10 клас
Задача 1
Вам необхідна пружина жорсткістю 300 Н/м, але у вашому розпорядженні є тільки пружини жорсткістю 500 Н/м і легкі дротяні стержні (див. рис.), які можна використовувати для з'єднання цих пружин. Запропонуйте спосіб отримання необхідної жорсткості, використовуючи мінімальну кількість пружин. Стержні можна розрізати і робити на них петельки для з'єднання. Псувати пружини забороняється. Наведіть розрахунки і зробіть акуратний рисунок конструкції.

<u>Розв'язок.</u>
При послідовному з'єднанні пружин додаються обернені величини $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+...$ (1) ,
а при паралельному – самі жорсткості $k=k_1+k_2+k_3+...$ (2)
Отже $\frac{k}{k_0}=\frac{3}{5}$ або $k=\frac{3k_0}{5}=3\cdot\frac{k_0}{5}=300\frac{H}{м}$.

З останнього рівняння знаходимо, що необхідно взяти 7 пружин і скласти схему (рис.1). На рисунку AB і CN є стержні. Причому OA=OB=CD=DN.

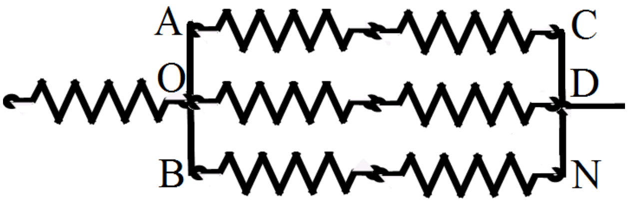


Рис.1

Зрозуміло, що жорсткість системи, яка подана на рис. 2, також дорівнює *k*.

Це дійсно буде так, якщо $\frac{MC}{DM}=\frac{PO}{TP}=\frac{l_2}{l_1}=2$ (3)

Дану умову отримують, розглянувши рівновагу, наприклад, стержня ТО. Плечі сил , які діють на нього, будемо знаходити відносно точки Р. Крім того, положення точок М і Р на стержнях CD та OT повинно бути таким, щоб видовження частин системи DT і CO при її деформації були однаковими. Нехай це видовження дорівнює *x*. Тоді $k_0xl_1=\frac{k_0}{2}xl_2$ Звідси відразу витікає умова (3), тобто $l_2=2l_1$. На основі рис 2. видно, що потрібну систему можна створити на основі чотирьох пружин.

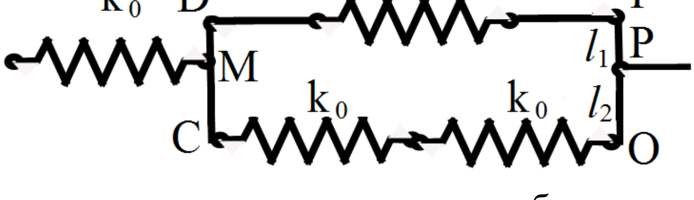


Рис.2

Загалом можна запропонувати систему, яка буде складатися з двох пружин (рис. 3), причому вона буде мати жорсткість $k=300\frac{H}{м}$. На цьому рисунку CD і NP – стержні однакової довжини. M, A, D, P – точки приєднання до стержнів;

CM=NA=l_1; CD=NP=l_2. Якщо тепер до точок C і N прикласти однакові за величиною сили *F*, які будуть діяти у протилежних напрямках, то буде здійснюватися деформація цієї системи. Причому пружина MA буде видовжуватися, а пружина DP – стискатися. Напрямки дії цих сил будемо вважати перпендикулярними до стержнів. Величина *F* така, що деформацію системи можна вважати малою.

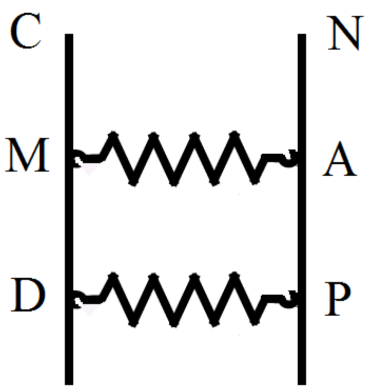


Рис. 3.

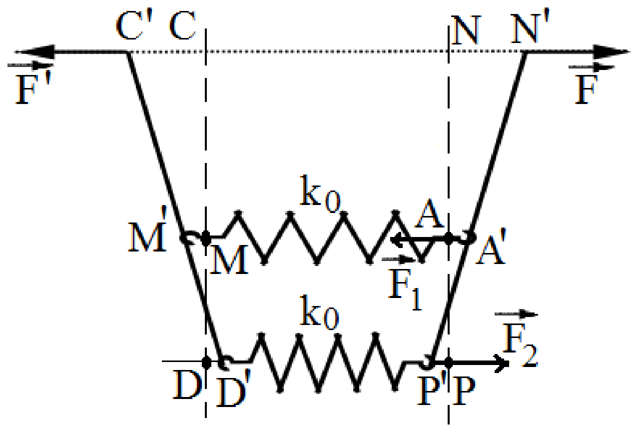


Рис.4.

На рис 4 зображена ця система у деформованому стані . Тут C’, N’, M’, A’, D’, P’ положення точок C, N, M, A, D, P. Нехай NN’=x. Значення 2x має сенс величини деформації нашої системи: $|\vec{F'}| = |\vec{F}| = F = 2kx$ Тут к – потрібна жорсткість системи.

Будемо вважати, що AA’=x_1; P’P=x_2

Розглянувши умови рівноваги стержня N’P’ запишемо систему рівнянь:

$$2kx + 2k_o x_2 = 2k_o x_1 \quad (4)$$

$$2k_0 l_1 x_1 = 2k_0 x_2 l_2, \quad (5)$$

$$2kxl_1 = 2k_0(l_2 - l_1)x_2, \quad (6)$$

$$\frac{x_2 + x}{l_2} = \frac{x_2 + x_1}{l_2 - l_1} \quad (7)$$

Рівняня (7) одержано з геометричних міркувань . Рівність (4) записана на основі того, що сили F і F_2 повинні бути урівноважені силою F_1. Формула (5) отримана виходячи з того, що плечі сил F_1 і F_2 розраховуються відносно точки N’. У випадку рівняння (6) плечі сил F і F_2 знаходимо відносно точки A’.

Якщо розвязати систему рівнянь (4)-(7) то одержимо:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}, \quad (8)$$

Тут $n = \frac{l_2}{l_1}$. У нас $\frac{k}{k_0} = \frac{3}{5}$, тому

$n = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ (9)

Система, яку ми розглянули має тільки дві пружини. Вона має сенс, коли довжина стержнів менша половини довжини пружини.

При відповідній довжині стержнів можна зробити систему, яка буде мати потрібну жорсткість і складатися тільки з однієї пружини. Приклад такої системи показано на рисунку 5.

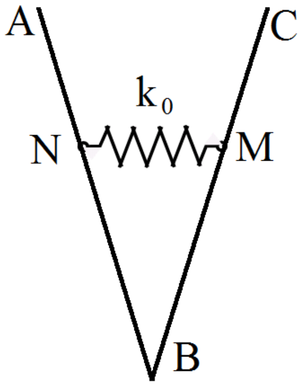
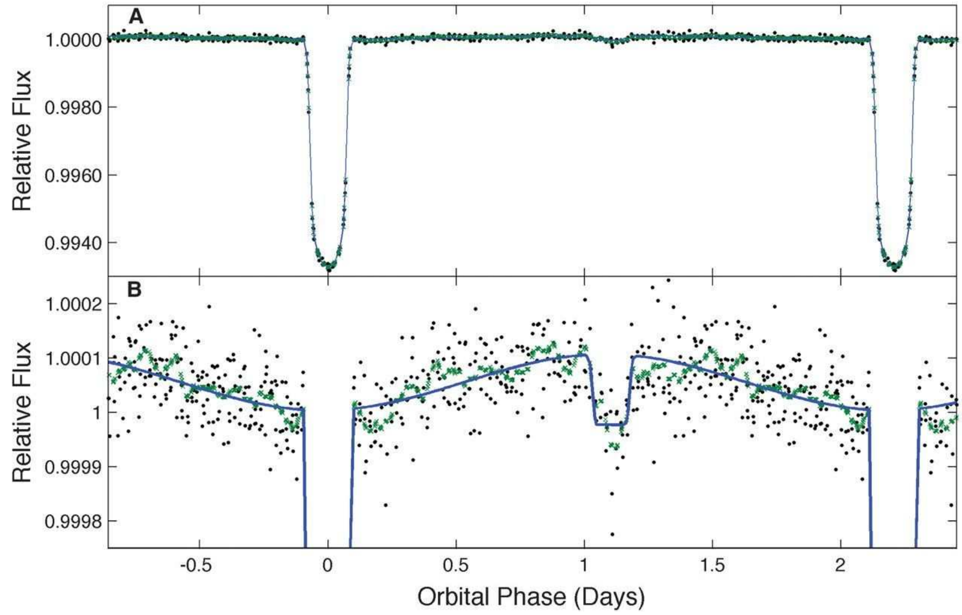


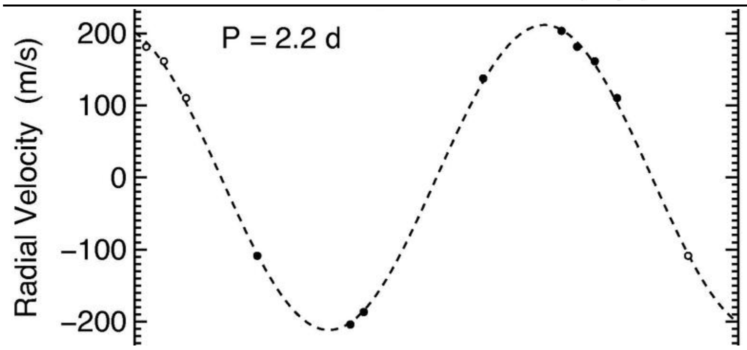
Рис. 5

На ньому AB і CB – стержні, які в точці B з'єзднані шарнірно. В точках N і M пружина приєднана до стержнів. Якщо до точок A і C прикласти однакові за величиною сили, які діють у протилежних напрямках, то система перейде у деформований стан. Будемо вважати, що ці сили діють паралельно пружині. Тоді, розглянувши рівновагу, наприклад, стержня BC, знаходимо, що потрібна жорсткість **к** системи буде досягнута при $\frac{CB}{MB} = \sqrt{\frac{k_o}{k}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$. (10)

Задача 2.

Космічний телескоп Кеплер був запущений з метою пошуку транзитних планет (які під час свого орбітального руху періодично проходять по диску зорі, зменшуючи світловий потік від неї). Світловий потік від однієї із зір змінювався з періодом у 2,2 доби, що дало змогу зробити висновок про існування близько розташованої планети і «побачити» не тільки затемнення зорі планетою, але й планети зорею. На рис.1 наведена залежність відносного світлового потоку від часу у двох масштабах. Додаткові спостереження дозволили знайти прискорення вільного падіння g=120 м/с^2 на поверхні зорі та залежність її радіальної швидкості (проекція вектора швидкості зорі на напрям до спостерігача) від часу (див. рис.). Користуючись цими даними, оцініть відстань між зорею та планетою, а також їхні маси і радіуси.

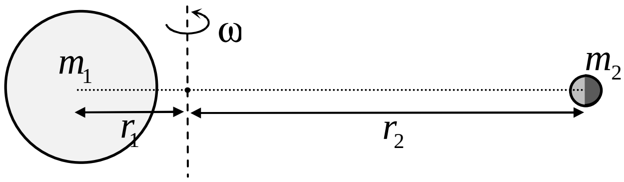




<u>Розв'язок.</u>

Розглянемо по черзі всі надані експериментальні данні.

По-перше, зазначимо, що рівні інтервали часу між затемненнями зорі планетою і планети зорею, як і однакова тривалість самих затемнень вказують на те, що орбіти є круговими. Про це ж свідчить і крива радіальної швидкості зорі. З цього ж графіку можна визначити максимальну швидкість руху зорі – вона приблизно дорівнює $v_{max} = 210$ м/с. Зрозуміло, що це швидкість обертання її навколо загального із планетою центра мас. Як вказано на малюнку



Зоря і планета рухаються навколо спільного центру мас по круговим орбітам з кутовою швидкістю $\omega = 2\pi/T$, де T = 2,2 доби = $1{,}9\cdot10^5$ с. Отже

$$\begin{cases} m_1\omega^2 r_1 = \dfrac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \\ m_2\omega^2 r_2 = \dfrac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \end{cases} \qquad (1)$$

тут і далі індекс $_1$ відповідає зорі, а індекс $_2$ – планеті. Отже, якщо площина орбіти утворює кут α з напрямком на спостерігача, швидкість руху центру мас зорі $v_1 = v_{\max}/\cos\alpha \approx v_{\max}$. З іншого боку

$$v_1 = \omega r_1. \qquad (2)$$

Також ми знаємо прискорення вільного падіння на поверхні зорі g = 120 м/с^2, яке дає ще одну формулу:

$$g_1 = \frac{Gm_1}{R_1^2}. \qquad (3)$$

Таким чином, ми маємо систему з чотирьох рівнянь (1), (2), (3) з п'ятьма невідомими m_1, m_2, r_1, r_2, R_1. Додаткову інформацію можна отримаємо з аналізу першого рисунку. З нього можна визначити час ΔT проходження планетою диску зорі. Також можна порівняти величини світлових потоків у різних фазах руху планети, наприклад, при знаходженні планети за та перед зорею. $\Phi_1 = \Phi_0\left(1 - R_2^2/R_1^2\right)$, звідки знаходимо $\dfrac{R_1}{R_2} \approx \sqrt{\dfrac{\Phi_0}{\Phi_0 - \Phi_1}} \approx 12$. Ми отримали, що радіус планети у 12 разів менший за радіус зорі. Таким чином, у рамках спрощеної моделі (кут нахилу площини орбіти до спостерігача $\alpha \approx 0$) і без врахування можливої реєстрації Кеплером теплового випромінювання планети: $m_1 \approx 2\cdot10^{30}$ кг, $m_2 \approx 3\cdot10^{27}$ кг, $R_1 \approx 10^9$ м, $R_2 \approx 8\cdot10^7$ м, $r \approx 5\cdot10^9$ м, $r_1 \approx 6\cdot10^6$ м.

Як бачимо $r_1 << r$ і навіть $r_1 << R_1$, центр мас системи лежить всередині зірки. Зірка має масу близьку до сонячної, а планета – дещо масивніша за Юпітер.

Задача 3

З мосту над річкою горизонтально кидають кульку у напрямку проти течії. Початкова висота кульки над рівнем води 5 м, початкова швидкість 10 м/с. Знайдіть швидкість кульки, в момент коли вона буде рухатись вертикально. Опором повітря знехтуйте. Вважайте, що швидкість річки усюди однакова і дорівнює 2 м/с. Густина матеріалу кульки дорівнює густині води, g=10 м/с^2.

<u>Розв'язок.</u>

Оскільки опором повітря нехтуємо, рухатись вертикально вниз кулька зможе тільки під водою. Розглянемо спочатку перший етап руху кульки – рух у повітрі. Горизонтальна складова швидкості $v_x = v_0$ не змінюється, вертикальна $v_y = gt$ зростає.

Швидкість кульки перед входом у воду

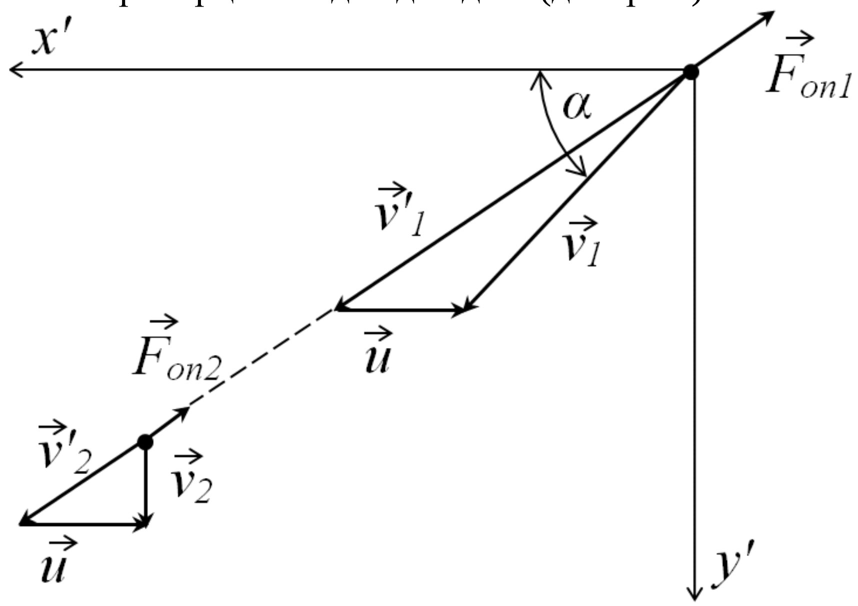
$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

утворюючи з горизонтом кут α, для якого

$$cos\,\alpha = \frac{v_x}{v_1} = \frac{v_0}{v_1}; \quad sin\,\alpha = \frac{\sqrt{2gh}}{v}.$$

Після входження кульки у воду, на неї діє крім сили тяжіння, ще сила Архімеда та сила опору води, але оскільки густина кульки дорівнює густині води, сила

Архімеда та сила тяжіння компенсують одна одну. Таким чином кулька буде рухатись у воді лише під дією сили опору $\vec{F}_{on}$, яка в системі відліку зв'язаної з водою завжди направлена у бік протилежний до швидкості кульки $\vec{v}'$.
Таким чином у цій системі відліку при будь-якій залежності сили опору від швидкості кульки, вона буде рухатись прямолінійно зменшуючи швидкість доти поки не зупиниться, або досягне дна річки. Причому компоненти швидкості будуть змінюватися пропорційно одна до одної (див. рис.).



Тобто:

$$\frac{v_y'}{v_x'} = const$$
.

В момент коли у системі зв'язаної з берегом кулька буде рухатись вертикально, її швидкість:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{u}$$

де $\vec{v}'_2$ - швидкість кульки відносно води і $\vec{u}$ - швидкість води.
З рисунку видно, що

$$v_2 = v_{2y} = v'_{2y};$$

$$v'_{2x} = u;$$

$$v'_{1y} = v_{1y} = v_1 \sin\alpha;$$

$$v'_{1x} = v_{1x} + u.$$

Отже:

$$\frac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = \frac{v_{2y}'}{v_{2x}'}.$$

Звідки

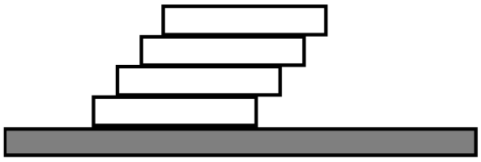
$$v_2 = \frac{v_{2x}'}{v_{1x}'} v_{1y}'.$$

Або

$$v_2 = \frac{u}{v_1 \cos\alpha + u} v_1 \sin\alpha = \frac{u\sqrt{2gh}}{v_0 + u} = \frac{2\sqrt{2\cdot 10\cdot 5}}{10+2} = \frac{5}{3}\left(\frac{м}{с}\right).$$

Задача 4

Однорідний брусок довжини L лежить на гладенькій горизонтальній поверхні (див.рис.). На нього кладуть такі самі бруски так, що їхні бічні грані утворюють одну площину, а торець кожного наступного бруска зсувається щодо попереднього на величину L/a (a – ціле число). З якої максимальної кількості брусків може складатися така конструкція?



Розв'язок

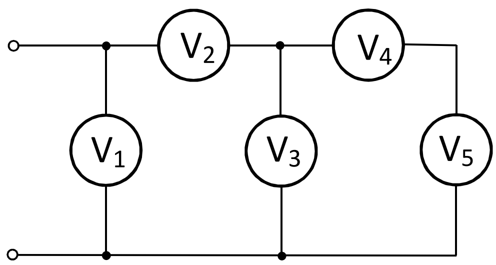
Спрямуємо вісь x вправо і оберемо початок відліку так, щоб координата центра мас нижнього (першого) бруска $x_1 = 0$. Тоді $x_2 = L/a$, $x_3 = 2L/a$, … , $x_n = (n-1)L/a$. А координата центра мас «надбудови» над першим бруском (з другого по n-й брусок) $(x_2 + x_n)/2 = nL/2a$. Для рівноваги вона має бути не більше за координату правого торця нижнього бруска, тобто $nL/2a \le L/2$. Отже, $n_{max} = a$.

Задача 5

З п'яти однакових вольтметрів зібране коло. Покази вольтметрів: U_1=5 В, U_2=4 В, U_3=2В, U_4=1 В, U_5=1 В. В одного з вольтметрів зігнута стрілка, і його покази неправильні. Який з вольтметрів несправний? Чому дорівнює напруга на цьому вольтметрі?

Розв'язок

З п'яти однакових вольтметрів зібране електричне коло, показане на рисунку. Покази вольтметрів становлять: U_1=5 В, U_2=4 В, U_3=2 В, U_4=1 В, U_5=1 В. Відомо, що в одного з вольтметрів зігнута стрілка і його покази неправильні. Вказати, який з вольтметрів несправний. Чому дорівнює справжня напруга на цьому вольтметрі?



Розв'язок

Позначимо внутрішній опір кожного вольтметра через R. Тоді загальний опір вольтметрів V_4 та V_5 становитиме $R_{23}=2R$, загальний опір вольтметрів V_3 – V_5 становитиме $R_{345} = \frac{2}{3}R$, загальний опір вольтметрів V_2 – V_5 дорівнюватиме $R_{2345} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$.

Якщо підключити коло до джерела напруги U_0, сила струму через вольтметр V_2 становитиме $I_2 = \frac{U_0}{R_{2345}} = \frac{3U_0}{5R}$, а напруга на ньому $U_2 = \frac{3}{5}U_0$.

Напруга на третьому вольтметрі $U_3 = U_0 - U_2 = \frac{2}{5}U_0$, на четвертому на п'ятому вольтметрах становитиме половину від напруги на третьому вольтметрі: $U_4 = U_5 = \frac{1}{5}U_0$.

Таким чином, напруги на вольтметрах V_1 – V_5 відносяться як 5 : 3 : 2 : 1 : 1. Між тим за умовою задачі їх покази відносяться як 5 : 4 : 2 : 1 : 1. Отже, несправним є вольтметр V_2, справжня напруга на ньому становить 3 В.