

Урок 12. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

- 1) При решении задач на арифметическую прогрессию часто бывает необходима формула для суммы первых членов прогрессии:

Теорема 12.1.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Доказательство: По условию, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$. Перепишем это соотношение в виде $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$. Складывая почленно эти равенства, получим, что

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Отсюда с учетом теоремы 11.2 сразу же получаем, что $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$. ■

Замечание. С этим методом доказательства мы познакомились еще в 5-м классе, когда находили сумму первых n натуральных чисел. Тогда мы называли его “методом Гаусса”.

2) Упражнения.

- (1) Первый член арифметической прогрессии равен 12, а разность равна -2 . Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равна -264 ?
- (2) Найдите сумму всех натуральных чисел, меньших 700, которые кратны 8.
- (3) Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии $\{4, 6; 4, 2; 3, 8; \dots\}$.
- (4) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_5 = 14$, $a_8 = 23$.
- (5) Тринадцатый член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых 25 ее членов.
- (6) В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна 25, а сумма членов с нечетными номерами равна 10. Найдите a_7 .
- (7) В арифметической прогрессии $S_n = S_m$ ($n \neq m$). Найдите S_{n+m} .
- (8) Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии в пять раз меньше суммы следующих восьми членов. Найдите отношение суммы первых восьми членов прогрессии к сумме ее первых четырех членов.

Домашнее задание

- 1) Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 9.
- 2) Чему равна сумма всех отрицательных членов арифметической прогрессии $\{-4, 7; -4, 3; -3, 9; \dots\}$?
- 3) Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 10, а сумма ее первых четырнадцати членов равна 1050.
- 4) Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_5 = -0,8$, $a_{11} = -5$.
- 5) Известно, что сумма первых девятнадцати членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 76. Найдите a_{10} .
- 6) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Известно, что $a_4 + a_8 + a_{19} + a_{23} = 30$. Найдите S_{26} .
- 7) В арифметической прогрессии сумма восьми первых членов равна 32, а сумма двадцати первых членов равна 200. Найдите S_{28} .
- 8) В нестационарной арифметической прогрессии сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найдите отношение суммы первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов.