Векторы аффинные

Вектором (направленным отрезком) называют отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек называется началом, а какая – концом. **Нулевым** называют вектор, начало и конец которого лежат в одной и той же точке.

На чертеже обозначают отрезком со стрелкой. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают $\overrightarrow{AB}$. Иногда векторы обозначают маленькими латинскими буквами: $\vec{a}$ или $\bar{b}$ (не путать с обозначением среднего!). Нулевой вектор обозначают так: $\vec{0}$, $\bar{0}$ или просто 0.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длину нулевого вектора полагают равной нулю. Обозначают $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$. Иногда, когда это не может вызвать недоразумения, длину вектора $\vec{a}$ обозначают просто a.

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Обозначают $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \,||\, \vec{b}$.

Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются **сонаправленными (противоположно направленными)**, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала. Два ненулевых вектора, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если один из лучей с началом в каком-л. векторе содержит другой такой луч, и **противоположно направленными** в противном случае.

Сонаправленные векторы обозначают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Противоположно направленные: $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$.

Равными называют сонаправленные векторы, имеющие одинаковые длины.

Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одинаково. Фактически, символом $\overrightarrow{AB}$ обозначают не сам вектор, а множество векторов, равных ему. Такие векторы называются **свободными**. В механике твердого тела при рассмотрении вращательного движения векторы сил нельзя считать свободными. В таком случае для расчета необходима также **точка приложения**.

Определим операцию **сложения** двух векторов:

*Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Возьмем произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:*

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Описанный алгоритм часто называют **правилом треугольника**.

Из этого правила, в частности, следует **формула прокола точкой**: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, где A, B, C – произвольные точки.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарных вектора. Тогда для того, чтобы найти сумму $\vec{a} + \vec{b}$, можно отложить от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и построить на этих векторах параллелограмм $OACB$. Очевидно, что тогда $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. Этот алгоритм называют **правилом параллелограмма**.

Свойства операции сложения векторов:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – ассоциативность

$\exists \vec{0}: \forall \vec{a}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ – существование нейтрального элемента

$\forall \vec{a}: \exists (-\vec{a}): \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ – существование противоположного элемента

Таким образом, множество векторов на плоскости представляет собой абелеву группу по сложению.

Суммой нескольких векторов называется вектор, полученный в результате прибавления каждого следующего вектора к сумме предыдущих. Геометрически векторы можно складывать при помощи **правила многоугольника**: если A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – произвольные точки, то $\overrightarrow{A_1 A_n} = \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$ (фактически, это обобщение формулы прокола точкой).

Из свойств сложения векторов следует, что роль вектора, противоположного вектору $\overrightarrow{AB}$, играет вектор $\overrightarrow{BA}$. Тогда можно естественным образом определить операцию **вычитания** двух векторов:

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a} + (-\vec{b}).}$$

Для того, чтобы геометрически получить разность двух векторов, необходимо отложить их от одной точки и провести вектор от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого.

Определим еще одну операцию над векторами:

***Произведением вектора** $\vec{a}$ **на число** $\alpha \neq 0$ называется такой вектор $\vec{b}$, что:*

(1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ *при* $\alpha > 0$ *и* $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ *при* $\alpha < 0$,

(2) $|\vec{b}| = \alpha \cdot |\vec{a}|$.

Обозначение: $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ или $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Свойства операции умножения вектора на число:

$$\boxed{\begin{gathered} 1\cdot\vec{a}=\vec{a}, \\ \alpha(\beta\vec{a})=\beta(\alpha\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}, \\ (\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}, \\ \alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}. \end{gathered}}$$

Аналогичным образом можно ввести операцию **деления вектора на число**.

Единичным называют вектор, длина которого равна единице. Очевидно, что вектор $\vec{e}=\vec{a}/|\vec{a}|$ является единичным.

Сформулируем **критерий коллинеарности векторов** (лемма о коллинеарных векторах, теорема 1):

Для того, чтобы вектор $\vec{b}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$.

Достаточность следует из определения умножения вектора на число. Докажем необходимость. Определим число k следующим образом:

$$k=\begin{cases} \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{|\vec{a}|}, \textit{ если } \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \\ -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{|\vec{a}|}, \textit{ если } \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\left|\vec{b}\right|\uparrow\uparrow k|\vec{a}|$ и $\left|\vec{b}\right|=|k\vec{a}|$, то есть $\vec{b}=k\vec{a}$, что и требовалось доказать.

Из этого утверждения можно получить важное следствие (лемма о неколлинеарных векторах, теорема 2):

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. Тогда, если $x\vec{a}+y\vec{b}=0$, то $x=y=0$.

Доказательство этого факта очевидно. Пусть $x\neq 0$, тогда $\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}$, т.е. $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$ называется выражение вида $\vec{a}=x_1\overrightarrow{a_1}+$ $+x_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+x_n\overrightarrow{a_n}$, где $x_k\in\mathbb{R}$ $(k=1,2,\ldots,n)$. **Линейной оболочкой** этих векторов называют множество всех их линейных комбинаций.

Если вектор $\vec{a}$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$; то говорят, что **вектор $\vec{a}$ разложен по векторам** $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$. Также можно говорить, что он разложен на **составляющие (компоненты)** $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$.

Теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам (теорема 3):

Любой вектор $\vec{c}$ на плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

причем коэффициенты разложения x и y определяются однозначно.

Существование. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ от некоторой точки O. Пусть $\vec{c} = OC$. Проведем через точку C прямые, параллельные прямым, содержащим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначим точки пересечения A и B соответственно. Тогда $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. По лемме о коллинеарных векторах $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{b}$. Следовательно, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Единственность. Пусть $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$. Тогда $(x_1 - x_2)\vec{a} = (y_1 - y_2)\vec{b}$. Из леммы о неколлинеарных векторах получаем, что $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$.

Говорят, что два неколлинеарных вектора образуют на плоскости **базис**. Поэтому разложение вектора на составляющие называют разложением по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, а пару чисел (x, y) – координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Очевидно, что если вектор $\vec{a}$ имеет в некотором базисе координаты (x_1, y_1), а вектор $\vec{b}$ – координаты (x_2, y_2); то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет в этом базисе координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а вектор $\alpha\vec{a}$ – координаты $(\alpha x_1, \alpha y_1)$.

Пусть в некотором базисе векторы $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b}$ имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Будем говорить, что **координаты векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **пропорциональны**, если существует такое число t, что $x_2 = tx_1$ и $y_2 = ty_1$. Если координаты вектора $\vec{a}$ не равны нулю, то условие пропорциональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}.}$$

Нетрудно доказать, что векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты в выбранном базисе пропорциональны.

Как известно, для длин сторон треугольника выполняется **неравенство треугольника**. Его можно переформулировать в векторном виде (теорема 4):

Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо неравенство:

$$\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq \left||\vec{a}| + |\vec{b}|\right|,$$

причем в первом неравенстве достигается равенство т. и т.т., когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, а во втором – т. и т.т., когда они сонаправлены.

Говорят, что множество векторов на плоскости является **линейным пространством**. Строгое определение выглядит так:

Множество E, на котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие условиям:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E: (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = a + (\vec{b} + \vec{c}),$$
$$\exists \vec{0} \in E: \forall \vec{a} \in E: \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a},$$
$$\forall \vec{a} \in E: \exists (-a) \in E: \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$
$$\forall \vec{a} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a},$$
$$\forall \vec{a} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a},$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

*называется **линейным** (**векторным, аффинным**) пространством, а его элементы – **векторами** этого пространства.*

Также, линейным пространством является множество многочленов, степень которых не превосходит n, если определить операции сложения и умножения на число обычным образом. Аналога алгебраическому перемножению многочленов не будет, ведь тогда степень может превысить n. Вообще говоря можно ввести операцию умножения многочленов (**векторное произведение**), но оно будет определяться по иным формулам.

Лемму о неколлинеарных векторах можно переформулировать в более общем виде. Для этого необходимо ввести определение:

*Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно независимыми**, если из того, что их линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{a}_k$ равна нулю, следует, что все α_k равны нулю $(k = 1, 2, \dots, n)$. В противном случае векторы называются **линейно зависимыми**.*

Очевидно, что верны утверждения (теорема 5):

Любые два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы; любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Для разных линейных пространств максимальное количество линейно независимых векторов разное. Это количество называют **размерностью** линейного пространства. Тогда пространство векторов на плоскости – двумерное. В курсе стереометрии будет доказано, что окружающее нас пространство трехмерно.

Часто бывает необходимо выразить произвольный вектор $\vec{a}$ через систему линейно независимых векторов $\{a_i\}_{i=1}^{n}$. Для этого необходимо, чтобы любой вектор рассматриваемого пространства можно было выразить через выбранные, т.е. чтобы он принадлежал их линейной оболочке. Целесообразно ввести определение:

*Система векторов $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$ называется **полной**, если любой вектор пространства E представим в виде их линейной комбинации.*
*Полную линейно независимую систему векторов называют **базисом**.*

В традиционной геометрии для задания места расположения точки на прямой необходимо два параметра: отношение расстояний до некоторых ее двух точек до выбранной, а также место расположения (между этих двух точек или нет). При помощи векторов можно задать местоположение точки на прямой при помощи одного числа. Говорят, что **точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении** k, если $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$. Очевидно, что при $k > 0$ точка M лежит внутри отрезка AB, а при $k < 0$ – вне этого отрезка. Если $k = 0$, то точки M и A совпадают. Если $k = 1$, то точка M является серединой отрезка AB. При приближении же точки M к точке B число k неограниченно возрастает. Заметим, что отрезок не может быть разделенным в отношении $k = -1$: в этом случае получим $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} = 0$.

Из этого определения нетрудно вывести формулу:

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}.}$$

Также для решения задач часто бывает полезной следующая теорема (теорема 6):

Пусть точка M делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении k, O – произвольная точка плоскости. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}.$$

Доказать ее нетрудно при помощи вышеприведенной формулы и формулы прокола точкой. Так, из соотношения $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ при помощи формулы прокола точкой получим $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)$, откуда $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = (1+k)\overrightarrow{OM}$. Разделив на $(1+k)$, получим искомое равенство. Особенно красивый вид оно имеет при $k = 1$, то есть когда M – середина отрезка AB:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Из этой теоремы можно получить **критерий принадлежности точки прямой в векторной форме** (теорема 7):

Пусть O – произвольная точка плоскости. Для того, чтобы точка M принадлежала прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число t, что

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

<u>Достаточность.</u> Пусть утверждение теоремы выполнено. Раскрыв скобки, получим $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$, или $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Это означает, что точка M лежит на прямой AB.

<u>Необходимость.</u> Если точки M и B совпадают, то $t = 1$. В противном случае $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}$, откуда $t = \frac{k}{1+k}$.

Введем еще одно важное определение. Пусть O – произвольная точка плоскости. Будем называть ее **начальной**. Поставим в соответствие произвольной точке M вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$, который будем называть **радиус-вектором** этой точки. Очевидно, что при помощи радиус-вектора любая точка плоскости задается взаимно однозначно. Обозначают радиус-вектор той же буквой, что и соответствующую ему точку: $\vec{x}$ – радиус-вектор точки X.

При помощи радиус-вектора теоремы можно переформулировать теоремы 6 и 7:

Если точка M делит вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении k, то $\vec{m} = \dfrac{\vec{a} + k\vec{b}}{1 + k}$.
Точка M лежит на прямой AB т. и т.т., когда существует такое число t, что

$$m = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}.$$

Докажем при помощи радиус-векторов следующее полезное утверждение (теорема 8):

Пусть M – середина отрезка AB, а N – середина отрезка CD. Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}}{2}.$$

Действительно, $\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2} + \frac{\vec{d}-\vec{a}}{2} = \frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\vec{d}-\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2} = \frac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

С помощью векторов можно легко доказать многие теоремы планиметрии. Начнем с **теоремы о средней линии треугольника** (теорема 9):

Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Доказательство простое. Пусть M и N – середины сторон AB и BC соответственно треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$