8 КЛАС. ЗАДАЧА № 1

Рассмотрим процесс передачи сигнала в системе отсчета, связанной с колонной (рис. 1). Если скорости сигнала в этой системе обозначить как v_1 (в направлении от хвоста колонны к ее голове) и v_2 (против движения колонны), то соответствующие искомые скорости в системе земли

$$u_1 = v_1 + v \ ,$$

$$u_2 = v_2 - v \ .$$

Полное время прохождения сигнала от одного автомобиля к соседнему в направлении движения (учитывая, что скорость звука в этом направлении $c_1 = c - v$ в системе колонны) вместе с задержкой

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v} + \tau \ .$$

Аналогичное время прохождения сигнала в обратном направлении (скорость звука $c_2 = c + v$)

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v} + \tau \ .$$

Тогда скорости в системе колонны

$$v_1 = \frac{l}{\Delta t_1} = \frac{l}{\frac{l}{c - v} + \tau} \ ,$$

$$v_2 = \frac{l}{\Delta t_2} = \frac{l}{\frac{l}{c + v} + \tau} \ .$$

Искомые скорости

$$u_1 = \frac{c - v}{1 + \frac{\tau}{l}(c - v)} + v = 100\text{м/с} \ ,$$

$$u_2 = \frac{c + v}{1 + \frac{\tau}{l}(c + v)} - v \approx 52{,}78\text{м/с} \ .$$

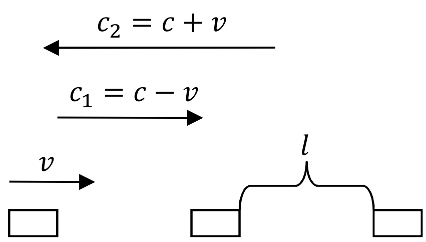


Рис. 1

При распространении света в неподвижной среде (как для неподвижной колонны автомобилей)

$$u_0 = u_1(v = 0) = u_2(v = 0) = \frac{c}{1 + \frac{\tau}{l}c}$$

связана с коэффициентом преломления $u_0 = \frac{c}{n}$. Откуда

$$n = 1 + \frac{\tau}{l}c\,,$$

$$\frac{\tau}{l} = \frac{n-1}{c}.$$

Скорость вдоль движущегося потока воды

$$u = u_1 = \frac{c - v}{1 + (n-1)(1 - \frac{v}{c})} + v = v + \frac{c - v}{n - (n-1)\frac{v}{c}}\ .$$

Разница скоростей

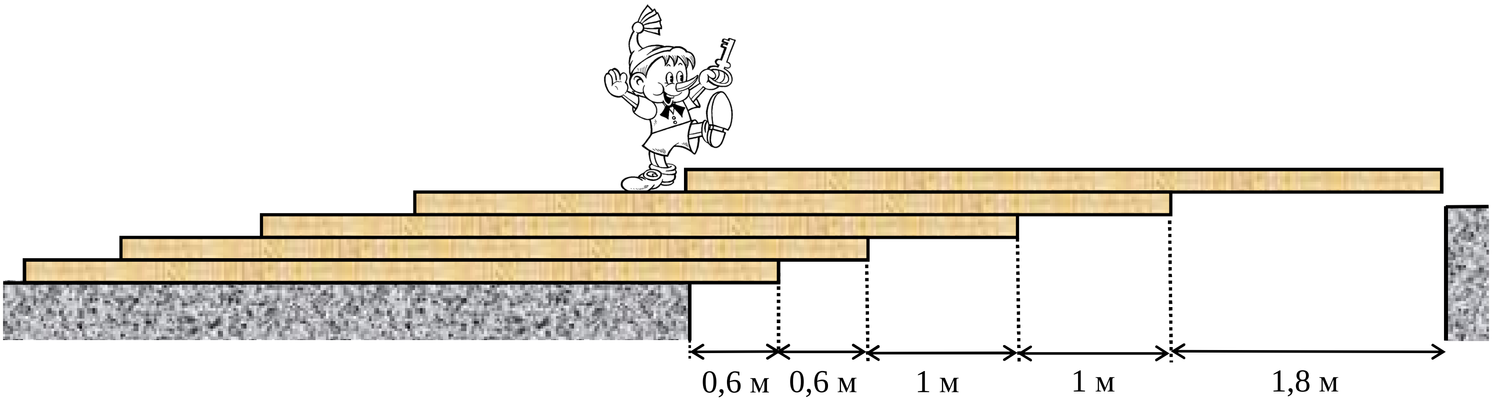
$$\varDelta u = u - u_0 = u - \frac{c}{n} = v\left(1 - \frac{1}{n^2 - n(n-1)\frac{v}{c}}\right) \approx 3{,}06\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Примечание: последнее выражение можно значительно упростить, благодаря тому что $\frac{v}{c} \ll 1 \quad (n(n-1)\frac{v}{c} \ll n^2)$, откуда

$$\varDelta u \approx v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

8 КЛАС. ЗАДАЧА № 2

Буратіно вирішив втекти із полону від Карабаса-Барабаса. Він знайшов п’ять однакових дубових дошок, кожну утричі важчу за себе, і висунув їх над прірвою так, як показано на рисунку. Доведіть, що дошки у такому положенні самі собою втримаються і не впадуть. Наскільки далеко Буратіно може обережно пройти ними? Запропонуйте Буратіно, як втекти від Карабаса-Барабаса, маса якого така ж, як у Буратіно і всіх дошок разом узятих.



Передусім зазначимо, що, згідно рисунку, довжина дошки 5 м.

Верхня, п’ята дошка впасти з четвертої не може, оскільки нависає над нею менше, ніж наполовину (Рис. 1). Четверта разом з п’ятою впасти з третьої не можуть, оскільки їх центр мас знаходиться на відстані 1,6 м по горизонталі від лівого краю прірви, що менше, ніж 2,2 м, відстань до точки **Г,** краю третьої дошки. Можна й надалі з’ясовувати відстань до центру мас все більшої кількості дошок і порівнювати з відстанню до крайньої точки під ними. А можна записати моменти сил, що намагаються обертати конструкцію в одну або іншу сторону.

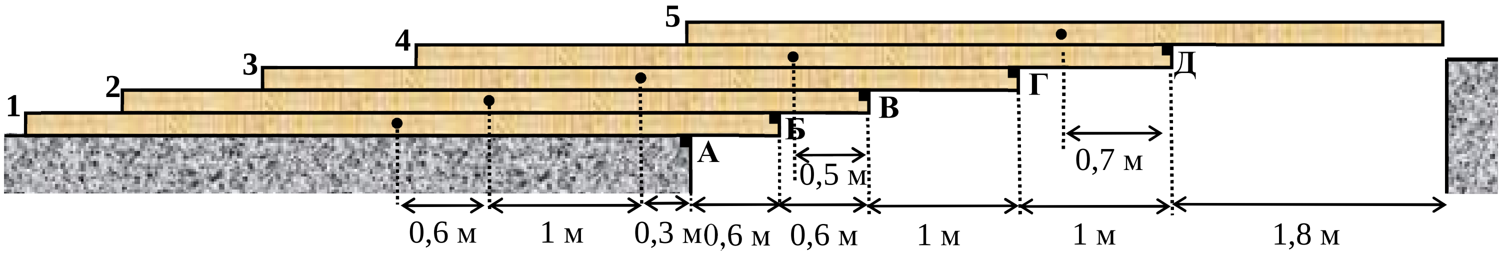


Рис.1

Рівновага трьох верхніх дошок відносно точки **В**: За годинниковою стрілкою їх намагається повернути сила тяжіння, що діє на п’яту дошку, її момент $M_5 = mg \cdot 1{,}3\,\text{м}$. Проти годинникової стрілки – сили тяжіння, що діють на четверту і третю дошки $M_4 = mg \cdot 0{,}5\,\text{м}$, $M_3 = mg \cdot 1{,}5\,\text{м}$. Оскільки $M_4 + M_3 = mg \cdot 2\,\text{м} > M_5 = mg \cdot 1{,}3\,\text{м}$, навколо точки **В** дошки за годинниковою стрілкою перевертатися не почнуть. Аналогічно доводимо для точок **Б** і **А**. Оскільки навколо жодної з точок поворот не можливий, дошки не впадуть, незважаючи на те, що верхня дошка «висунулась» на всю свою довжину.

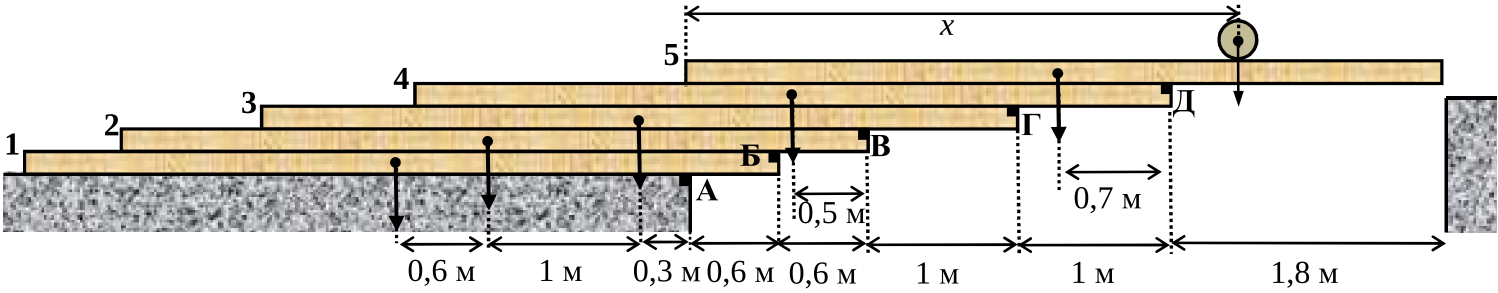


Рис.2

Тепер врахуємо можливе положення Буратіно, який віддалився від краю прірви (точки **А**) на відстань *x* по горизонталі (Рис.2). За найбільшої відстані *x*, відносно точки повороту спостерігатиметься рівновага. Рівняння рівноваги занесемо у таблицю, для зручності записавши відстані в SI.

Точка повороту	Рівняння рівноваги	*x*
Д	$\frac{1}{3}mg(x-3{,}2)=mg\cdot 0{,}7$	$x=5{,}3\,\text{м}$
Г	$\frac{1}{3}mg(x-2{,}2)+mg\cdot 0{,}3=mg\cdot 1{,}5$	$x=5{,}8\,\text{м}$
В	$\frac{1}{3}mg(x-1{,}2)+mg\cdot 1{,}3=mg\cdot 0{,}5+mg\cdot 1{,}5$	$x=3{,}3\,\text{м}$
Б	$\frac{1}{3}mg(x-0{,}6)+mg\cdot 1{,}9+mg\cdot 0{,}1=mg\cdot 0{,}9+mg\cdot 1{,}9$	$x=3\,\text{м}$
А	$\frac{1}{3}mgx+mg\cdot 2{,}5+mg\cdot 0{,}7=mg\cdot 0{,}3+mg\cdot 1{,}3+mg\cdot 1{,}9$	$x=0{,}9\,\text{м}$

Як бачимо з таблиці, найбільша відстань, на яку Буратіно може обережно відійти вправо від лівого краю прірви тільки 0,9 м. Після цього вся конструкція почне завалюватись, повертаючись навколо точки **А** за годинниковою стрілкою. З таблиці також можна побачити, що, якби обертання навколо точок **А**, **Б**, **В** виявилось не можливим, Буратіно спокійно міг би перейти п'ятиметрову прірву, не боячись обертання навколо точок **Г** і **Д** (розраховані відстані перевищують 5 м). Щоб врятувати Буратіно, по-перше, можна скористатися цим резервом і переформувати дошки. Для цього можна, наприклад, вчинити наступним чином. Розмістити Буратіно на самому краю верхньої 5-ї дошки ($x=5\,\text{м}$), зсунути четверту дошку ліворуч настільки, наскільки ще можлива рівновага 5-ї дошки з Буратіно відносно точки **Д**, знайти довжину її виступу. Потім також змістити вліво 3-ю дошку, знайти довжину її виступу відносно точки **Г**, і так далі. Просумувавши всі знайдені довжини виступів, можна знайти максимальну ширину прірви, яку Буратіно зможе перейти без сторонньої допомоги (Карабаса-Барабаса). Вона дорівнює приблизно 4,7 м, що менше ширини прірви за умови. Тобто переформатування дошок не вирішує проблеми. Залишимо їх у початковому стані, і спробуємо скористатися Карабасом-Барабасом, як противагою. Якщо Карабас ступить на нижню дошку, намагаючись піймати Буратіно, він своєю вагою притисне цю дошку до землі, і обертання навколо точки **А** стане неможливим. Наприклад, для випадку, коли Карабас опиниться зліва на межі між першою і другою дошками, умова рівноваги відносно точки **А** $\frac{1}{3}mgx+mg\cdot 2{,}5+mg\cdot 0{,}7=mg\cdot 0{,}3+mg\cdot 1{,}3+mg\cdot 1{,}9+\frac{16}{3}mg\cdot 3{,}8$ дає $x=61{,}7\,\text{м}$ - дуже велике значення. Отже, Буратіно на самому початку повинен стояти на позначці $x=0{,}9\,\text{м}$, а після входження Карабаса на першу дошку бігти до позначки $x = 3\,\text{м}$, яку можна минути після того як Карабас наступить на другу дошку. Після того, як Карабас наступить на третю дошку, про обмеження можна не думати, а бігти щодуху, оскільки з наближенням Карабаса до точки **А** рівновага може опинитися під загрозою. Розглянемо найбільш суттєву умову рівноваги відносно точки **А**, припускаючи, що Карабас біжить рівномірно зі швидкістю $v_К$, а Буратіно – $v_Б$:

$$\frac{1}{3}mg(0{,}9 + v_Б t) + mg \cdot 2{,}5 + mg \cdot 0{,}7 = mg \cdot 0{,}3 + mg \cdot 1{,}3 + mg \cdot 1{,}9 + \frac{16}{3}mg \cdot (5 - v_К t)$$

.

Через час $t = \dfrac{80}{v_Б + 16v_К}$ наступить рівновага. Припустимо, що в цей момент часу Буратіно опиниться на протилежному боці, тобто $0{,}9 + v_Б t = 5$. Тоді Буратіно вдасться урятуватись, якщо його швидкість буде складати не менше, ніж $656/759 \approx 0{,}864$ від швидкості Карабаса. Звісно, переформатовавши дошки, можна втекти від Карабаса і за меншої швидкості, а самого злодія примусити обвалити піраміду дошок. І на за вершення, щоб примусити Карабаса бігти за Буратіно, останній може подразнити його золотим ключиком від тайної кімнати, як в казці.

8 КЛАС. ЗАДАЧА № 3

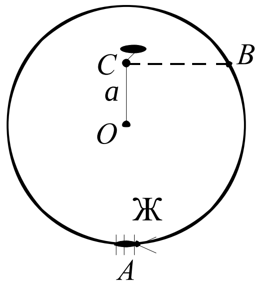


Рис. 1

Задача (с углом $90°$)

Легкий диск радиуса $R = 8\,см$, который может свободно вращаться, подвешен на оси, проходящей на расстоянии $a = 4\,см$ от его центра (рис. 1). В нижнюю точку диска А садится тяжелый жук, и начинает ползти по краю диска. Какой путь пройдет центр диска (точка О) к тому моменту, когда жук доползет до точки В?

Задачу решить в предположении, что жук гораздо тяжелее, чем диск.

Решение.

1) Так, как жук гораздо тяжелее, чем диск, то при движении он все время остается под точкой подвеса. Поэтому в неподвижной системе координат его движение представляет подъем по вертикальной линии вверх (рис. 2).

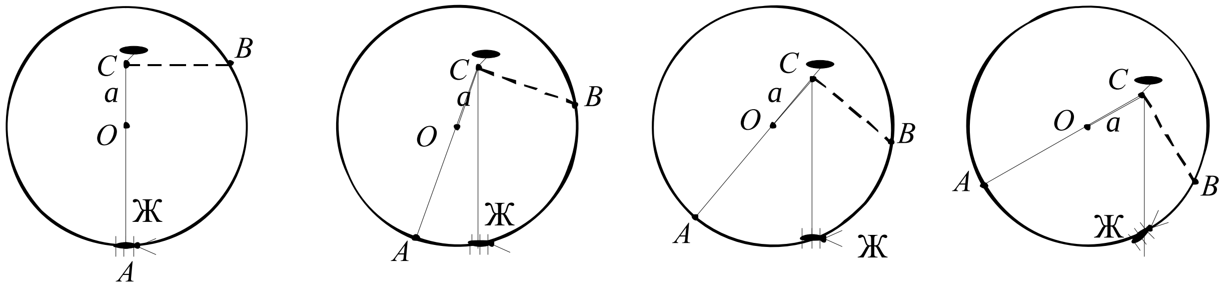


Рис. 2

Такое движение возникает как результат двух движений: движение жука по краю диска и поворота диска относительно точки подвеса.

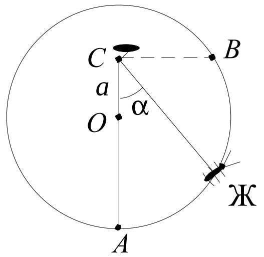


Рис. 3

2) Центр диска точка О всегда находится на одном и том же расстоянии $a = 4\,см$ от оси подвеса. Т.е. она движется по окружности. Чтобы найти ее путь, надо знать угол α, на который повернется диск.

3) В системе отсчета, связанной с диском все описанное выше выглядит следующим образом: точки О и С остаются на месте, жук ползет вдоль края диска, а «вертикальная» линия СЖ (точка подвеса – жук) вращается относительно точки С. Когда жук доползет до точки В, эта линия будет составлять с линией СО угол $90°$.

4) Таким образом, в неподвижной системе координат линия СО повернется на $90°$ и, следовательно, точка О пройдет путь равный четверти длины окружности радиусом $a = 4\,см$:

$$S = \frac{1}{4} \cdot 2\pi a = \frac{\pi a}{2} = 6{,}28\,см.$$

Ответ: $S = \frac{\pi a}{2} = 6{,}28\,см$.

8 КЛАС. ЗАДАЧА № 4

4. На фото, зробленому з Землі (штат Флорида, США), МКС і «Атлантіс» на фоні Сонця під час останньої експедиції відвідування 25 травня 2010 року. Міжнародна космічна станція (МКС) має довжину 72,8 м, ширину 108,5 м. Довжина багаторазового корабля «Атлантіс» 37 м, а розмах крил складає 24 м. Поясніть відмінність співвідношення розмірів на фото і у дійсності. Визначте висоту орбіти МКС над поверхнею Землі. Радіус Сонця 696 тис. км, відстань від Сонця до Землі 149,6 млн. км. Землю вважайте кулею.

Зауваження: **під час розв'язку задачі можете скористатись виданою Вам лінійкою.**

Розв'язок задачі.

Невідповідність співвідношення розмірів на фото і у дійсності пов'язана з тим, що ми бачимо космічні апарати під деяким кутом відносно площини горизонтального перерізу КА.

Вздовж яких же габаритів площина горизонтального перерізу КА нахилена вісь відносно променя зору? З приведеного фото легко бачити, що нахил вздовж осі, перпендикулярної до панелей сонячних батарей (в проекції на вертикальну вісь на приведеному фото), не має місця. Інакше б проміжки між панелями батарей були б на фото різної ширини. Однаковість величини проміжків свідчить про те, що нахил МКС має місце в проекції на горизонтальний напрямок (на фото).

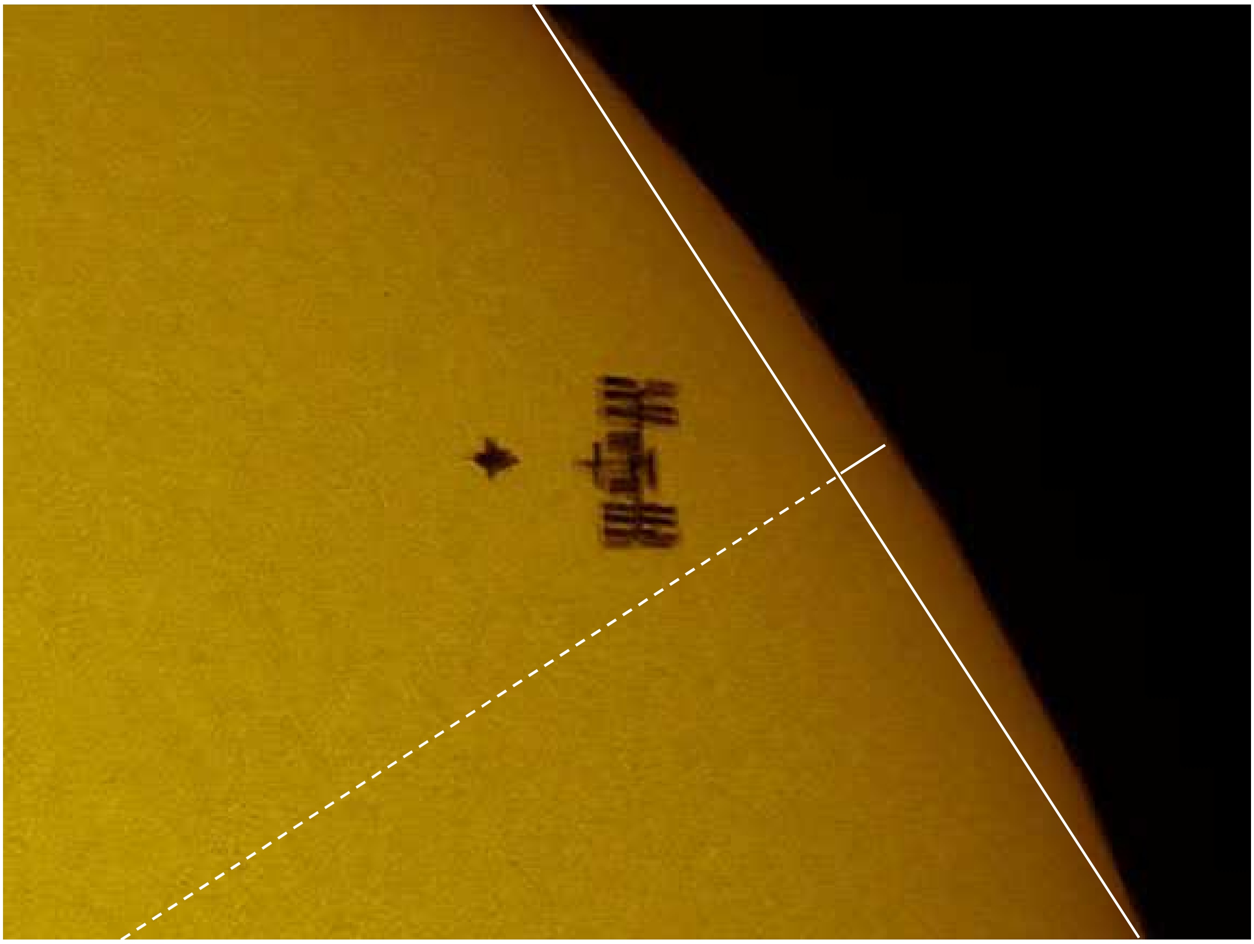


Рис. 1

Для відповіді на інші питання, знайдемо радіус зображення Сонця на фото. Для цього проводимо хорду між крайніми точками зображення поверхні Сонця в яких зображення перетинає горизонтальну рамку фотографії (див. рис.1). За допомогою лінійки позначаємо на фото центр нашої хорди (див. рис. 2). Так ми отримаємо серединний перпендикуляр до хорди (див. рис.2). Вимірюємо довжину хорди l = 15 мм і відстань від неї до дуги кола вздовж серединного перпендикуляра d = 7 мм. За допомогою теореми Піфагора отримуємо: $R^2 = (R-d)^2 + (l/2)^2$ (Рис. 2).

Підставимо виміряні величини. Виходить

$$R = \frac{d^2 + (l/2)^2}{2d} \approx \frac{l^2}{8d} \approx 37{,}5\,\text{см}\,.$$

Ширина станції на фото h = 22,5 мм у $50/3 \approx 16{,}7$ разів менша за обчислену величину радіуса Сонця. Цей розмір у стільки ж разів більший за справжній розмір станції H = 108,5 м, у скільки відстань до Сонця більша за відстань до станції. Звідси, склавши пропорцію, знаходимо висоту орбіти:

L = 306 км.

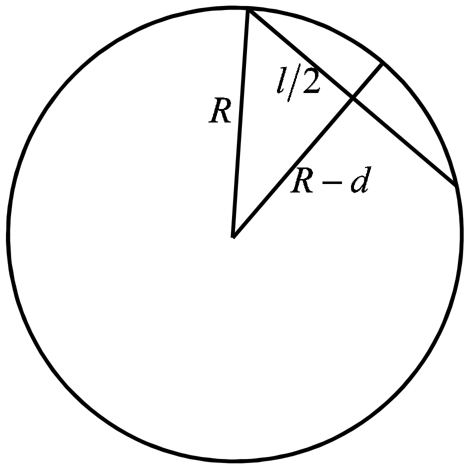


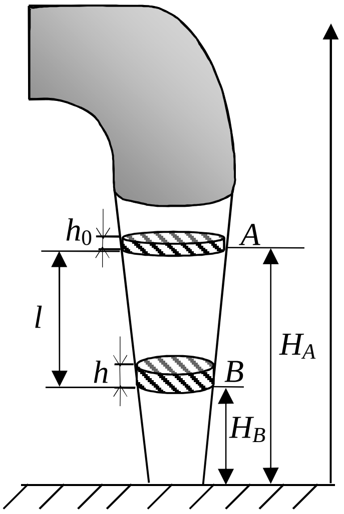
Рис.2

Відповідь: висота орбіти КА над поверхнею Землі дорівнює приблизно 306 км.

8 КЛАС. ЗАДАЧА № 5

Струмінь води, що витікає з крана, звужується донизу. Знайти залежність діаметра *d* струменя від відстані *l* до крана. Початкова швидкість витікання води v_0, діаметр отвору крана d_0.

Розв'язання



\

1. Для розв'язання задачі скористаємося припущенням, що вода під час руху не стискається. Це призводить до того, що за однакові проміжки часу через довільний переріз струменя будуть протікати однакові маси рідини

$$m_0 = m\,.$$

Внаслідок нестисливості рідини її густина є сталою .

Оскільки $m = \rho V$, то

$$\rho V_0 = \rho V$$

$$V_0 = V$$

Вибираємо проміжок часу Δt достатньо маленьким. У цьому випадку можна вважати об'єм рідини циліндричним.

Об'єм циліндра визначається співвідношенням

$$V = Sh = \frac{\pi d^2}{4} h\,.$$

2. Протягом невеликого проміжку часу швидкість рідини практично не змінюється, тоді $h = \upsilon \Delta t$.

Виконаємо наступні математичні перетворення

$$V_0 = V$$

$$\frac{\pi d_0^2}{4} h_0 = \frac{\pi d^2}{4} h\,,$$

де d_0 - діаметр отвору крана; d - діаметр струменя на висоті H_B; h_0 - висота циліндра вибраного об'єму рідини на висоті H_A; h - висота циліндра того самого об'єму рідини на висоті H_B.

$$d_0^2 h_0 = d^2 h$$

$$d_0^2 \upsilon_0 \Delta t = d^2 \upsilon \Delta t\,,$$

де – υ_0 швидкість витікання води з крана (початкова швидкість); υ- швидкість рідини на висоті H_B.

$$d_0^2\upsilon_0 = d^2\upsilon$$

$$d = d_0\sqrt{\frac{\upsilon_0}{\upsilon}} \quad (1)$$

3. Для знаходження швидкості υ скористаємося законом збереження механічної енергії.

$$W_A = W_B .$$

Для точки А повна механічна енергія дорівнює

$$W_A = mgH_A + \frac{m\upsilon_0^2}{2}$$

Для точки В повна механічна енергія дорівнює

$$W_B = mgH_B + \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$mgH_A + \frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgH_B + \frac{m\upsilon^2}{2}$$

З рисунка знаходимо $l = H_A - H_B$.

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{2} + g\left(H_A - H_B\right)$$

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{2} + gl$$

Тоді залежність швидкості від відстані до крана визначається виразом:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gl} \quad (2)$$

4. Підставимо вираз для швидкості (2) у вираз (1) та отримаємо

$$d = d_0\sqrt{\frac{\upsilon_0}{\upsilon}} = d_0\sqrt{\frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gl}}} = d_0\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gl}{\upsilon_0^2}}}} = d_0\frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gl}{\upsilon_0^2}}} .$$

5. Перевірка одиниць вимірювання.

$$\left[d\right] = \left[м\right]\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\left[\frac{м}{с^2}\right]\left[м\right]}{\left[\frac{м^2}{с^2}\right]}}}} = \left[м\right]$$

Відповідь : $d = d_0\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gl}{\upsilon_0^2}}}} = d_0\frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gl}{\upsilon_0^2}}}$.