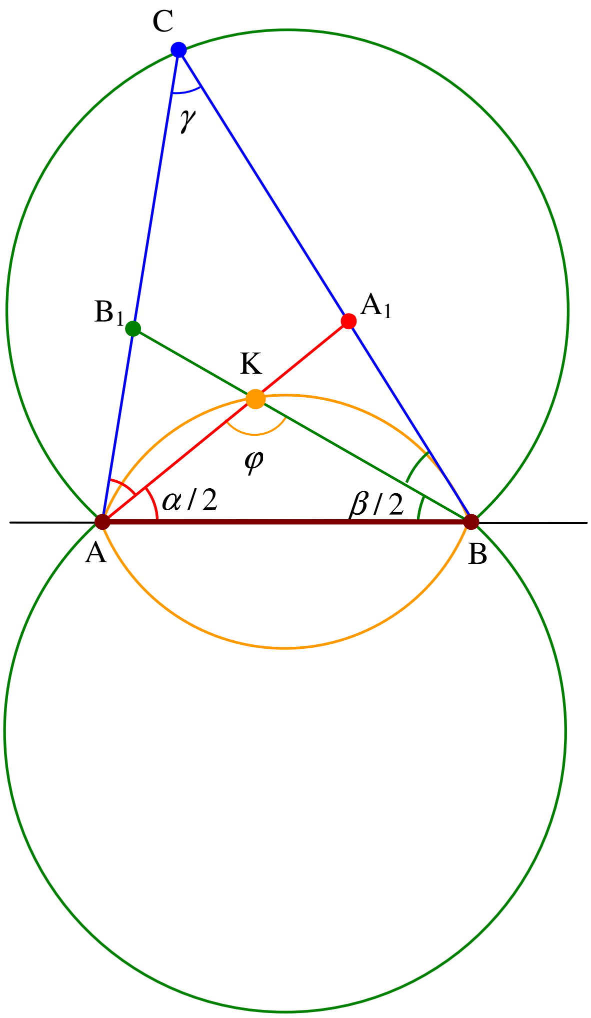
Реєстраційний номер	308799
Назва олімпіади	Всеукраїнська учнівська інтернет-олімпіада з математики
Прізвище, ім’я та по батькові учасника	Шумаєв Олександр Ігорович
Рік народження	1999
Область	Харківська
Місто	Харків
Повна назва навчального закладу	Харківський фізико-математичний ліцей № 27 Харківської області
Клас, до якого перейшов учень	9
Клас, за який виконується конкурсне завдання	9
Статус	учень
Електронна адреса учасника	sashashumaev@rambler.ru

Задача № 1

Условие: На одном основании построено множество треугольников с одинаковыми углами при вершине. Найти ГМТ центров окружностей, вписанных в данные треугольники.



Решение: Пусть γ – величина угла при вершине данных треугольников. ГМТ вершин данных треугольников – множество, состоящее из дуг двух окружностей, проходящих через концы данного основания, причем данное основание стягивает дугу, равную 2γ. Действительно, тогда углы при вершине данных треугольников вписаны в эти окружности и опираются на дугу, стягиваемую данным основанием, которая равна 2γ, тогда угол при вершине равен γ. На рисунке AB – данное основание; зеленые окружности – ГМТ вершин треугольников; C – произвольная вершина; AA_1, BB_1 – биссектрисы Δ ABC $(A_1 \in BC, B_1 \in AC)$; K – точка пересечения биссектрис ΔABC, которая одновременно является центром вписанной окружности. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle BAK = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABK = \frac{\beta}{2}$. Из Δ ABC по теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta = 180° - \gamma$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Аналогично из Δ ABK $\angle AKB = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2} = const$.

Тогда при перемещении точки C отрезок AB виден из любой точки K под постоянным углом. Значит, ГМТ центров вписанных окружностей есть множество, состоящее из дуг двух окружностей, проходящих через данное основание, причем их градусная мера равна $360° - 2\angle AKB = 180° - \gamma$ (как дуга, дополнительная к дуге, на которую опирается $\angle AKB$).

Ответ: Искомое ГМТ есть множество, состоящее из дуг двух окружностей, проходящих через данное основание, причем их градусная мера равна $180° - \gamma$, где γ – угол при вершине данных треугольников (на рисунке изображено оранжевым), за исключением точек A и B.

Задача № 2

<u>Условие</u>: При помощи циркуля и линейки построить треугольник ABC по медиане BD и радиусам окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и CBD.

<u>Решение</u>: 1. Анализ. Пусть искомый треугольник построен, рассмотрим его свойства. Рассмотрим 2 случая:

а) Центры описанных окружностей вокруг **Δ** ABD и **Δ** CBD лежат по разные стороны от точки M – середины отрезка BD.

б) Ц. о. о. лежат по одну сторону от точки M.

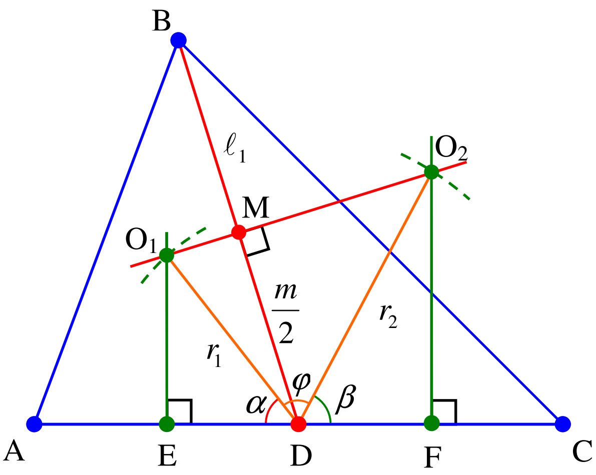


рис.1

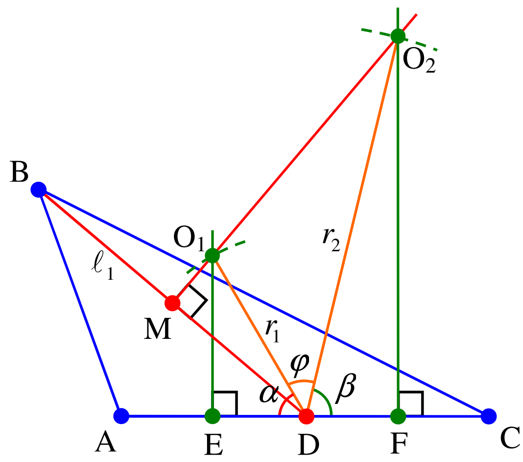


рис.2

а) Центр описанной вокруг треугольника окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. На рисунке E, F, M – середины отрезков AD, CD и BD соответственно; O_1, O_2 – центры описанных окружностей вокруг **Δ** ABD и **Δ** CBD соответственно (лежат на пересечениях серединных перпендикуляров O_1E и MO_1, O_2F и MO_2); r_1, r_2, m – отрезки, заданные по условию (радиусы окружностей и длина медианы соответственно). Без ограничения общности можем считать, что $r_2 \ge r_1$. Пусть $\angle ADO_1 = \alpha$, $\angle O_1DO_2 = \varphi$, тогда $\beta = \angle CDO_2 = 180° - \alpha - \varphi$. Тогда $DE = r_1 \cos\alpha$, $DF = r_2 \cos\beta$. Но $\beta = 180° - \alpha - \varphi$, тогда $\cos\beta = -(\cos\alpha\,\cos\varphi - \sin\alpha\,\sin\varphi)$. Так как $DE = DF = AC/4$, то

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin\varphi\,\sin\alpha - \cos\varphi\,\cos\alpha}{\cos\alpha} = \sin\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha - \cos\varphi,$$

откуда $tg\,\alpha = \dfrac{r_1 + r_2\cos\varphi}{r_1\sin\varphi}$. Аналогично $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{r_2 + r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi}$. $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{r_1^2 + r_1r_2\cos\varphi - r_2^2 - r_1r_2\cos\varphi}{r_1r_2\sin\varphi} < 0$, поскольку $r_1 < r_2$. Тогда $\beta > \alpha$. Выразим φ через известные величины из **Δ** O_1O_2D. Из теоремы Пифагора для **Δ** O_1DM и **Δ** O_2DM соответственно, $O_1M = \sqrt{r_1^2 - \dfrac{m^2}{4}}$; $O_2M = \sqrt{r_2^2 - \dfrac{m^2}{4}}$. По теореме косинусов для **Δ** O_1DO_2: $\left(\sqrt{r_1^2 - \dfrac{m^2}{4}} + \sqrt{r_2^2 - \dfrac{m^2}{4}}\right)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$, откуда

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \left(r_1^2 + r_2^2 - \dfrac{m^2}{2} + 2\sqrt{\left(r_1^2 - \dfrac{m^2}{4}\right)\left(r_2^2 - \dfrac{m^2}{4}\right)}\right)}{2r_1r_2} = \frac{m^2 - \sqrt{(4r_1^2 - m^2)(4r_2^2 - m^2)}}{4r_1r_2}.$$

Необходимое условие существования такого решения – $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ и $\mathrm{tg}\,\beta > 0$ (т.е.

$0 < \alpha, \beta < 90°$). Необходимое, потому что иначе не существует прямоугольных **Δ** O$_1$DE и **Δ** O$_2$DF. Учитывая, что $\sin\varphi > 0$, подставим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ в условия существования решения и отбросим знаменатель:

$$r_1 + r_2 \cos\varphi > 0;\; r_2 + r_1 \cos\varphi > 0.$$

Поскольку $r_1 < r_2$ (см. выше), а $\cos\varphi > -1$; то второе условие выполняется всегда. Отбросим его и подставим полученное значение $\cos\varphi$ в первое:

$$r_1 + \frac{m^2 - \sqrt{(4r_1^2 - m^2)(4r_2^2 - m^2)}}{4r_1} > 0,$$

что равносильно

$$4r_1^2 + m^2 > \sqrt{(4r_1^2 - m^2)(4r_2^2 - m^2)}.$$

Поскольку все слагаемые этого неравенства неотрицательные, можно возвести его обе стороны в квадрат. Возведя в квадрат и упростив, получим:

$$4r_1^4 + 2r_1^2 m^2 + (r_1^2 + r_2^2)m^2 > 4r_1^2 r_2^2. \quad (1)$$

Это условие существования решения.

б) В данном случае, как и в предыдущем, остаются справедливы формулы $tg\,\alpha = \dfrac{r_1 + r_2\cos\varphi}{r_1 \sin\varphi}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{r_2 + r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi}$, и условие $r_1 + r_2\cos\varphi > 0$ (см. рис. 2, все обозначения на рисунке и в тексте из предыдущего случая). Но несколько иначе выглядит теорема косинусов для **Δ** O$_1$DO$_2$:

$$\left(\sqrt{r_1^2 - \frac{m^2}{4}} - \sqrt{r_2^2 - \frac{m^2}{4}}\right)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\varphi,$$

что дает

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \left(r_1^2 + r_2^2 - \dfrac{m^2}{2} - 2\sqrt{\left(r_1^2 - \dfrac{m^2}{4}\right)\left(r_2^2 - \dfrac{m^2}{4}\right)}\right)}{2r_1 r_2} = \frac{m^2 + \sqrt{(4r_1^2 - m^2)(4r_2^2 - m^2)}}{4r_1 r_2} > 0.$$

Тогда условие $r_1 + r_2\cos\varphi > 0$ выполняется всегда. Кроме того, очевидно, в обоих случаях должны выполняться неравенства $r_1 \ge \dfrac{m}{2}$, $r_2 > \dfrac{m}{2}$.

При решении задачи неважно, находятся ли точки O$_1$ и O$_2$ по одну сторону от прямой AC. В противном случае выполнялось бы равенство $\varphi + \beta - \alpha = 180°$, где α – угол, направленный в полуплоскость, дополнительную к той, в которой лежит **Δ** ABC (на рисунке точка O$_1$ перемещается ниже прямой AC). Однако остается верным равенство $\cos\beta = -(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)$, а, значит, и выражения $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{r_1 + r_2\cos\varphi}{r_2\sin\varphi}$ и условие (1) верны и в таком случае.

2. Построение.

1) Проводим прямую ℓ_1, отмечаем на ней точку M, восстанавливаем перпендикуляр к прямой в этой точке.

2) Откладываем на прямой отрезок $\mathrm{DM} = m/2$.

3) Проводим окружности радиусов r_1 и r_2 с центрами в точке D, отмечаем точки пересечения окружностей с перпендикуляром к прямой ℓ_1. Для случая а) в анализе выбираем произвольно пару данных точек по разные стороны от точки M,

принадлежащих разным окружностям, это точки O_1 и O_2 соответственно. Для случая б) выбираем пару точек, лежащих по одну сторону от точки M.

4) Построение угла $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{r_2 + r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi}$. Рассмотрим 2 случая:

а) $\varphi \le 90°$;

б) $\varphi > 90°$.

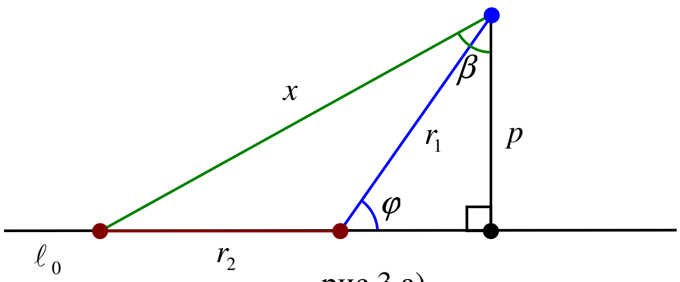


рис.3 а)

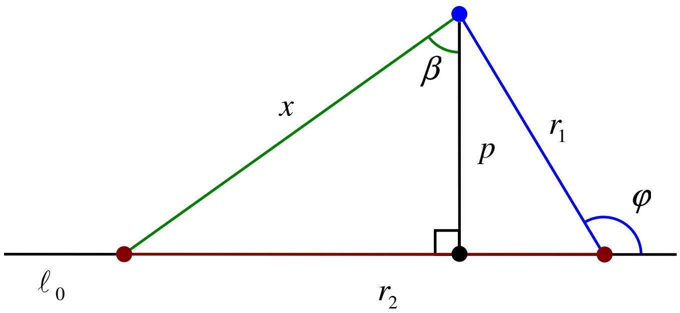


рис.3 б)

а) Строим прямую ℓ_0, откладываем на ней отрезок r_2, откладываем угол φ от прямой с вершиной в одном из концов отрезка (см. рис. 3 а)). На стороне угла, не лежащей на прямой ℓ_0, откладываем отрезок r_1 от вершины. Опускаем перпендикуляр из второго конца построенного отрезка на прямую ℓ_0. Тогда длина перпендикуляра $p = r_1\sin\varphi$, длина проекции отрезка r_1 на прямую ℓ_0 равна $r_1\cos\varphi$. Тогда тангенс угла между отрезками x и p равен $\dfrac{r_2 + r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi}$ (см. рис 3 а)).

б) Как и в предыдущем случае, строим прямую ℓ_0, откладываем на ней отрезок r_2, и угол φ с вершиной в одном из концов отрезка (см. рис.3 б)). Откладываем на второй стороне угла отрезок r_1 с одним из концов в его вершине и опускаем перпендикуляр из второго конца отрезка на прямую ℓ_0. Длина перпендикуляра $p = r_1\sin(180° - \varphi) = r_1\sin\varphi$, длина проекции отрезка r_1 на прямую ℓ_0 равна $r_1\cos(180° - \varphi) = -r_1\cos\varphi$. Тогда тангенс угла между отрезками x и p равен $\dfrac{r_2 - r_1\cos(180° - \varphi)}{r_1\sin\varphi} = \dfrac{r_2 + r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi}$ (см. рис 3 б)).

5) Возвращаемся к исходному чертежу и откладываем угол β от отрезка O_2D в полуплоскость, дополнительную к той, в которой лежит отрезок O_1D. Опускаем перпендикуляры O_1E и O_2F из точек O_1 и O_2 соответственно на построенную прямую. Откладываем на этой прямой отрезки AE = CF = DE: отрезок AE с концом в точке E в противоположную сторону от отрезка DE; отрезок CF с концом в точке F в противоположную сторону от отрезка DF. Продлеваем отрезок DM до точки B такой, что BM = DM. Соединяем точки A, B, C и получаем искомый треугольник.

3. Доказательство. Треугольник построен по своим свойствам, которые описаны в анализе, поэтому в дополнительном доказательстве нет необходимости.

4. Исследование. Эта задача имеет решения при истинности неравенств $r_1 \ge \dfrac{m}{2}$, $r_2 > \dfrac{m}{2}$: два решения при выполнении условия (1) или одно при его невыполнении. Если же хотя бы одно из данных неравенств ложно, то задача не имеет решений. Все построения выполнялись однозначно, симметричные построения (например, выбор другой пары точек в построении в)) приводят к треугольнику, равному данному.

Задача № 3

<u>Условие</u>: Показать, что каждое простое число, большее 3, имеет вид $6n+1$ или $6n-1$, $n \in N$.

<u>Решение</u>: Рассмотрим возможные остатки при делении произвольного простого числа, большего 3, на 6. Простое число не может иметь остатки 0, 2, 4, т.к. тогда оно делится на 2 (числа вида $6n$, $6n+2$, $6n+4$ четные). Аналогично оно не может иметь остаток 3, т.к. число вида $6n+3$ делится на 3. Остаются остатки 1 и 5 (или, что то же самое, 1 и –1). Тогда это простое число можно представить в виде $6n+1$ или $6n+5$ (или, что то же самое, $6n-1$), что и требовалось показать. Очевидно, что существуют простые числа, дающие при делении на 6 и остаток 1, и остаток 5. Например, простое число 7 дает остаток 1, а число 11 – остаток 5.

Задача № 4

Условие: Показать, что если уравнения с целыми коэффициентами $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

Решение: Докажем это утверждение для случая общего иррационального корня. Пусть x_0 – общий иррациональный корень уравнений $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$. Тогда $x_0^2 + p_1 x_0 + q_1 = 0$, $x_0^2 + p_2 x_0 + q_2 = 0$. Вычтем из первого равенства второе:

$$(p_1 - p_2) x_0 + (q_1 - q_2) = 0; \ (1)$$

В этом равенстве числа $p_1 - p_2$ и $q_1 - q_2$ целые, а число x_0 иррациональное. Если $p_1 \neq p_2$, то тогда и число $(p_1 - p_2) x_0$ также иррациональное. Получаем, что сумма рационального и иррационального чисел равна нулю, что невозможно (перенесем $q_1 - q_2$ в правую часть и получаем: $(p_1 - p_2) x_0 = q_2 - q_1$, т.е. иррациональное число равно рациональному). Полученное противоречие показывает, что $p_1 = p_2$. Тогда $p_1 - p_2 = 0$. Подставив это в равенство (1), получим $q_1 - q_2 = 0$, или $q_1 = q_2$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай общего рационального, но нецелого корня. Пусть x_0 – общий рациональный корень данных уравнений. Он определяется по формуле $x_0 = \dfrac{-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - 4p_1}}{2}$ (выбирается один из знаков + или –). Но, по предположению, x_0 рациональное, тогда одно из выражений $-q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4p}$ и $-q_1 - \sqrt{q_1^2 - 4p}$ является рациональным. Чтобы это выполнялось, необходимо, чтобы выражение под знаком радикала являлось квадратом рационального числа. Но это выражение целое, т.к. состоит из целых по условию слагаемых q_1^2 и $-4p$. Тогда оно является квадратом целого числа, а сам радикал – целым числом. Значит, число x_0 является полуцелым (нецелое рациональное число называется полуцелым, если при умножении на 2 оно становится целым), так оно нецелое по условию. Обозначим второй корень уравнения $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ как x_1 (возможно, $x_0 = x_1$, но такой корень всегда существует, поскольку существует первый и дискриминант неотрицателен). По теореме Виета, $x_0 + x_1 = -p_1$; $x_0 x_1 = q_1$. Поскольку x_0 полуцелое, а $-p_1$ целое, то тогда и x_1 полуцелое. Тогда число $x_0 x_1 = q_1$ не может быть целым (чтобы оно стало целым, необходимо умножить его на 4), но по условию оно является целым. Получили противоречие. Значит, общий нецелый корень данных уравнений не может быть рациональным. Случай же общего иррационального корня доказан выше. Доказано.

Задача № 5

<u>Условие</u>: Задано систему уравнений

$$*x + *y + *z = 0$$

$$*x + *y + *z = 0$$

$$*x + *y + *z = 0$$

Два ученика по очереди вписывают вместо * числа. Доказать, что тот, кто начинает, всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

<u>Решение</u>: По условию, задана система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0; \end{cases}$ где a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) – коэффициенты, определяемые каждым ходом игроков. Заметим, что если во всех уравнениях коэффициенты при одной переменной равны нулю (например, если $b_1 = b_2 = b_3 = 0$), то система всегда имеет ненулевое решение (для данного примера (0, 1, 0)). Также, если одно из уравнений вырождено, т.е. имеет вид $0x + 0y + 0z = 0$, то система имеет ненулевые решения (см. ниже).

Пусть игра закончена, и все коэффициенты определены. Решим систему уравнений в общем виде. Хотя бы один из коэффициентов при одной переменной не равен нулю, иначе система имеет ненулевые решения (см. выше). Без ограничения общности можем считать, что это c_1. Выразим z из первого уравнения:

$$z = -\frac{a_1x + b_1y}{c_1}$$

и подставим в остальные:

$$\begin{cases} a_2x + b_2y - \dfrac{c_2}{c_1}(a_1x + b_1y) = 0, \\ a_3x + b_3y - \dfrac{c_3}{c_1}(a_1x + b_1y) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $c_1 \neq 0$, преобразуем уравнения и умножим на c_1:

$$\begin{cases} x(a_2c_1 - a_1c_2) + y(b_2c_1 - b_1c_2) = 0, \\ x(a_3c_1 - a_1c_3) + y(b_3c_1 - b_1c_3) = 0. \end{cases}$$

Чтобы данная система имела ненулевые решения, достаточно, чтобы либо в обоих уравнениях коэффициенты при одной переменной были равны нулю, либо в одном уравнении оба коэффициента были равны нулю. Если в обоих уравнениях коэффициенты при одной переменной равны нулю (например, при x), то система имеет решение вида $\begin{cases} x \in R, \\ y = 0; \end{cases}$. Если же в одном уравнении оба коэффициента нулевые (например, в первом уравнении), а в другом – ненулевые, то система имеет решение $\begin{cases} x = b_3c_1 - b_1c_3, \\ y = a_1c_3 - a_3c_1; \end{cases}$. Отсюда видно, что если одно из исходных уравнений вырождено, то также вырождено одно из полученных уравнений (например, если $a_2 = b_2 = c_2$, то $a_2c_1 - a_1c_2 = 0$ и $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$).

То есть в числовой таблице вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ первому игроку достаточно заполнить один ряд (строку или столбец) нулями. Рассмотрим процесс игры. Первым ходом первый приравнивает $a_1 = 0$. Второй присваивает какому-либо коэффициенту ненулевое значение, потому что противоположное ему невыгодно. При этом возможны три принципиально разных случая выбора коэффициента вторым игроком:
а) выбранный коэффициент находится в первой строке;
б) то же для первого столбца;
в) выбран коэффициент, не лежащий ни в первой строке, ни в первом столбце.

а) Без ограничения общности можем считать, что вторым игроком выбран коэффициент c_1. Следующим ходом первый приравнивает нулю коэффициент a_2. Второй вынужден присвоить коэффициенту a_3 ненулевое значение, иначе следующим ходом первый заполнит первый столбец таблицы нулями. Затем первый приравнивает нулю коэффициент b_2. Опять второй вынужден присвоить коэффициенту c_2 ненулевое значение, иначе вторая строка будет заполнена нулями. Четвертым ходом первый приравнивает нулю коэффициент b_1. Второй вынужден присвоить коэффициенту b_3 ненулевое значение, иначе второй столбец будет заполнен нулями. Последним ходом первый приравнивает нулю последний оставшийся коэффициент c_3. Рассмотрим систему, которая получилась в результате игры (все оставшиеся коэффициенты ненулевые):

$$\begin{cases} c_1 z = 0, \\ c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет ненулевые решения, например, $\begin{cases} x = b_3, \\ y = -a_3, \\ z = 0. \end{cases}$

б) Без ограничения общности можем считать, что вторым игроком выбран коэффициент a_3. Следующим ходом первый приравнивает нулю коэффициент b_1. Второй вынужден присвоить коэффициенту c_1 ненулевое значение, иначе следующим ходом первый заполнит первый столбец таблицы нулями. Тогда первый приравнивает нулю коэффициент b_2, на что второй вынужден присвоить коэффициенту c_2 ненулевое значение. Четвертым ходом первый приравнивает нулю коэффициент b_1. Второй вынужден присвоить коэффициенту b_3 ненулевое значение. Последним ходом первый приравнивает нулю коэффициент c_3. Получаем систему уравнений, идентичную системе, полученной в случае а).
в) Без ограничения общности можем считать, что вторым игроком выбран коэффициент c_2. Тогда, как и в случае а), первый приравнивает нулю коэффициент b_1. Тогда второй вынужден присвоить коэффициенту c_1 ненулевое значение. Третьим ходом первый приравнивает нулю коэффициент a_2, на что второй вынужден ответить присваиванием коэффициенту a_3 ненулевого значения. Четвертым ходом первый приравнивает коэффициент b_2 нулю, вынуждая второго присвоить коэффициенту c_2 ненулевое

значение. Последним ходом первый приравнивает нулю коэффициент c_3. Получили систему $\begin{cases} c_1 z = 0, \\ c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y = 0. \end{cases}$, идентичную системе, полученной в случае а).

Доказано.