Маємо неоднорідне рівняння Даламбера на функцію $u(x, y, t), (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0$, з початковими умовами:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$
$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Розв'язок цього рівняння відомий, але я спробував його отримати. Перейдемо до фур'є-зображення $U(\omega_x, \omega_y)$:

$$U_{tt} = -\omega^2 c^2 U + F(\vec{\omega}, t),$$
$$U(0) = \Phi(\vec{\omega}),$$
$$U_t(0) = \Psi(\vec{\omega}).$$

Тепер зробимо перетворення Лапласа по t:

$$s^2\mathcal{U} - s\Phi - \Psi = -\omega^2 c^2 \mathcal{U} + \mathcal{F}(\vec{\omega}, s),$$

звідки

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{F} + s\Phi + \Psi}{s^2 + \omega^2 c^2}.$$

Зробимо обернене перетворення Лапласа:

$$U = \Phi(\vec{\omega})\frac{\sin \omega ct}{\omega c} + \Psi(\vec{\omega}) \cos \omega ct + \int\limits_0^t F(\vec{\omega}, t - \tau)\frac{\sin \omega c\tau}{\omega c} d\tau.$$

Тепер треба робити обернене перетворення Фур'є. Звичайно, для заданих початкових умов це зробити нескладно, але як отримати загальну відповідь, при тому що $\cos \omega ct$ не перетворюється?