Задача 1. Зеркало заднего вида

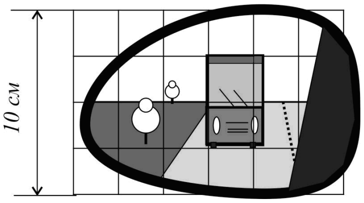


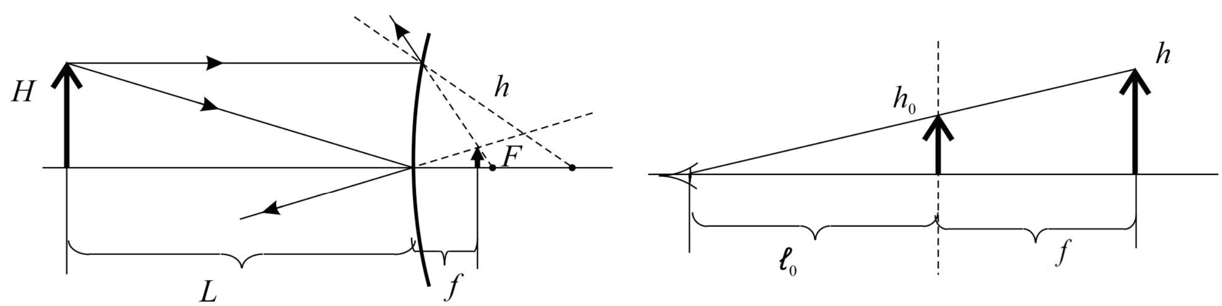
Рис. 1

На рис. 1 изображена картинка, которую водитель видит в боковом сферическом зеркале автомобиля. Используя рисунок, определите радиус кривизны зеркала. Высота автобуса – 4 м, расстояние от него до зеркала – 60 м, расстояние от водителя до зеркала – 80 см. Считайте, что водитель находится на главной оптической оси зеркала.

Решение

В качестве зеркал заднего вида используют *выпуклые* сферические зеркала, которые всегда создают *прямые мнимые* изображения предметов. Вогнутые зеркала для данной цели не подходят — они создают *перевернутые действительные* изображения удаленных предметов.

На рисунке 2, *а* показана схема формирования мнимого изображения удаленного предмета в выпуклом зеркале. Из подобия соответствующих треугольников получаем первую формулу: $h = \frac{|f|}{L} H$. Здесь H – высота автобуса, L – расстояние от автобуса до зеркала, h – высота изображения автобуса, $|f|$ – расстояние от зеркала до изображения.



а) *б)*

Рис. 2

На рисунке 2, *б* показана картина наблюдения водителем изображения автобуса (h_0 – высота проекции изображения автобуса на плоскость зеркала). Сетка на рисунке 1 позволяет найти её величину $h_o = 5$ ñì . Из рис. 2, *б* получаем второе равенство: $h = \frac{\ell_0 + |f|}{\ell_0} h_0$, где ℓ_0 – расстояние между зеркалом и водителем.

Из двух выписанных равенств мы получаем уравнение $\frac{H}{L}|f| = \frac{\ell_0 + |f|}{\ell_0} h_0$. Тогда расстояние от зеркала до изображения $|f| = \frac{\ell_0 L h_0}{H\ell_0 - L h_0}$. Из формулы для выпуклого сферического зеркала $-\frac{2}{R} = \frac{1}{F} = \frac{1}{L} + \frac{1}{f}$ и, с учетом того, что расстояние от зеркала до изображения нужно брать с отрицательным знаком (изображение мнимое), получаем

$$R = \frac{2L|f|}{L - |f|} = \frac{2 L h_0 \ell_0}{H\ell_0 - L h_0 - h_0 \ell_0} = 30 \text{ м}.$$

Ответ: 30 м.

Задача 1. Дзеркало заднього виду

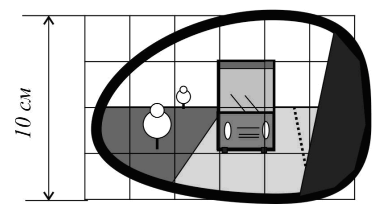


Рис. 1

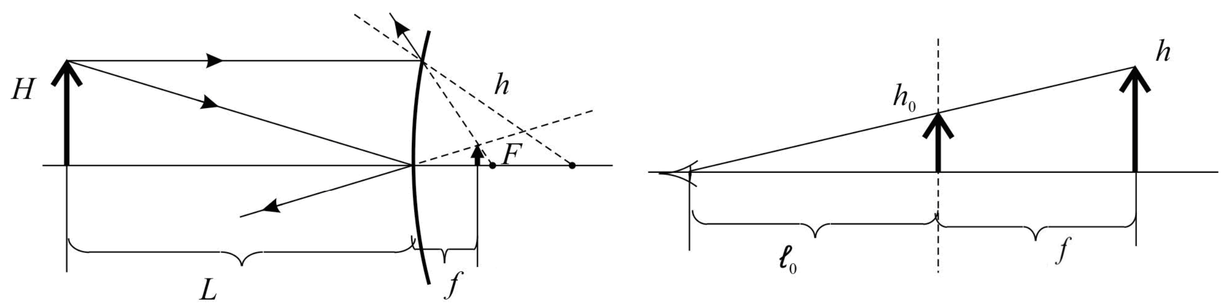
На рис. 1 зображена картинка, яку водій бачить у боковому сферичному дзеркалі автомобіля. Використовуючи рисунок, визначте радіус кривини дзеркала. Висота автобуса – 4 м, відстань від нього до дзеркала – 60 м, відстань від водія до дзеркала – 80 см. Вважайте, що водій розташований на головній оптичній осі дзеркала.

Розв'язок

У якості дзеркала заднього виду використовують *опуклі* сферичні дзеркала, які завжди створюють *пряме уявне* зображення предметів. Увігнуті дзеркала для цієї мети не підходять – вони створюють *перевернуті дійсні* зображення віддалених предметів.

На рисунку 2, *а* показана схема формування уявного зображення віддаленого предмета в опуклому сферичному дзеркалі. З подібності відповідних трикутників отримуємо першу формулу: $h = \frac{|f|}{L} H$.

Тут H – висота автобуса, L – відстань від автобуса до дзеркала, h – висота зображення автобуса, $|f|$ – відстань від дзеркала до зображення.



а) *б)*

Рис. 2

На рисунку 2, *б* показана картина спостереження водієм зображення автобуса (h_0 – висота проекції зображення автобуса на площину дзеркала). Сітка на рисунку 1 дозволяє знайти її величину $h_o = 5$ см. З рис. 2, *б* отримуємо другу рівність: $h = \frac{\ell_0 + |f|}{\ell_0} h_0$, де ℓ_0 – відстань між дзеркалом і водієм.

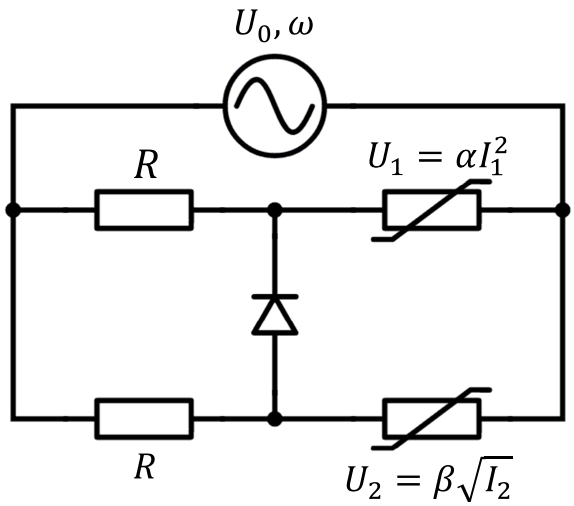
З двох виписаних рівностей ми отримуємо рівняння $\frac{H}{L}|f| = \frac{\ell_0 + |f|}{\ell_0} h_0$. Тоді відстань від дзеркала до зображення $|f| = \frac{\ell_0 L h_0}{H\ell_0 - L h_0}$. З формули для опуклого сферичного дзеркала $-\frac{2}{R} = \frac{1}{F} = \frac{1}{L} + \frac{1}{f}$ і, з урахуванням того, що відстань від дзеркала до зображення потрібно брати з від'ємним знаком (зображення уявне), отримуємо

$$R = \frac{2L|f|}{L - |f|} = \frac{2L h_0 \ell_0}{H\ell_0 - L h_0 - h_0 \ell_0} = 30 \text{ м}.$$

Відповідь: 30 м.

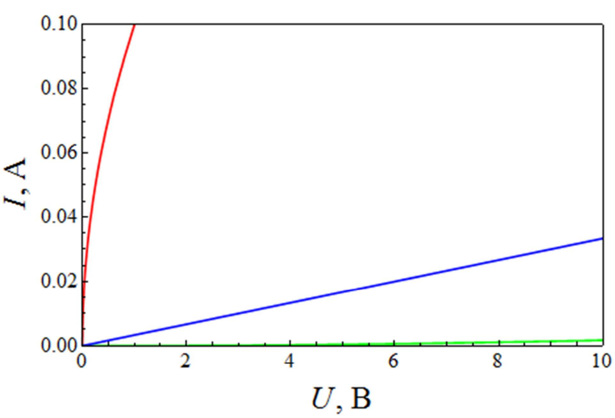
Нелінійна схема

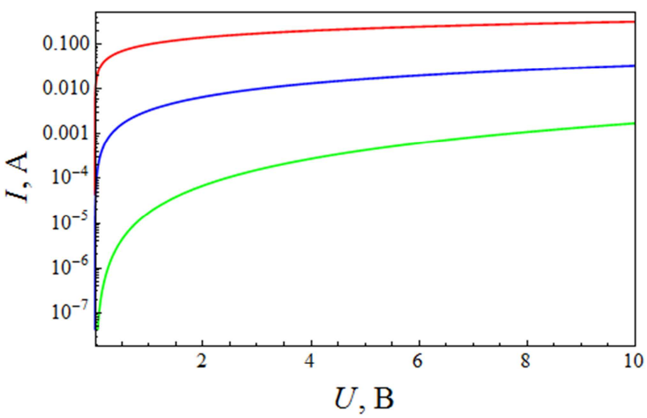
11 клас, задача 2



До джерела синусоїдальної напруги ефективної величини $U_0 = 4.00$ В та частоти $\omega = 100\pi$ с$^{-1}$ під'єднано схему (рис). Обидва резистора мають опір $R = 300$ Ом, вольтамперна характеристика двох інших приладів указана на схемі, причому $\alpha = 100$ В/А^2, $\beta = 240$ В/А$^{1/2}$. Оцініть середню теплову потужність схеми. У якому елементі або елементах виділяється найбільша кількість теплоти? Діод вважайте ідеальним.

Розв'язок





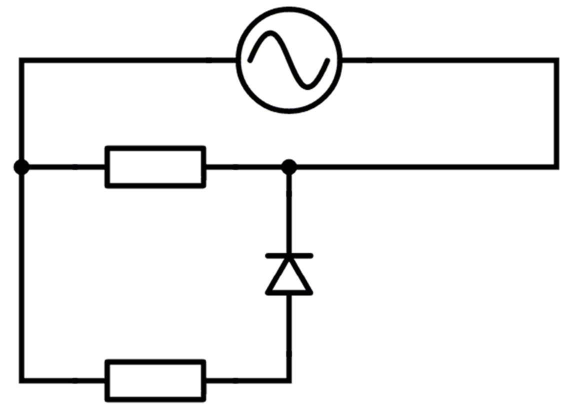
Можна дати точну відповідь на цю задачу, але значно простіше розв'язати її наближено. Побудуємо вольтамперні характеристики елементів: червона крива – елемент 1, зелена – 2, синя – резистори.

Можна побачити, що струми елементів відрізняються на порядок. Проілюструємо цю ідею кількісно. Обчислимо ефективні, так звані інтегральні, опори елементів за напруги порядка U_0, за формулою $r = U/I$:

$$r_\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{U_0/\alpha}} = \sqrt{\alpha U_0} = 20 \text{ Ом},$$

$$r_\beta = \frac{U_0}{U_0^2/\beta^2} = \frac{\beta^2}{U_0} = 14.4 \text{ кОм}.$$

Бачимо, що $r_\alpha \ll R \ll r_\beta$, тобто при напрузі U_0 нелінійний елемент 1 поводитиме себе майже як провідник з нехтовно малим опором, а елемент 2 – майже як розрив кола. Замінимо елемент 1 на провідник та вилучимо елемент 2 з кола. Тоді коло складатиметься з двох резисторів і діода. При одній з полярностей (плюс справа) діод буде відкритим, при іншій – закритим. Середня ж потужність дорівнюватиме середньому арифметичному потужностей:

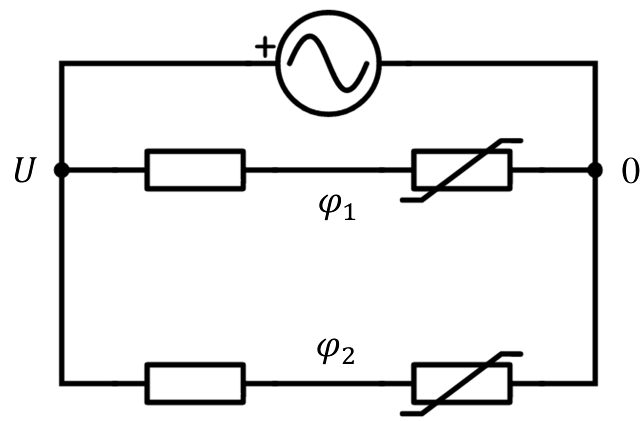


$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{U_0^2}{R} + \frac{U_0^2}{R/2}\right) = \frac{3U_0^2}{2R} = 80\ \text{мВт}.$$

Відповідь на друге питання тепер очевидна: основна частина тепла виділяється у верхньому резисторі.

Для порівняння, точна відповідь

Спочатку розглянемо випадок, коли діод закритий. Скористаємось методом вузлових потенціалів. У якості нульового рівня оберемо потенціал правого полюса джерела, тоді на лівому полюсі потенціал U дорівнює миттєвій напрузі на джерелі. Нехай потенціали вузлів всередині кола дорівнюють φ_1 та φ_2 (рис). Запишемо друге правило Кірхгофа для внутрішніх вузлів:



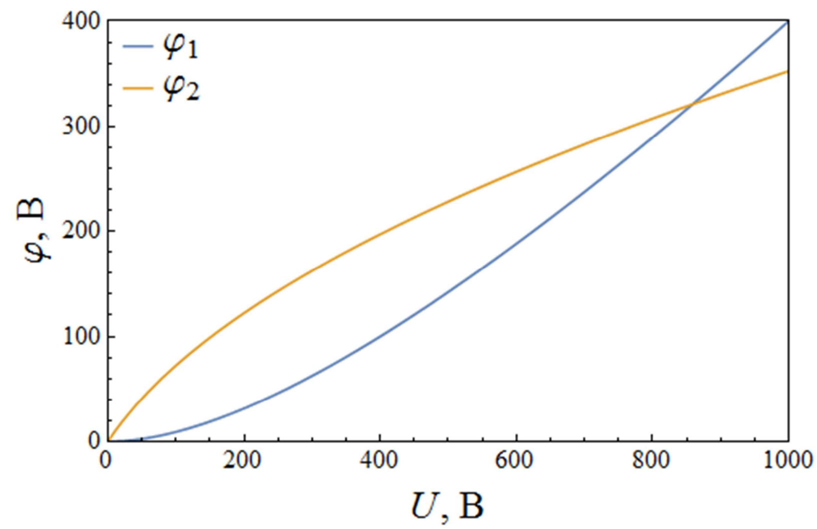
$$\sqrt{\frac{\varphi_1}{\alpha}} = \frac{U - \varphi_1}{R},$$

$$\frac{\varphi_2^2}{\beta^2} = \frac{U - \varphi_2}{R},$$

звідки

$$\varphi_1 = U + \frac{R^2 - R\sqrt{R^2 + 4\alpha U}}{2\alpha},$$

$$\varphi_2 = \frac{-\beta^2 + \beta\sqrt{\beta^2 + 4UR}}{2R}.$$



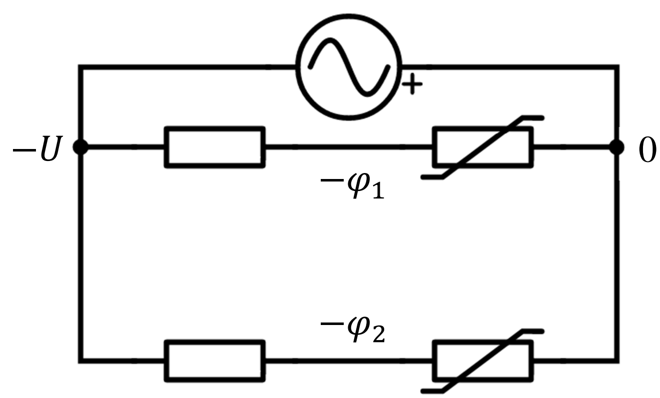
Бачимо, що співвідношення між φ_1 та φ_2 змінюється лише за великих напруг. Це означає, що при одній полярності напруги діод буде відкритим впродовж усієї половини періода, а при іншій – закритим. Розглянемо ці 2 випадки.

1. Діод закритий (рис). Тоді струм у верхній гілці

$$i_1 = \frac{U - \varphi_1}{R} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4U\alpha}}{2\alpha},$$

а в нижній

$$i_2 = \frac{U - \varphi_2}{R} = \frac{2UR + \beta^2 - \sqrt{4UR\beta^2 + \beta^4}}{2R^2}.$$



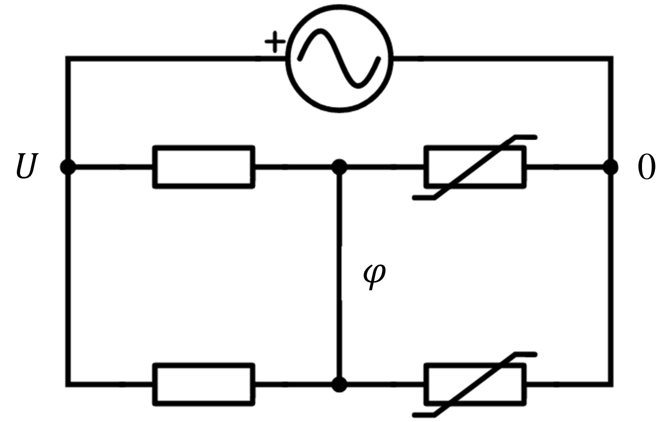
Миттєва потужність схеми

$$P = U(i_1 + i_2) = U\left(\frac{-R + \sqrt{R^2 + 4U\alpha}}{2\alpha} + \frac{2UR + \beta^2 - \beta\sqrt{4UR + \beta^2}}{2R^2}\right).$$

Оскільки у схемі змінного струму $U(t) = U_0\sqrt{2}\sin\omega t$, то виділення тепла за ці півперіода

$$Q_1 = \frac{U_0\sqrt{2}}{\omega}\int_0^{\pi}\left(\frac{-R + \sqrt{R^2 + 4U_0\alpha\sqrt{2}\sin\phi}}{2\alpha} + \frac{2U_0R\sqrt{2}\sin\phi + \beta^2 - \beta\sqrt{4U_0R\sqrt{2}\sin\phi + \beta^2}}{2R^2}\right)\sin\phi\, d\phi$$
$$= 0.543 \text{ мДж}.$$

2. Діод відкритий (рис). Нехай потенціал вузла всередині кола дорівнює φ. Запишемо друге правило Кірхгофа (баланс струмів) для цього вузла:



$$\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}}+\frac{\varphi^2}{\beta^2}=\frac{2(U-\varphi)}{R}.$$

Це рівняння можна звести до рівняння четвертого порядку, яке має аналітичний розв'язок. Проте ми це не робитимемо, а замість цього використовуватимемо численні розрахунки. Струм через коло

$$i=\frac{2(U-\varphi)}{R},$$

і нарешті, шукана кількість теплоти

$$Q_2=\frac{2U_0\sqrt{2}}{\omega R}\int_0^{\pi}\left(U_0\sqrt{2}\sin\phi-\varphi(\phi)\right)\sin\phi\,d\phi=1.04\ \text{мДж}.$$

Середня потужність схеми

$$P=\frac{(Q_1+Q_2)\omega}{2\pi}=79.4\ \text{мВт},$$

що на 0.1% відрізняється від наближеної.

Задача 3 теор. тур (11 клас)

В коливальному контурі L, C_0, R (рис.1) ємність C_0 періодично змінюється з часом. В моменти часу, коли напруга на ємності дорівнює нулю, вона стрибком зростає від значення C_0-ΔC до C_0+ΔC, а в моменти часу, коли напруга на ємності максимальна за абсолютною величиною, вона стрибком зменшується від C_0+ΔC до C_0-ΔC . Вважати, що m=ΔC/C_0<<1 та $R \ll \sqrt{L/C_0}$.

1. Знайдіть умову зростання амплітуди коливань в контурі.
2. Нехай ця умова не виконана, а в контур додатково увімкнене джерело гармонічної напруги для підтримання незатухаючих коливань, причому його частота збігається з частотою власних коливань контуру. Визначить відносну зміну величини опору R, яке було б еквівалентним за впливом на струм в контурі згаданій вище зміні ємності і як у такому випадку зміна ємності впливатиме на амплітуду напруги на реактивних елементах контуру?

В колебательном контуре L, C_0, R (рис.1) ёмкость C_0 периодически изменяется со временем. В моменты времени, когда напряжение на ёмкости равняется нулю, она скачком возрастает от значения C_0-ΔC до C_0+ΔC, а в моменты времени, когда напряжение на ёмкости максимально по абсолютной величине, она скачком уменьшается от C_0+ΔC до C_0-ΔC. Считать, что m=ΔC/C_0<<1 и $R \ll \sqrt{L/C_0}$.

1. Определите условие возрастания амплитуды колебаний в контуре.
2. Пусть это условие не выполняется, а в контур дополнительно включен генератор гармонических колебаний для поддержания незатухающих колебаний, причём его частота совпадает с частотой собственных колебаний контура. Определите относительное изменение величины сопротивления R, которое было бы эквивалентным по влиянию на ток в контуре упомянутому выше изменению ёмкости и как в таком случае изменение ёмкости повлияет на амплитуду напряжения на реактивных элементах контура?

Розв'язок.

1. При зміні ємності на величину dC енергія конденсатора змінюється на величину $dW = d\left(\dfrac{q^2}{2C}\right) = -\dfrac{q^2}{2C}\dfrac{dC}{C}$. В нашому випадку $dC = -2\Delta C$, зміна ємності, що супроводжується зміною енергії, відбувається двічі за період коливань при амплітудних значеннях напруги, тому енергія, що отримується при цьому контуром від джерела накачування, буде $dW_+ = 2\cdot\left(\dfrac{q_m^2}{2C_0}\right)\cdot\dfrac{2\Delta C}{C}$.

Вважаючи коливання в контурі гармонічними, запишемо енергію втрат на активному опорі за період: $\Delta W_- = \dfrac{R\cdot I_m^2}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \pi R q_m^2 \omega_0$, де враховано, що для гармонічних коливань $I_m = q_m\omega_0$, що отримується з: $I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(q_m \cdot \sin\omega t\right)$ при максимальному значенні функції $\sin\omega t = 1$.

Умова зростання амплітуди коливань - перевищення енергії, що надходить у контур, над втратами: $\Delta W_+ > \Delta W_-$, або $m > m_{крит} = \dfrac{\pi R\omega_0 C_0}{2} = \dfrac{\pi}{2}R\sqrt{\dfrac{C_0}{L}}$.

2. Якщо $m < m_{крит}$, то енергія, що надходить до контуру при зміні ємності, лише частково компенсує втрати на активному опорі. Це можна інтерпретувати як зменшення активного опору контуру:

$$\Delta W_- - \Delta W_+ = \pi R\omega_0 q_m^2 - 2mq_m^2 / C_0 = \pi R\omega_0 q_m^2 \cdot \left(1 - m/m_{крит}\right) = \pi \cdot R_{еф}\cdot\omega_0\cdot q_m^2$$

$R_{еф} = R\cdot\left(1 - m/m_{крит}\right)$. В результаті струм у контурі, а отже, і падіння напруги на реактивних елементах (зокрема, на індуктивності) на частоті ω_0 зростає у $k = \dfrac{R}{R_{еф}} = \dfrac{1}{1 - m/m_{крит}}$ разів порівняно із випадком, коли накачування відсутнє.

11 клас

Задача 4.

Як спрямоване однорідне магнітне поле з індукцією B відносно однорідного поля тяжіння (прискорення вільного падіння g), якщо частинка масою m і зарядом q рухається: 1) прямолінійно зі сталою швидкістю $\vec{v}$; 2) вздовж параболи зі сталим прискоренням $\vec{a}$. Чому дорівнює швидкість частинки у першому випадку і найменший радіус кривини траєкторії у другому, якщо $|\vec{a}| = g/2$? Відповідь проілюструйте схематичним зображенням траєкторії і напрямків полів.

Розв'язок. 1) На частинку діють сила тяжіння та сила Лоренца. Частинка рухатиметься рівномірно та прямолінійно, якщо ці сили компенсують одна одну, тобто $mg = qvB\sin\alpha$. Для цього необхідно, щоб сили були протилежно напрямлені, що досягається, коли магнітна індукція $\vec{B}$ перпендикулярна до $\vec{g}$.

Швидкість частинки $v = \dfrac{mg}{qB\sin\alpha}$.

На Рис.1 показано різні напрямки швидкості позитивно зарядженої частинки. Всі швидкості мають однакову проекцію $v\sin\alpha = \dfrac{mg}{qB}$ на вісь, що перпендикулярна і до $\vec{B}$, і до $\vec{g}$.

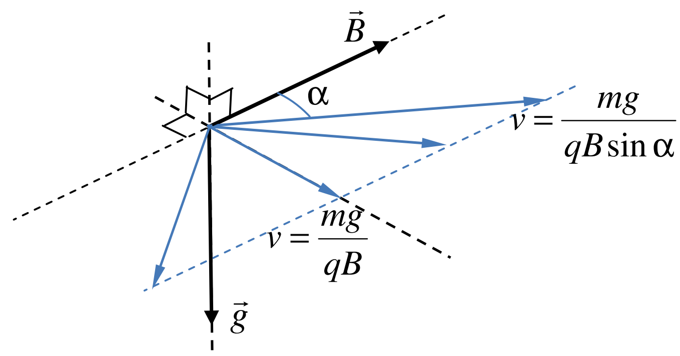


Рис.1

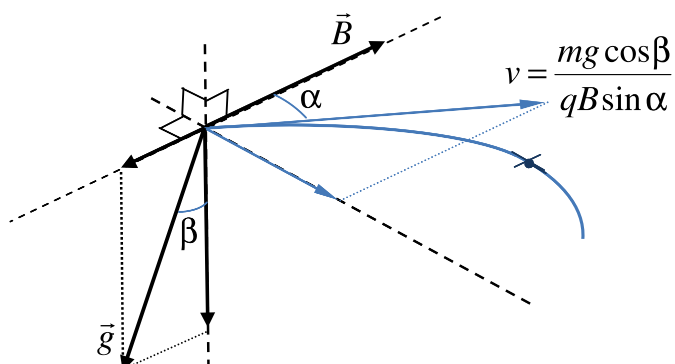


Рис.2

2) Парабола – плоска фігура. Отже, сума проекцій сил, що діють на частинку (сили тяжіння і сили Лоренца) на нормаль до площини, в якій лежить парабола, дорівнює нулю. Параболічна траєкторія виникає в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних рухів – рівномірного і рівноприскореного. Постійність прискорення означає постійність суми сил, що діють на частинку, а значить – постійність сили Лоренца. В результаті прискорення швидкість частинки зростає. Тоді сила Лоренца може залишатись постійною, якщо зростає лише компонента швидкості вздовж магнітного поля. Отже вектор $\vec{B}$ лежить в площині параболи вздовж її осі. Оскільки за умовою прискорення

частинки не рівне g, площина параболи не є вертикальною. Вона не може бути і горизонтальною також, оскільки в горизонтальному напрямку нема сили, яка б забезпечила постійне прискорення. Отже площина параболи нахилена до горизонту. Розкладемо вектор $m\vec{g}$ на компоненти перпендикулярну і паралельну площині параболи. Перпендикулярна компонента компенсується силою Лоренца, паралельна – забезпечує прискорення частинки $a = g\sin\beta$ у площині, що проходить через $\vec{B}$ і утворює кут β з горизонтом. За умовою $a = g/2$,

$\sin\beta = 1/2$, $\beta = 30^\circ$. Максимальна кривина параболи у її вершині (позначена точкою на Рис.2). У цій точці швидкість руху частинки набуває найменшого значення $v = \dfrac{mg\cos\beta}{qB}$. Отже, тангенціальне прискорення дорівнює нулю, і повне прискорення $a = g\sin\beta$ співпадає з нормальним (доцентровим)

$a = g\sin\beta = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{mg\cos\beta}{qB}\right)^2$, звідки

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{qB}{m\cos\beta}\right)^2 \frac{\sin\beta}{g} = \frac{2}{3}\frac{q^2B^2}{m^2g}.$$

Задача 5 11 клас

Згідно сучасній теорії чорні дірки (ЧД) характеризуються трьома фізичними величинами – масою ЧД, її кутовим моментом та її електричним зарядом. В цій задачі будемо розглядати ЧД з нульовими значеннями кутового моменту та заряду. Однією з найбільш важливих характеристик ЧД є площа поверхні горизонту ЧД – уявної сфери, що охоплює ЧД, всередині якої гравітаційна сила настільки велика, що навіть світло не може вилетіти за межі цієї сфери. Згідно принципам класичної фізики ЧД може тільки поглинати енергію. Якщо T-температура речовини, що оточує ЧД , то одиниця площі Π поверхні горизонту ЧД в одиницю часу поглинає енергію, пропорційну T і квадрату маси ЧД. Цей закон має вигляд $(1/\Pi)$ $dE/dt = qk_B T m^2$, де q коефіцієнт пропорційності, k_B – стала Больцмана.

<u>Завдання 1.</u> Вважаючи, що коефіцієнт q залежить тільки від швидкості світла c, гравітаційної сталої G та маси Сонця M_e , виразіть q через c, G, M_e . За законам класичної фізики ЧД існували би вічно, знищуючи все навколо себе. Але врахування квантових ефектів приводить до того, що ЧД може також втрачати енергію за рахунок випромінювання елементарних частинок (випромінювання Гокінга). Внаслідок цього ефекту час життя ЧД може бути скінченним. Оцініть час життя ЧД.

<u>Завдання 2.</u> Враховуючи, що площа П горизонту ЧД залежить тільки від її маси m, швидкості світла c і гравітаційної сталої G, виразіть площу П через m, c, G.

<u>Завдання 3.</u> На основі термодинамічного означення ентропії $dS = \delta Q/T$, було введено поняття ентропії ЧД $S = \eta\Pi$, де $\eta = (k_B c^3)/(\hbar G)$, $\hbar = h/(2\pi)$, h – стала Планка. Енергія, що виділяється з поверхні площі Π чорної дірки в одиницю часу дорівнює $\sigma(T_H)^4$, де $\sigma = (k_B^4)/(c^2\hbar^3)$, а T_H –температура Хокінга, яка залежить від маси ЧД і фізичних констант c, G, ħ, і k_B. Знайдіть цю залежність, використовуючи закон термодинаміки $dE = \delta Q + \delta A$ *(Q – теплота, яка виділяється, A – робота, яку виконує система), та* вважаючи, що E = mc^2 – повна енергія ЧД, і ЧД не виконує ніякої роботи A.

<u>Завдання 4.</u> Внаслідок поглинання та випромінювання енергії маса ЧД змінюється. Виведіть рівняння, яке описує цей процес.

<u>Завдання 5.</u> Знайдіть час життя чорної дірки, вважаючи що її початкова маса m_0.

Примітка:Якщо ви не розв'язали: завдання 1 - то при розв'язуванні інших завдань вважайте коефіцієнт пропорційності q відомим; завдання 2–то вважайте що площа поверхні горизонту ЧД пропорційною квадрату її маси

Розв'язок

Завдання 1

З співвідношення $(1/\Pi)\ dE/dt = qk_B T m^2$ слідує $[q]=г^{-2}см^{-2}с^{-1}$. Шукаємо q у вигляді:

$q = G^{\alpha}c^{\beta}M^{\gamma}$. З аналізу розмірностей отримуємо систему рівнянь для визначення невідомих α,β,γ.

$-2=-\alpha+\gamma$
$-2=3\alpha+\beta$
$1=2\alpha+\beta$
Звідки $\alpha=-3$, $\beta=7$, $\gamma=-5$, отже $q=c^7/(M^5G^3)$

Завдання 2

Шукаємо розв'язок у вигляді $\Pi = m^a c^b G^g$, де a,b,g – невідомі величини, які визначаються з аналізу розмірностей величин:

$$[\text{см}]^2 = [\text{с}]^a[\text{см}\cdot\text{сек}^{-1}]^b[\text{см}^3\text{г}^{-1}\text{сек}^{-2}]^g \Rightarrow \begin{Bmatrix} a-g=0, \\ b+3g=2, \\ -b-2g=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a=2, \\ b=-4, \\ g=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{m^2G^2}{c^4}$$

Завдання 3. Якщо робота не виконується, то $dA = 0$ і $dE=dQ=T_H dS$, Звідки

$T_H = (dS/dE)^{-1}$. Так як $S = \eta\ \Pi$, (де η і Π в же відомі), то $S = \frac{k_B m^2 G}{\hbar c}$ ю Так як $E=mc^2$

то отримуємо

$$T_H = \left(\frac{dS}{c^2dm}\right)^{-1}$$

звідки $T_H = \frac{\hbar c^3}{2k_{bG}}\frac{1}{m}$

Завдання 4. Враховуючи, що поверхня горизонту ЧД поглинає і випромінює енергію, записуємо:

$\frac{1}{\Pi}\frac{dE}{dt} = -\sigma T_H^4 + qk_bTm^2$, де $\Pi = \frac{m^2G^2}{c^4}$, $q=c^7/(M^5G^3)$,

$\sigma = \frac{k_B^4}{c^2\hbar^3}$, $T_H = \frac{\hbar c^3}{2k_B m\sigma}$, $E = mc^2$.

Звідси отримуємо шукане рівняння $\frac{dm}{dt} = \alpha m^4 - \frac{\beta}{m^2}$ де $\alpha = \frac{ck_b\,T}{GM^5}$ $\beta = \frac{1}{16}\frac{\hbar c^4}{G}$

5. Інтегруючи попереднє рівняння, знайдемо $\int_{m_0}^{0}\frac{dm}{dm^4-\frac{\beta}{m^2}} = \int_0^t dt$ звідки

$t = \int_{m_0}^{0}\frac{m^2dm}{(\sqrt{\alpha}m^3)^2-\beta} = \frac{1}{6\sqrt{\alpha\beta}}ln\left|\frac{\beta+m^3\sqrt{\alpha}}{\beta-m^3\sqrt{\alpha}}\right|$ Різні випадки...