

Урок 10. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена

- 1) На прошлом уроке мы познакомились с последовательностью, называемой арифметической прогрессией (см. (9.1)). Дадим словесное определение:

Определение.

*Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называемым **разностью** прогрессии.*

- 2) Арифметическую прогрессию обычно обозначают $\{a_n\}$, а ее разность – d (первой буквой латинского слова *differentia* – разность). Если хотят коротко записать, что последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то пишут $\div \{a_n\}$.
- 3) В математической литературе часто можно встретить такие слова “ n чисел образуют арифметическую прогрессию”. Вообще говоря, конечный набор чисел не является последовательностью. Тем не менее, термин прижился, т. е. можно говорить и о конечной арифметической прогрессии.

Упражнение. Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если переставить ее члены в обратном порядке?

- 4) Поскольку арифметическая прогрессия задается рекуррентно, то изучение ее свойств необходимо начать с вывода формулы общего члена. Она имеет следующий вид:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) d.} \quad (10.1)$$

Для доказательства достаточно воспользоваться методом математической индукции.

- 5) Иногда бывает необходимо выразить $(n + k)$ -й член арифметической прогрессии через ее n -й член и разность. Соответствующая формула, очевидно, имеет следующий вид:

$$\boxed{a_{n+k} = a_n + kd.} \quad (10.2)$$

6) Упражнения.

- (1) Найдите разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = 2$, $a_8 = -47$.
- (2) Является ли число 214 членом арифметической прогрессии $\{6; 14; 22; \dots\}$? В случае положительного ответа укажите его номер.
- (3) Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия $\{-4, 1; -3, 6; -3, 1; \dots\}$?

- (4) Найдите первый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_5 = 11$, $a_{11} = -7$.
- (5) Сумма второго, четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно -168 . Найдите первый член и разность прогрессии.
- (6) Могут ли числа 1 , $\sqrt{3}$, 3 быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными)?
- (7) Пусть $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Домашнее задание

- 1) Является ли последовательность $\{x_n\}$ арифметической прогрессией, если она задана следующей формулой общего члена

а) $x_n = 2n^2 - n$; б) $x_n = \frac{2n-1}{5}$?

В случае положительного ответа найдите разность прогрессии.

- 2) Найдите первый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_{21} = 2$, а разность прогрессии $d = 0,5$.
- 3) Найдите разность и формулу общего члена арифметических прогрессий:
 - а) $\left\{2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, \dots\right\}$; б) $\{a^2, 2a^2, 3a^2, \dots\}$.
- 4) Найдите номер члена арифметической прогрессии $\{12, 4; 13; 13, 6; \dots\}$, который равен 20,8.
- 5) Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии $\{10, 2; 9, 5; 8, 8; \dots\}$.
- 6) Чему равна разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_8 = 58$, $a_{15} = 16$?
- 7) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если
 - а) $a_3 + a_7 = 30$, $a_6 + a_{16} = 60$; б) $a_4 + a_{10} = 36$, $a_5 \cdot a_{11} = 340$.
- 8) В каких случаях для членов арифметической прогрессии выполнено равенство $a_1 a_4 = a_2^2$?
- 9) Докажите, что если положительные числа a , b и c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$