

Реєстраційний номер	992597
Назва олімпіади	Всеукраїнська учнівська інтернет-олімпіада з фізики
Прізвище, ім'я та по батькові учасника	Шумаєв Олександр Ігорович
Рік народження	1999
Область	Харківська
Місто	Харків
Повна назва навчального закладу	Фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області
Клас, до якого перейшов учень	11
Клас, за який виконується конкурсне завдання	11
Статус	учень
Електронна адреса учасника	sashashumaev@rambler.ru

Задача № 1

Условие: Определить зависимость потенциальной энергии взаимодействия молекул 1 кг воды от температуры.

Решение: Выберем нулевой уровень потенциальной энергии, соответствующий потенциальной энергии (молекул) водяного пара при температуре кипения $T_v = 373$ К. Тогда, так как кинетическая энергия одной молекулы воды и пара одинакова и равна $3kT_v$ (k — постоянная Больцмана), то потенциальная энергия воды при температуре кипения равна $W(T_v) = -L$ на единицу массы (здесь $L = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота парообразования воды).

Для расчета зависимости потенциальной энергии от температуры необходимы значения теплоемкости воды при различных температурах. В первом приближении можно считать теплоемкость воды постоянной и равной $c_w = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Так как полная энергия равна сумме кинетической и потенциальной, а ее изменение пропорционально теплоемкости воды, то потенциальная энергия воды (на единицу массы) зависит от температуры по закону

$$W_1(T) = W(T_v) - c_w (T_w - T) + \frac{3R(T_w - T)}{\mu} = -L - c_w (T_w - T) + \frac{3R(T_w - T)}{\mu}, \quad (1.1)$$

где $R = 8,314$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $\mu = 18,0$ г/моль — молярная масса воды. По формуле (1.1) построен график зависимости $W(T)$ (см. рис. 1.2)

Для проведения более точного расчета необходима зависимость теплоемкости воды от температуры. Соответствующая таблица приведена ниже¹.

$T, ^\circ\text{C}$	0,01	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$c_w, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	4,210	4,204	4,193	4,1855	4,183	4,181	4,179	4,178	4,179	4,181	4,182
$T, ^\circ\text{C}$	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	
$c_w, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	4,183	4,185	4,188	4,191	4,194	4,198	4,203	4,208	4,213	4,219	

По приведенной таблице построен график (см. рис. 1.1). Затем при помощи программы *Mathematica*² через данные точки проведена интерполяционная кривая, также изображенная на рис. 1.1. Если взять полученную кривую в качестве функции $c_w(T)$, то зависимость потенциальной энергии воды от температуры можно выразить через нее как

$$W_2(T) = -L - \int_T^{T_v} c_w(T) dT + \frac{3R(T_w - T)}{\mu}. \quad (1.2)$$

По формуле (1.2) построен график $W_2(T)$ (см. рис. 1.2). Ниже для сравнения приведен разностный график $\Delta W(T) = W_2(T) - W_1(T)$ (см. рис. 1.3), в котором теплоемкость воды для линейного метода принята равной средней теплоемкости по графику (см. рис. 1.1) для обнуления значений на концах промежутка (точное значение теплоемкости $c_w = 4,1911$ кДж/(кг · К)).

Если же рассматривать зависимость $W(T)$ на всем диапазоне температур, то получим следующее. Потенциальная энергия пара при любой температуре мала и может быть принята равной нулю. Потенциальную же энергию льда рассчитать сложнее. У молекул воды в твердом состоянии отсутствуют поступательные и вращательные степени свободы, однако появляются колебательные. По закону Дюлонга-Пти³ теплоемкость твердого тела приблизительно равна $3R$, как и теплоемкость жидкой воды. Поэтому при замерзании и плавлении воды скачка кинетической энергии не происходит, и энергия льда при температуре плавления T_m равна $W_i(T_m) = W(T_m) - \lambda = -3,014$ МДж/кг, где $\lambda = 334,8$ кДж/кг — удельная теплота плавления льда. При понижении же температуры ниже температуры плавления потенциальная энергия линейно зависит от температуры (в предположении постоянной теплоемкости), причем коэффициент пропорциональности между энергией и температурой равен $c_l - 3R/\mu$, как и в случае с водой (c_l — теплоемкость льда).

Ответ: см. графики.

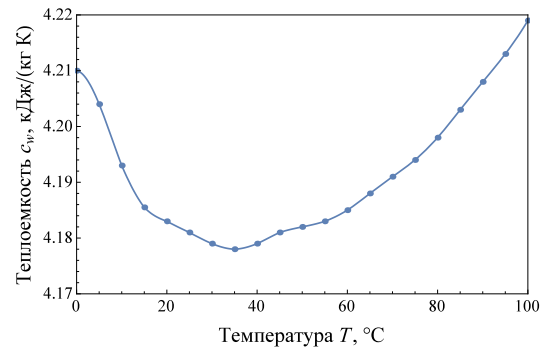


Рис. 1.1: зависимость теплоемкости воды от температуры.

¹ Ссылка на источник

² Имеется в виду программа *Wolfram Mathematica*, см. здесь

³ См. здесь

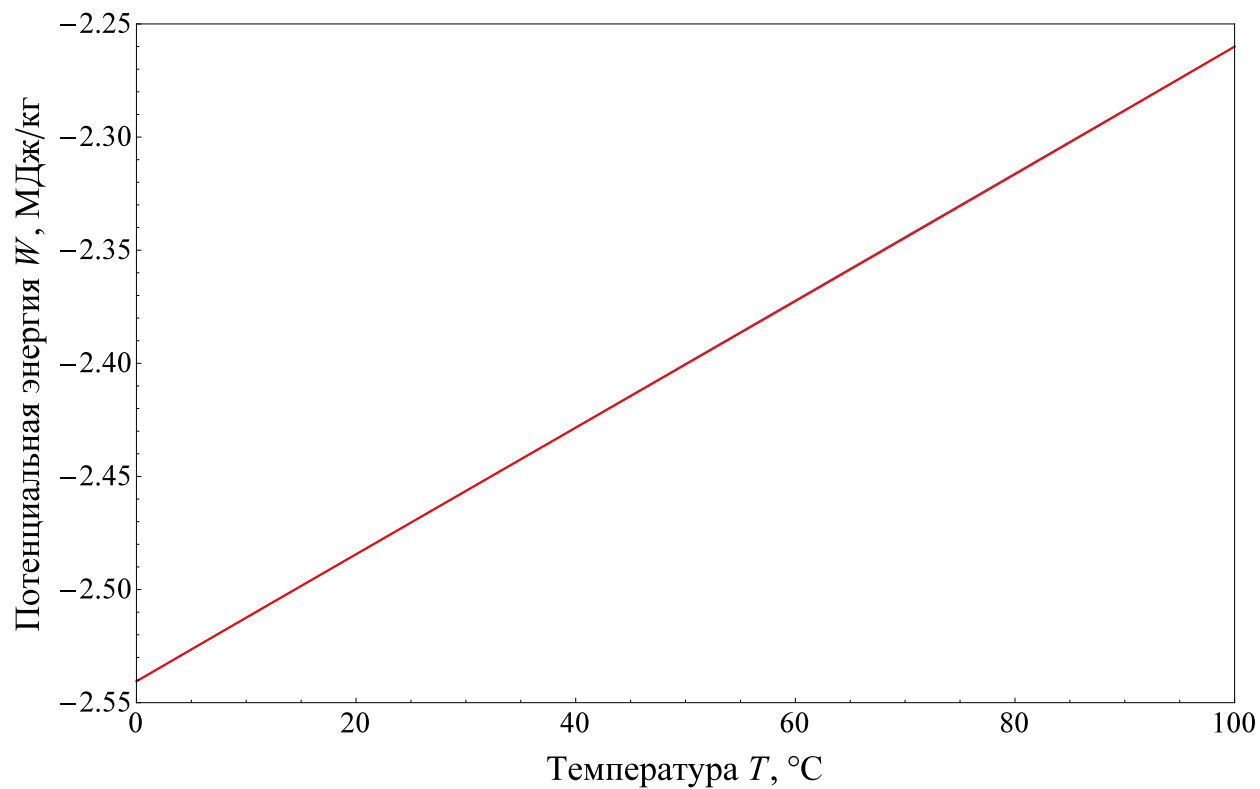


Рис. 1.2: зависимость потенциальной энергии воды от температуры. Красным изображен график $W_2(T)$, синим — график $W_1(T)$ (на рисунке сливается с красным).

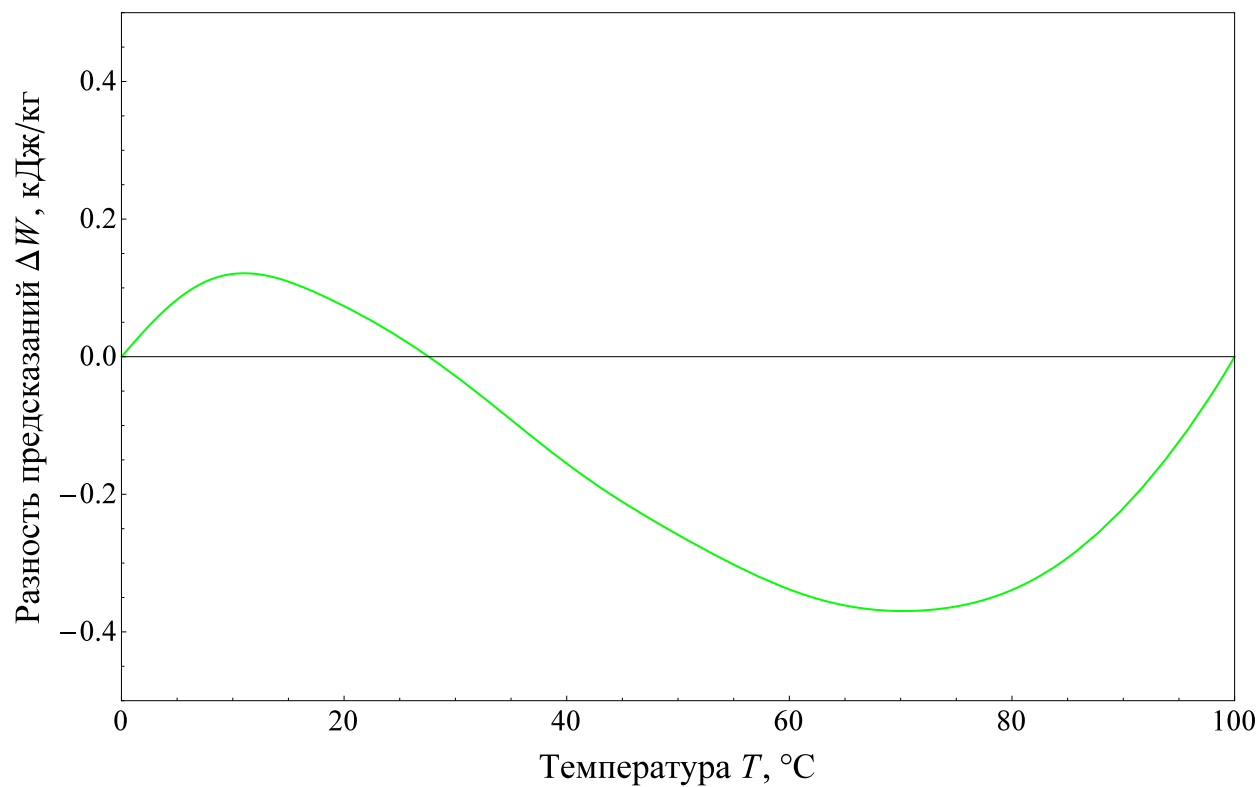


Рис. 1.3: разностный график приведенных выше зависимостей. Обратите внимание на масштаб на осях (кДж/кг)!

Задача № 2

Условие: Санки с мальчиком и собакой общей массой M скатываются с постоянной скоростью v_0 с горы, угол которой к горизонту α ($\cos \alpha = 6/7$). Собака массой m прыгает с санок по ходу их движения и приземляется со скоростью, которая равна v , и направлена под углом β ($\cos \beta = 3/7$) к горизонту. Санки после этого движутся снизу вверх. Определите скорость движения санок с мальчиком после прыжка собаки.

Решение: По условию, изначально сани двигались равномерно, между тем как на гладкой поверхности они бы двигались ускоренно. Естественно предположить, что разгону саней препятствует сила сухого трения между санями и горкой, причем коэффициент трения

$$\mu = \tan \alpha$$

(2.1)

при их равномерном движении.

Рассмотрим движение собаки после ее прыжка (см. рис. 2.1). Пусть она покинула сани со скоростью v_1 под углом β_1 к горизонту (см. рис. 2.2). Найдем величины v_1 и β_1 при помощи принципа обратимости в механике. Пусть собака прыгает с горы в сани с начальной скоростью v под углом β к горизонту. Выберем систему координат, как на рис. 2.2. В ней уравнение траектории движения собаки имеет вид

$$y = x \tan \beta - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \beta}. \quad (2.2)$$

Найдем координаты (x_0, y_0) точки приземления собаки в сани. Так как эта точка лежит на склоне горы, то $y_0 = x_0 \tan \alpha$. Также, координаты данной точки удовлетворяют уравнению (2.2). Подставляя y_0 в (2.2) и сокращая на x_0 , получим:

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{gx_0}{2v^2 \cos^2 \beta},$$

откуда

$$x_0 = \frac{2v^2 \cos^2 \beta (\tan \beta - \tan \alpha)}{g}.$$

Соответственно, вертикальная координата

$$y_0 = x_0 \tan \alpha = \frac{2v^2 \cos^2 \beta \tan \alpha (\tan \beta - \tan \alpha)}{g}. \quad (2.3)$$

При помощи соотношения (2.3) найдем проекции v_{1x} и v_{1y} скорости v_1 собаки в момент прыжка из саней (в обычной системе координат, с осью Ox , направленной *слева направо*). Так как во время движения собаки на нее действует только вертикальная сила тяжести, то горизонтальная проекция ее скорости не изменяется со временем:

$$v_x = v_{1x} = v \cos \beta = \text{const.}$$

Вертикальную же проекцию скорости нетрудно найти из закона сохранения энергии:

$$v_{1y} = \sqrt{v^2 \sin^2 \beta - 2gy_0} = v \sqrt{\sin^2 \beta - 4 \cos^2 \beta \tan \alpha (\tan \beta - \tan \alpha)}.$$

Соответственно, величины v_1 и β_1 могут быть выражены через v_{1x} и v_{1y} как

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = v \sqrt{1 - 4 \cos^2 \beta \tan \alpha (\tan \beta - \tan \alpha)} \quad (2.4)$$

и

$$\beta_1 = \arctg \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \arctg \sqrt{\tan^2 \beta - 4 \tan \alpha (\tan \beta - \tan \alpha)} \quad (2.5)$$

соответственно. Рассмотрим теперь быстрый, но конечный во времени процесс прыжка собаки. Будем считать этот процесс настолько быстрым, что действием силы тяжести во время удара можно пренебречь. Так как скорость саней в течение прыжка меняет направление, то и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ также меняет направление, что делает рассмотрение этого процесса весьма непростым. Для решения этой проблемы разобьем движение тел на два этапа: в первом скорость саней направлена вниз, во втором — вверх (см. рис. (2.3)). Пусть сила реакции опоры зависит от времени по закону $N(t)$. Тогда сила трения зависит от времени по закону $F_{\text{тр}}(t) = \mu N(t)$. Проинтегрировав это соотношение по некоторому промежутку времени T , получим:

$$\int_T F_{\text{тр}} dt = \mu \int_T N dt. \quad (2.6)$$

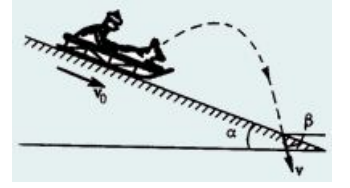


Рис. 2.1: расположение тел перед прыжком*.

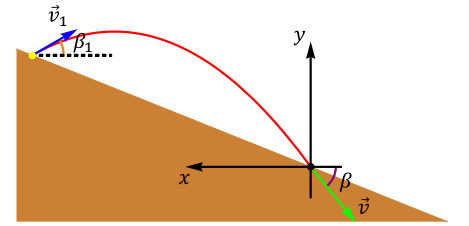


Рис. 2.2: траектория движения собаки.

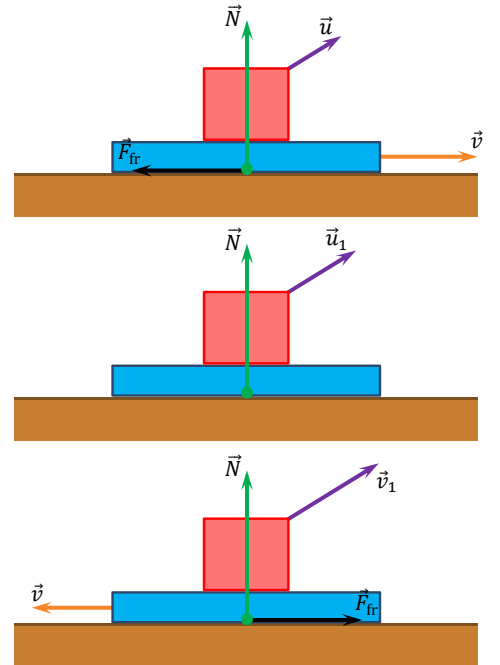


Рис. 2.3: динамика тел во время прыжка. На верхнем рисунке сани все еще движутся вниз, на втором они остановились, на третьем — движутся вверх

Направим ось Ox_1 вниз вдоль горки, а ось Oy_1 — по нормали к ней, и перейдем в систему координат x_1Oy_1 . Величина $p_{\perp} = \int N dt$ есть ни что иное, как импульс силы реакции опоры. Аналогично, величина $p_{\parallel} = \int F_{\text{тр}} dt$ есть импульс силы трения. Используя соотношение (2.6), получим:

$$p_{\parallel} = \mu p_{\perp}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.6) и (2.7) верны только тогда, когда сила трения направлена в одну и ту же сторону, а скорость саней не равна нулю. В частности, они верны на первом этапе прыжка, а также, возможно, на втором (но не на обоих сразу!). Пусть в конце первого этапа собака приобрела скорость u_1 . Запишем закон изменения импульса (интеграл второго закона Ньютона, обобщение закона сохранения импульса для случая присутствия внешних сил) на первом этапе прыжка в проекции на выбранные оси:

$$\begin{aligned} p_{\parallel 1} &= Mv_0 - mu_1 \cos(\alpha + \beta_1), \\ p_{\perp 1} &= mu_1 \sin(\alpha + \beta_1), \end{aligned}$$

откуда с использованием соотношений (2.1) и (2.7) получим

$$u_1 = \frac{Mv_0}{m(\cos(\alpha + \beta_1) + \mu \sin(\alpha + \beta_1))} = \frac{Mv_0 \cos \alpha}{m \cos \beta_1}. \quad (2.8)$$

Запишем также закон изменения импульса на втором этапе (здесь V — конечная скорость саней):

$$\begin{aligned} p_{\parallel 2} &= m(v_1 - u_1) \cos(\alpha + \beta_1) - (M - m)V, \\ p_{\perp 2} &= m(v_1 - u_1) \sin(\alpha + \beta_1), \end{aligned}$$

откуда с использованием (2.1) и (2.7) получим

$$V = \frac{m}{M - m} (v_1 - u_1) (\cos(\alpha + \beta_1) - \mu \sin(\alpha + \beta_1)) = \frac{m \cos(2\alpha + \beta_1)}{(M - m) \cos \alpha} \left(v_1 - \frac{Mv_0 \cos \alpha}{m \cos \beta_1} \right). \quad (2.9)$$

Данное выражение может быть приведено при помощи соотношений (2.4), (2.5) и (2.8) к виду

$$V = \frac{mv}{(M - m) \cos \alpha} \left(\cos 2\alpha \cos \beta - \sin 2\alpha \sqrt{\sin^2 \beta - 4 \cos^2 \beta \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)} \right) \left(1 - \frac{Mv_0 \cos \alpha}{mv \cos \beta} \right). \quad (2.10)$$

Очевидно, левая дробь в выражении (2.10) положительна. Также из решения очевидно, что $v_1 > u_1$, из чего следует положительность правой скобки в рассматриваемом выражении. Если же вычислить значение средней скобки при данных значениях углов α и β , получим:

$$f(\alpha, \beta) = \cos 2\alpha \cos \beta - \sin 2\alpha \sqrt{\sin^2 \beta - 4 \cos^2 \beta \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)} = -0,156 < 0.$$

А это означает, что выражение для конечной скорости саней (2.10) отрицательно! На самом же деле в данном случае произошло *заклинивание* — силы трения хватает с избытком для того, чтобы не дать саням сдвинуться, так что соотношение (2.7) не выполняется. Сани же после остановки так и не сдвинутся с места. Учитывая соотношение (2.1), можно сказать, что далее сани будут находиться в некоем безразличном равновесии.

Осталось добавить, что данное решение справедливо при $v_1 > u_1$. В противном случае, а именно, при

$$\frac{Mv_0}{mv} > \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1}{2},$$

сани после прыжка собаки будут продолжать двигаться вниз, а конечная скорость саней будет равна¹

$$V = \frac{2Mv_0 - mv}{2(M - m)}.$$

Также, диапазон углов α и β , для которых заклинивание будет происходить, изображен на рис. 2.4.

Ответ: $V = 0$.

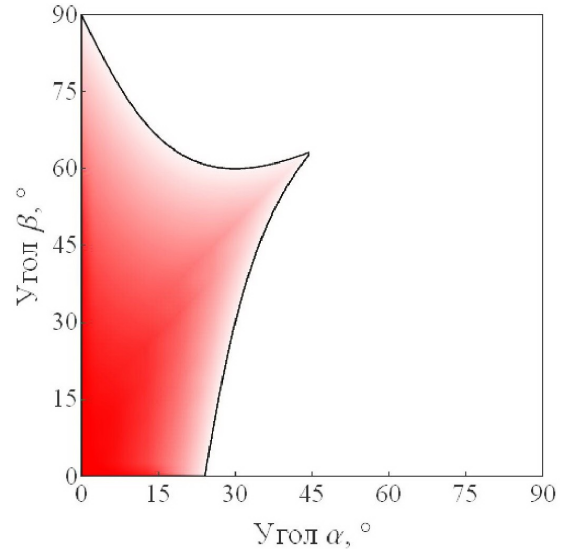


Рис. 2.4: график функции $f(\alpha, \beta)$. Значению функции соответствует насыщенность цвета, белым изображена область отрицательных значений, в которой произойдет заклинивание.

¹ Такая задача известна и предлагалась в сборнике задач МФТИ, см. здесь

Задача № 3

Условие: Исследуется сила взаимодействия металлического шара и точечной положительно заряженной частицы, находящейся на постоянном расстоянии от шара. Когда на шар поместили некоторый положительный заряд, то оказалось, что шар и частица притягиваются с силой f_1 , а когда заряд удвоили — с силой f_2 . Какова будет сила взаимодействия, если заряд шара утроить?

Решение: Пусть частица несет заряд Q и расположена на расстоянии d от центра шара радиуса R . Воспользуемся методом изображений¹ для расчета силы ее взаимодействия с шаром. Как известно, можно заменить проводник системой зарядов, при условии того, что его поверхность останется эквипотенциальной. Например, для незаряженного неземленного шара в качестве такой системы зарядов могут выступать два заряда $\pm q$, один из которых находится в центре шара, другой — на прямой, соединяющий заряд-источник и центр шара, на расстоянии d' от центра (см. рис. 3.1). Величины же q и d' определяются соотношениями

$$q = Q \frac{R}{d}$$

и

$$d' = \frac{R^2}{d} \quad (3.1)$$

соответственно.

Если ж сферу зарядить на Δq , то заряд-изображение в центре изменится на величину Δq , а второй заряд не изменится (это не нарушит эквипотенциальность поверхности шара). Распределение зарядов примет вид, как на рис. 3.2, причем заряды будут равны

$$q_1 = Q \frac{R}{d} + \Delta q \quad (3.2)$$

и

$$q_2 = -Q \frac{R}{d} \quad (3.3)$$

соответственно.

Пусть вначале шар зарядили на величину q_0 . Тогда сила взаимодействия шара с зарядом Q равна

$$f_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{d^2} + \frac{q_2}{(d-d')^2} \right),$$

откуда при использовании соотношений (3.1), (3.2) и (3.3) получим

$$f_1 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R}{d^3} - \frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2} + \frac{1}{d^2} \frac{q_0}{Q} \right). \quad (3.4)$$

В данном выражении положительное значение силы соответствует отталкиванию частицы от шара, отрицательное — притяжению. Аналогично для заряда $2q_0$ имеем:

$$f_2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R}{d^3} - \frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2} + \frac{1}{d^2} \frac{2q_0}{Q} \right). \quad (3.5)$$

И наконец, для заряда $3q_0$,

$$f_3 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R}{d^3} - \frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2} + \frac{1}{d^2} \frac{3q_0}{Q} \right). \quad (3.6)$$

Вычитая уравнение (3.4) из уравнения (3.5), получим:

$$f_2 - f_1 = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \quad (3.7)$$

Аналогично, вычитая уравнение (3.5) из уравнения (3.6), получим:

$$f_3 - f_2 = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \quad (3.8)$$

Сравнивая соотношения (3.7) и (3.8), получим:

$$f_3 - f_2 = f_2 - f_1,$$

откуда

$$f_3 = 2f_2 - f_1.$$

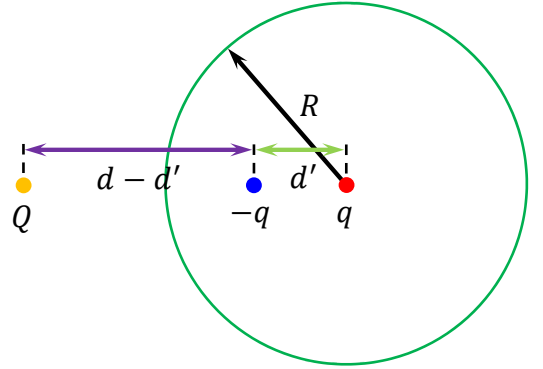


Рис. 3.1: заряд и его изображения в незаряженном шаре.

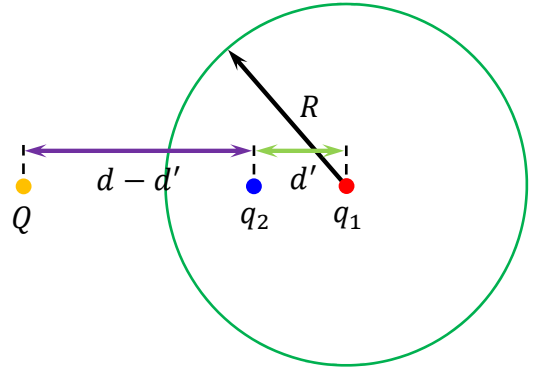


Рис. 3.2: в заряженном шаре.

¹ Метод изображений — довольно стандартный и тривиальный метод решения задач электростатики и магнитостатики, поэтому не буду здесь приводить его обоснование. См. здесь

Очевидно, правило знаков (положительная сила соответствует отталкиванию) соблюдено в данном выражении. Если же вдруг оказалось, что сила f_2 дана по модулю и имеет характер (притяжение/отталкивание) иной, нежели у силы f_1 , то искомая сила по модулю равна $f_3 = 2f_2 + f_1$ и сонаправлена силе f_2 .

Ответ: $f_3 = 2f_2 - f_1$.

Задача № 4

Условие: На круглую колбу падает узкий пучок света. Диаметр светлого пятна на одной из сторон колбы вдвое больше, чем в другой. Определить отношение показателей преломления веществ, находящихся внутри и снаружи колбы.

Решение: Пусть радиус колбы R . Считаем, что диаметр пятна на противоположной стенке вдвое меньше, чем на передней. В условии задачи не указано, успеет ли луч сфокусироваться до попадания на противоположную сторону колбы. Поэтому возможны 2 случая (см. рис. 4.1). Рассмотрим их по отдельности.

1. *Луч не успел сфокусироваться.* Рассмотрим узкий луч света, падающий на колбу на расстоянии $2D \ll R$ от оси, проходящей через центр колбы (см. рис. 4.1 сверху, толщина луча намного меньше D). Если взять в качестве такого луча крайний из описанного в условии пучка, то по условию он приблизится к оси на расстоянии D на противоположной стенке колбы. Обозначим α — угол падения, β — угол преломления, γ — угол отклонения луча, будем считать все эти углы малыми. Тогда из геометрических соображений очевидно, что

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad (4.1)$$

а также,

$$D = R \sin \alpha \approx R\alpha. \quad (4.2)$$

Вспользуемся теперь законом Снеллиуса. Пусть n_1 — показатель преломления вещества вне колбы, n_2 — внутри колбы, $n_{12} = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления. Тогда

$$\sin \alpha = n_{12} \sin \beta,$$

что в приближении малых углов может быть упрощено к виду

$$\alpha = n_{12} \beta. \quad (4.3)$$

Наконец, осталось использовать последнее соотношение с углом отклонения. Так как луч сместился вниз на расстояние $D/2$ на участке длиной $2R$, то

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{D}{4R}. \quad (4.4)$$

Теперь в системе из четырех уравнений (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4) четыре неизвестных (α , β , γ , n_{12}), и из нее можно найти ответ на задачу. При подстановке β и γ из (4.3) и (4.4) соответственно в (4.1) получим:

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{n_{12}} \right) = \frac{D}{4R}. \quad (4.5)$$

Далее, соотношение 4.5 с использованием (4.2) и после сокращения на α приводится к виду:

$$1 - \frac{1}{n_{12}} = \frac{1}{4},$$

откуда

$$n_{12} = \frac{4}{3}.$$

2. *Луч успел сфокусироваться.* В этом случае уравнения (4.1), (4.2), (4.3) остаются верны. Изменится лишь соотношение (4.4). В данном случае луч сместился вниз не на $D/2$, а на $3D/2$, поэтому

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{3D}{4R}. \quad (4.6)$$

Группируя уравнения (4.1), (4.2), (4.3) и (4.6), как в первом случае, получим:

$$1 - \frac{1}{n_{12}} = \frac{3}{4},$$

откуда

$$n_{12} = 4.$$

Рассмотренные случаи, вообще говоря, не являются полным обобщением данной задачи. Возможны случаи, когда пятно на противоположной стороне вдвое *больше* и имеет диаметр $4D$. Таких случаев тоже два, и в них также верны соотношения (4.1), (4.2) и (4.3). Отличаются они только соотношением смещения луча, которое выглядит как $\gamma = -D/2R$ и $\gamma = 3D/2R$. Тогда относительный показатель преломления равен $n_{12} = 2/3$ и $n_{12} = -2$ соответственно.

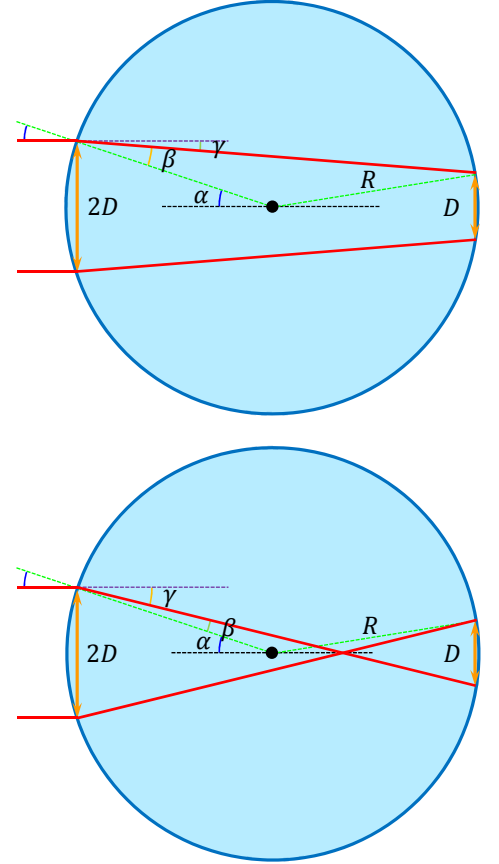


Рис. 4.1: ход лучей в первых двух рассматриваемых случаях.

Проанализируем полученные результаты. Наиболее абсурдным выглядит последний ответ $n_{12} = -2$, что возможно в так называемых левых средах¹. Осуществимость на практике второго результата $n_{12} = 4$ вызывает сомнения, ведь едва ли можно найти вещество с показателем преломления, большим или равным 4 для видимого света. Первый и третий же результаты вполне правдоподобны, и под них неплохо подходят, например, пары веществ воздух-вода и стекло-воздух соответственно. Однако, условиями задачи не наложены ограничения, позволяющие безоговорочно отбросить второй и четвертый результаты.

Ответ: $n_{12} = -2$, $n_{12} = 2/3$, $n_{12} = 4/3$ или $n_{12} = 4$.

¹ Левые среды — вещества с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями, что делает их показатель преломления действительным, но отрицательным. См. здесь

Задача № 5

Условие: Если на стакан с горячей водой положить небольшой квадратный листик бумаги (слегка превышающий размеры стакана), то края листа начинают совершать колебания. Исследуйте, от каких факторов зависит амплитуда колебаний. Опишите подробно методику проведения эксперимента. В отчете представьте небольшой сюжет (до 1 мин) исследуемого Вами явления.

Цель эксперимента: изучить колебания листика бумаги, положенного на стакан с кипятком.

Оборудование: Электрочайник, стеклянный стакан, акселерометр ADXL345¹, электронный микроконтроллер Arduino Uno² и программное обеспечение к нему, кабель универсальной последовательной шины, электронные весы, линейка, бумага, ножницы, скотч, вода.

Теоретические сведения: В закрытом стакане с горячей водой непрерывно образуется водяной пар. При этом, т.к. стакан закрыт листиком, то излишку пара некуда выходить, и давление в стакане постепенно повышается. Когда излишка давления станет достаточно, чтобы поднять листик, пар из стакана начнет выходить, давление внутри стакана — падать, а листик в конечном счете опустится назад, и весь цикл повторится сначала. Таким образом, представленная в условии система совершает колебания. Найдем их частоту и амплитуду.

При расчете амплитуды будем считать, что в стакане находится только насыщенный водяной пар, причем он образуется с постоянным массовым расходом μ_0 (в кг/с), сам пар будем считать идеальным газом, а его истечение из щели между листиком и краями сосуда — адиабатическим. Пусть стакан представляет собой цилиндр радиуса r , а высота столба газа в нем (отсчитывая от поверхности воды) равна H . Тогда площадь сечения стакана равна $S = \pi r^2$, а полный объем пара в нем равен $V_0 = SH = \pi r^2 H$. Когда же листик находится на высоте h над краями стакана, объем пара в стакане можно считать равным $V = V_0 + Sh$. Из закона сохранения энергии скорость истечения пара

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}},$$

где p — давление воздуха внутри стакана, p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воздуха внутри стакана. Тогда, так как площадь щели, из которой вытекает пар, равна $2\pi rh$, то из стакана в единицу времени вытекает масса пара, равная

$$\mu_{\text{out}} = 2\pi rh\rho v = 2\pi rh\sqrt{2(p - p_0)}\rho.$$

Всего же в стакане в единицу времени накапливается масса пара, равная

$$\frac{dm}{dt} = \mu_0 - \mu_{\text{out}} = \mu_0 - 2\pi rh\sqrt{2(p - p_0)}\rho, \quad (5.1)$$

где $m(t)$ — общая масса пара внутри стакана. Давление пара p может быть выражено из закона Менделеева-Клапейрона:

$$p = \frac{mRT_{\text{in}}}{MV} = \frac{mRT_{\text{in}}}{M(V_0 + Sh)}, \quad (5.2)$$

где T_{in} — температура пара внутри стакана, M — молярная масса пара. Плотность же пара определяется очевидным соотношением

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0 + Sh}. \quad (5.3)$$

По закону Ньютона для листика массы m_0 при его движении,

$$m_0 \frac{d^2 h}{dt^2} = -m_0 g + (p - p_0) S,$$

откуда

$$p = p_0 + \frac{m_0}{S} \left(g + \frac{d^2 h}{dt^2} \right). \quad (5.4)$$

Сравнивая (5.2) и (5.4), получим:

$$p_0 + \frac{m_0}{S} \left(g + \frac{d^2 h}{dt^2} \right) = \frac{mRT_{\text{in}}}{M(V_0 + Sh)},$$

откуда

$$m = \frac{M(V_0 + Sh)}{RT_{\text{in}}} \left(p_0 + \frac{m_0}{S} \left(g + \frac{d^2 h}{dt^2} \right) \right). \quad (5.5)$$

Продифференцируем (5.5):

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M}{RT_{\text{in}}} \left(\left(p_0 S + m_0 (g + \ddot{h}) \right) \dot{h} + m_0 \left(\frac{V_0}{S} + h \right) h^{(3)} \right). \quad (5.6)$$

Наконец, выразим неизвестные величины p , ρ , m и dm/dt из (5.2), (5.3), (5.5) и (5.6) соответственно и подставим в (5.1):

$$\frac{M}{RT_{\text{in}}} \left(\left(p_0 S + m_0 (g + \ddot{h}) \right) \dot{h} + m_0 \left(\frac{V_0}{S} + h \right) h^{(3)} \right) = \mu_0 - 2\pi rh\sqrt{2(p - p_0)}\rho = \mu_0 - 2\pi rh\sqrt{\frac{2Mm_0}{RT_{\text{in}}S} (g + \ddot{h}) \left(p_0 + \frac{m_0}{S} (g + \ddot{h}) \right)}.$$

¹ Подробности см. здесь

² См. здесь

Полученное уравнение является дифференциальным относительно единственной переменной $h(t)$. Умножим левую и правую часть на $RT_{\text{in}}/(Mm_0r^2)$:

$$\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p_0S}{m_0}+g\right)+\frac{\ddot{h}}{r}\right)\frac{\dot{h}}{r}+\left(\frac{V_0}{Sr}+\frac{h}{r}\right)\frac{h^{(3)}}{r}=\frac{\mu_0RT_{\text{in}}}{Mm_0r^2}-\frac{2\pi hRT_{\text{in}}}{Mm_0r}\sqrt{\frac{2Mm_0}{RT_{\text{in}}S}\left(g+\ddot{h}\right)\left(p_0+\frac{m_0}{S}\left(g+\ddot{h}\right)\right)}. \quad (5.7)$$

Разберемся теперь с начальными условиями. Начнем отсчет времени с того момента, когда листик уже не давит своим весом на стакан, но еще не успел сколь-либо значительно подняться. Тогда $h(0) = 0$ и $\dot{h}(0) = 0$, а также давление $p = p_0 + m_0g/S$, откуда при помощи (5.4) следует $\dot{h}(0) = 0$. Введем также т.н. **безразмерное время** $\tau = \mu_0t/m_0$ и безразмерную высоту $x(\tau) = h(t)/r$, и обозначим

$$\frac{V_0}{Sr} = \frac{H}{r} = x_V, \quad (5.8)$$

$$\frac{gm_0^2}{r\mu_0^2} = a_g, \quad (5.9)$$

$$\frac{m_0^2RT_{\text{in}}}{M\mu_0^2r^2} = x_m, \quad (5.10)$$

$$\frac{p_0m_0S}{\mu_0^2r} = a_p. \quad (5.11)$$

Умножим уравнение (5.7) на m_0^3/μ_0^3 и подставим безразмерные параметры из (5.8), (5.9), (5.10) и (5.11):

$$(\ddot{x} + a_g + a_p)\dot{x} + (x + x_V)x^{(3)} = x_m - x\sqrt{8(\ddot{x} + a_g)(\ddot{x} + a_g + a_p)x_m}. \quad (5.12)$$

Получено уравнение (5.12) в безразмерных величинах (координатах и времени), оно может быть решено численно при подстановке численных значений безразмерных величин. При подстановке значений $m_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ кг, $\mu_0 = 10^{-5}$ кг/с, $r = 0,03$ м, $H = 0,09$ м, $T_{\text{in}} = 373$ К, $M = 0,018$ кг/моль, $p_0 = 10^5$ Па, $R = 8,31$ Дж/(моль · К), $g = 9,8$ м/с² получили $x_V = 3$, $a_g = 2,94 \cdot 10^7$, $x_m = 1,72 \cdot 10^{13}$ и $a_p = 2,83 \cdot 10^{11}$. По этим данным построен график зависимости $x(\tau)$, изображенный на рис. 5.1. Как видно, через некоторое время после начала движения лист начинает совершать колебания, похожие на синусоидальные, и их установившаяся амплитуда равна $2x_{\text{max}} = 4,43 \cdot 10^{-4}$ или приблизительно 13 микрометров. Это можно увидеть, если воспользоваться некоторыми приближениями в уравнении (5.12), а именно, пренебречь величинами a_g и \ddot{x} по сравнению с a_p (весьма оправдано, особенно если принять во внимание порядок величины a_p), также пренебречь величиной x по сравнению с x_V (оправдано, если считать колебания небольшими), и наконец, пренебречь всей правой частью (а вот это уже далеко не очевидно), можно получить:

$$a_p\dot{x} + x_Vx^{(3)} = 0$$

Установившееся решение этого уравнения имеет вид $x(\tau) = A + B \sin \Omega\tau$, причем

$$\Omega = \sqrt{\frac{a_p}{x_V}}.$$

При подстановке указанных выше значений получим $\Omega = 3,07 \cdot 10^5$, откуда период $T = 2\pi/\Omega = 2,05 \cdot 10^{-5}$. Как видим, частота неплохо соотносится с графиком не только по порядку, а с достаточно хорошей точностью, погрешность в частоте менее 5 %. Для данного решения характерно то, что лист, однажды оторвавшись, вообще не касается краев стакана, а находится на “паровой подушке”. Также, при такой высокой частоте возникают вопросы о квазистатичности процессов, а следовательно, о применимости уравнения Менделеева-Клапейрона для пара внутри стакана.

Постановка эксперимента: Первой идеей в данном эксперименте было использование высокоточного датчика перемещения или радиолокатора (аналог альтиметра), измеряющего расстояние до объекта при помощи микро- или радиоволн. Однако при порядках смещения, указанных в теоретической части, обнаружить такое движение не представляется возможности. С другой стороны, для обнаружения малых смещений можно воспользоваться интерферометрическими измерениями. Однако, в данном случае смещения как раз неудобного порядка (около 20 длин волн видимого света), да и происходят с большой частотой, так что интерференционную картину увидеть будет невозможно.

Ключевой же идеей стало гармоническое приближение колебаний, описанное в теоретической части. К листу бумаги прикрепили легкий высокоточный акселерометр, позволяющий измерять не только амплитуду, но и частоту колебаний. Далее при помощи серии измерений вычисляли значение амплитудного ускорения a_{max} и частоты ω , откуда амплитуда координаты $x_{\text{max}} = \omega^2 a_{\text{max}}$. Амплитудное ускорение вычисляли при помощи усреднения наблюдаемых максимумов, частоту — при помощи длительного наблюдения. За системой наблюдали в течение времени t , за которое она успела сделать n колебаний, тогда их период $T = t/n$ и частота $\omega = 2\pi/T$.

Снятие данных с акселерометра производил микроконтроллер Arduino, который преобразовывал сигналы с датчика в 10-битные цифровые значения и отправлял эти данные в компьютер через универсальный последовательный порт (USB). Такие измерения он повторял с периодом $t_0 = 10$ мс. Далее при помощи используемого программного обеспечения эти величины были преобразованы в значения ускорения (минимальное значение 0 соответствует ускорению $-1,5g$, а максимальное значение 1023 — ускорению $1,5g$), а конечную обработку данных (нахождение величин x_{max} и ω , а также построение графиков) осуществляли в программе *Mathematica*³. Фотографии установки вместе с видеосъемкой ее работы доступны в Google диске здесь.

³ Имеется в виду программа *Wolfram Mathematica*, см. здесь

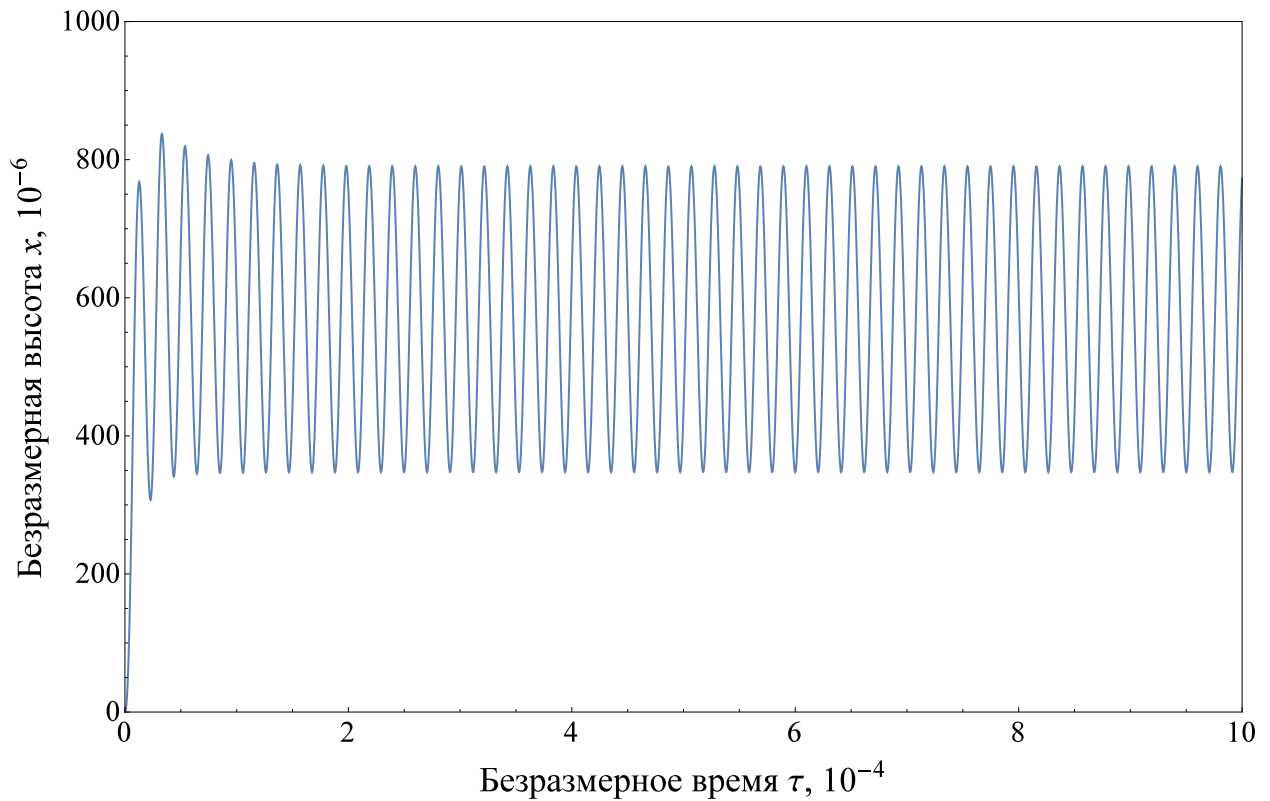


Рис. 5.1: теоретический график зависимости отклонения листа бумаги от времени. Через некоторое время колебания устанавливаются в режиме, похожем на гармонический.

Результаты эксперимента: При проведении эксперимента были получены следующие данные:

Масса листа бумаги с акселерометром $m_0 = 15,2 \pm 0,01$ г, радиус стакана $r = 3,0 \pm 0,1$ см, высота стакана $h = 9,0 \pm 0,1$ см. Погрешность при измерении весов $\Delta m_0 = 10$ мг соответствует их классу точности, погрешность же при измерении линейки 0,1 см равна ее цене деления.

$a, \text{ м/с}^2$	0,555	0,891	1,033	0,036	-0,378	-0,888	-0,691	-0,061	0,120	0,723	1,317	0,747	-0,427
$a, \text{ м/с}^2$	-0,881	-1,191	-0,944	-0,389	0,477	0,885	0,662	0,288	-0,555	-0,866	-1,292	-0,348	0,024
$a, \text{ м/с}^2$	0,524	1,326	0,790	0,190	-0,449	-0,869	-0,995	-0,292	0,111	1,154	1,151	0,743	0,111
$a, \text{ м/с}^2$	-0,896	-0,915	-0,860	-0,306	0,644	0,922	0,958	0,633	-0,320	-0,782	-1,052	-0,643	0,205
$a, \text{ м/с}^2$	0,478	1,053	1,097	0,227	-0,504	-0,721	-0,723	-0,675	0,533	0,855	0,775	0,922	0,085
$a, \text{ м/с}^2$	-0,722	-1,007	-0,854	-0,107	0,411	1,222	1,205	0,723	-0,068	-1,154	-1,185	-0,806	-0,248
$a, \text{ м/с}^2$	0,706	1,150	0,759	0,548	-0,310	-1,078	-1,047	-0,296	0,049	0,584	0,867	1,031	0,037
$a, \text{ м/с}^2$	0,394	-1,268	-0,896	-0,412	0,557	1,119	1,288	0,831	-0,017				

В данной таблице представлены значения ускорения, измеренные акселерометром, с промежутком в 10 миллисекунд. В данной таблице 100 измерений, ниже приведены еще 2 таблицы по 100 измерений, вообще же было суммарно проведено 10 серий, данные из которых содержатся в приложенном архиве *data5.rar* в *.dat* файлах в текстовом формате. По первой серии (на 20 точек) построен график зависимости $a(t)$ (см. рис. 5.2).

$a, \text{ м/с}^2$	0,897	0,801	0,505	-0,249	-0,561	-1,183	-0,483	0,033	0,624	1,092	0,787	0,087	-0,876
$a, \text{ м/с}^2$	-0,851	-0,683	-0,135	0,578	1,040	1,083	-0,024	-0,532	-0,933	-0,676	-0,196	0,841	1,003
$a, \text{ м/с}^2$	1,218	0,458	-0,753	-1,152	-0,768	-0,487	0,630	0,867	0,752	0,291	-0,223	-1,081	-1,245
$a, \text{ м/с}^2$	-0,368	0,447	1,013	0,931	0,691	-0,521	-0,623	-0,893	-0,473	-0,096	0,754	1,265	0,744
$a, \text{ м/с}^2$	-0,302	-0,817	-0,993	-0,725	-0,184	0,974	1,022	0,604	-0,000	-0,981	-0,778	-0,680	0,123
$a, \text{ м/с}^2$	0,842	0,896	1,100	0,285	-0,530	-0,798	-0,908	-0,465	0,802	0,988	0,854	0,007	-0,799
$a, \text{ м/с}^2$	-0,755	-0,743	-0,531	0,715	1,035	0,753	0,308	-0,383	-1,043	-1,031	-0,529	0,248	1,002
$a, \text{ м/с}^2$	1,060	0,468	-0,244	-0,730	-1,179	-0,825	0,058	0,883	0,990				

$a, \text{ м/с}^2$	0,781	0,918	0,881	0,217	-0,519	-0,731	-0,966	-0,740	0,314	0,675	1,021	0,825	0,232
$a, \text{ м/с}^2$	-0,283	-1,128	-0,923	-0,618	0,018	0,807	0,738	1,054	0,408	-0,385	-0,512	-0,906	-0,713
$a, \text{ м/с}^2$	0,106	0,739	0,637	0,946	0,610	-0,408	-0,519	-1,155	-1,032	-0,087	0,282	0,697	0,690
$a, \text{ м/с}^2$	0,305	-0,351	-0,866	-0,923	-0,740	0,015	0,415	0,865	1,200	0,627	-0,153	-0,539	-0,717
$a, \text{ м/с}^2$	-0,903	-0,107	0,388	1,112	0,662	0,501	0,107	-0,749	-0,900	-1,035	-0,152	0,432	0,606
$a, \text{ м/с}^2$	0,879	0,908	0,298	-0,381	-1,198	-1,196	-0,534	0,222	0,635	1,058	0,842	0,337	-0,523
$a, \text{ м/с}^2$	-0,946	-1,136	-0,578	0,159	0,528	0,935	0,687	0,290	-0,234	-0,552	-0,765	-0,474	-0,089
$a, \text{ м/с}^2$	0,736	0,950	0,691	0,197	-0,130	-0,746	-1,158	-0,504	0,126				

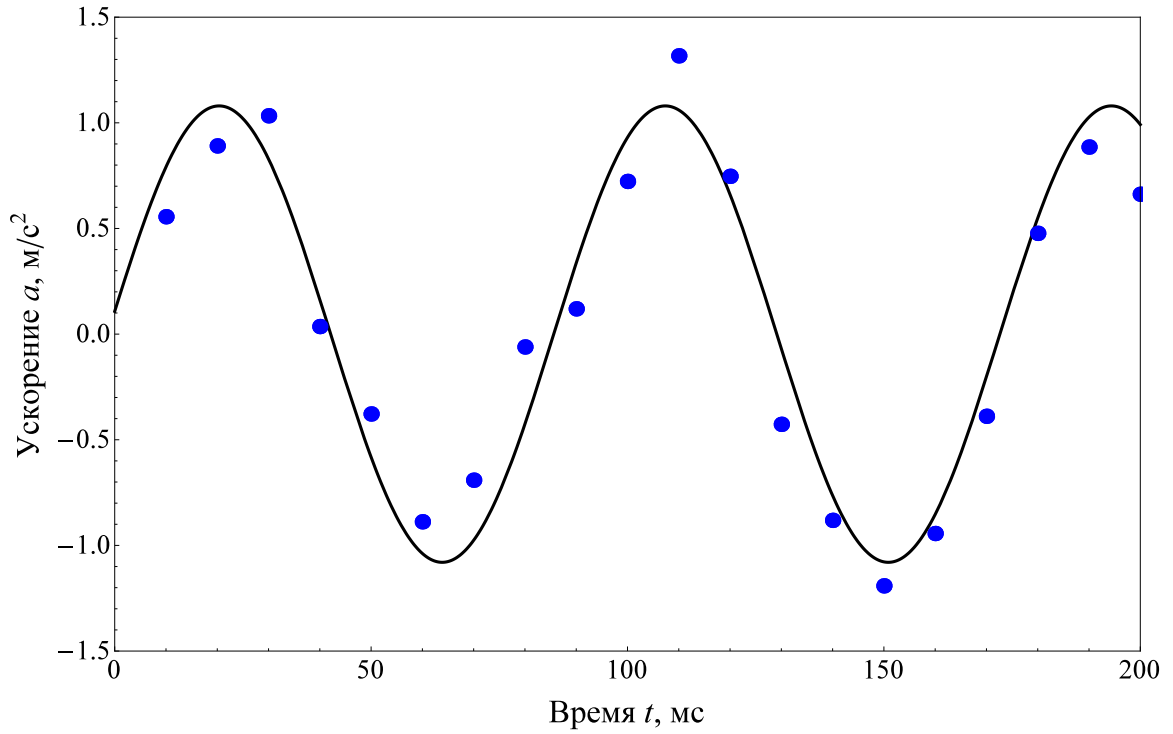


Рис. 5.2: экспериментальный график зависимости ускорения акселерометра от времени для первых 20 точек 1-й серии.

Далее из приведенных данных были извлечены точки максимумов a_i , и в качестве амплитудного было взято их среднее \bar{a} . Приборная погрешность акселерометра $\Delta a_1 = 0,003 \text{ м/с}^2$, случайную же погрешность вычисляли по формуле

$$\Delta a_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}}, \quad (5.13)$$

где n — количество рассматриваемых максимумов.

Между крайними из приведенных точек максимумов было рассчитано время $t_i = \delta n_i \cdot t_0$, где δn_i — разность номеров крайних максимумов в i -й последовательности точек. Погрешность времени Δt_1 считаем равной нулю. Тогда период таких колебаний в каждой серии $T_i = t_i / \delta n_i$. Далее вычисляли среднее \bar{T} этих значений, а случайную погрешность определяли по формуле

$$\Delta T_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}}, \quad (5.14)$$

где $n = 10$ — количество серий. Далее частоту ω определяли по формуле $\omega = 2\pi/\bar{T}$, а погрешность — по формуле

$$\Delta \omega = \omega \frac{\Delta T}{T}. \quad (5.15)$$

Наконец, амплитуду колебаний (от положения равновесия) определяли по формуле $x_{\max} = \bar{a}/\omega^2$, а ее погрешность — по формуле

$$\Delta x_{\max} = x_{\max} \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta \omega}{\omega}\right)^2}. \quad (5.16)$$

По полученным данным получаем $\bar{a} = 1,02 \text{ м/с}^2$, $\bar{T} = 87 \text{ мс}$, $\omega = 72,2 \text{ рад/с}$, $x_{\max} = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. По формуле (5.13) получим $\Delta a_2 = 0,14 \text{ м/с}^2 \gg \Delta a_1$, случайная погрешность в данном эксперименте играет гораздо большую роль, чем приборная. По формуле (5.14) получим погрешность в периоде $\Delta T = \Delta T_2 = 8 \text{ мс}$, по формуле (5.15) погрешность в частоте $\Delta \omega = 8 \text{ рад/с}$. Наконец, по формуле (5.16) погрешность в амплитуде $\Delta x_{\max} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Выводы: Были изучены колебания листа бумаги над стаканом с кипящей водой. В результате теоретических выкладок выяснилось, что амплитуда колебаний зависит от массы листа бумаги, геометрических размеров стакана (высоты и радиуса) и интенсивности кипения (массы воды, испаряющейся за единицу времени). Экспериментально получено значение амплитуды колебаний $2x_{\max} = (0,4 \pm 0,1) \text{ мм}$. Зависимости от геометрических размеров не были тщательно изучены, однако качественно было замечено, что при увеличении размеров амплитуда *уменьшается*. Результаты таких измерений не были обработаны и находятся в архиве *data5.rar* под названиями *ptsothervessels*.dat*, где вместо звездочки стоит номер серии. Зависимость от интенсивности кипения снять не удалось, так как не было найдено приборов, чтобы измерять (не то что контролировать) ее. Удалось только нагревать воду до одной и той же температуры во всех измерениях, что дает приблизительно постоянную интенсивность. Массу листа бумаги с акселерометром также не меняли (т.к. была использована стандартная бумага из листов А4, 80 г/м²). Экспериментальные результаты (частота и амплитуда) неплохо соотносятся с теоретическими, что означает, что зависимости были определены правильно, а единственная неизвестная величина μ_0 — угадана довольно точно.