10.1 Міжнародна Космічна Станція (МКС), рухаючись по приблизно коловій орбіті на висоті близько 400 км із середньою швидкістю 7970 м/с, за 30 діб втрачає 2 км висоти за рахунок опору розрідженої атмосфери (для утримання висоти у деякі моменти станцію прискорюють, вмикаючи ракетні двигуни). Вважаючи, що взаємодія МКС з атмосферою зводиться до лобового опору, і кожна частинка після зіткнення з поверхнею станції набуває її швидкості, оцінити ефективну площу «лобової поверхні» МКС, що збирає частинки атмосфери. Маса МКС 420 тон. Радіус Землі 6400 км. Густина атмосфери на висоті 400 км дорівнює $5{,}68 \cdot 10^{-13}$ кг/м^3.

Розвязок:

Опір атмосфери призводитиме до поступового зменшення повної енергії системи, яка складаєтсья з потенціальної

$$W_П = -\gamma \frac{Mm}{R_E + H}$$

(тут γ-стала сили тяжіння, M та m - маси Землі та МКС, R_E - радіус Землі, H - висота орбіти) та кінетичної

$$W_К = \frac{mu^2}{2}$$

(тут u - швидкість МКС). Зміна повної енергії станції за рахунок передачі імпульсу до неї від частинок атмосфери дорівнюватиме роботі сил лобового опору. За час Δt висота орбіти зменшиться на ΔH, а швидкість зросте на Δu кінетична (нижчій орбіті відповідатиме більша швидкість). Отже, різниця енергій

$$-\gamma \frac{Mm}{R_E + H} + \frac{mu^2}{2} - \left(-\gamma \frac{Mm}{R_E + H - \Delta H} + \frac{m(u + \Delta u)^2}{2} \right) = A(\Delta t) \quad (1)$$

Сила лобового опору складатиме

$$F = u \frac{\Delta m_a}{\Delta t}$$

(тут $\frac{\Delta m_a}{\Delta t}$ - загальна маса атмосферних частинок, що зіткнулися з лобовою поверхнею станції за одиницю часу).

Робота цієї сили за час Δt дорівнюватиме:

$$A(\Delta t) = Fu\Delta t = u \frac{\Delta m_a}{\Delta t} \cdot u\Delta t = \Delta m_a \cdot u^2 = \rho u S \Delta t \cdot u^2 = \rho u^3 S \Delta t \quad (2)$$

(тут Δm_a буде загальною масою атмосферних частинок, що зіткнуться з лобовою поверхнею станції за час Δt, ρ - густина атмосфери на висоті H, S - ефективна площа лобової поверхні МКС, яку нам треба знайти). Таким чином, з (1) та (2) маємо:

$$-\gamma\frac{Mm}{R_E+H}+\frac{mu^2}{2}-\left(-\gamma\frac{Mm}{R_E+H-\Delta H}+\frac{m(u+\Delta u)^2}{2}\right)=\rho u^3 S\Delta t \qquad (3)$$

У складі цього виразу можна окремо розглянути різницю кінетичних і різницю потенціальних енергій. Для різниці кінетичних енергій маємо:

$$W_K(0)-W_K(\Delta t)=\frac{mu^2}{2}-\frac{m(u+\Delta u)^2}{2}=\frac{mu^2}{2}\left(1-\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^2\right)=\frac{mu^2}{2}\left(1-1-2\frac{\Delta u}{u}-\left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2\right). \qquad (4)$$

Очевидно, зміна швидкості МКС за рахунок малої сили лобового опору буде набагато меншою за саму її швидкість ($\Delta u << u$). Тоді квадратом малої величини $\left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2$ у (4) можна знехтувати. Отримаємо:

$$W_K(0)-W_K(\Delta t)=-mu\cdot\Delta u \qquad (5)$$

Для потенціальних енергій маємо:

$$W_П(0)-W_П(\Delta t)=-\gamma\frac{Mm}{R_E+H}-\left(-\gamma\frac{Mm}{R_E+H-\Delta H}\right)=\gamma\frac{Mm}{(R_E+H)\left(1-\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)}-\gamma\frac{Mm}{R_E+H}. \qquad (6)$$

Домножимо чисельник та знаменник першого доданку в (6) на $\left(1+\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)$.

$$\gamma\frac{Mm\left(1+\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)}{(R_E+H)\left(1-\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)\left(1+\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)}-\gamma\frac{Mm}{R_E+H}=\gamma\frac{Mm\left(1+\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)}{(R_E+H)\left(1-\left(\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)^2\right)}-\gamma\frac{Mm}{R_E+H} \qquad (7)$$

Квадратом малої величини $\left(\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)^2$ також можна знехтувати. Тоді вийде:

$$W_П(0)-W_П(\Delta t)=\gamma\frac{Mm}{R_E+H}\left(1+\frac{\Delta H}{R_E+H}\right)-\gamma\frac{Mm}{R_E+H}=\gamma\frac{Mm}{(R_E+H)^2}\Delta H \quad . \qquad (8)$$

Враховуючи (5) та (8), вираз (3) запишеться у такому вигляді:

$$W_П(0)+W_K(0)-W_П(\Delta t)-W_K(\Delta t)=\gamma\frac{Mm}{(R_E+H)^2}\Delta H-mu\cdot\Delta u=\rho u^3 S\Delta t \qquad (9)$$

Звідки маємо шукану площу:

$$S=\frac{\gamma Mm}{\rho u^3(R_E+H)^2}\frac{\Delta H}{\Delta t}-\frac{m}{\rho u^2}\frac{\Delta u}{\Delta t}. \qquad (10)$$

Масу Землі та прискорення $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, які за умовою не даються, можна отримати з рівності сили тяжіння й відцентрової сили інерції для колової орбіти:

$$\gamma \frac{Mm}{(R_E + H)^2} = \frac{mu^2}{R_E + H}, \tag{11}$$

тобто для висот H та $H - \Delta H$ маємо:

$$\gamma \frac{M}{R_E + H} = u^2, \qquad \gamma \frac{M}{R_E + H - \Delta H} = (u + \Delta u)^2,$$

тобто

$$\gamma \frac{M}{(R_E + H)\left(1 - \frac{\Delta H}{R_E + H}\right)} = u^2 \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^2. \tag{12}$$

В цьому виразі, аналогічно до (7), у лівій частині можна домножити чисельник та знаменник на $\left(1 + \frac{\Delta H}{R_E + H}\right)$ і після цього знехтувати $\left(\frac{\Delta H}{R_E + H}\right)^2$ у знаменнику. У правій частині можна розкрити дужки і знехтувати $\left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2$. Отримаємо:

$$\gamma \frac{M\left(1 + \frac{\Delta H}{R_E + H}\right)}{(R_E + H)\left(1 - \frac{\Delta H}{R_E + H}\right)\left(1 + \frac{\Delta H}{R_E + H}\right)} = \gamma \frac{M\left(1 + \frac{\Delta H}{R_E + H}\right)}{(R_E + H)\left(1 - \left(\frac{\Delta H}{R_E + H}\right)^2\right)} = u^2 \left(1 + 2\frac{\Delta u}{u} + \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2\right)$$

$$\gamma \frac{M}{(R_E + H)}\left(1 + \frac{\Delta H}{R_E + H}\right) = u^2 \left(1 + \frac{2\Delta u}{u}\right),$$

тобто врешті

$$\gamma \frac{M}{(R_E + H)^2} \Delta H \approx 2u\Delta u. \tag{13}$$

Звідки можна знайти зміну швидкості Δu через зміну висоти ΔH:

$$\Delta u = \frac{\gamma M}{2u(R_E + H)^2} \Delta H. \tag{14}$$

Підставимо (14) у вираз для площі (10).

$$S = \frac{\gamma Mm}{\rho u^3 (R_E + H)^2} \frac{\Delta H}{\Delta t} - \frac{m}{\rho u^2} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\gamma Mm}{\rho u^3 (R_E + H)^2} \frac{\Delta H}{\Delta t} - \frac{m}{\rho u^2} \frac{\gamma M}{2u(R_E + H)^2} \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{\gamma Mm}{2\rho u^3 (R_E + H)^2} \frac{\Delta H}{\Delta t},$$

Тобто ефективна площа лобової поверхні:

$$S == \frac{\gamma M m}{2\rho u^3 \left(R_E + H\right)^2} \frac{\Delta H}{\Delta t}. \qquad (15)$$

Також з (11) для маси Землі можна записати:

$$M = \frac{u^2}{\gamma}(R_E + H). \qquad (16)$$

Підставивши (16) у (15), отримаємо:

$$S = \frac{m}{2\rho u \left(R_E + H\right)} \frac{\Delta H}{\Delta t} \qquad (17)$$

Зазначимо, що у цій формулі також вдалося позбавитися від гравітаційної сталої. Підставимо тепер числові значення. Швидкість втрати висоти $\frac{\Delta H}{\Delta t}$ за умовою складає 2 км за 30 діб. Тоді

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{2000}{30 * 24 * 60 * 60} \approx 7.72 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Підставивши це, а також усі інші значення у (17), отримаємо:

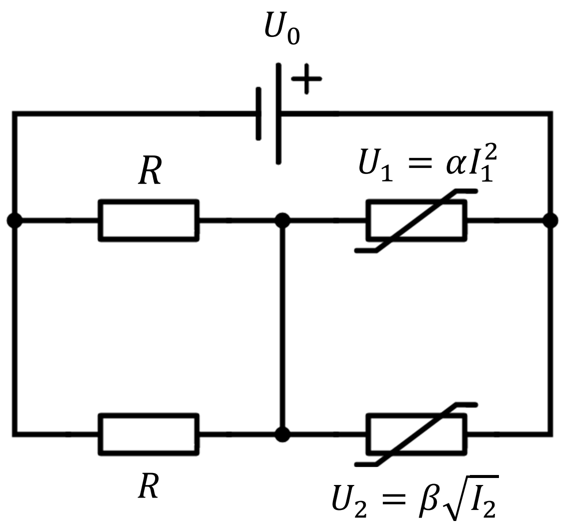
$$S \approx 5300 \text{ м}^2 \qquad (18)$$

Ця оцінка цілком відповідає параметрам МКС, яка має лінійні розміри 108.5 м x 72.8 м x 20 м та оснащена сонячними батареями загальною площею близько 4000м^2 .

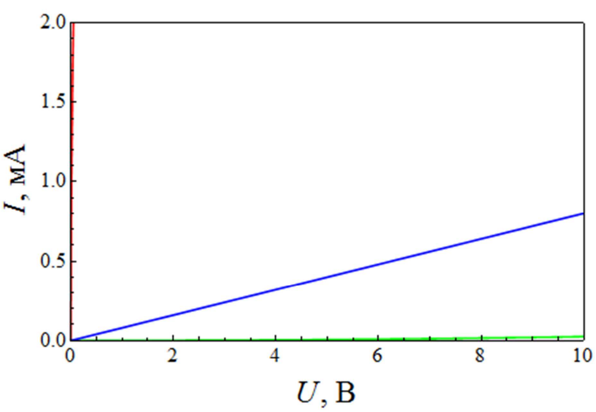
Нелінійна схема

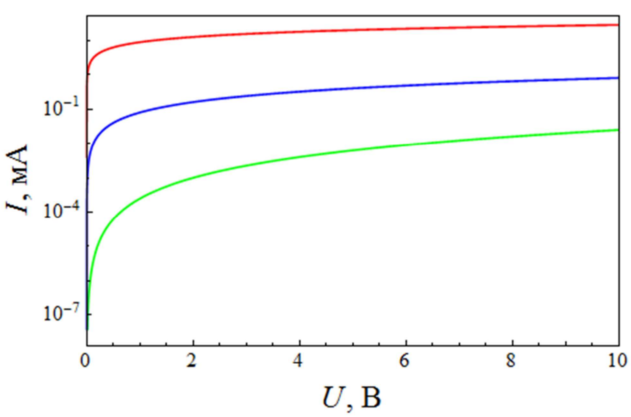
10 клас, задача 2

До джерела постійної напруги $U_0 = 5.00$ В під'єднано схему (рис). Обидва резистора мають опір $R = 12.5$ кОм, вольтамперна характеристика двох інших приладів указана на схемі, причому $\alpha = 12.5\,\text{кВ/А}^2$, $\beta = 2.00\,\text{кВ/А}^{1/2}$. Оцініть теплову потужність схеми з точністю не менше ніж 1 %. У якому елементі або елементах виділяється найбільша кількість теплоти?



Розв'язок





Можна дати точну відповідь на цю задачу, але значно простіше розв'язати її наближено. Побудуємо вольтамперні характеристики елементів: червона крива – елемент 1, зелена – 2, синя – резистори.

Можна побачити, що струми елементів відрізняються на порядок. Проілюструємо цю ідею кількісно. Обчислимо ефективні, так звані інтегральні, опори елементів за напруги порядка U_0, за формулою $r = U/I$:

$$r_\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{U_0/\alpha}} = \sqrt{\alpha U_0} = 0.25\ \text{кОм},$$

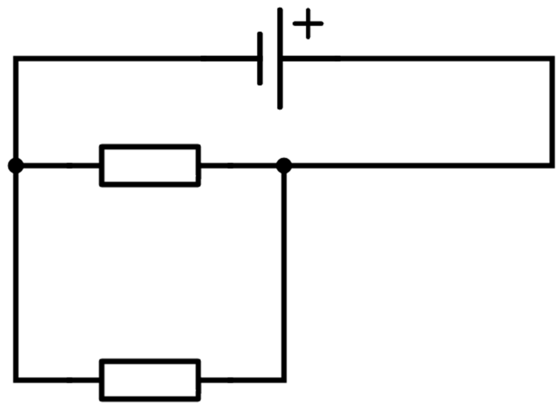
$$r_\beta = \frac{U_0}{U_0^2/\beta^2} = \frac{\beta^2}{U_0} = 800\ \text{кОм}.$$

Бачимо, що $r_\alpha \ll R \ll r_\beta$, тобто при напрузі U_0 нелінійний елемент 1 поводитиме себе майже як провідник з нехтовно малим опором, а елемент 2 – майже як розрив кола.

Замінимо елемент 1 на провідник та вилучимо елемент 2 з кола. Тоді коло складатиметься лише з двох паралельно під'єднаних до джерела резисторів, і його потужність

$$P = \frac{2U_0^2}{R} = 4 \text{ мВт}.$$

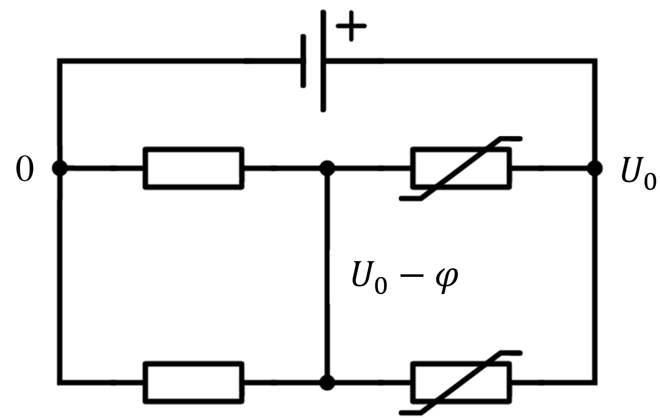
Відповідь на друге питання тепер очевидна: основна частина тепла виділяється в резисторах.



Для порівняння, точна відповідь

Скористаємось методом вузлових потенціалів. У якості нульового рівня оберемо потенціал від'ємного полюса джерела, тоді на додатному полюсі потенціал U_0. Нехай потенціал вузла всередині кола дорівнює $U_0 - \varphi$. Запишемо друге правило Кірхгофа (баланс струмів) для цього вузла:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{\varphi^2}{\beta^2} = \frac{2(U_0 - \varphi)}{R}.$$



Аналітично це рівняння розв'язати складно, численно ж $\varphi \approx 7.975$ мВ (учні, взагалі-то, мають можливість отримати цей результат, наприклад за допомогою метода половинного ділення). Бачимо, що майже вся напруга падає на резисторах, тобто наближення є розумним. Нарешті, потужність елементів

$$P_\alpha = U_\alpha I_\alpha = \varphi\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}} = 6.37 \cdot 10^{-6} \text{ Вт},$$

$$P_\beta = U_\beta I_\beta = \frac{\varphi^3}{\beta^2} = 1.27 \cdot 10^{-13} \text{ Вт},$$

$$P_R = \frac{(U_0 - \varphi)^2}{R} = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ Вт},$$

і сумарна потужність $P = P_\alpha + P_\beta + 2P_R = 4.00 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 4.00 \text{ мВт}$.

Критерії оцінювання

Наближений розв'язок

При однакових напругах струми елементів відрізняються порядками – 2.0
Розрахунок ефективних опорів або побудова схематичної вольтамперної характеристики – 0.5
Вилучення елемента β – 0.5
Заміна елемента α на провідник з нульовим опором – 1.0
Розрахунок потужності спрощеної схеми – 0.5
Теплота виділяється в основному в резисторах – 0.5

Точний розв'язок

Використання законів Ома або правил Кірхгофа – 1.0
Отримання кінцевого рівняння на будь-яку введену величину – 0.5
Використання методу половинного ділення або графічний розв'язок – 1.0
Кінцевий результат з похибкою в межах

- <1 %: 1.5
- 1% – 3%: 1.0
- 3% – 10%: 0.5

Отримані потужності елементів схеми, теплота виділяється в основному в резисторах – 1.0

Оцінка доданків кінцевого рівняння

Використання законів Ома або правил Кірхгофа – 1.0
Отримання кінцевого рівняння на будь-яку введену величину – 0.5
Аналіз доданків рівняння, нехтування відповідними доданками з β – 1.0
Кінцевий результат з похибкою в межах

- <1 %: 1.5
- 1% – 3%: 1.0
- 3% – 10%: 0.5

Отримані потужності елементів схеми, теплота виділяється в основному в резисторах – 1.0

10 клас

Задача № 3

Исследуя реакцию, в которой два вещества *A* и *B* превращались в вещество *C*, ученые установили следующие три факта: (I) при смешивании *1* кг вещества *A* и *3* кг вещества *B* в результате реакции получается *4* кг вещества *C* при температуре *120*ºC; (II) при смешивании *2* кг вещества *A* и *7* кг вещества *B* образуется смесь веществ *B* и *C* при температуре *116*ºC. (III) при смешивании *3* кг вещества *A* и *6* кг вещества *B* получается смесь веществ *A* и *C* при температуре *95*ºC. Во всех опытах начальная температура исходных веществ была равна *20*ºC. Чему равны удельные теплоемкости веществ *A* и *B*, если удельная теплоемкость вещества *C* равна *300* Дж/(ºC·кг) ?

Решение

Способ 1

Кількість теплоти, що виділяється у першому випадку, йде на нагрівання речовини *C*:

$$Q = c_c m_c \Delta t_1. \qquad (1)$$

Тут $m_c = 4$ кг, $\Delta t_1 = 100$ °C.

Кількість теплоти, що виділяється у другому випадку, йде на нагрівання речовини *C* удвічі більшої маси, та нагрівання залишку $m_0 = 1$ кг речовини B:

$$2Q = (2c_c m_c + c_B m_0)\Delta t_2, \qquad (2)$$

де $\Delta t_2 = 96$ °C.

Аналогічно у третьому випадку, де в залишку $m_0 = 1$ кг речовини A:

$$2Q = (2c_c m_c + c_A m_0)\Delta t_3, \qquad (3)$$

де $\Delta t_3 = 75$ °C.

Розв'язуючи систему рівнянь (1) – (3), отримуємо:

$$c_A = \frac{2c_c m_c(\Delta t_1 - \Delta t_3)}{m_0 \Delta t_3} = 800\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{°C}},$$

$$c_B = \frac{2c_c m_c(\Delta t_1 - \Delta t_2)}{m_0 \Delta t_2} = 100\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{°C}}.$$

Способ 2

На рисунке 1 показано, какие вещества и при какой температуре образуются в каждом случае.

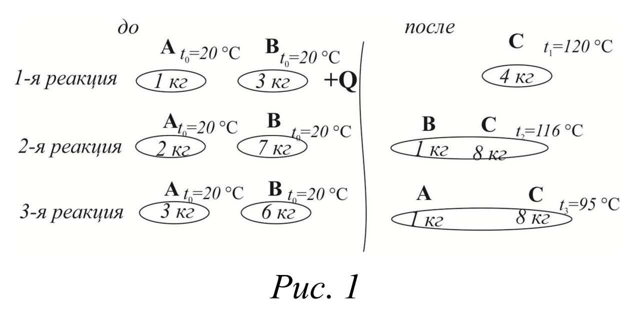


Рис. 1

Хотя в реальных процессах реакция образования вещества C и нагрев веществ за счет выделяющегося тепла идут одновременно, мы можем мысленно разделить эти процессы и считать, что во втором и в третьем случаях сначала образуется 8 кг вещества C при температуре 120℃, а затем происходит выравнивание температур (рис. 2). При таком подходе мы можем составить уравнения баланса тепла для этих случаев и найти теплоемкости веществ A и B.

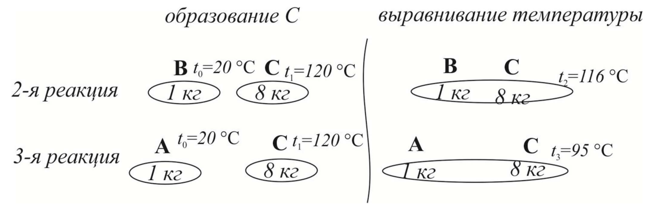


Рис. 2

Для второго случая имеем:

$$c_B m_0 t_0 + c_C m t_1 = (c_B m_0 + c_C m) t_2.$$

Здесь $m_0 = 1$ кг – масса вещества B, $m = 8$ кг - масса вещества С, c_B и c_C – удельные теплоемкости этих веществ.

Из этого уравнения получаем первый ответ

$$c_B = \frac{m c_C (t_1 - t_2)}{m_0 (t_2 - t_0)} = 100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

Аналогично для вещества A получаем:

$$c_A = \frac{m c_C (t_1 - t_3)}{m_0 (t_3 - t_0)} = 800 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

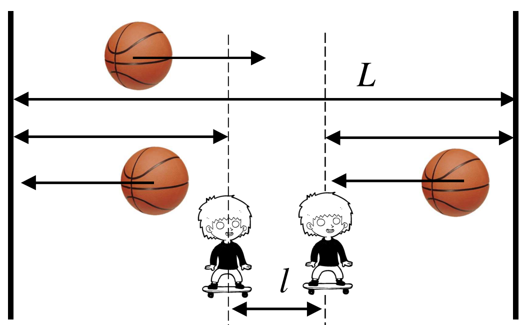
Ответ: $c_A = 800 \frac{\text{Дж}}{\text{кг·град}}$, $c_B = 100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг·град}}$.

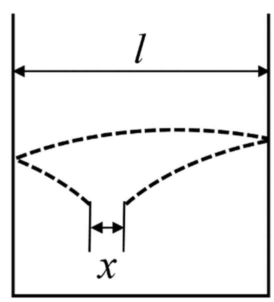
10.4. Між двома вертикальними стінками хлопчик поставив перпендикулярно до них скейтборд і став на нього з м'ячем. Потім він сильно кинув м'яч в одну зі стінок і після того, як той відбився від неї та другої стінки, піймав його. Яку відстань проїхав хлопчик? Удари м'яча о стінку вважати абсолютно пружними, опором повітря та втратами енергії на тертя знехтувати. Маса м'яча m, маса хлопчика M, відстань між стінками L. Інші необхідні дані можете ввести самостійно. Проаналізуйте отриману відповідь з фізичної точки зору.

Розв'язок. Розглянемо лише горизонтальний рух частин системи хлопчик-м'яч. Нехай горизонтальна складова швидкості м'яча **v** у нерухомій відносно стінок системі відліку. За рахунок закону збереження горизонтальної складової імпульсу системи хлопчик після кидання набуде швидкість $\boldsymbol{V} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{m}/\boldsymbol{M}$. Тоді нехтуючи втратами, як передбачено в умові задачі, після двох відбивань від стінок хлопчик зустріне м'яча, який рухається у тому ж напрямку, с тією ж горизонтальною складовою швидкості, як і початкова. Тобто м'яч буде рухатися назустріч хлопчику, а тому після того, як м'яч було спіймано, хлопчик зупинився.

На цей час хлопчик на скетборді проїхав відстань:

$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}$, а м'яч пролетів $\boldsymbol{2L} - \boldsymbol{l} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{t} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{l}/\boldsymbol{V}$.





Звідки $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{2L}/(\boldsymbol{1} + \mathbf{v}/\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{2L}/(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{M}/\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{2L}\cdot\boldsymbol{m}/(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{M})$.

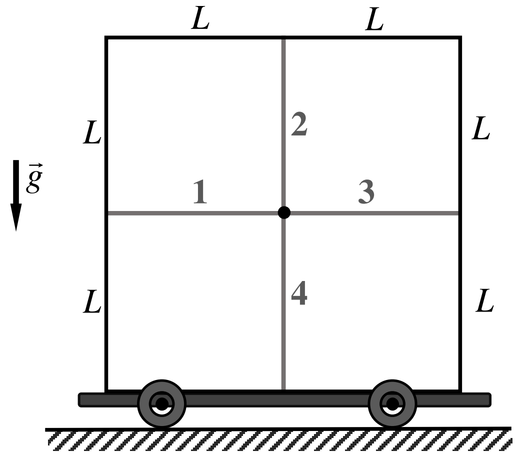
Аналізуючи умови задачі та її відповідь треба виявити незалежність відповіді від швидкості кидання м'яча та від кута його кидання до горизонту.

Проаналізувати вертикальний рух м'яча:

Нехай хлопчик кинув м'яча зі швидкістю $\mathbf{v}_0$ під кутом $\boldsymbol{\alpha}$ до горизонту, а також, що впіймав він м'яча на тій самій висоті, з якої його кинув. Траєкторія м'яча і переміщення хлопчика $\boldsymbol{x}$ зображені на схематичному рисунку.

Якщо хлопчик проїхав відстань $\boldsymbol{x}$, тоді м'яч пролетів по горизонталі відстань $\boldsymbol{2l} - \boldsymbol{x}$. Оскільки відбиття від вертикальної стінки абсолютно пружнє, під час нього змінюється тільки горизонтальна складова швидкості, а саме, змінює свій напрям на протилежний. Отже, для відстані, який пролетить м'яч вздовж горизонталі і часу його руху можна застосувати звичайні вирази для тіла, кинутого під кутом $\boldsymbol{\alpha}$ до горизонту.

Задача 9. Пружну нитку зі спеціального матеріалу, що забезпечує виконання закону Гука для значних видовжень, розрізали на частини 1,2,3,4 зі співвідношенням довжин 1:2:3:4. Цими відрізками нитки прикріпили невеликий тягарець до середин сторін, встановленої на візку вертикальної квадратної рамки. З яким прискоренням рухається візок по горизонтальній площині, якщо тягарець перебуває у центрі рамки, а всі нитки при цьому розтягнуті (див. рис.2)? Визначте період руху тягарця, якщо йому тепер надати невелику швидкість у площині рамки. Довжина сторони квадрату 2L. Довжину пружної нитки вважати відомою.



Розв'язок. Позначимо довжину пружної нитки через l_0, довжину її найменшого відрізку через l, а його жорсткість через k. Тоді другий відрізок матиме довжину $2l$ і жорсткість $k/2$, третій, відповідно, $3l$ і $k/3$, а четвертий $4l$ і $k/4$. Прискорення візку має бути спрямованим вліво, щоб розтягнути найбільш жорстку першу нитку. Сили, що діють на тягарець зі сторони ниток, дорівнюють

$$F_1 = k(L-l)\,,\ F_2 = \frac{k}{2}(L-2l)\,,\ F_3 = \frac{k}{3}(L-3l)\,,\ F_4 = \frac{k}{4}(L-4l)\,.$$

З проекцій другого закону Ньютона на горизонтальну і вертикальну осі маємо:

$$\begin{cases} ma = F_1 - F_3 = \dfrac{2k}{3}L, \\ mg = F_2 - F_4 = \dfrac{k}{4}L. \end{cases} \tag{1}$$

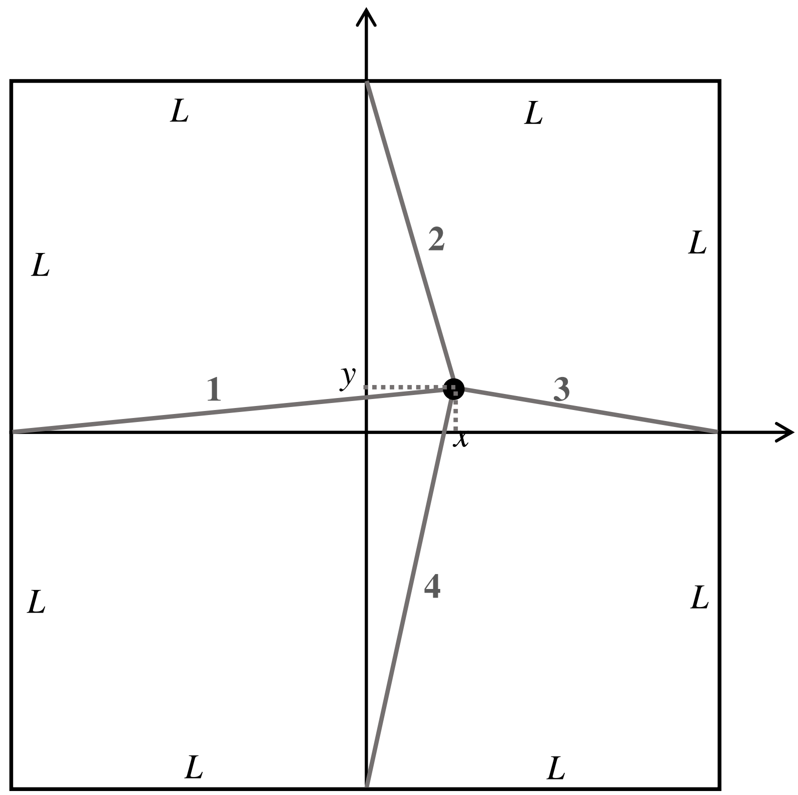
Звідки й знаходимо, що $a = \dfrac{8}{3}g$. Також виразимо невідому жорсткість $k = \dfrac{4mg}{L}$.

Припустимо тепер, що через центр квадрату з рівноважним положенням тягарця проходять координатні осі (вправо вісь OX і вгору вісь OY), а тягарець перемістився у точку з координатами (x, y). Абсолютні значення цих координат за умовою задачі малі у порівнянні з L внаслідок малої початкової швидкості. Запишемо проекції на вісь OX додаткових (до рівноважного положення) сил, що виникають з боку пружних ниток при зміщенні тягарця:

$$\begin{cases} F_{1x} = -k_1 x, \\ F_{3x} = -k_3 x, \\ F_{2x} = -F_2 \dfrac{x}{L}, \\ F_{4x} = -F_4 \dfrac{x}{L}, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} F_{2y} = -k_2 y, \\ F_{4y} = -k_4 y, \\ F_{3y} = -F_3 \dfrac{y}{L}, \\ F_{4y} = -F_4 \dfrac{y}{L}. \end{cases}$$

Проекції другого закону Ньютона на координатні осі мають вигляд

$$\begin{cases} ma_x = -k\left(\dfrac{25}{12} - 2\dfrac{l}{L}\right)x, \\ ma_y = -k\left(\dfrac{25}{12} - 2\dfrac{l}{L}\right)y, \end{cases}$$



Звідки отримуємо рівняння гармонічних коливань

$$\begin{cases} a_x + \dfrac{g}{L}\left(\dfrac{25}{3} - 8\dfrac{l}{L}\right)x = 0, \\ a_y + \dfrac{g}{L}\left(\dfrac{25}{3} - 8\dfrac{l}{L}\right)y = 0. \end{cases}$$

Періоди вздовж обох координатних осей співпали. Це означає, що в одну й ту ж точку площини частинка повертатиметься через однаковий час з однаковою швидкістю. Тобто, період руху

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(\frac{25}{3} - \frac{4l_0}{5L}\right)}.$$

За умови малої довжини нитки:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{25}{3}\frac{L}{g}}\,.$$