# Задача № 1

**Условие:** Миномет установлен у основания некоторой горы под углом $\alpha = 1{,}5$ радиана к горизонту. Минометный расчет ведет записи[1] о том, насколько далеко падают мины в зависимости от их начальной скорости. Определите по этим данным высоту и примерную форму горы.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_0$, м/с | 10,00 | 14,00 | 18,00 | 22,00 | 26,00 | 30,00 | 34,00 | 38,00 | 42,00 | 46,00 |
| $l$, м | 0,711 | 1,612 | 2,851 | 4,454 | 6,481 | 8,984 | 12,020 | 15,640 | 19,879 | 24,749 |
| $v_0$, м/с | 50,00 | 54,00 | 58,00 | 62,00 | 66,00 | 70,00 | 74,00 | 80,00 | 82,00 | |
| $l$, м | 30,231 | 36,277 | 42,829 | 49,841 | 57,294 | 65,236 | 73,820 | 83,418 | 95,038 | |

**Решение:** Введем систему координат, как на рис.1.1. Рассмотрим движение снаряда, выпущенного из начала координат со скоростью $v_0$ под углом $\alpha$ к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Его координаты при таком движении зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t\cos\alpha$ и $y(t) = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2$ соответственно. Выразив $t$ из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение траектории:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

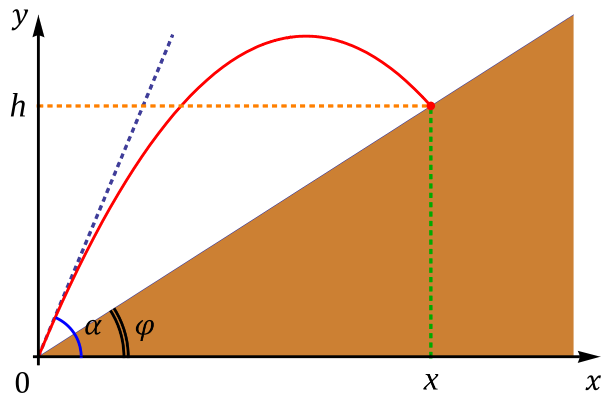


Рис. 1.1. Ось $Ox$ горизонтальна, ось $Oy$ вертикальна. Миномет расположен в начале координат.

Далее приведем два способа решения: точный численный и приближенный в общем виде.

1. *Точное решение.*

Пусть снаряд упал в точке $(x, y)$. Тогда эта пара точек удовлетворяет уравнению (1). Также, из теоремы Пифагора следует уравнение:

$$x^2 + y^2 = l^2 \tag{2}$$

Подставив $y$ из (1) в (2), получим:

$$x^2\left(1 + \left[\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right]^2\right) = l^2 \tag{3}$$

Получили уравнение четвертой степени, которое нереально трудно решить в общем виде. Поэтому оно было решено численно при помощи программы *Mathematica*[2]. Каждому значению $x$ найдено соответствующее значение координаты $y$ в соответствии с уравнением (2). По полученным данным была составлена таблица (ее элементы перечислены в порядке их предоставления в таблице из условия):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$, м | 0,052 | 0,120 | 0,211 | 0,331 | 0,482 | 0,670 | 0,898 | 1,172 | 1,494 | 1,864 |
| $h$, м | 0,71 | 1,62 | 2,84 | 4,44 | 6,46 | 8,96 | 11,99 | 15,60 | 19,82 | 24,68 |
| $x$, м | 2,282 | 2,745 | 3,246 | 3,783 | 4,353 | 4,962 | 5,620 | 6,360 | 7,265 | |
| $h$, м | 30,14 | 36,17 | 42,71 | 49,70 | 57,13 | 65,05 | 73,61 | 83,18 | 94,76 | |

За высоту горы примем высоту наивысшей точки, в которую попал снаряд: $H = 94{,}76$ м.

[1] Значения дальности полета округлили до 2-х знаков после запятой, а к значениям начальной скорости добавили 2 знака для того, чтобы сбалансировать их погрешности.

[2] Имеется в виду программа компании Wolfram Research, Inc., см. www.wolfram.com/mathematica

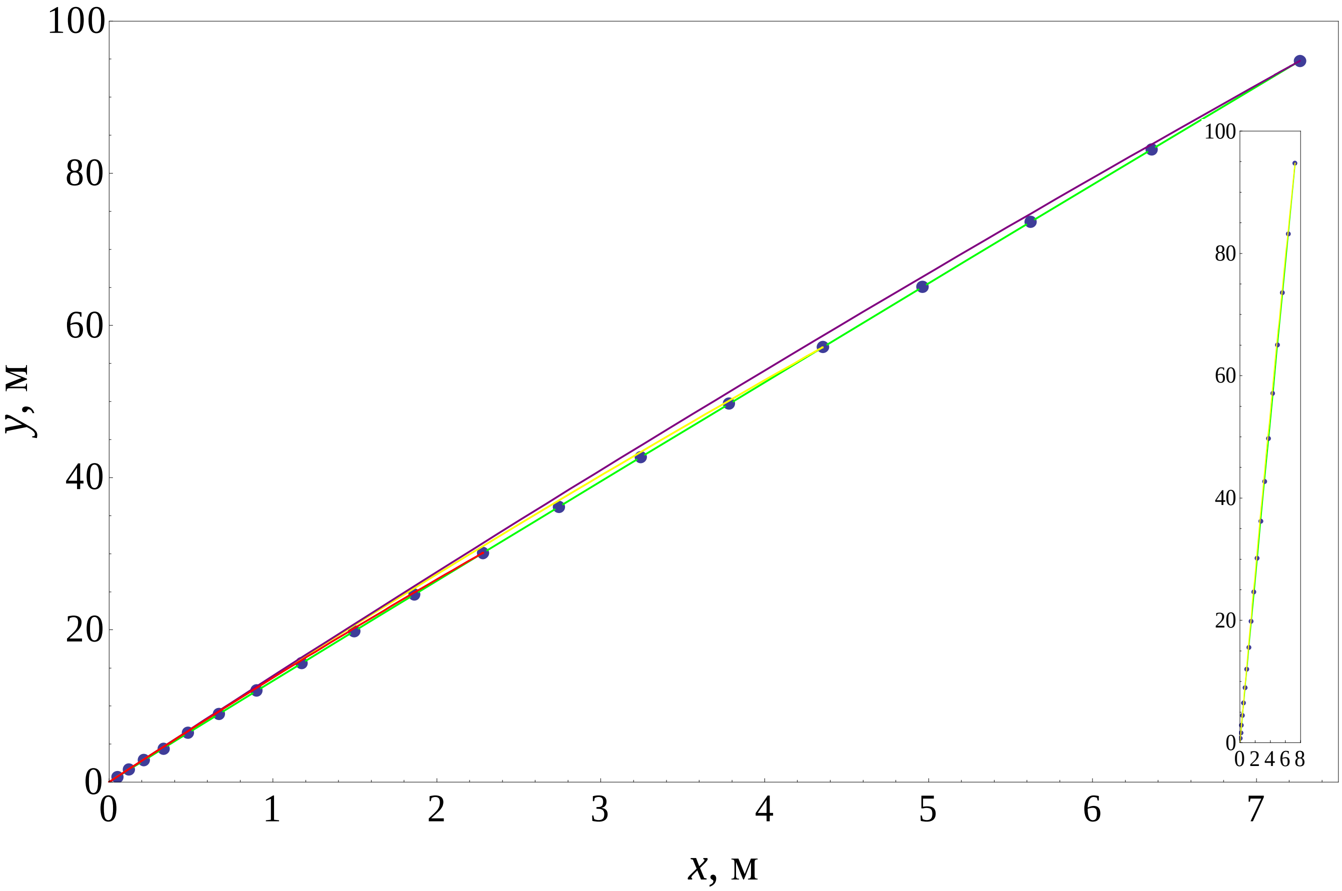


Рис. 1.2. График поверхности горы по точкам: хорошо прослеживается линейная зависимость. Зеленым изображена поверхность горы, другими цветами изображены траектории снарядов. Траектории кажутся настолько прижатыми к поверхности из-за малой разности угла наклона горы и угла, под которым производится выстрел. Справа приведен график в масштабе.

Найдем наклон этой горы и оценим его погрешность. Величины, данные в условии, определены с достаточно высокой точностью (порядка $10^{-4}$), их погрешностью мы пренебрегаем. Воспользуемся методом наименьших квадратов. Пусть уравнение поверхности горы имеет вид $y = kx$. Будем минимизировать сумму[3]

$$S = \sum (y_i - kx_i)^2,$$

где суммирование ведется по всем $i$ от 1 до $n = 19$ — количество измерений. Так как единственным параметром является $k$, то необходимо выполнение условия $dS/dk = 0$. Продифференцировав, получим:

$$\sum 2x_i (y_i - kx_i) = 0,$$

откуда

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}. \tag{4}$$

Погрешность оцениваем по формуле

$$\Delta k \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum (y_i - mx_i)^2}{\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum x_i^2 \sum y_i^2 - \left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2}}. \tag{5}$$

[3]Метод подробно описан в книге Squires, G.L. *Practical physics.* $4^{\text{th}}$ ed. Cambridge University Press, 2001, см. формулы (4.34) и (4.35)

По формулам (4) и (5) получаем $k = 13{,}10 \pm 0{,}01$. Как видим, погрешность наклона за счет неточности попадания на прямую намного больше погрешности измерения исходных величин. Угол наклона горы $\varphi = \operatorname{arctg} k = (85{,}636 \pm 0{,}004)^\circ$. Погрешность оцениваем по формуле

$$\Delta\varphi = \Delta k \frac{d\varphi}{dk} = \frac{\Delta k}{1 + k^2}.$$

Такое резкое уменьшение относительной погрешности связано с тем, что функция арктангенса растет очень медленно при аргументах, близких к $\pi/2$.

2. *Приближенное решение.*

Будем искать угол $\varphi$ наклона горы, считая ее форму наклонной плоскостью. Координаты точек падения снаряда $x = l\cos\varphi$ и $y = l\sin\varphi$. Подставим их в уравнение (1) и разделим обе его части на $x$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gl\cos\varphi}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

откуда, с использованием тождества $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$ получим

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{gl\cos^2\varphi}{2v_0^2\cos\alpha}. \tag{6}$$

Такое уравнение невозможно решить стандартными способами, его можно только привести к уравнению четвертой степени (см. первый способ).

Опираясь на результат первого решения, будем считать углы $\alpha$ и $\varphi$ близкими между собой и к $\pi/2$. А именно, применим приближения $\sin(\alpha - \varphi) \approx \alpha - \varphi$ и $\cos\varphi \approx \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Уравнение (6) примет вид

$$\alpha - \varphi = \frac{gl}{2v_0^2\cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2,$$

которое легко привести к виду

$$m\varphi^2 - \varphi\,(m\pi - 1) + \left(\frac{m\pi^2}{4} - \alpha\right), \quad m = \frac{gl}{2v_0^2\cos\alpha}.$$

Получили квадратное уравнение, корни которого

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(m\pi - 1 \pm \sqrt{(m\pi-1)^2 - m\pi^2 + 4\alpha}\right).$$

Во всех случаях искомый корень — с плюсом перед радикалом. В таблице представлены решения этого уравнения для всех случаев, представленных в условии, в порядке их перечисления.

| $\varphi$,° | 85,79 | 85,76 | 85,75 | 85,74 | 85,73 | 85,72 | 85,71 | 85,70 | 85,69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85,68 | 85,67 | 85,66 | 85,65 | 85,65 | 85,64 | 85,64 | 85,63 | 85,63 | 85,62 |

Наилучшая величина для угла наклона горы — среднее этих величин[4]: $\varphi = 85{,}69^\circ$. Считая величину $\alpha - \varphi$ порядка 5 градусов (как $\pi/2 - \alpha$), оценим погрешность такого приближения: $\Delta\varphi \approx (\pi/2 - \alpha)^2/2 \approx 0{,}1^\circ$. Как и в предыдущем случае, высота горы $H = l_{19}\sin\varphi_{19} = 94{,}76$ м. В ответе приведем значение, полученное точным способом.

**Ответ:** Высота $H = 94{,}76$ м, форма — наклонная линия, образующая угол $\varphi = (85{,}636 \pm 0{,}004)^\circ$ с горизонтом.

[4]На самом деле правильно усреднять не углы, а их тангенсы, как это было сделано в первом случае.