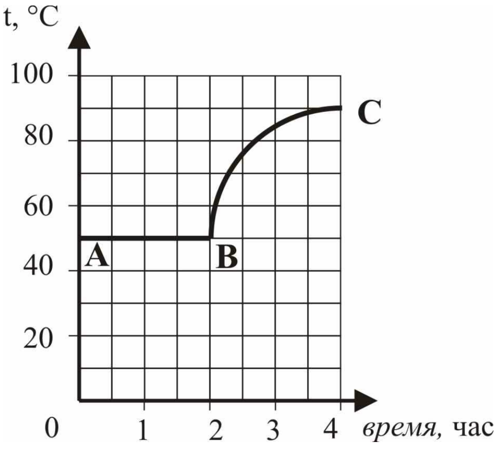
Задача №1. 8 клас



Мал. 1

Полімер вмістили в калориметр із нагрівачем. Перші дві години температура полімеру була $50°C$. При цьому потужність нагрівача складала $P_0 = 0{,}6\ Вт$. Наступні дві години температура полімеру змінювалася так, як показано на мал. 1 (криву BC можна прийняти за чверть кола). Яка кількість теплоти була передана навколишньому середовищу за перші дві години? Яка кількість теплоти була передана навколишньому середовищу за наступні дві години? Потужність втрат тепла з калориметра прямо пропорційна різниці температур всередині й зовні калориметра. Теплоємністю калориметра знехтувати. Температура в лабораторії $20°C$. Агрегатний стан полімеру не змінюється. Чому ж пішло нагрівання?

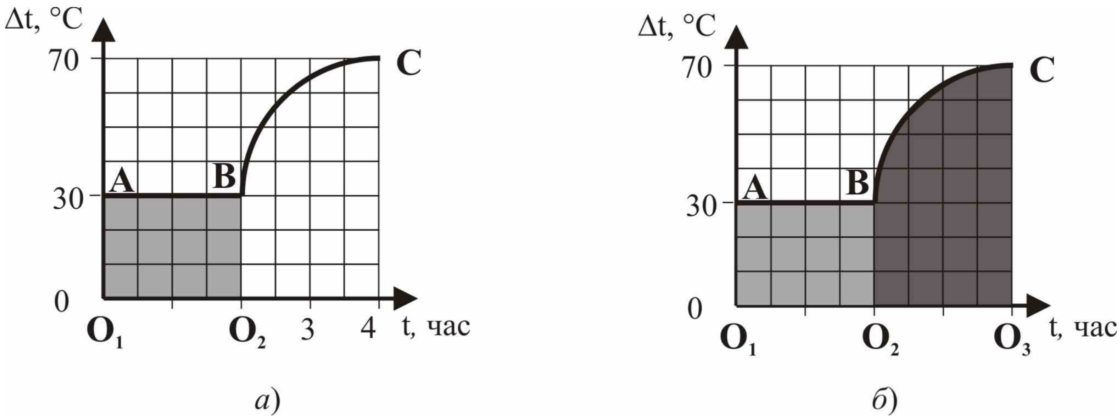
Розв'язання

1) Перше питання – це невелика підказка для відповіді на друге питання.

Зрозуміло, що, тому що температура зразка не змінювалася, то всі тепло, що виділилося за рахунок роботи нагрівача, було передано навколишньому середовищу:

$$Q_1 = P_0 \cdot t_1 = 4320\ Дж.$$

Це і є відповідь на перше питання.



Мал. 2

2) Слова *«потужність втрат тепла з автоклава прямо пропорційна різниці температур усередині й зовні автоклава»* означають, що в тому випадку, коли різниця температур постійна, формула для потужності теплопередачі може бути записана так:

$$P_1 = k \cdot \Delta t,$$

а для кількості тепла

$$Q_1 = k \cdot \Delta t \cdot t_1,$$

де Δt – різниця температур, t_1 – час теплообміну, k – коефіцієнт пропорційності.

А як слід записати формулу для кількості тепла в тому випадку, коли різниця температур змінюється (другий етап)?

Підказку дає наступне спостереження: добуток $\Delta t \cdot t_1$, який входить у формулу для тепла $Q_1 = k \cdot \Delta t \cdot t_1$, можна трактувати як площу S_1 під графіком залежності різниці температур від часу $\Delta t(t)$ (площа фігури O_1ABO_2 на малюнку 2, *а*). Тому формулу для втрат тепла можна записати

$$Q_1 = k \cdot S_1 .$$

Ця форма запису є загальною й годиться й для того випадку, коли різниця температур змінюється згодом (див. як у підручнику виводиться формула шляху для випадку, коли швидкість змінюється).

Тепер ми можемо дати відповідь на другу відповідь:

$$Q_2 = k \cdot S_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot k \cdot S_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot Q_1$$

де S_1 – площа прямокутника O_1ABO_2, S_2 – площа фігури O_2BCO_3 (мал. 2, *б)*

Геометрія дає

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{3 \times 4 + \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2}{3 \times 4} = 1 + \frac{\pi}{3} .$$

Тут ми врахували, що фігуру O_2BCO_3 можна представити як прямокутник і чверть кола. Тому

$$Q_2 = \left(1 + \frac{\pi}{3}\right) \cdot Q_1 = 8844 \text{ } Дж .$$

Це відповідь на друге питання.

Відповідь: 1) $Q_1 = P_0 \cdot t_1 = 4320$ *Дж*; 2) $Q_2 = \left(1 + \frac{\pi}{3}\right) \cdot Q_1 = 8844$ *Дж*.

Задача № 2. 8 класс

В фотолаборатории по очереди включают три одинаковые лампы $Л_1$, $Л_2$ и $Л_3$ (рис. 1). При этом освещенность в точке O_1, находящейся прямо под первой лампой, увеличивается в 1,8 раза при включении второй лампы, и еще в 1,26 раза при включении третьей.

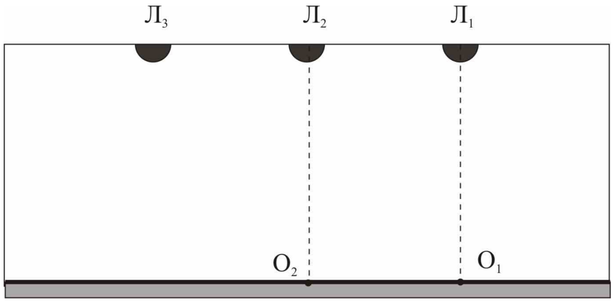


Рис. 1

А как увеличивается освещенность при включении второй и третьей ламп в точке O_2, находящейся под второй лампой?

Расстояния между лампами одинаковые, стены фотолаборатории света не отражают.

Решение

Пусть в точке O_1 первая лампа создает освещенность E_1, вторая - E_2, а третья – E_3. Используя эти величины, мы можем найти значения освещенности в точках O_1 и O_2 при последовательном включении ламп (см. таблицу).

	$Л_1$	$Л_1 +\ Л_2$	$Л_1 +\ Л_2\ +\ Л_3$
точка O_1	E_1	$E_1 + E_2$	$E_1 + E_2 + E_3$
точка O_2	E_2	$E_1 + E_2$	$E_1 + 2E_2$

Условие, что в точке O_1 при включении второй лампы освещенность увеличивается в $k = 1{,}8$ раза, позволяет найти отношение $\frac{E_2}{E_1}$. Действительно, $k = \frac{E_1 + E_2}{E_1}$, откуда $\frac{E_2}{E_1} = k - 1 = 0{,}8$. Теперь мы можем ответить и на вопросы задачи.

При включении второй лампы освещенность в точке O_2 увеличивается в

$$\frac{E_1 + E_2}{E_2} = 1 + \frac{1}{0{,}8} = 2{,}25\ \textit{раза}\ .$$

При включении третьей лампы освещенность в точке O_2 увеличивается в

$$\frac{E_1 + 2E_2}{E_1 + E_2} = \frac{1 + 2 \cdot 0{,}8}{1 + 0{,}8} = 1{,}44\ \textit{раза}$$

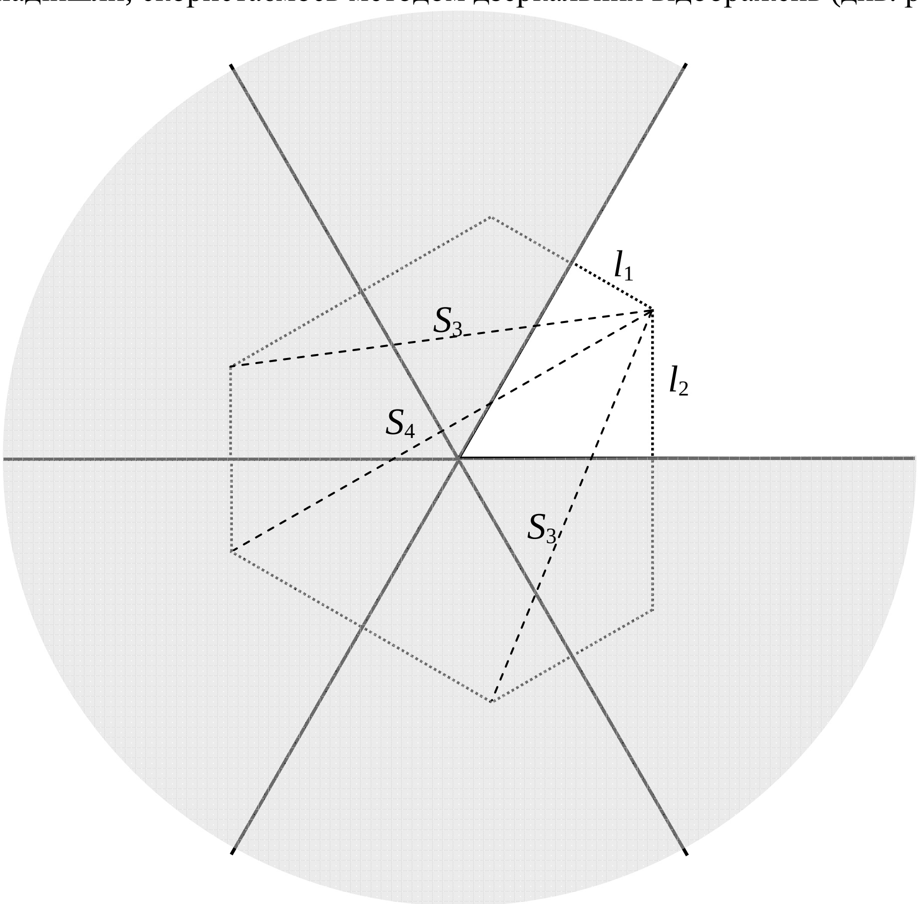
Ответ: в 2,25 раза; в 1,44 раза.

Мы не используем освещенность-3, она не нужна. А насколько она согласована? Таки да… Расстояние между лампами равно 0,4 высоты.

Задача 3. 8 клас.

Дві вертикальні стіни сходяться під кутом 60º і утворюють ущелину. Турист поставив палатку на однаковій відстані 200 м від обох стін. Тихою морозною ніччю він вийшов з палатки і заблукав. Коли надія знайти палатку була майже втрачена, турист зупинився і крикнув. Перше відлуння він почув через 3/4 с, друге – через 5/4 с. Через який час він почує інші відлуння і скільки їх буде? Підкажіть туристу, що слід робити, щоб повернутися до палатки і скільки кроків відділяє його від неї? Скористайтеся формулою для визначення швидкість звуку у повітрі $v = 20\sqrt{T}$, де – температура в Кельвинах, – швидкість звуку в м/с. Температура повітря $-17^{\circ}\mathrm{C}$, довжина кроку туриста 50 см.

Розв'язання. Якщо перше відлуння турист почув через $t_1 = 3/4\,\text{с}$, відстань, яку пройшов звук до ближчої стіни ущелини і повернувся назад, дорівнює $S_1 = vt_1 = 240\,\text{м}$. Отже відстань від туриста до цієї стіни ущелини $l_1 = \frac{1}{2}vt_1 = 120\,\text{м}$. Аналогічно, відстань до другої стіни ущелини $l_2 = \frac{1}{2}vt_2 = 200\,\text{м}$. Щоб знайти, скільки всього було відлунь і через який час вони надійшли, скористаємось методом дзеркальних відображень (див. рис.).



Ми бачимо шестикутник з вершинами у місцях, де знаходиться турист та п'ять його зображень. Складається враження, що турист має почути п'ять відлунь, але, оскільки дві відстані (позначені S_3) є однаковими, через час $t_3 = \frac{S_3}{v}$ два відлуння (кожне після двох відбиттів) прозвучать одночасно. Останнє відлуння прозвучить через час $t_4 = \frac{S_4}{v}$. Знайдемо відстані S_3 та S_4. Відстань S_4 знаходиться швидко, оскільки вона є основою рівнораменної трапеції з кутами 60º і 120º: $S_4 = S_2 + S_1 = 2(l_2 + l_1) = 640\,\text{м}$. Відстань S_3

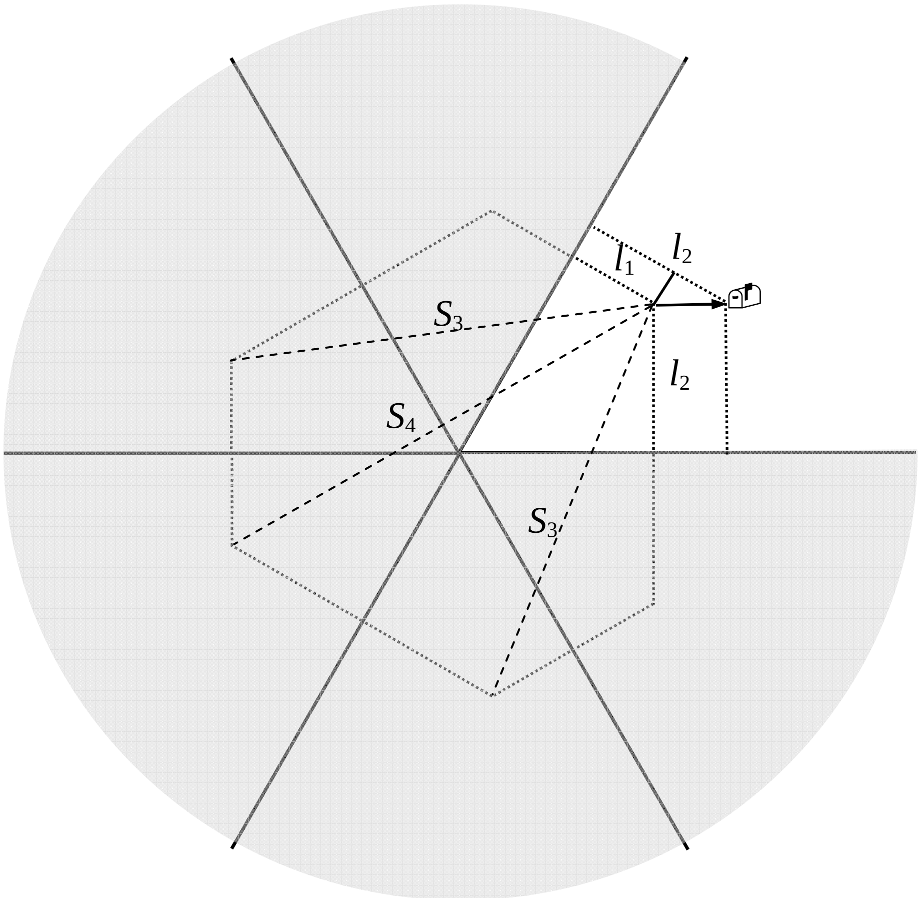
можна знайти, якщо опустити з точки третього зображення перпендикуляр на S_4 та визначити катети утвореного прямокутного трикутника ($2l_2 + l_1$ і $\sqrt{3}l_1$), і далі знайти S_3, як гіпотенузу за теоремою Піфагора

$$S_3^2 = (2l_2 + l_1)^2 + 3l_1^2 = 560^2 \text{ м}^2.$$

Отже, $S_3 = 560\,\text{м}$, $t_3 = 7/4\,\text{с}$, $t_4 = 2\,\text{с}$.

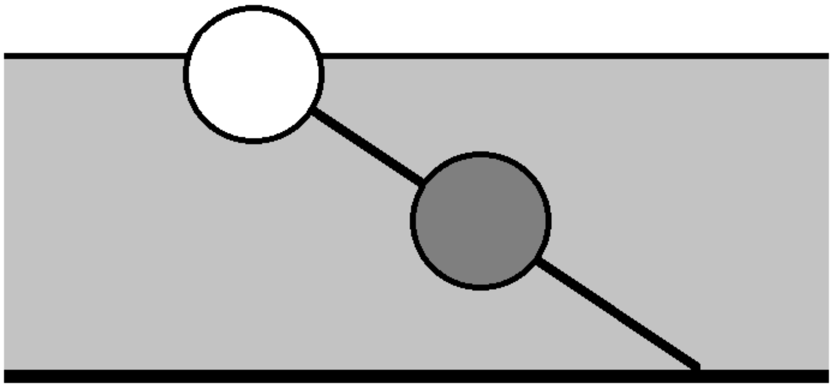
Оскільки відстань до другої стіни виявилась 200 м, тобто, такою ж, як і відстань до цієї стіни від палатки, туристу слід рухатись перпендикулярно до напряму, звідки надійшло друге відлуння (паралельно до другої стіни), залишаючи за спиною звуки третіх і четвертого відлунь. Протягом його руху час t_2, через який надходить друге відлуння, має залишатися незмінним, а час надходження першого відлуння t_1 буде збільшуватись. Коли час t_1 зрівняється з t_2 слід шукати палатку.

Кількість кроків легко знаходиться з прямокутного трикутника з кутами 30º і 60º. Маємо 185 кроків.



Задача 4.
8 клас

Дві кулі однакового розміру прикріплені до тонкого стержня, причому масивна - до середини стержня, а легка - до його кінця. При зануренні у воду в неглибокому місці вільний кінець стержня спирається на дно, і з води виступає лише частина легкої кулі (мал. 3), причому відношення об'єму виступаючої частини до об'єму всієї кулі дорівнює *n*. За яких значень *n* система буде плавати на глибокій воді? Маси легкої кулі і стержня вважати мізерно малими.



Розв'язання.

Розглянемо сили, що діють на кулі. На легку кульку діє тільки сила Архімеда, величина якої пропорційна зануреному об'єму (за умовою нехтуємо силою тяжіння). На важку кулю діє і сила тяжіння, і сила Архімеда. Сума всіх діючих на систему сил дорівнює нулю, оскільки система знаходиться в рівновазі:

$$F_T = F + F(1-n) + Q.$$

Запишемо рівність моментів сил відносно центру масивної кулі.

$$Q \cdot d_1 = F(1-n) \cdot d_2$$

Врахуємо, що плечі сил однакові

$$d_1 = d_2,$$

тоді отримаємо

$$Q = F(1-n).$$

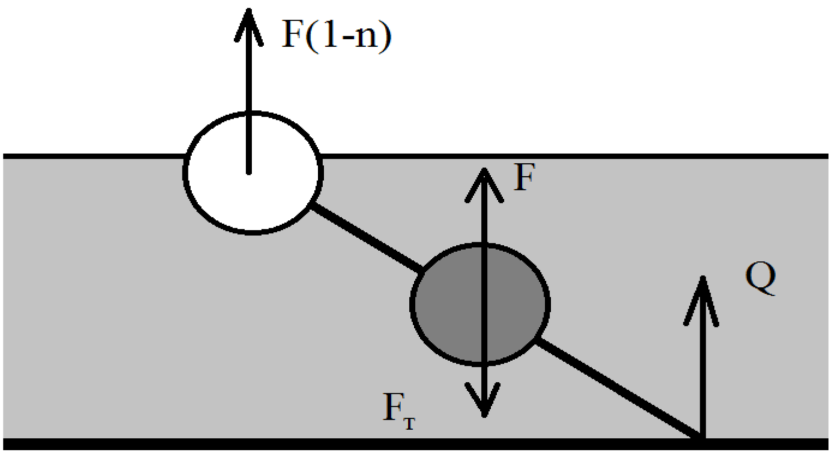
Остаточно співвідношення між силами буде таким

$$F_T = F + 2F(1-n) = F(3-2n).$$

На глибокому місці максимальне значення сили Архімеда досягатиметься при повному зануренні обох куль, що дорівнює $2F$. Якщо сила $2F$ виявиться більшою за силу тяжіння F_T, то стержень з кулями плаватиме у вертикальному положенні і легка куля, розташовуючись зверху, частково виступатиме з води, або (в стані байдужої рівноваги) буде повністю занурена у воду.

Отже, умова плавання на глибокій воді матиме вигляд $F_T \le 2F$.

Підставляючи в ліву частину цієї нерівності $F_T = F(3-2n)$, дістанемо $3-2n \le 2$ і отримаємо відповідь $n \ge 1/2$. Це означає, що система не потоне, якщо на мілкій воді легка куля виступатиме з води не менш, ніж на половину.



Відповідь: $n \geq \frac{1}{2}$.

Задача № 5. 8клас

На зеленому лугу пасуться два козлики. Сірий козлик увесь час рухається на захід і до вечора проходить 800 метрів. Білий козлик увесь час рухається на північ і до вечора проходить 600 метрів. При цьому відстань між ними ввечері виявилася такою ж, як вранці – 1300 метрів. Яка мінімальна відстань була між козликами, якщо вони рухалися з постійною швидкістю? На яку мінімальну відстань могли б зблизитися козлики, якби їм було дозволено довільно змінювати величину своєї швидкості (не змінюючи, однак, напрямки руху й величини кінцевих переміщень)?

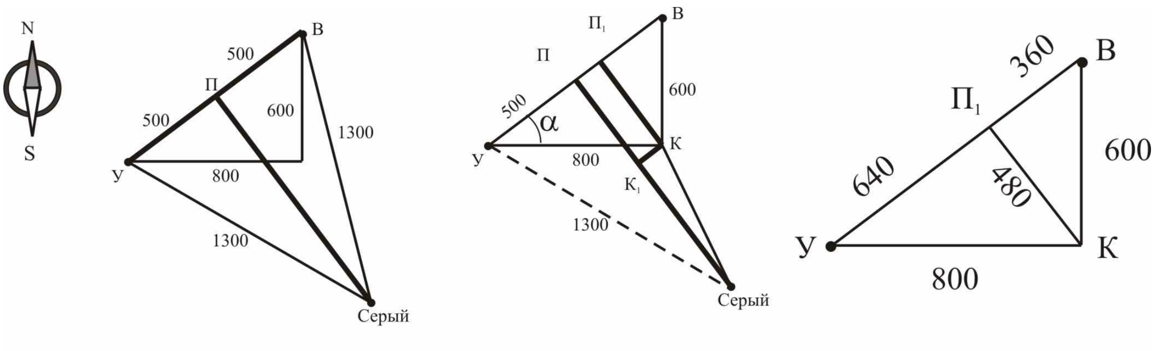
Розв'язання

Складно стежити за двома козликами, що рухаються одночасно, тому перейдемо у систему відліку, пов'язану, наприклад, з сірим козликом. У цій системі відліку сірий козлик нерухомий, а білий козлик матиме дві компоненти швидкості: одну напрямлену на схід та іншу, напрямлену на північ (рис. 1, *а*). Переміщення за день білого козлика буде складати 800 метрів на схід та 600 метрів на північ.

1) Знайдемо відстань у випадку мінімального зближення. Якщо швидкості козликів не змінюються, то їх траєкторія – відрізок УВ довжиною 1000 метрів. А мінімальну відстань між козликами дає перпендикуляр, проведений з точки С на цей відрізок. Його довжину можна знайти, записуючи теорему Піфагора для трикутника УПС:

$$ПС = \sqrt{УС^2 - УП^2} = \sqrt{1300^2 - 500^2} = 1200 \text{ метрів}$$

Це перша відповідь.



а) *б*) *в*)

Рис. 1

2) Якщо величини швидкостей можна змінювати довільно (при цьому залишаючи незмінними напрямки руху), то білий козлик може прийти у будь-яку точку трикутника УВК (рис. 1, *б*). Тут точка У – початкове положення білого козлика. Найближчою до точки С точкою цього трикутника є точка К Довжина відрізка КС і буде відповіддю на друге питання. Знайдемо її. З рисунка 1,*в* видно, що прямокутні трикутники УП$_1$К і УКВ подібні. Тоді, т.я. УВ = 1000 метрів, справедливо співвідношення:

$$\frac{500 + ПП_1}{800} = \frac{800}{1000} \Rightarrow ПП_1 = 140 \text{ метрів} = КК_1$$

За теоремою Піфагора $КП_1 = 480 \text{ метрів} = ПК_1$. З попереднього пункту відомо, що $ПС$ = 1200 м, отже К$_1$С = 720 м, и за теоремою Піфагора остаточно отримуємо

$$КС = \sqrt{КК_1^2 + К_1С^2} \approx 733 \text{ метри}.$$

Відповідь: 1) 1200 метрів; 2) 733 метри.

У мене виходить: початкова різниця координат по горизонталі 1120 (кінцева 320), по вертикалі 660 (кінцева 1260). Вийти на одну вертикаль не вдається!