1-ая МЕЖДУНАРОДНАЯ ЖАУТЫКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ, АЛМАТЫ 2005

Физика, теоретический тур, младшая группа

ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ

Задача 1

Из какого места и под каким углом к горизонту необходимо бросать камень, чтобы она при наименьшей начальной скорости могла перелететь через прямоугольную преграду высотой 5 м и шириной 7 м, не коснувшись ее? Считайте, что камень бросается с поверхности земли. Сопротивлением воздуха пренебречь. (8 баллов)

<u>Решение:</u>

Требование минимальности скорости бросания камня с поверхности земли означает, что оптимальная траектория камня пройдет через точки A и B (см.Рис.1), причем в точке A скорость камня будет минимально возможной. **(2,0 балла)**

Из этих условии получим, что $\beta = 45^o$, $\upsilon_A = \sqrt{gl}$. **(1,0 балл)**

Минимальную скорость в точке O определим из закона сохранения энергии $\upsilon_0 = \sqrt{gl + 2gh}$. **(2,0 балла)**

Так как горизонтальная составляющая скорости сохраняется $\upsilon_{0x} = \upsilon_A / \sqrt{2}$. Тогда угол бросания камня $\cos\alpha = \upsilon_{0x} / \upsilon_0$, откуда $\alpha = 62{,}61^0$. **(1,5 балла)**

Вертикальное составляющие скорости в точках O и A: $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$ и $\upsilon_{Ay} = \upsilon_A \sin\beta$. Время полета от точки O до точки A $t = (\upsilon_{0y} - \upsilon_{Ay}) / g$. Тогда окончательно точка бросания определим по формуле $x = \upsilon_{0x} t$. Откуда $x = 3{,}35$ *м*. **(1,5 балла)**

Задача 2

Брусок массой M положен на другой такой же брусок с небольшим сдвигом a (Рис.1). Эта система как целое скользит по гладкому горизонтальному полу со скоростью υ_o. На ее пути стоит вертикальная стена перпендикулярная направлению вектора скорости и параллельная краям брусков. Удар каждого бруска о стенку абсолютно упругий, коэффициент трения между брусками μ. Опишите, как будет происходить столкновение системы со стеной, и определите, какие скорости будут иметь бруски, когда этот процесс окончится. (8 баллов)

Решение:

После удара верхнего бруска о стену его скорость изменится на противоположную по направлению, сохранив свой модуль, а скорость нижнего бруска не изменится. Затем бруски начнут двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю начальными скоростями и равными по модулю, но противоположно направленными ускорениями. Из-за этого скорости брусков будут уменьшатся , все время оставаясь равными друг другу. **(1,0 балл)**

В результате нижний брусок либо не достигнет стены, либо все же ударится о нее, имея некоторую скорость *u*. В первом случае оба бруска останутся стоять неподвижно на некотором расстоянии от стены. Во втором случае нижний брусок, ударившись о стену, поменяет направление своей скорости на противоположное, в результате чего проскальзывание между брусками прекратится и оба бруска продолжат движение со скоростью, равной *u*, в направлении от стены. Рассмотрим отдельно оба случая. **(1,0 балл)**

Поместим начало координат по оси *x* в угол между стеной и полом и направим ее в сторону первоначального движения брусков. Ясно, что после первого удара сила трения между брусками составляет $F_{тр} = \mu Mg$, ускорение нижнего и верхнего брусков по модулю равно $F_{тр} / M = \mu g$. Тогда закон движения передней грани нижнего бруска имеет вид $x = -a + \upsilon_0 t - \mu g t^2 / 2$ а его скорость меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 - \mu g t$, при этом время отсчитывается от момента удара верхнего бруска о стену. **(2,0 балла)**

Найдем условие на скорость υ_0, при которой нижний брусок не доедет до стены. Оно получается из неравенства $x = -a + \upsilon_0 t - \mu g t^2 / 2 < 0$. Решая его находим, что дискриминант квадратного трехчлена, содержащегося в неравенстве, отрицателен при $\upsilon_0^2 < 2a\mu g$. Время, через которое нижний брусок остановится, можно определить, приравняв скорость υ нулю: $t_1 = \upsilon_0 / \mu g$. **(2,0 балла)**

Пусть теперь $\upsilon_0^2 \geq 2a\mu g$. Из закона движения нижнего бруска найдем, через какое время t_2 он стукнется о стену:

$$t_2 = \frac{\upsilon_0}{\mu g} \pm \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g} = t_1 \pm \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}$$

Для того чтобы нижний брусок стукнулся о стену, нужно, чтобы выполнялось условие $t_2 < t_1$. Поэтому останется только результат со знаком «минус» перед корнем. Тогда скорость, которую будут иметь оба бруска после взаимодействия со стеной $u = \upsilon_0 - \mu g t_2 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2a\mu g}$ **(2,0 балла)**

Задача 3

В схеме, изображенной на Рис.2, найдите сопротивление между точками А и В. (7 баллов)

<u>Решение:</u>

Проще всего рассуждать так: подключим к этим точкам батарею с заданным напряжением U, найдем ток через батарею и рассчитаем общее сопротивление по формуле $R_{общ} = U/I$. **(2,0 балла)**

Обозначим $r=1$ *Ом*, $R=2$ *Ом*. Положим $\varphi_A=0$. Тогда потенциал в точке B известен: $\varphi_B=U$. Обозначим потенциал точки C через φ_1, точки D – через φ_2. Запишем два уравнения – для узла C:

$$\frac{U-\varphi_1}{r} = \frac{\varphi_1}{r} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}$$

для узла D:

$$\frac{\varphi_2}{r} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} = \frac{U-\varphi_2}{R}$$ **(2,0 баллов)**

Отсюда находим

$$\varphi_1 = 2U\frac{1+r/R}{5+3r/R}, \qquad \varphi_2 = U\frac{1+3r/R}{5+3r/R}$$ **(1,0 балл)**

Тогда

$$I = \frac{\varphi_1}{r} + \frac{\varphi_2}{r} = \frac{U}{r}\frac{3R+5r}{5R+3r}$$ **(1,0 балл)**

Откуда

$$R_{общ} = r\frac{5+3r/R}{3+5r/R} = 1{,}18 \ Ом$$ **(1,0 балл)**

Задача 4

В калориметр налить 0,5 кг воды при температуре 15^oC. В воду опускают кусок льда с массой 0,5 кг, имеющий температуру -10^oC. Найти температуру смеси после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость льда 2,1 кДж/(кг·К), воды 4,2 кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг. (7 баллов)

<u>Решение:</u>

Остывая до 0^0C, вода может отдать количество теплоты, равное

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t_0) = 3{,}15\cdot 10^4 \ Дж$$ **(1,5 баллов)**

Для нагрева льда до 0^oC необходимо затратить количество теплоты

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_0 - t_2) = 1{,}05\cdot 10^4 \ Дж$$ **(1,5 баллов)**

Для того чтобы теперь весь лед расплавился, необходимо еще подвести к нему количество теплоты

$$Q_3 = \lambda m_2 = 1{,}65 \cdot 10^5 \text{ } Дж$$ **(1,5 баллов)**

Но после нагрева льда до $0^{o}C$ вода может отдать лишь $2{,}1 \cdot 10^4$ *Дж*. Поэтому лед расплавится не весь и температура смеси после установления теплового равновесия будет равна $0^{o}C$. **(2,5 баллов)**

1-ая МЕЖДУНАРОДНАЯ ЖАУТЫКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ, АЛМАТЫ 2005

Физика, теоретический тур, старшая группа

ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ

Задача 1

Из какого места и под каким углом к горизонту необходимо бросать камень, чтобы она при наименьшей начальной скорости могла перелететь через преграду приведенной на Рис.1 не коснувшись ее. Размеры преграды: h=4 м, H=7 м, l=5 м. Считайте, что камень бросается с поверхности земли. Сопротивлением воздуха пренебречь. (8 баллов)

<u>Решение:</u>

Требование минимальности скорости бросания камня с поверхности земли означает, что оптимальная траектория камня пройдет через точки крыши B и C, причем в точке B скорость камня будет минимально возможной. ***(1,0 балл)***

Условия прохождения камня через точки B и C:

$$l = \upsilon \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$H = h + \upsilon \cdot \sin\alpha \cdot t - gt^2/2 .$$

Исключив из этих уравнении t, получим

$$\frac{gl^2}{2\upsilon^2} tg^2\alpha - l \cdot tg\alpha + \frac{gl^2}{2\upsilon^2} + (H-h) = 0 .$$

Приравнивая нулю дискриминант данного уравнения получим минимально возможную скорость в точке B

$$\upsilon_{\min}^2 = g\left[(H-h) + \sqrt{(H-h)^2 + l^2}\right],$$ ***(2,0 балла)***

$$\upsilon_{\min} = 9{,}31 \text{ м/с.}$$

Угол в точке B

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_{\min}^2}{gl} = 1{,}77, \qquad \alpha = 60{,}54^{\circ}.$$

Тогда минимальная скорость бросания камня с поверхности земли

$$\upsilon_{0\min}^2 = \upsilon_{\min}^2 + 2gh, \qquad \upsilon_{0\min} = 12{,}85 \text{ м/с.}$$

x-овая компонента скорости

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_x = \upsilon_{\min} \cdot \cos\alpha = 4{,}58 \text{ м/с} .$$

Тогда угол бросания камня с поверхности земли

$$\cos\alpha_0 = \upsilon_{0x} / \upsilon_{0\min} = 0{,}36, \qquad \alpha_0 = 68{,}90^0 .$$ ***(2,5 балла)***

y-овая компонента скорости

$$\upsilon_y = \upsilon_{\min} \cdot \sin\alpha = 8{,}11 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_{0y} = \upsilon_{0\min} \cdot \sin\alpha = 11{,}99 \text{ м/с.}$$

Время полета от точки бросания до точки B

$$t = (\upsilon_{0y} - \upsilon_y)/g\ .$$

Тогда окончательно

$$x = \upsilon_x \cdot t = 1{,}83\ \text{м}.$$ ***(2,5 балла)***

Задача 2

Определите работу А, которую совершает идеальный газ в замкнутом цикле 1 – 4 – 3 – 2 – 1, изображенном на Рис.2, если $p_1=10^5$ Па, $p_o=3\cdot10^5$ Па, $p_2=4\cdot10^5$ Па, $V_2 – V_1 = 10$ л . (6 баллов)

<u>Решение:</u>

Выполнение цикла 1 → 4 → 3 → 2 → 1 фактически эквивалентно выполнению двух простых циклов 1 → 0 → 2 → 1 и 0 → 4 → 3 → 0. Работа газа определяется площадью соответствующего цикла на *pV*-диаграмме. Однако если в первом цикле она положительна, то во втором отрицательна (работа совершается над газом). ***(2 балла)***

Нетрудно найти работу A_1, совершенную в первом цикле:

$$A_1 = (p_o – p_1)\cdot(V_2 – V_1) / 2.$$ ***(1 балл)***

Что касается цикла 0 → 4 → 3 → 0, то соответствующий ему *pV*-диаграмме треугольник подобен треугольнику, отвечающему первому циклу. Площади подобных треугольников относятся, как квадраты длин соответственных элементов, в данном случае – высот. В результате работа A_2 во втором цикле будет

$$A_2 = -A_1\cdot(p_2 – p_o)^2 / (p_o – p_1)^2$$ ***(1,5 балла)***

Полная работа *A* за цикл 1 → 4 → 3 → 2 → 1 будет, таким образом, равна

$$A = A_1[1 – (p_2 – p_o)^2/(p_o – p_1)^2] \approx 750\ \text{Дж}$$ ***(1,5 балла)***

Задача 3

В схеме, приведенной на Рис.3, при разомкнутом ключе К конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_o. Ключ замыкают, и через какое то время ток в цепи прекращается. Какова должна быть величина U_o, чтобы напряжение на конденсаторе установилось равным 1 В при изменившейся полярности пластин, если ЭДС каждой батареи в цепи Е=1,5 В? Диоды считать идеальными. (8 баллов)

<u>Решение:</u>

Через диод $Д_1$ ток может течь только слева направо, а через диод $Д_2$ – только справа налево. Таким образом, данная цепь представляет собой колебательный контур, содержащий источник тока с постоянной ЭДС, включенной каждый раз навстречу току. ***(1,0 балл)***

Пусть в некоторый момент времени при замкнутом ключе *К* ток в цепи отсутствует, напряжение на конденсаторе равно U_n, а заряд равен $q_n=CU_n$ (верхняя пластина конденсатора заряжена положительно). В течение ближайшей следующей половины периода конденсатор будет перезаряжаться – сначала разряжаться, потом заряжаться зарядами противоположных знаков. При этом ток неизменного направления будет течь через диод $Д_1$, совершая работу против сторонних сил в источнике. Через полпериода заряд конденсатора станет равным q_{n+1}, так что через источник протечет заряд q_n+q_{n+1} (знак заряда пластин изменяется). ***(1,0 балл)***

По закону сохранения энергии убыль энергии электрического поля конденсатора равна работе против сторонних сил:

$$\frac{q_n^2}{2C}-\frac{q_{n+1}^2}{2C}=(q_n+q_{n+1})\cdot E,\quad \text{откуда}\quad U_n-U_{n+1}=2E$$

Таким образом, через полпериода напряжение на конденсаторе уменьшится на $2E = 3$ В. ***(2,0 балла)***

Так будет происходить до сих пор, пока напряжение (при силе тока, равной нулю) не окажется меньше, чем E=1,5 В. Поскольку по условию задачи конечное напряжение равно 1 В при изменившейся полярности пластин, начальное напряжение на конденсаторе (измеренное в вольтах) может быть равно

$$U_0=4+6n,\quad \text{где}\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$ ***(2,0 балла)***

При получении этой серии решений предполагалось, что в каждую половину периода колебаний, включая последнюю, знак зарядов пластин изменяется. Однако возможен случай, когда в последнюю половину периода заряд изменяется от q_{N-1} до q_N без изменений знака. Тогда через источник протекает заряд $q_{N-1}-q_N$ и закон сохранения энергии записывается в виде:

$$\frac{q_{N-1}^2}{2C}-\frac{q_N^2}{2C}=(q_{N-1}-q_N)\cdot E,\quad \text{откуда}\quad U_{N-1}+U_N=2E$$

Таким образом, $U_{N-1} = 2E - U_N = 2$ В (верхняя пластина конденсатора имеет отрицательный заряд), $U_{N-2} = U_{N-1} + 2E = 5$ В (верхняя пластина конденсатора заряжена положительно) и т.д. Начальное напряжение в этом случае может быть равно

$$U_0=5+6n,\quad \text{где}\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$ ***(2,0 балла)***

Итак, имеется две серии решений:

$$U_0=\begin{cases}4+6n\\5+6n\end{cases}\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Задача 4

К жесткому невесомому стержню прикреплены два точечных тела с массами 0,5 кг и 0,7 кг на расстояниях 1 м и 0,9 м соответственно от точки подвеса. Найдите период колебаний такой системы. (8 баллов)

Решение:

Возможно два варианта: а)оба груза прикреплены с одной стороны точки подвеса, б)грузы прикреплены с разных сторон точки подвеса. ***(1,0 балл)***

Пусть оба груза прикреплены с одной стороны точки подвеса. Отклоним систему ан угол φ. Тогда потенциальная энергия системы относительно положения равновесия

$$E_p = (m_1 l_1 + m_2 l_2)\cdot(1-\cos\varphi)\cdot g$$

Кинетическая энергия п положении равновесия

$$E_k = m_1 \upsilon_1^2/2 + m_2 \upsilon_2^2/2$$

Из закона сохранения энергии получим для угловой скорости вращения стержня выражение

$$\omega^2 = 2g\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}(1-\cos\varphi)$$ ***(1,5 балла)***

Сравним рассматриваемую систему с некоторым математическим маятником, имеющим такую длину *L*, что при одном и том же начальном отклонении φ от положения равновесия угловые скорости ω и периоды колебания *T* обоих маятников оказываются одинаковыми. Для математического маятника можно записать

$$\omega^2 = 2\frac{g}{L}(1-\cos\varphi)$$ ***(1,5 балла)***

Тогда длина математического маятника, эквивалентного исходному маятнику с двумя грузами

$$L = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2},$$

и соответственно период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 l_1 + m_2 l_2)g}}$$ ***(2,0 балла)***

Для грузов прикрепленных с разных сторон точки подвеса получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 l_1 - m_2 l_2)g}}$$ ***(2,0 балла)***