Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц, А.В.Лысакевич

ГЕОМЕТРИЯ-11

Конспекты уроков по теме: "Тела вращения-1 (цилиндр, конус)"

Харьков, 2015 г.

Поурочное планирование (13 часов)

Урок 1. Тела вращения. Цилиндрическая поверхность. Цилиндр. Прямой круговой цилиндр.

Урок 2. Решение задач на нахождение площади поверхности и объема цилиндра.

Урок 3. Коническая поверхность. Конус. Прямой круговой конус.

Урок 4. Решение задач на нахождение площади поверхности и объема конуса.

Урок 5. Решение задач на цилиндр и конус.

Урок 6. *Самостоятельная работа* по теме: "Цилиндр. Конус".

Урок 7. Цилиндр и конус как тела вращения.

Урок 8. Усеченный конус.

Урок 9. Решение задач на нахождение поверхностей и объемов тел вращения.

Урок 10. *Самостоятельная работа* по теме: "Усеченный конус. Тела вращения".

Урок 11. Обобщающее занятие по теме.

Урок 12. Контрольная работа.

Урок 13. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Тела вращения. Цилиндрическая поверхность. Цилиндр. Прямой круговой цилиндр.

1°. Тела вращения

1) В курсе десятого класса мы занимались, в основном, изучением многогранников. Теперь мы рассмотрим еще один класс тел пространства, а именно т. н. *тела вращения*. Дадим определение этого понятия:

Определение.

> *Фигура называется* ***фигурой вращения****, если в пространстве существует такая ось, что при любом повороте вокруг этой оси фигура переходит в себя.*

2) Ось, о которой идет речь в определении называют *осью вращения* фигуры. В случае, если фигура вращения является телом, это тело называют *телом вращения*, а его поверхность – *поверхностью вращения*.

3) В элементарной геометрии принято говорить о телах вращения как о телах, полученных вращением плоской фигуры вокруг некоторой оси.

4) Аналогично, о поверхности вращения можно говорить как о множестве, полученном вращением (конечного куска) плоской непрерывной кривой вокруг некоторой оси. Данную кривую называют *образующей* поверхности вращения.

   Замечание. *Пользуясь такими представлениями о поверхности вращения, несложно понять, что любая плоскость, перпендикулярная оси и пересекающая поверхность вращения, дает в сечении окружность с центром на оси.*

2°. Цилиндрическая поверхность. Цилиндр

1) Дадим общее определение цилиндрической поверхности.

Определение.

> *Пусть в пространстве заданы плоскость α, прямая l, пересекающая эту плоскость, и кривая L, лежащая в плоскости α. Множество всех прямых, параллельных l и пересекающих кривую L, называется* ***цилиндрической поверхностью****.*

   При этом кривая L называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а прямые, параллельные l и пересекающие L, – *образующими* цилиндрической поверхности.

2) В случае, когда кривая L замкнутая и не самопересекающаяся, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется *замкнутой*.

3) Введем теперь понятие цилиндра:

Определение.

> ***Цилиндром*** *называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, которые не параллельны образующей этой цилиндрической поверхности.*

Замечание. *Призма является частным случаем цилиндра.*

4) Дадим еще несколько определений, связанных с понятием цилиндра:

Определение.

> *Часть цилиндрической поверхности, заключенная между параллельными плоскостями цилиндра, называется* ***боковой поверхностью цилинра****, а части плоскостей, отсекаемые цилиндрической поверхностью, – основаниями цилиндра.*

Определение.

> *Отрезки образующих цилиндрической поверхности, заключенные между основаниями цилиндра, называются* ***образующими цилиндра****.*

5) Выделим теперь важные частные случаи цилиндра:

Определение.

> *Цилиндр называется* ***прямым****, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. Цилиндр называется* ***круговым****, если его направляющая – окружность.*

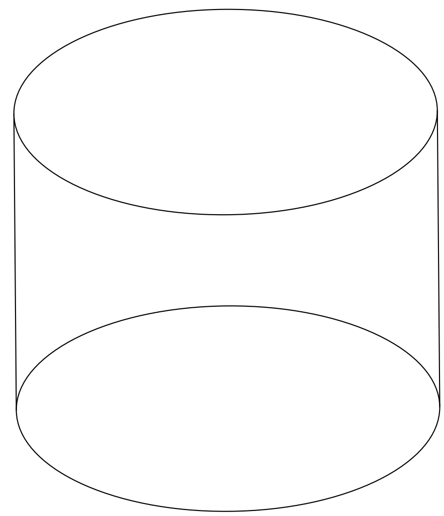
Замечание. *В дальнейшем мы будем рассматривать в основном прямые круговые цилиндры, которые будем называть просто цилиндрами.*

Определение.

> ***Радиусом цилиндра****, называется радиус его основания.* ***Осью цилиндра*** *назывется прямая, проходящая через центры его оснований.* ***Высотой цилиндра*** *называется отрезок оси, заключенный между основаниями.*

Замечание. *Прямой круговой цилиндр является телом вращения.*

6) Изображают цилиндр так (два эллипса и две образующие):



3°. Простейшие свойства цилиндра

1) Основания цилиндра равны.
2) Образующие цилиндра равны.
3) Высота цилиндра равна его образующей.

4°. Сечения цилиндра

1) Выделяют следующее сечение цилиндра:

Определение.

> *Сечение цилиндра, проходящее через его ось, называется* ***осевым сечением цилиндра****.*

2) Осевые сечения цилиндра обладают следующим свойством:

   Утверждение.

   Произвольное осевое сечение цилиндра радиуса R и высоты H является прямоугольником $2R \times H$.

   Замечание. *Несложно показать, что всякое сечение цилиндра, параллельное его оси, является прямоугольником.*

3) Сечения цилиндра плоскостями, перпендикулярными образующей, являются кругами, равными основаниям цилиндра.
4) **Упражнение:** Какая фигура является сечением цилиндра плоскостью, пересекающей все его образующие и не перпендикулярные им?

5°. Формулы для вычисления площадей поверхности и объема

Замечание. *Строгое понятие площади поверхности и объема тел дается в курсе математического анализа.*

Рассмотрим цилиндр радиуса R и высоты H.

1) Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

2) Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(R+H).$$

3) Объем цилиндра:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H.$$

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин, §10.1.

Урок 2. Решение задач на нахождение площадей поверхностей и объемов цилиндра

1°. Решение задач

1) Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания равен 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна диаметру основания.

2) В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая находится на расстоянии d от центра верхнего основания и которую видно из этого центра под углом φ. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол β. Найдите объем цилиндра.

3) Параллельно оси цилиндра проведено сечение, которое отсекает от окружности основания дугу, градусная мера которой равна 120°. Площадь сечения равна $16\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4) В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей равна M, а площадь осевого сечения равна N. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.

5) Из бумажного прямоугольника со сторонами a и b $(a < b)$ хотят склеить боковую поверхность цилиндра. Какие стороны следует склеить между собой, чтобы такой цилиндр имел наибольший объем?

Домашнее задание

1) В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом 120°, а из центра верхнего основания – под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если длина данной хорды составляет 6 см.

2) В нижнем основании цилиндра проведена хорда, длина которой равна b. Эту хорду видно из центра нижнего основания под углом β, а отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой проведенной хорды, образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем цилиндра.

3) Через середину оси цилиндра проведена прямая, которая пересекает плоскость нижнего основания на расстоянии 12 см от центра этого основания. Образующую цилиндра эта прямая пересекает на расстоянии 2 см от плоскости нижнего основания. Вычислите объем цилиндра, если его радиус основания равен 8 см.

4) В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, пересекающая нижнее основание цилиндра по хорде, которую видно из центра этого основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь данного сечения равна S.

Урок 3. Коническая поверхность. Конус. Прямой круговой конус.

1°. Коническая поверхность

1) Дадим общее определение конической поверхности.

Определение.

> *Пусть в пространстве заданы плоскость α, точка M, не лежащая в α, и кривая $L \subset \alpha$. Множество всех прямых, проходящих через точку M и пересекающих кривую L, называют **конической поверхностью**.*

2) При этом точка M называется *вершиной* конической поверхности, кривая L – ее *направляющей*, а прямые, проходящие через M и пересекающие L – *образующими* конической поверхности.

3) Отметим, что коническая поверхность состоит из двух частей (каждая из которых называется *полостью*), расположенных по разные стороны от ее вершины.

4) Если направляющая L конической поверхности замкнутая и не самопересекающаяся, то соответствующая коническая поверхность называется *замкнутой*.

2°. Конус

1) Дадим теперь определение конуса:

Определение.

> ***Конусом*** *называется тело, ограниченное частью замкнутой конической поверхности, расположенной по одну сторону от ее вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины.*

Замечание. *Пирамида является частным случаем конуса. Цилиндр, в некотором смысле, тоже, если считать, что его вершина находится в бесконечно удаленной точке.*

2) Дадим еще несколько определений, связанных с понятием конуса:

Определение.

> *Часть конической поверхности, заключенная между вершиной и плоскостью, называется* ***боковой поверхностью конуса****, а часть плоскости, отсекаемая этой поверхностью, –* ***основанием конуса****.*

3) Для конуса естественным образом определяют *вершину конуса* и *образующие конуса.*

Определение.

> ***Высотой конуса*** *называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания.*

3°. Прямой круговой конус

1) Выделим важный частный случай конуса:

Определение.

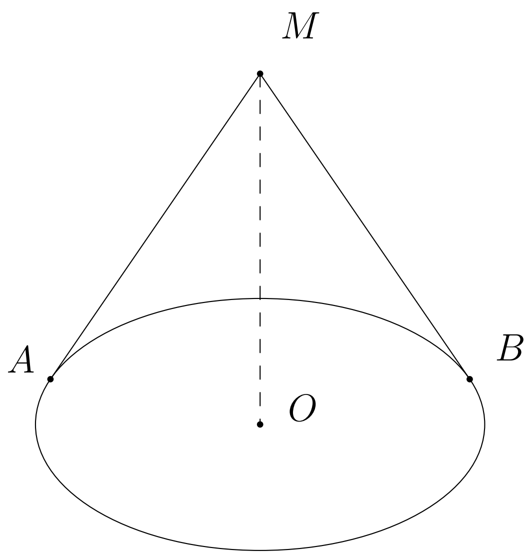
> *Конус называется* ***круговым****, если его основание – круг. Круговой конус называется* ***прямым****, если его высота проходит через центр основания.*

Замечание. *В дальнейшем мы будем рассматривать в основном прямые круговые конусы, которые будем называть просто конусами.*

2) Радиус круга, лежащего в основании конуса, называется *радиусом конуса.* Прямая, содержащая высоту конуса, называется его *осью.*

Замечание. *Прямой круговой конус является телом вращения.*

3) Изображают конус так (Основание конуса изображается эллипсом. Отрезки MA и MB – касательные к эллипсу. **Точки A, B и O не лежат на одной прямой!**):



4) Рассмотрим вопрос о сечениях конуса:

Определение.

> *Сечение конуса, проходящее через его ось, называется* ***осевым сечением*** *конуса.*

Утверждение 1.

Произвольное осевое сечение конуса высоты h и с радиусом R является равнобедренным треугольником с основанием $2R$ и высотой h.

Несложно показать, что выполнены такие утверждения:

Утверждение 2.

Любое сечение конуса, проходящее через его вершину, является равнобедренным треугольником.

Утверждение 3.

Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг, причем радиус этого круга относится к радиусу основания, как расстояние от вершины конуса к его высоте.

Замечание. *Вопрос о сечениях конуса другими плоскостями будет в дальнейшем отдельной темой обсуждения.*

4°. Формулы для вычисления площадей поверхности и объема

Пусть дан конус с радиусом основания R, образующей l и высотой h.

Замечание. *Эти величины, конечно, не являются независимыми. Они связаны соотношением*

$$R^2 + h^2 = l^2.$$

1) Площадь боковой поверхности конуса выражается формулой:

$$S_{\text{бок}} = \pi R l.$$

2) Площадь полной поверхности конуса:

$$S_{\text{полн}} = \pi R(R + l).$$

3) Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин, §10.1.
2) Атанасян, №558, 563, 703, 705.

Урок 4. Решение задач на нахождение площадей поверхностей и объемов конуса

1°. Решение задач

1) В основании конуса проведена хорда длины a, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса под углом β. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2) Высота конуса равна 20 см, а расстояние от центра его основания до образующей – 12 см. Найдите объем конуса.

3) Площадь основания конуса равна Q, а угол между образующей и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен β.

4) Высота и образующая конуса относятся как $4 : 5$, а объем конуса равен 96π. Найдите его полную поверхность.

Домашнее задание

1) В основании конуса проведена хорда длиной $8\sqrt{2}$ см на расстоянии 4 см от центра основания. Найдите объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°.

2) Через две образующие конуса, угол между которыми равен φ, проведено сечение. Найдите площадь этого сечения, если высота конуса равна h, а угол между нею и образующей равен α.

3) Объем конуса с радиусом основания 6 см равен 96π см^3. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

4) Угол при вершине осевого сечения конуса равен α, а расстояние от центра основания до образующей конуса – a. Найдите объем конуса.

5) Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, образующее с плоскостью основания конуса угол β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна h.

Урок 5. Решение задач на цилиндр и конус

1°. Решение задач

1) Вершины прямоугольника лежат на окружностях оснований цилиндра. Стороны прямоугольника относятся как $1 : 2$, причем меньшие лежат в плоскостях оснований. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания $2\sqrt{5}$. Плоскость прямоугольника пересекает ось цилиндра. Найдите площадь прямоугольника.

2) Два конуса имеют общее основание, причем конус с меньшей высотой лежит внутри другого. Расстояние между вершинами конусов равно d, а углы при вершинах их осевых сечений равны α и β $(\alpha > \beta)$. Найдите объемы конусов.

3) Полная поверхность конуса равна πS. Развернутая на плоскости боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом 60°. Определите объем конуса.

4) Радиус основания конуса равен R. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса на части в отношении $1 : 2$. Найдите объем конуса.

Домашнее задание

1) Сканави, №11.186, 11.192, 11.098, 11.087

Урок 7. Цилиндр и конус как тела вращения

1°. Цилиндр и конус как тела вращения

Обсудим подробнее понятия цилиндра и конуса как тел вращения.

1) Мы уже отмечали, что цилиндр является телом вращения. Действительно, цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через его сторону.

   Отметим, что если прямоугольник OO_1AB ($OB = a$, $AB = b$) вращается вокруг стороны OO_1, то в полученном цилиндре, очевидно, $R = a$, $h = b$.

   Замечание. *При вращении прямоугольника вокруг его оси симметрии также получается цилиндр.*

2) Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник AOS ($\angle O = 90°$) и повращаем его вокруг одного из катетов (например OS). Получившееся тело вращения, очевидно, будет конусом с $R = OA$, $h = OS$.

2°. Решение задач

Замечание. *В большинстве простых задач достаточно рисовать плоский чертеж.*

1) Диагональ прямоугольника равна d и образует с его большей стороной угол α. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, образованного вращением данного прямоугольника вокруг его меньшей стороны.

2) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол при вершине B прямой, $\angle D = \alpha$, $BC = CD = a$, $BC < AD$. Трапеция вращается вокруг прямой, которая содержит основание BC. Найдите объем тела вращения.

3) Равнобедренный треугольник с основанием 10 см и боковой стороной 13 см вращается вокруг боковой стороны. Найдите объем тела вращения.

4) Конус образован вращением прямоугольного треугольника площадью S вокруг одного из катетов. Найдите объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении этого треугольника точкой пересечения его медиан, равна L.

Домашнее задание

1) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна l, а один из острых углов – α. Найдите объем конуса, образованного при вращении этого треугольника вокруг катета, противоположного данному углу.

2) Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом β вращается вокруг прямой, которая содержит его гипотенузу. Найдите объем тела вращения.

3) Равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 16 см и высотой 3 см вращается вокруг большего основания. Найдите объем тела вращения.

4) Найдите площадь поверхности тела которое образуется при вращении треугольника со сторонами 25 см, 29 см и 36 см вокруг меньшей стороны.

Урок 8. Усеченный конус

1°. Основные понятия

1) Кроме конуса часто рассматривают т. н. усеченный конус:

Определение.

> *Часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется* ***усеченным конусом****.*

2) Мы уже отмечали, что в сечении конуса плоскостью, параллельной его основанию, получается круг. Т. о., усеченный конус имеет два *основания* (большее и меньшее), которые представляют собой круги. Их радиусы обычно обозначают R и r.

3) *Боковая поверхность*, *образующая*, *высота* усеченного конуса определяются как часть одноименного объекта конуса, из которого получен усеченный конус, заключенная между основаниями. Обозначения стандартные: H (или h) – высота, L (или l) – образующая.

4) *Ось* усеченного конуса – это ось конуса, из которого получен усеченный.

   Осевым сечением усеченного конуса называется сечение, проходящее через его ось.

   Осевое сечение конуса обладает следующим свойством:

   Утверждение 4.

   Осевое сечение усеченного конуса высоты H и с радиусами оснований R и r есть равнобедренная трапеция с высотой H и основаниями $2R$ и $2r$.

5) Отметим, что усеченный конус является телом вращения. Он может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

2°. Площадь поверхности и объем усеченного конуса

Зная формулы для объема и площади поверхности конуса, несложно получить соответствующие формулы и для усеченного конуса.

1) Элементы усеченного конуса удовлетворяют следующему соотношению:
$$(R-r)^2+H^2=L^2.$$
2) Формула для площади боковой поверхности усеченного конуса:
$$S_{\text{б.у.к}}=\pi(R+r)L.$$
3) Площадь полной поверхности усеченного конуса:
$$S_{\text{п.у.к}}=\pi(R^2+r^2)+\pi(R+r)L.$$
4) Объем усеченного конуса:
$$V_{\text{у.к.}}=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2).$$

3°. Решение задач

1) Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна 208π, образующая – 13, а высота – 5.
2) Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, диагонали осевого сечения которого взаимно перпендикулярны, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°, а высота равна 6.

Домашнее задание

1) Равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при вершине – α, вращается вокруг прямой, которая проходит через вершину угла при основании перпендикулярно этому основанию. Найдите объем тела вращения.
2) Атанасян, №708, 709
3) Сканави, №11.100

Урок 9. Решение задач на тела вращения

1°. Решение задач

1) Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Выразите объем V цилиндра через площадь S этого прямоугольника и длину C окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей.

2) Треугольник со сторонами a, b и c вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найдите отношения объемов полученных при этом тел.

3) Равнобедренная трапеция с основаниями 2 см и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Найдите площадь поверхности и объем полученного тела вращения.

4) Параллелограмм периметра $2p$ вращается вокруг оси, перпендикулярной его диагонали длины d и проходящей через ее конец. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Домашнее задание

1) Сканави, №11.090, 11.092, 11.105, 11.177