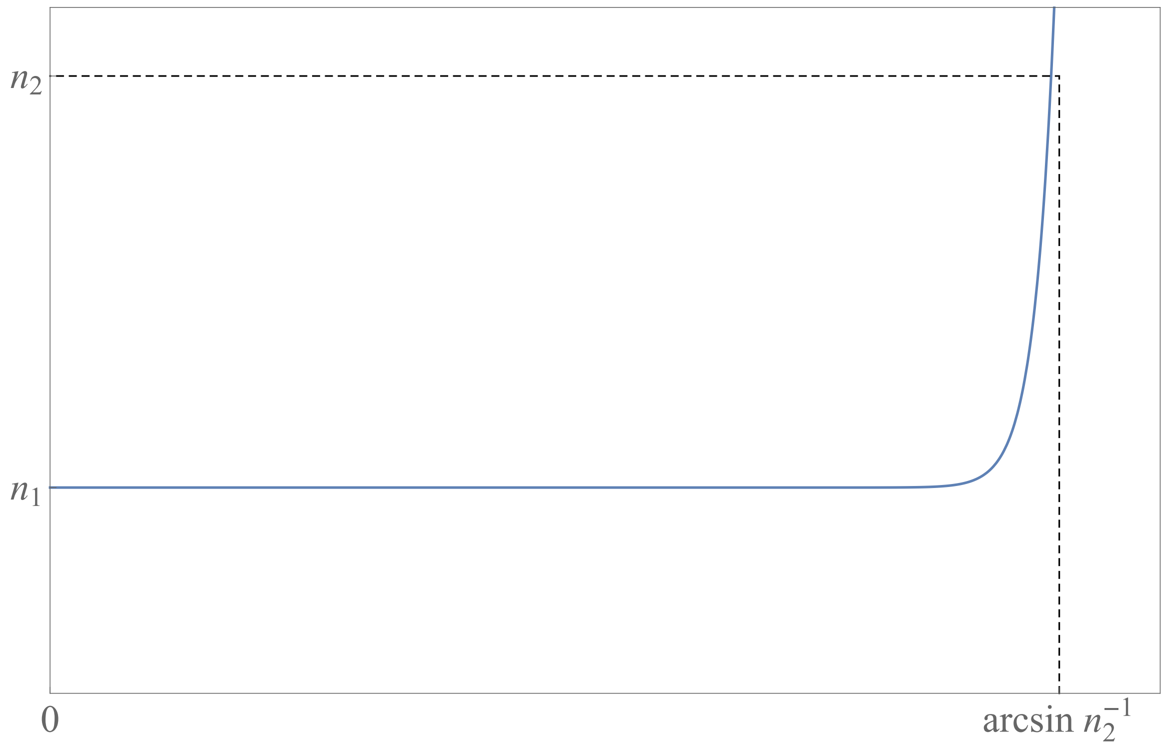
# Problem 1

## Part A

1A1.

$$n_{\text{eff}} = \sqrt{\sin^2\alpha_0 + \left(\frac{d_1+d_2}{\frac{d_1}{\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha_0}} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha_0}}}\right)^2}.$$

1A2. При $n_2^2 - \sin^2\alpha_0 \sim (d_2/d_1)^2$ величина $n_{\text{eff}}$ начинает изменяться. При $n_2^2 - \sin^2\alpha_0 \ll (d_2/d_1)^2$: $n_{\text{eff}} \to \infty$. См. график.




1A3. Здесь 2 варианта, в зависимости от материала, на который луч падает.

$$n_{\text{eff}.1} = \sin\alpha_0\sqrt{1 + \frac{n_1^2-\sin^2\alpha_0}{(d_1+d_2)^2}\left(\frac{d_1}{\sin\alpha_0} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2^2-n_1^2+\sin^2\alpha_0}}\right)^2} \text{ — на 1-й.}$$

$$n_{\text{eff}.2} = \sin\alpha_0\sqrt{1 + \frac{n_2^2-\sin^2\alpha_0}{(d_1+d_2)^2}\left(\frac{d_2}{\sin\alpha_0} + \frac{d_1}{\sqrt{n_1^2-n_2^2+\sin^2\alpha_0}}\right)^2} \text{ — на 2-й.}$$

1A4. Да, например при $\sin\alpha_0 \to \sqrt{|n_1^2-n_2^2|}$ по первой формуле величина конечна, а по второй — стремится к бесконечности (в одном из случаев).

1A5. В плоскости, параллельной слоям, углы

$$\alpha_{\parallel 1} = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_1}\right), \quad \alpha_{\parallel 2} = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_2}\right).$$

В перпендикулярной же плоскости, как в предыдущем пункте, два случая:

$$\operatorname{ctg}\alpha_{\perp 1} = \frac{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha_0}}{d_1 + d_2}\left(\frac{d_1}{\sin\alpha_0} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 + \sin^2\alpha_0}}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_{\perp 2} = \frac{\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha_0}}{d_1 + d_2}\left(\frac{d_2}{\sin\alpha_0} + \frac{d_1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \sin^2\alpha_0}}\right).$$

# Part B

1B1.

$$\Phi_{\mathrm{r}}/\Phi_0 = r_{01}(\alpha) + (1 - r_{01}(\alpha))\, r_{12}(\beta)\, \frac{1 - r_{10}(\beta)}{1 - r_{10}(\beta)\, r_{12}(\beta)}, \quad \text{где } \beta = \arcsin(\sin\alpha/n_1).$$

1B2. В главном приближении

$$\Phi_{\mathrm{r}}^{(1)}/\Phi_0 = r_{01}(\alpha) + r_{12}(\beta)\,,$$

не зависит от того, какой материал сверху, при $r_{12}(\beta) = r_{21}(\gamma)$ (здесь $\gamma = \arcsin(n_1\sin\beta/n_2) = \arcsin(\sin\alpha/n_2)$ — угол движения во 2-й среде).

1B3. Соответствующие поправки

$$\Phi_{\mathrm{r}}^{(2)}/\Phi_0 = -r_{12}(\beta)\,(r_{01}(\alpha) + r_{10}(\beta)) \quad \text{(у меня в работе не так..)},$$

$$\Phi_{\mathrm{r}}^{(3)}/\Phi_0 = r_{12}^2(\beta)\, r_{10}(\beta)\,.$$

На математике не проверено!!!

# Part C

1C1. Разность хода должна равняться целому числу длин волн. Тогда

$$\Delta d = 2d_1\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha_0} = k\lambda,\ \ k \in \mathbb{N} \text{ (и здесь у меня в работе не так..)},$$

откуда

$$\sin\alpha_0 = \sqrt{n_1^2 - \frac{k^2\lambda^2}{4d_1^2}},\ \text{при соответствующих значениях } k.$$

1C2. Минимизации интенсивности отраженного излучения при нормальном падении соответствует толщина слоев $d = \lambda/(4n)$, для наклонного излучения все по-другому.

1C3. Из преобразований скоростей для фотона ($c\cos\alpha_0$, $c\sin\alpha_0$) получим

$$\left(\frac{v + c\cos\alpha_0}{1 + \dfrac{v\cos\alpha_0}{c}}, \frac{c\sin\alpha_0}{\gamma\left(1 + \dfrac{v\cos\alpha_0}{c}\right)}\right), \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2\cos^2\alpha}{c^2}} \approx 1.$$

Тогда в системе отсчета движущейся пластины скорость повернулась на угол

$$\Delta\alpha = \frac{v}{c}\sin\alpha_0.$$

Далее при помощи формул из части A находим изменение показателя преломления

$$\Delta n_{\text{eff}} = \frac{dn_{\text{eff}}}{d\alpha_0}\Delta\alpha.$$

Для неподвижной системы отсчета все по-другому (проще всего также разложить на составляющие и пользоваться законом сложения скоростей).

## Part D

1D1. Из условия непрерывности (одинаковая плотность тока) получим $E/\rho = const$.

1D2.

$$\rho_\perp = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{d_1 + d_2}.$$

1D3.

$$\rho_\parallel = \frac{\rho_1\rho_2\,(d_1 + d_2)}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1}.$$

1D4. Могут. Например, когда $\rho_1 \ll \rho_2$ или наоборот.

1D5. Если направить ось $Ox$ по нормали к слоям, то компоненты вектора напряженности равны соответственно

$$\begin{aligned} E_x &= j\rho_\perp \cos\varphi, \\ E_y &= j\rho_\parallel \sin\varphi. \end{aligned}$$

В общем случае, векторы плотности тока и напряженности не коллинеарны.

1D6. Сложная энергетическая оценка диссипации дает

$$\rho_{\text{eff}} \sim \frac{E^2}{n^2 e^2 v^2 \rho},$$

где $E$ — напряженность электрического поля, $n$ — концентрация электронов в веществе, $v$ — средний модуль скорости их движения, $\rho$ — удельное сопротивление. Если воспользоваться сомнительной оценкой $v \sim E/B$, получим

$$\rho_{\text{eff}} \sim \frac{B^2}{n^2 e^2 \rho}.$$

Тот факт, что собственное удельное сопротивление материала стоит в знаменателе, имеет свое объяснение в этой модели.

# Problem 2

## Part A

2A1.

$$P_1 = \cos^2 \omega t, \quad P_2 = \sin^2 \omega t.$$

2A2. $\langle s \rangle = 0$. Недиагональные элементы не делают погоды ни в каком виде.

2A3.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin \omega t & * \\ * & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin \omega t \end{pmatrix},$$

где вместо звездочек могут стоять любые числа.

## Part B

2B1.

$$I/I_0 = \cos^2 \phi.$$

2B2.

$$I = 0.$$

2B3.

$$I/I_0 = 3/16.$$

## Part C

2C1.

$$\rho(x) = 1/a, \quad 0 \le x \le a.$$

2C2.

$$\langle x \rangle = a/2.$$

2C3.

$$\rho(x) = \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right) x^{-2+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}-1}}.$$

2C4.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

согласно википедии (у меня двойка под корнем потеряна).

2C5. Распределение по модулю скорости имеет вид

$$f(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

По квадрату скорости — соответственно.