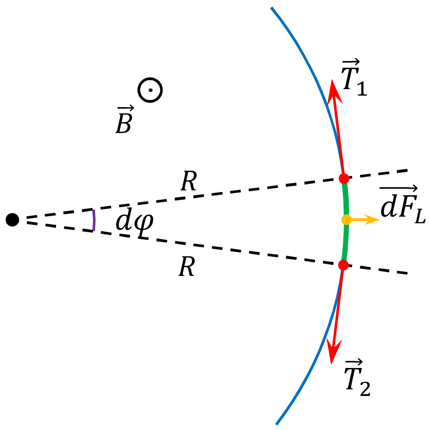
1. Считаем сопротивление осьминога омическим (что на самом деле сомнительно, но в противном случае невозможно решить задачу). Заменим его на звезду с сопротивлениями r_1, r_2, r_3, подключенными к соответствующим щупальцам. Тогда получим систему уравнений:
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 9\ \Omega, \\ r_2 + r_3 = 9\ \Omega, \\ \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 = 8\ \Omega. \end{cases}$$
Из этой системы получим $r_1 = r_3 = 6\ \Omega$, $r_2 = 3\ \Omega$. Искомое сопротивление
$$R = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + r_2 = 6\ \Omega.$$

2. Покажем, что при выполнении некоторого условия нить примет форму дуги окружности. Рассмотрим малый элемент нити. Считаем его дугой окружности радиуса R с малым центральным углом $d\varphi$ (см. рисунок). Расставим силы, действующие на него. Сила Лоренца $\overrightarrow{dF_L}$ направлена перпендикулярно нити, поэтому она не вносит вклад в изменение силы натяжения $\vec{T}$ нити. Так как нить гладкая и не испытывает трения, а груз движется равномерно и прямолинейно, то сила натяжения везде одинакова и равна $T = mg$. Запишем уравнение 2-го закона Ньютона в проекции на радиальное направление для центра элемента нити (фактически сумма сил, действующих на этот элемент, равна нулю, так как его масса пренебрежимо мала):



$$T d\varphi = dF_L.$$

Учитывая соотношения для силы Лоренца, получим:

$$mg d\varphi = Bv\lambda R d\varphi,$$

откуда радиус

$$R = \frac{mg}{Bv\lambda}.$$

В решении под λ подразумевалось абсолютное значение линейной плотности заряда. Если полученная величина меньше $L/2$, то установившейся конфигурации нити существовать не будет. Действительно, тогда при любом радиусе кривизны нити, не меньшем $L/2$, равновесия не будет: сила Лоренца всегда будет больше. При достижении радиуса $L/2$ форма нити перестает быть окружностью, и нить бесконечно удаляется в сторону.

3. Перейдем в невращающуюся систему отсчета, связанную с цилиндром. Так как по условию ускорение цилиндра мало, то неинерциальностью в этой системе отсчета можно пренебречь. Так как между цилиндром и пластиной есть трение, то пластина

по достижении некоторого предельного угла φ_0 начнет проскальзывать. Во время проскальзывания, пока цилиндр продолжает катиться в ту же сторону, угол наклона будет равен φ_0. После поворота цилиндра угол начнет уменьшаться, пока не достигнет значения $-\varphi_0$ (на самом деле будет наоборот – вначале он будет уменьшаться до $-\varphi_0$). Найдем этот предельный угол. Рассмотрим тот момент, когда пластина начинает двигаться. Непосредственно перед этим ускорение все еще равно нулю, а обе силы трения достигли своего максимального значения (ведь после срыва двигаться начнут обе точки соприкосновения). Пусть N_1, N_2 – силы реакции опоры (сила N_1 соответствует нижней точке); F_1, F_2 – соответствующие силы трения. Запишем первое условие равновесия в проекции на направление стержня и перпендикулярное ему:

$$\begin{cases} mg\sin\varphi_0 + N_2\cos\alpha = N_1\cos\alpha + (F_1+F_2)\sin\alpha\,, \\ mg\cos\varphi_0 + F_1\cos\alpha = F_2\cos\alpha + (N_1+N_2)\sin\alpha\,, \end{cases}$$

где $\alpha = \arccos(l/2R)$. А также второе условие равновесия относительно оси, проходящей через центр пластины перпендикулярно рисунку:

$$N_1\sin\alpha = N_2\sin\alpha + (F_1+F_2)\cos\alpha.$$

Учитывая $F_1 = \mu N_1$, $F_2 = \mu N_2$, получим систему:

$$\begin{cases} mg\sin\varphi_0 = N_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - N_2(\cos\alpha - \mu\sin\alpha), \\ mg\cos\varphi_0 = N_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + N_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \\ N_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = N_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \end{cases}$$

Решив ее, получим:

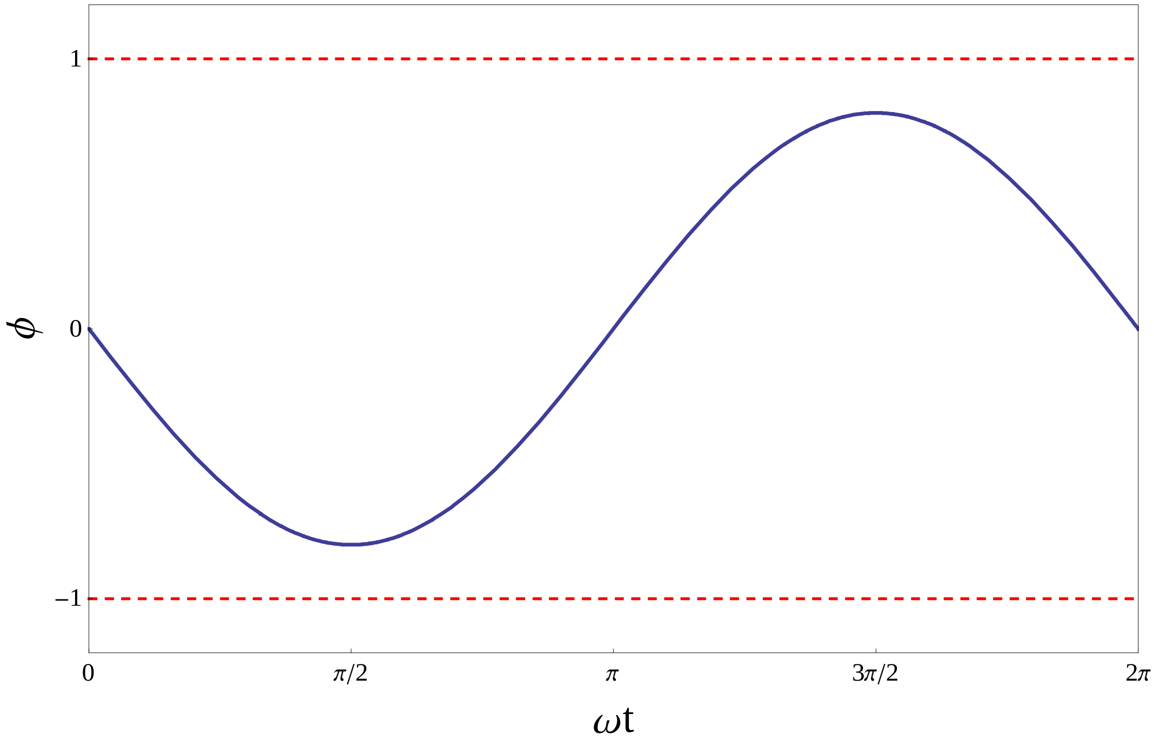
$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu}{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu}{1-(1+\mu^2)\dfrac{l^2}{4R^2}}\right).$$

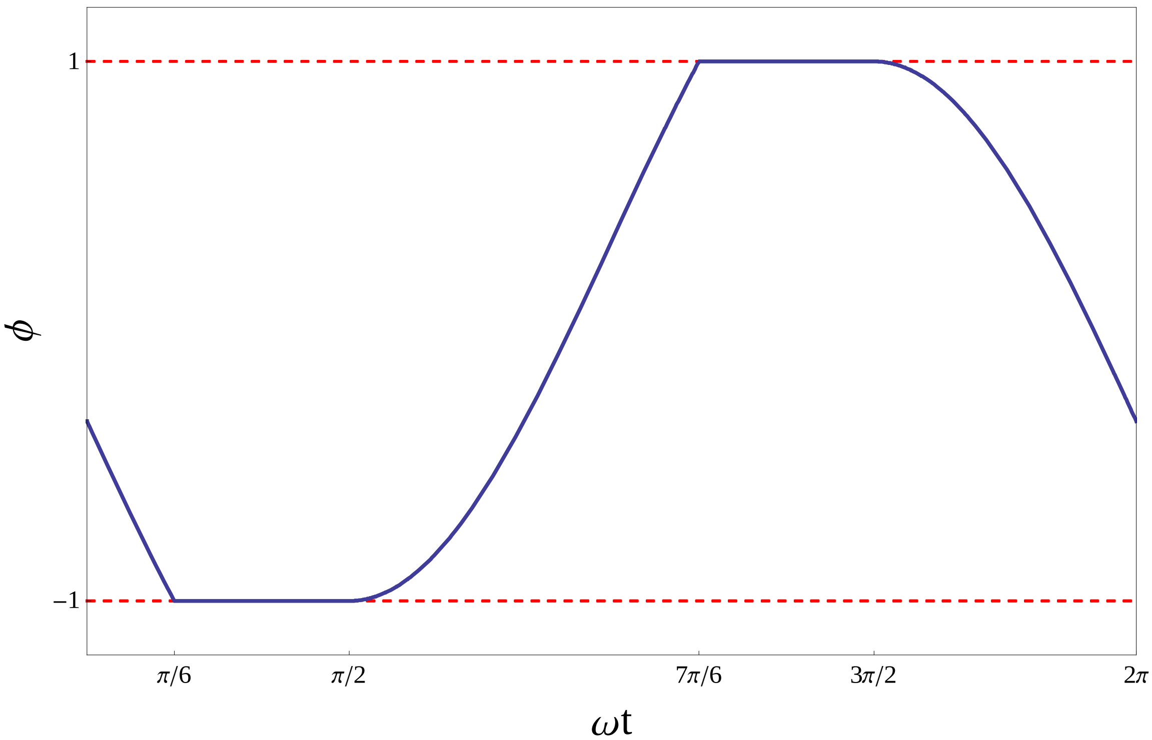
Решить ее можно, например, так: выразить N_2 из третьего уравнения, подставить в остальные, затем их разделить. В левой части останется $\operatorname{tg}\varphi_0$, а в правой сократится N_1. Правая часть упрощается к виду, приведенному выше.

В итоге получим, что угол φ будет изменяться по закону $\varphi(t) = -A\sin(\omega t)/R$, если $A/R \le \varphi_0$, или по закону

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\varphi_0, \{\omega t\} \in \left[-\arcsin\left(1-\dfrac{2R\varphi_0}{A}\right), \dfrac{\pi}{2}\right], \\ -\varphi_0 + \dfrac{A(1-\sin\omega t)}{R}, \{\omega t\} \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\left(1-\dfrac{2R\varphi_0}{A}\right)\right), \\ \varphi_0, \{\omega t\} \in \left[\pi - \arcsin\left(1-\dfrac{2R\varphi_0}{A}\right), \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ \varphi_0 - \dfrac{A(1+\sin\omega t)}{R}, \{\omega t\} \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi - \arcsin\left(1-\dfrac{2R\varphi_0}{A}\right)\right), \end{cases}$$

в противном случае.





Здесь $\{\omega t\}$ – фаза колебаний, т.е. дробная часть величины $\omega t/2\pi$, умноженная на 2π.

На рисунках изображены графики зависимостей $\varphi(\omega t)$ (на первом графике положено $\varphi_0 = 1$ и $A = 4R/5$, а на втором $\varphi_0 = 1$ и $A = 4R/3$).

4. При решении этой задачи необходимо провести важную аналогию – совокупность бабочек является идеальным газом, который внешне ничем не отличается от

обычного газа (единственное отличие – отсутствие распределения по модулям скоростей). Идеальность газа следует из малости параметра a – аналога размера молекулы. Для идеального газа давление определяется по формуле

$$p = \frac{nmv_0^2}{3},$$

где $n = N/V_0$ – концентрация бабочек. Отсюда получаем, что масса поршня

$$M = \frac{pS}{g} = \frac{Nmv_0^2S}{3V_0g}.$$

При изменении освещенности “газ” бабочек совершает некоторый процесс. Для его рассмотрения удобно ввести “температуру” – величину T, определяемую формулой

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Так как скорость линейно зависит от освещенности, то зависимость температуры от освещенности – квадратичная ($T \sim E^2$). Рассмотрим второе условие процесса – сохранение среднего времени свободного пробега. Так как длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации (ведь каждая молекула “резервирует” себе объем, пропорциональный длине свободного пробега, а сумма таких объемов равна объему сосуда), а скорость пропорциональна корню из температуры, то получим уравнение процесса: $n\sqrt{T} = const$. Учитывая, что $n \sim V^{-1}$, получим $T/V^2 = const$ или $P/V = const$. График процесса в координатах (p, V) представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Наклон этого графика задает уравнение:

$$p = V\frac{Nmv_0^2}{3V_0^2}.$$

Так как в данном процессе $p^2/T = const$, то $p \sim E$. Так как масса груза пропорциональна давлению, то масса довеска

$$\Delta M = M\left(\frac{E}{E_0} - 1\right) = \frac{Nmv_0^2S}{3V_0g}\left(\frac{E}{E_0} - 1\right).$$

При изменении освещенности энергия извне, вообще говоря, не передается (энергией излучения по сравнению с кинетической энергией бабочек можно пренебречь). Бабочка изменяет свою кинетическую энергию за счет внутренних процессов. Разумно ввести внутреннюю энергию U бабочек – она, в отличие от обычного газа, состоит не из механической и потенциальной энергий молекул, а из их внутренней энергии организмов. Тогда первое начало термодинамики будет выглядеть следующим образом:

$$dU = p\delta V + Nmvdv.$$

Полное изменение внутренней энергии за процесс

$$\Delta U = \frac{2}{3} N m v_0^2 \left(\frac{E^2}{E_0^2} - 1 \right).$$

Так как $E/E_0 = \sqrt{T/T_0}$, то светоемкость

$$c = \frac{dE}{dT} = \frac{E_0}{2\sqrt{T_0 T}}.$$

Выразив эту величину через известные величины, получим:

$$c = \frac{3kE_0}{2mv_0^2} \frac{V_0}{V}.$$