Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Одеської обласної державної адміністрації
Одеський обласний інститут удосконалення вчителів
Одеський національний університет ім.. І.І.Мечникова

Всеукраїнська Інтернет-олімпіада з математики
І (заочний) тур 2013рік
9 клас

Завдання виконують учні, які перейшли в 9 клас (також дане завдання можуть виконувати учні 6, 7, 8 класів). Роботи учнів, які перейшли в 10-і, 11-і класи, не приймаються

1. На одній основі побудовано множину трикутників з однаковими кутами при вершині. Знайти геометричне місце центрів кіл, вписаних у ці трикутники.
2. За допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник ABC за медіаною BD і радіусами кіл, описаних навколо трикутників ABD та CBD.
3. Показати, що кожне просте число, більше за 3, має вид 6n+1, або 6n-1, $n \in N$.
4. Довести, що якщо рівняння з цілими коефіцієнтами $x^2+p_1x+q_1=0$ і $x^2+p_2x+q_2=0$ мають спільний **нецільний** корінь, то $p_1=p_2$, $q_1=q_2$.
5. Задано систему рівнянь
   *x+*y+*z=0
   *x+*y+*z=0
   *x+*y+*z=0
   Два учня по черзі вписують замість * числа. Довести, що той, хто починає завжди може домогтися того, щоб система мала ненульовий розв’язок.

Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Одеської обласної державної адміністрації
Одеський обласний інститут удосконалення вчителів
Одеський національний університет ім.. І.І.Мечникова

Всеукраїнська Інтернет-олімпіада з математики
I (заочний) тур 2013 рік
10 клас

Завдання виконують учні, які перейшли в 10 клас
(також дане завдання можуть виконувати учні 6, 7, 8, 9 класів)
Роботи учнів, які перейшли в 11-і класи, не приймаються

1. Скільки розв'язків має рівняння

$$x10^{-1000}=\{x^{10}\}?$$

2. У початку координат знаходиться частинка. Через одиницю часу вона розпадається на дві частинки, одна з яких зсувається на одиницю вправо, а друга — на одиницю вліво. Скільки буде частинок через 2013 одиниць часу?
3. Нехай a,b — довільні натуральні числа більші за 1, число a^2+b-1 ділиться націло на b^2+a-1. Доведіть, що число b^2+a-1 має хоча б два різні прості дільники.
4. Дотичні до параболи $y^2=2px$ у точках A, B та C утворюють трикутник KLM. Довести, що $S_{KLM}=1/2S_{ABC}$.
5. Нехай S — множина раціональних чисел така, що

   а) число 0 належить множині S;

   б) якщо x належить S, то числа x+1 та x-1 також належать S;

   с) якщо x належить S та не дорівнює 0 або 1, то x/(x(x-1)) належить S.

   Чи правда, що S містить всі раціональні числа?

Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Одеської обласної державної адміністрації
Одеський обласний інститут удосконалення вчителів
Одеський національний університет ім.. І.І.Мечникова

Всеукраїнська Інтернет-олімпіада з математики
І (заочний) тур 2013 рік
11 клас

Завдання виконують учні, які перейшли в 11 клас (також дане завдання можуть виконувати учні 6-10 класів).

1. Знайти всі цілочисленні розв′язки рівняння:

$$\left(x+y\right)^4+\left(x-y\right)^4=152+6\left(x^2+y^2\right)+20xy.$$

2. Розв’язати рівняння:

$$\cos^4 x-\cos^3 x\sin x+\cos x\sin^3 x+\sin^4 x=\frac{3}{4}.$$

3. Розв'язати нерівність:

$$3\cdot 30^x+4\cdot 5^x+12\cdot 3^x+2^x>12\cdot 15^x+10^x+3\cdot 6^x+4.$$

4. На сторонах паралелограма $ABCD$ вибрано такі точки E, F, G, H, що $AE:EB=CF:FB=CG:GD=AH:HD$. Яке максимальне значення може приймати співвідношення площ чотирикутника $EFGH$ та паралелограма $ABCD$?

5. Нехай у опуклого 24-кутника всі сторони та діагоналі розфарбовано або в червоний, або в синій колір. Чи можливо взяти 4 вершини так, щоб всі сторони і діагоналі утвореного чотирикутника мали однаковий колір?