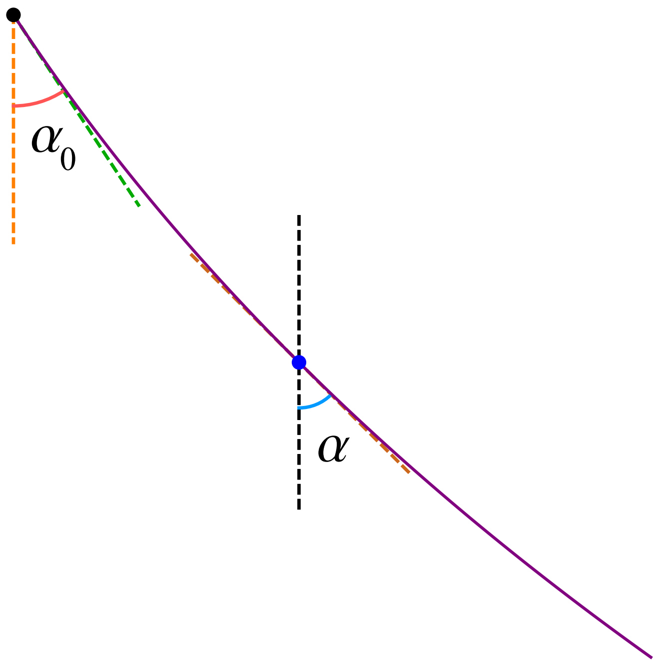
Из уравнений движения малых участков веревки в проекции на оси координат

$$\begin{cases} \mu g dl = -d(T\cos\alpha), \\ \mu\omega^2 x dl = -d(T\sin\alpha). \end{cases}$$

Здесь μ — масса единицы длины веревки, T — сила ее натяжения.



Параметризуем все неизвестные величины переменной $\lambda = l/L$, где l — криволинейная координата, отсчитанная вдоль веревки, L — длина веревки. Исключим натяжение T и введем переменную $t(\lambda) = \tan\alpha$. Тогда уравнение запишется в виде

$$(1-\lambda)t'' - 2t' + \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} = 0,$$

где $a = \omega^2 L/g$, а производная берется по λ. Уравнение можно упростить заменой $z = (1-\lambda)t$:

$$z'' + \frac{az}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + z^2}} = 0.$$

Самое интересное только начинается. Определим начальные условия задачи. Интегрируя первое уравнение движения (вдоль оси Oy), получим

$$\mu g l = T_0 \cos\alpha_0 - T\cos\alpha,$$

где T_0 — натяжение в точке крепления. Подставляя это во второе уравнение движения при $l = x = 0$ (точка крепления), получим одно “начальное” условие $t'(0) = t(0)$. Второе начальное условие записать довольно сложно в терминах величины t, оно утверждает, что натяжение в конце веревки равно нулю. В интегральной форме оно имеет вид

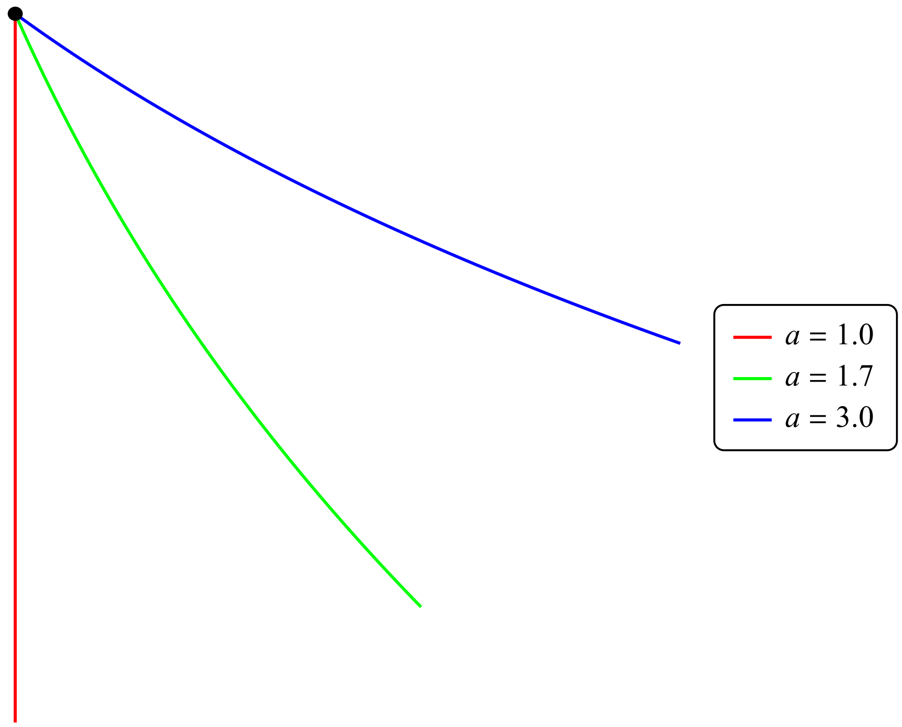
$$t(1) = a\int\limits_0^1 \frac{t d\lambda}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Гораздо проще *сформулировать* эти начальные условия для переменной z. Из первого условия на t получим $z'(0) = 0$. Так как $t(1)$ конечна, то из второго условия получим

$$z(1) = 0.$$

Вот здесь проблемка. Ведь просто подставить $z(1) = 0$ не получится ввиду расходимости.. [на самом деле расходимости там не должно быть, но ее надо устранять ручками]

Но это еще не самое главное. Мне с трудом, но все же удалось просчитать численно форму веревки.



Результат оказался довольно интересным. При небольших a, например $a = 1$, веревка висела камнем вниз. При больших же значениях угловой скорости, скажем $a = 3$, она таки замечала вращение и отклонялась. Теперь внимание, вопрос: какое такое критическое значение a, при котором вертикальное положение веревки перестает быть единственным равновесным? Предположительно, что оно еще и перестает быть устойчивым при этом значении a, но это уже гипотезы.