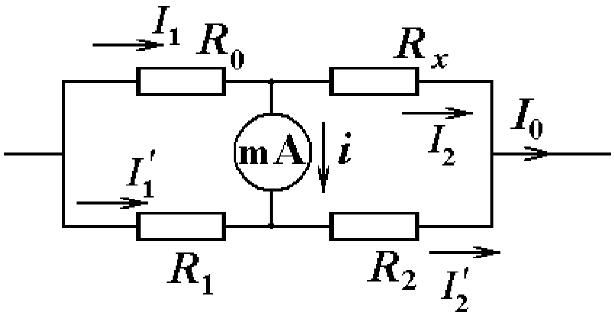
$$\frac{U^2}{\rho\frac{h}{2\pi rz}}\frac{L}{v} = c\cdot 2\pi rzh\gamma\cdot\Delta t. \qquad (3)$$

Из этого уравнения находим

$$v = \frac{U^2L}{\rho h^2 c\gamma\Delta t}. \qquad (4)$$

1C (2 балла)

На рисунке показано направление протекания электрических токов и их обозначение. Силы токов через резисторы могут быть найдены из очевидных соотношений



$$\begin{cases} I_1 + I_1' = I_0 \\ I_1 R_0 = I' R_1 \end{cases} \Rightarrow \quad I_1 = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_0}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} I_2 + I_2' = I_0 \\ I_2 R_0 = I' R_2 \end{cases} \Rightarrow \quad I_2 = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_x}, \qquad (2)$$

Из распределения токов, показанного на рисунке, следует, что сила тока через миллиамперметр равна

$$i = I_1 - I_2 = I_0 \left(\frac{R_1}{R_1 + R_0} - \frac{R_2}{R_2 + R_x} \right). \qquad (3)$$

Чтобы сила тока через миллиамперметр стала равной нулю, необходимо выполнение условия (условие сбалансированности моста)

$$\frac{R_1}{R_1 + R_0} = \frac{R_2}{R_2 + R_x},$$

или

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{R_2}{R_x}. \qquad (4)$$

из которого следует формула для определения неизвестного сопротивления

$$R_x = R_0 \frac{R_2}{R_1}. \qquad (5)$$

Для определения погрешности этой формулы следует решить уравнение (3). В ходе решения можно использовать условие малости силы тока i. Обозначим $\frac{i}{I_0} = \eta$, и при проведении преобразований учтем, что $\eta << 1$:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_0} - \frac{R_2}{R_2 + R_x} = \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_2 + R_x} = \frac{R_1}{R_1 + R_0} - \eta$$

$$\frac{R_2 + R_x}{R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_0} - \eta \right)^{-1} = \frac{R_1 + R_0}{R_1} \left(1 - \eta \frac{R_1 + R_0}{R_1} \right)^{-1} \approx \frac{R_1 + R_0}{R_1} \left(1 + \eta \frac{R_1 + R_0}{R_1} \right).$$

$$1 + \frac{R_x}{R_2} = \left(1 + \frac{R_0}{R_1} \right) \left(1 + \eta \frac{R_1 + R_0}{R_1} \right) = 1 + \frac{R_0}{R_1} + \eta \left(\frac{R_1 + R_0}{R_1} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_x = R_2 \frac{R_0}{R_1} + \eta \left(\frac{R_1 + R_0}{R_1} \right)^2$$

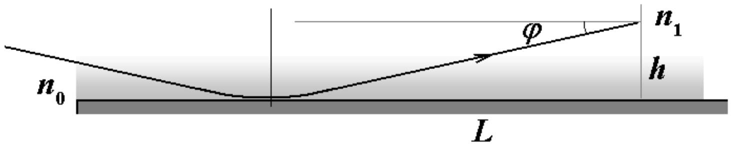
Перепишем последнее соотношение в виде

$$R_x = R_2 \frac{R_0}{R_1} + \eta \left(\frac{R_1 + R_0}{R_1} \right)^2 = R_2 \frac{R_0}{R_1} \left(1 + \eta \frac{(R_1 + R_0)^2}{R_1 R_2} \right), \qquad (6)$$

откуда следует, что относительная погрешность формулы (5) равна

$$\varepsilon = \eta \frac{(R_1 + R_0)^2}{R_1 R_2}. \qquad (7)$$

1D (3 балла)



В действительности, кажущиеся «лужи» появляются из-за отражения лучей, идущих от неба, от более нагретого слоя воздуха вблизи асфальта. На рисунке схематично показан один из таких лучей.
Условие полного отражения имеет вид

$$n_0 = n_1 \cos\varphi, \qquad (1)$$

где n_0, n_1 — показатели преломления воздуха у поверхности асфальта и на удалении от него, соответственно.
Показатель преломления зависит от концентрации молекул, и, следовательно, от температуры воздуха. Из уравнения состояния идеального газа

$$P = \gamma kT \qquad (2)$$

выразим значение концентрации и подставим в формулу для показателя преломления:

$$n_1 = 1 + \frac{\alpha P}{2kT}, \quad n_0 = 1 + \frac{\alpha P}{2k(T + \Delta T)}. \qquad (3)$$

найдем отношение показателей преломления (с учетом того, что они мало отличаются от единицы).

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{1 + \dfrac{\alpha P}{2k(T + \Delta T)}}{1 + \dfrac{\alpha P}{2kT}} \approx \frac{1 + \dfrac{\alpha P}{2kT}\left(1 - \dfrac{\Delta T}{T}\right)}{1 + \dfrac{\alpha P}{2kT}} \approx 1 - \frac{\alpha P \Delta T}{2kT^2}. \qquad (4)$$

Так как угол φ мал, можно воспользоваться приближенной формулой $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. В этом случае из формул (1) и (4) следует, что

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha P \Delta T}{kT^2}}. \qquad (5)$$

Теперь легко найти, что расстояние на котором видна «лужа» при заданных условиях равно

$$L = \frac{h}{\varphi} = h\sqrt{\frac{kT^2}{\alpha P \Delta T}} = 1{,}2\sqrt{\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (293)^2}{2{,}3 \cdot 10^{-29} \cdot 1{,}0 \cdot 10^5 \cdot 2{,}0}} \approx 6{,}1 \cdot 10^2\, м. \qquad (6)$$

Схема оценивания

№	**Содержание**	**баллы**
	1A	
1	Уравнение второго закона Ньютона (1)	1
2	Уравнение закона сохранения энергии	0,5
3	Окончательный результат	0,5

	1B	
1	Закон Джоуля-Ленца (1)	0,5
2	Сопротивление слоя воды (2)	1
3	Теплота на нагревание	0,5
4	Уравнение теплового баланса	0,5
5	Окончательная формула (4)	0,5
	1C	
1	Выражения для сил токов (1)-(2)	0,5
2	формула для сопротивления (4)	0,5
3	Ток через милиамперметр (3)	0,5
4	Окончательный результат (7)	0,5
	1D	
1	условие полного отражения (1)	1
2	зависимость показателя преломления от температуры (3)	1
3	выражение для скользящего угла (5)	1
4	Выражение для расстояния (6)	0,5
5	Численное значение	0,5

Задача 2
Электромагнитные качели (10 баллов)

1.[1 балл] Силы, действующие на подвижный проводник, изображены на рисунке. Условие скольжения вдоль оси x имеет вид

$$mg\sin\alpha > F_{friction} = \mu N = \mu mg\cos\alpha\,. \tag{1}$$

Откуда получаем искомое неравенство $\mathrm{tg}\alpha > \mu$.

2. [2 балла] По закону электромагнитной индукции Фарадея в проводнике возникает ЭДС, равная

$$E_{induction} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = Bhu\,. \tag{2}$$

Для замкнутого контура, образованного катушкой индуктивности, проводящими стержнями и подвижным проводником, имеем

$$E_{induction} + E_{selfinduction} = 0\,, \tag{3}$$

где ЭДС самоиндукции катушки равна

$$E_{selfinduction} = -L\frac{dI}{dt}\,. \tag{4}$$

Здесь I — сила тока в катушке.

Совместное решение (2)-(4) дает

$$I = \frac{Bh}{L}x\,. \tag{5}$$

3. [1 балл] Силы, действующие на проводник с током при его движении вниз, изображены на рисунке 1. Уравнение движения подвижного проводника вдоль оси x (направленной вниз по наклонной плоскости) имеет вид

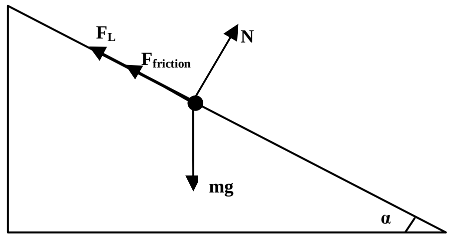


Рисунок 1.

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - F_A, \qquad (6)$$

где $F_A = BIh = \frac{B^2h^2}{L}x$ — сила Ампера. Таким образом, уравнение (6) записывается в виде

$$\ddot{x} = -\frac{B^2h^2}{mL}x + g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \qquad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение гармонических колебаний при наличии постоянной силы, решение которого известно и записывается так

$$x = x_0 + A\cos\omega t. \qquad (8)$$

Здесь $\omega^2 = \frac{B^2h^2}{mL}$ — частота собственных колебаний. Подстановка (8) в (7) при начальных условиях $x(0)=0$ и $u(0)=\dot{x}(0)=0$ дает ответ

$$x(t) = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\omega^2}(1-\cos\omega t), \qquad (9)$$

который верен, пока скорость не меняет своего направления, т.е. для $t < \pi/\omega$.
Соответственно, скорость проводника равна

$$u(t) = \dot{x}(t) = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\omega}\sin\omega t. \qquad (10)$$

Отсюда

$$u_{\max} = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bh}\sqrt{mL}. \qquad (11)$$

4. [1 балл] Подстановка (9) в (5) дает зависимость силы тока от времени

$$I(t) = \frac{Bh}{L}x(t) = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bh}(1-\cos\omega t). \qquad (12)$$

Отсюда находим

$$I_{\max} = \frac{2mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bh}. \qquad (13)$$

5. [3 балла] Силы, действующие на проводник с током при его движении вверх, изображены на рисунке 2. Уравнение движения подвижного проводника вдоль оси x имеет вид

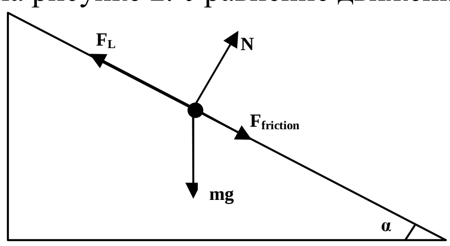


Рисунок 2.

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha - F_A \qquad (14)$$

или с учетом (5)

$$\ddot{x} = -\frac{B^2h^2}{mL}x + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha. \qquad (15)$$

Опять решая это уравнение, но уже при начальных условиях $x(\pi/\omega) = \frac{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\omega^2}$ и $u(\pi/\omega) = \dot{x}(\pi/\omega) = 0$, получим

$$x(t) = \frac{g(\sin\alpha - 3\mu\cos\alpha)}{\omega^2}(1-\cos\omega t) + \frac{4\mu g\cos\alpha}{\omega^2}. \qquad (16)$$

Из (9) и (16) заключаем, что после каждого изменения направления движения амплитуда уменьшается на величину $\delta A = 2\mu g\cos\alpha/\omega^2$. Окончательная остановка произойдет, если точка разворота находится на расстоянии не больше $\delta A/2$ от положения равновесия в отсутствие трения $x_0 = g\sin\alpha/\omega^2$. Обозначив x_f положение окончательной остановки, количество выделившейся теплоты можно найти из закона сохранения энергии:

$$Q(x_f) = mgx_f \sin\alpha - LI_f^2/2 = -\frac{B^2h^2(x_f - x_0)^2}{2L} + \frac{m^2g^2L\sin^2\alpha}{2B^2h^2}. \qquad (17)$$

В случае если $\mu << tg\alpha$ можно пренебречь первым членом в предыдущей формуле, и получаем

$$Q = \frac{m^2g^2L\sin^2\alpha}{2B^2h^2}. \qquad (18)$$

6. [2 балла] Для конечного μ нужно знать значение x_f. Для $\mu = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{2009}$ из решения предыдущего пункта получаем

$$x_f - x_0 = \delta A/2. \qquad (19)$$

В этом случае относительная ошибка равна

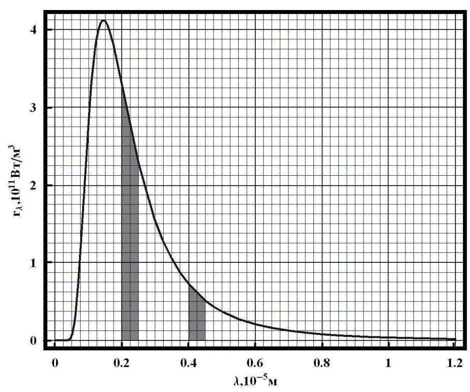
$$\frac{\delta Q}{Q} = -\left(\frac{\delta A/2}{x_0}\right)^2 = -\frac{1}{2009^2} = 2{,}5\cdot 10^{-7}. \qquad (20)$$

Схема оценивания

№	**Содержание**	**Баллы**
1	Правильное неравенство tgα > μ	1
2	Выражение (2) или его аналог Правильный ответ (5)	1 1
3	Формула (11)	1
4	Формула (13)	1
5	Описание свойств точки остановки Формула (18)	1 2
6	Точка остановки (19) Ответ (20)	1 1

Задача 3
Тепловое излучение (10 баллов)

1. Отношение энергий, испускаемых в диапазонах $(\lambda_1, \lambda_1 + \Delta\lambda)$ и $(\lambda_2, \lambda_2 + \Delta\lambda)$, равно отношению площадей под соответствующими графиками, определяемых в свою очередь количеством клеток



$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{S_1}{S_2} = 4.5$$

2. Для каждого из графиков определяется длина волны максимума:

$\lambda_{\max} = 1{,}45\circ 10^{-6}$ м при $T_1 = 2000K$

$\lambda_{\max} = 2{,}23\circ 10^{-6}$ м при $T_1 = 1300K$.

Из зависимости $\lambda = bT^n$, находим n = -1, b = 2,9·10^{-3} м·К.

3. Площади под графиками равны R_1 = 0,91 МВт/м^2 при T_1 = 2000 К, R_2 = 0,16 МВт/м^2 при T_2 = 1300 К. Из зависимости $R = \sigma T^m$ находим: m = 4, σ = 5,7·10^{-8} Вт/(м^2·К^4).

4. Согласно установленному закону Вина, излучение Солнца соответствует температуре черного тела, равного

$$T_0 = \frac{b}{\lambda_m}.$$

Мощность излучения Солнца составляет по закону Стефана–Больцмана

$$W = \sigma T^4 4\pi R^2$$

где R — радиус Солнца.

Солнце должно потерять энергию

$$U = 0.01Mc^2,$$

где M — масса Солнца, c — скорость света.

Таким образом, искомое время равно

$$t = \frac{U}{W} = \frac{0.01Mc^2}{\sigma(b/\lambda_m)^4 4\pi R^2} = 3.8 \cdot 10^{18} c$$

Схема оценивания

№	**Содержание**	**баллы**
1	Ищется отношение площадей Правильное числовое значение искомого отношения с погрешностью 5%	0,5 0,5
2	Правильно найдены длины волн максимумов с погрешностью 5% Правильное значение n Правильное значение b с погрешностью 5%	1 0,5 0,5
3	Правильное значение R_1 с погрешностью 5% Правильное значение R_2 с погрешностью 5% Правильное значение m с погрешностью 5% Правильное значение σ с погрешностью 5%	1 1 0,5 0,5
4	Закон Вина для определения температуры Солнца T_0 Мощность излучения Солнца W Энергия теряемая Солнцем U Правильное время t с погрешностью 5%	1 1 1 1