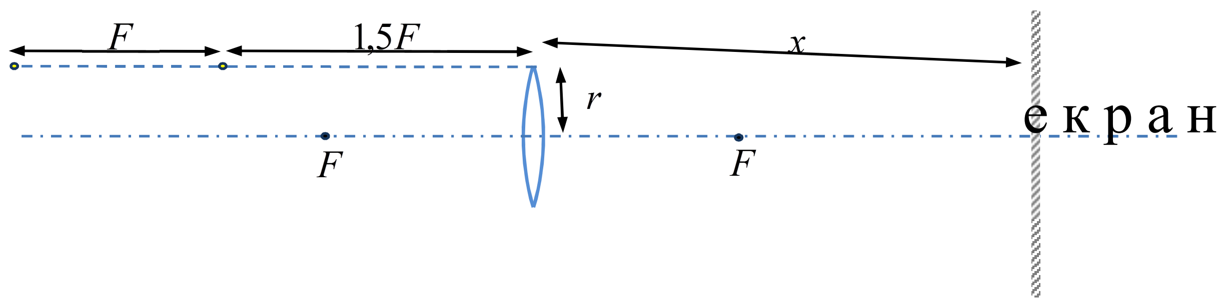
8 клас

Задача 1.

Якщо за допомогою тонкої лінзи сфокусувати на екрані, розташованому перпендикулярно до головної оптичної осі лінзи, зображення двох точкових джерел світла, які знаходяться на одній прямій, паралельній до головної оптичної осі лінзи на відстані, що дорівнює радіусу лінзи (див. рис.), то точковим може бути лише одне з зображень, друге ж «розмиється».

Визначте на якій відстані від лінзи необхідно розмістити екран, щоб загальна «розмитість» (сума площ двох світлих плям від точкових джерел світла на екрані) виявилась найменшою. Зробіть схематичний рисунок плям (у вибраному Вами масштабі) у цьому випадку.

Радіус лінзи r = 53 мм , фокусна відстань F = 2,5 r .



Розв’язання

Побудуємо хід променів від світлодіодів (див. Рис. 1). Очевидно, що екран слід розташувати між f_1 і f_2 – відстанями від лінзи до зображень першого і другого світлодіодів, відповідно. Це слідує з того, що при розміщенні екрану між лінзою та зображенням першого джерела, сума площ плям буде зростати, так як

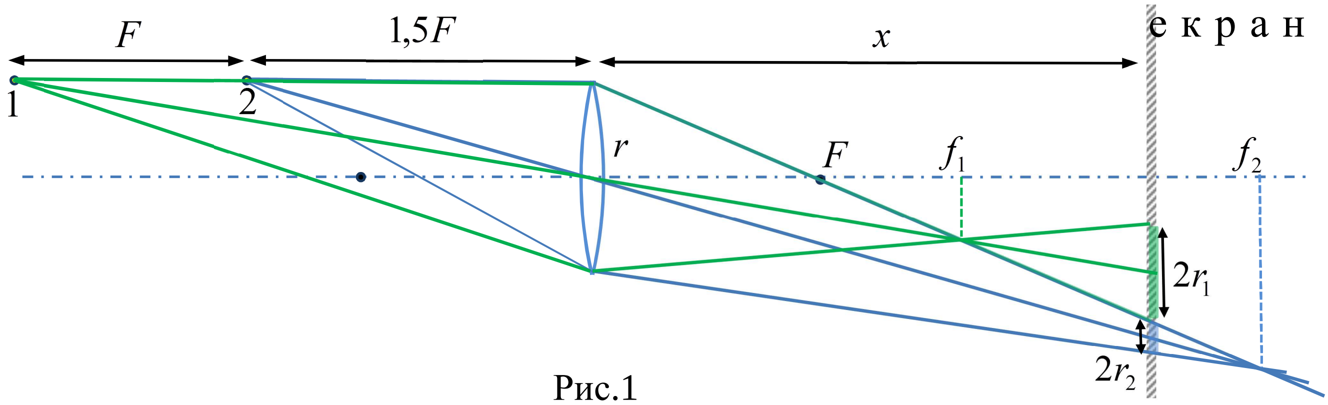


Рис.1

при цьому радіуси обох плям збільшуються у порівнянні з розмірами плям при розташуванні екрану на відстані f_1 від лінзи (див. рис. 1). Аналогічно для ситуації, коли екран розміщено на відстані, яка перевищує f_2. Як не дивно, при цьому плями на екрані від світлодіодів не перекриватимуться. Спільний промінь світла, що йде від світлодіодів через верхній край лінзи, і далі через її фокус, на відстанях від f_1 до f_2 є своєрідною межею між двома заповненими світлом (від різними світлодіодів) конічними областями простору. Обидва конуси з вершинами у точках зображень світлодіодів мають основою круглу лінзу. Отже, будь-який переріз, паралельний лінзі, також буде кругом. Саме тому на екрані ми побачимо дві світлі круглі плями радіусами r_1 і r_2, що ззовні дотикаються одна до одної.

З подібності трикутників $\frac{2r_1}{2r}=\frac{x-f_1}{f_1}$ і $\frac{2r_2}{2r}=\frac{f_2-x}{f_2}$ знайдемо радіуси цих плям:

$$r_1=r\left(\frac{x}{f_1}-1\right),\qquad r_2=r\left(1-\frac{x}{f_2}\right). \tag{1}$$

Площа плями пропорційна квадрату радіусу. Загальна площа плям:

$$S=\pi r_1^2+\pi r_2^2=\pi r^2\left(\left(\frac{x}{f_1}-1\right)^2+\left(1-\frac{x}{f_2}\right)^2\right). \tag{2}$$

З формули тонкої лінзи (або з акуратної побудови) знайдемо, що

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{2{,}5F}=\frac{3}{5F},\qquad \frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{1{,}5F}=\frac{1}{3F}. \tag{3}$$

Далі можна, підставляючи різні *x* у формулу (2), знайти наближене значення *x*, за якого площа мінімальна. А можна знайти точне значення аналітично і навіть у загальному вигляді. Наприклад, так:

$$S=\pi r^2\left(\left(\frac{x}{f_1}-1\right)^2+\left(1-\frac{x}{f_2}\right)^2\right)=\pi r^2\left(\left(\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}\right)x^2-2\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)x+2\right)=$$

$$=\pi r^2\left(\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}\right)\left[\left(x-\frac{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}}{\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}}{\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}}\right)^2\right]$$

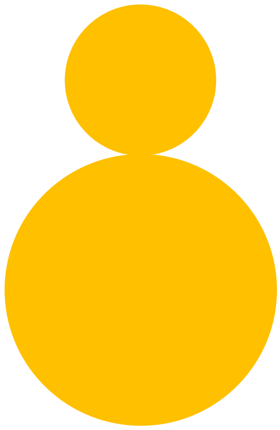


Рис. 2

Найменше значення площі буде, коли $x=\dfrac{\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}}{\dfrac{1}{f_1^2}+\dfrac{1}{f_2^2}}=\dfrac{105}{53}F=262{,}5\,\text{мм}$, що трохи менше подвоєного фокусу. При цьому з (1) знаходимо $r_1=10\,\text{мм}$ (радіус розмиття зображення джерела 1), $r_2=18\,\text{мм}$ (радіус розмиття зображення джерела 2). Отже, на екрані будуть дві круглі світлі плями радіусами 1 см і 1,8 см. Схема, яка відповідає знайденим радіусам плям, взаємному їх розташуванню у обраному масштабі приведена на рисунку 2.

Відповідь:

1. Екран треба розташувати на відстані 262,5 мм від осі лінзи.
2. Радіуси плям відповідно дорівнюють 10 мм та 18 мм.

8 клас
Задача № 2

Новий катер має три однакові двигуни. Перший етап випробувань катера провели на озері в безвітряну погоду, вимірюючи швидкість руху катера за різної кількості увімкнених двигунів.

Кількість працюючих двигунів	1	2	3
Швидкість, км/год	20,0	25,2	28,8

Потім катер з вимкненими двигунами (як і раніше, в безвітряну погоду) плив річкою, швидкість течії якої 5 км/год. Виявилося, що швидкість катера відносно берегів при цьому дорівнює 4,5 км/год. Оцініть, з якою швидкістю відносно берегів рухатиметься катер за течією цієї річки, увімкнувши один двигун, якщо швидкість зустрічного вітру 30 км/год? Вважати силу опору пропорційною квадрату швидкості.

Розв'язання.

За умовою задачі сила опору пропорційна ϑ^2, тоді для рівномірного руху потужність двигунів $P = F\cdot\vartheta$ має бути пропорційною кубу швидкості ϑ^3.

Скориставшись даними з таблиці одержимо:

$$\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_1^3} = \left(\frac{25,2}{20,0}\right)^3 = 2,000 \text{ і } \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_1^3} = \left(\frac{28,8}{20,0}\right)^3 = 2,986.$$

Отже, $F = A\cdot\vartheta^2$ і $P = A\cdot\vartheta^3$, де стала $A = \frac{P_1}{\vartheta_1^3}$ (тут P_1 — потужність одного двигуна).

Загальна сила опору є сумою сил опору води та повітря (очевидно, характер залежності цих сил від швидкості можна вважати однаковим). Отже, $A = A_в + A_п$.

Коли катер пливе з вимкненими двигунами за течією, сили з боку води та повітря зрівноважують одна одну. Знайдемо вирази для коефіцієнтів опору:

$$A_в\cdot 0,5^2 = A_п\cdot 4,5^2.$$

Звідки:

$$A_в = 81A_п \text{ і } A_в = \frac{81P_1}{82\vartheta_1^3},\ A_п = \frac{P_1}{82\vartheta_1^3}.$$

При рівномірному русі з увімкненим двигуном (за течією, але проти вітру) прикладені сили знов зрівноважують одна одну, але таких сил тепер три.

Зазначимо, що потужність двигуна є фіксованою в лише в певній системі відліку (у даному випадку йдеться про систему відліку «Вода», оскільки сила тяги виникає внаслідок взаємодії саме з водою). Тому сила тяги дорівнює $\frac{P_1}{\vartheta-5}$.

Отже,

$$\frac{P_1}{\vartheta-5} = A_в(\vartheta-5)^2 + A_п(\vartheta+30)^2.$$

Тут ϑ - шукана швидкість руху катера відносно берегів.

Підставивши вирази для коефіцієнтів опору, отримаємо рівняння

$$82\vartheta_1^3 = 81(\vartheta-5)^3 + (\vartheta-5)(\vartheta+30)^2,$$

тобто в числах $656000 = 81(\vartheta-5)^3 + (\vartheta-5)(\vartheta+30)^2$. Тут усі швидкості виражено в км/год.

Оскільки права частина рівняння є монотонно зростаючою функцією швидкості (за очевидної умови $\vartheta > 5$), рівняння має єдиний корінь. Його легко підібрати за допомогою калькулятора: $\vartheta = 24,474 \approx 24,5$ (км/год). З фізичних міркувань очевидно, що швидкість має бути трохи меншою від 25 км/год.

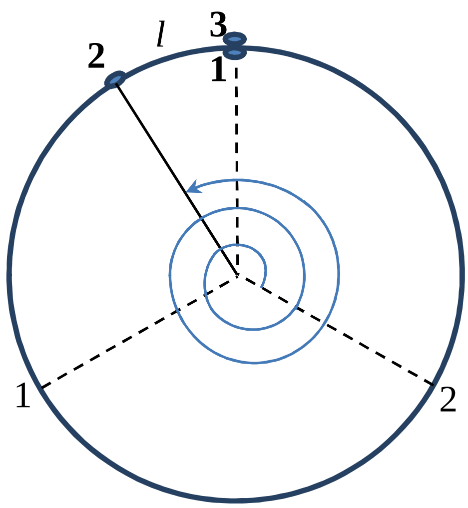
8 клас

Задача 3.

Велотрек має довжину *300 м*. Три велосипедисти одночасно стартували в одному напрямку з трьох точок, що ділять доріжку велотреку на три рівних проміжки. Швидкості велосипедистів v_1=*12м/с*, v_2=11,1*м/с*, v_3=9*м/с*. Знайдіть найменшу довжину колони (найменшу ділянку велотреку, яка містить всіх трьох велосипедистів) у процесі руху. Велосипедистів вважати точковими.

Розв'язок. Зазначимо, що найменшою довжина «колони» буде у випадку, коли найшвидший велосипедист порівняється з найповільнішим. Дійсно, за мить до цього найшвидший (1-й), скорочував відстань до найповільнішого (3-го). Де б не був при цьому 2-й велосипедист, попереду 3-го чи позаду 1-го, довжина колони (відстань між найвіддаленішими велосипедистами) скорочувалась. А вже через мить після того, як 1-й наздожене 3-го, довжина колони збільшуватиметься, незважаючи на положення 2-го велосипедиста.

Знайдемо час, через який 1-й і 3-й велосипедист порівняються один з одним. За умовою, відстань між будь-якою парою велосипедистів 100 м. Виявляється, можливі два випадки, коли 1-й їде в напрямку 3-го (безпосередня відстань 100 м) і коли 1-й їде в напрямку 2-го (тоді до третього слід подолати відстань 200 м). Почнемо з другого випадку, коли 1-й рухається за 2-м, а 2-й за 3-м.



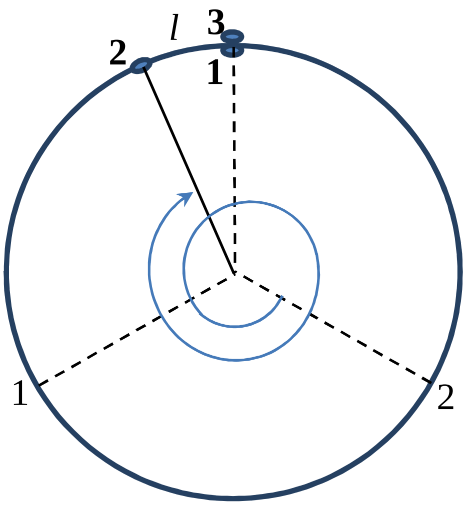
Відстань між 1-м і 3-м скорочується зі швидкістю $v_{13} = 3\,\text{м/с}$. Отже, зустріч відбудеться через $t_0 = 200/3\,\text{с}$. За цей час 3-й велосипедист подолає шлях $v_3 t_0 = 600\,\text{м}$, тобто зробить два повних оберти по 300 м. 2-й велосипедист подолає шлях $v_2 t_0 = 740\,\text{м}$ (див. схем. Рис.), тобто, два повних оберти і ще 140 м. Враховуючи початкові 100 м, 2-й велосипедист опиниться на відстані $l = 40\,\text{м}$ попереду від першого і третього. Це й буде мінімальна довжина колони, яку у цю мить очолюватиме 2-й велосипедист, а замикатимуть 1-й і 3-й. Чи є відстань 40 м найменшою можливою? У подальшому через кожні $t_1 = L/v_{13} = 300/3\,\text{с} = 100\,\text{с}$ 1-й велосипедист обганятиме 3-го. Запишемо закон руху 2-го велосипедиста відносно 3-го, починаючи з зображеного на рисунку випадку: $x_{23} = l + (v_2 - v_3)t$, або в SI: $x_{23} = 40 + 2{,}1t$. Через кожні $t_1 = 100\,\text{с}$ слід перевіряти положення 2-го велосипедиста. Можливо, у якийсь з цих моментів часу довжина колони виявиться меншою. Припустити, що пройшло n разів по $t_1 = 100\,\text{с}$: $t = nt_1 = 100n$.

Це означає, що відстань вздовж доріжки велотреку, на яку 2-й випередить 3-го, визначатиметься формулою $x_{23} = 40 + 2{,}1t = 40 + 210n$. Пам’ятаємо, що довжина доріжки велотреку $L = 300\,\text{м}$. Це означає, наприклад, що для $n = 10$, $x_{23} = 40 + 2100 = 40 + 7 \cdot 300$, тобто 7 додаткових обертів і ще 40 м. Початкове розташування повторюється. Складемо табличку:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{23}	40	250	460	670	880	1090	1300	1510	1720	1930	2140
l	40				–20			10			40

Найменшою довжина колони у 10 м буде, коли $n = 7$ (17, 27, 37,..). Це відбудеться через $t = 7t_1 = 700$ с після початку відліку часу (див. Рис.) і через 700 с + 200/3 с після старту.

Випадок руху у зворотному напрямку (див. Рис.) розв’язується аналогічно. Відстань між 1-м і 3-м скорочується зі швидкістю $v_{13} = 3\,\text{м/с}$. Тепер зустріч відбудеться через $t_0 = 100/3\,\text{с}$. За цей час 3-й велосипедист подолає шлях $v_3 t_0 = 300\,\text{м}$, тобто зробить один повний оберт. 2-й велосипедист подолає шлях $v_2 t_0 = 370\,\text{м}$, тобто, повне коло і ще 70 м. Враховуючи початкові 200 м, 2-й велосипедист опиниться на відстані $l = 130\,\text{м}$ позаду від першого і третього. У подальшому через кожні $t_1 = L/v_{13} = 300/3\,\text{с} = 100\,\text{с}$ 1-й велосипедист обганятиме 3-го. Закон руху 2-го велосипедиста відносно 3-го, починаючи з першого обгону: $x_{23} = -l + (v_2 - v_3)t$, або в SI: $x_{23} = -130 + 2{,}1t$. Підставляючи $t = nt_1 = 100n$, отримуємо $x_{23} = -130 + 210n$. У випадку $n = 2$, $x_{23} = 290\,\text{м}$, що на 10 м менше від $L = 300\,\text{м}$. Отже, як і в попередньому випадку, довжина колони буде 10 м.



8 класс

Задача 4 «Три призмы»

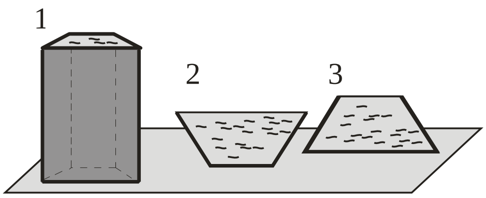


Рис. 1

Есть три одинаковых заполненных водой сосуда, имеющих форму призмы, которые стоят на разных гранях (рис. 1). Сила давления воды на дно первой равна F_1=12Н, а на дно второй F_2=10Н. С какой силой F_3 будет давить вода на дно третьего сосуда?

Решение. Сила давления на дно любого сосуда, заполненного на высоту h, равна весу жидкости, которая занимает воображаемый цилиндрический сосуд высотой h, построенный над основанием реального сосуда (рис. 2, *а*). Действительно, гидростатическое давление столба жидкости равно $P = \rho g h$, а сила давления – $F = P \cdot S = \rho g h S = \rho g V_{\text{вообр}} = M_{\text{вообр}} g$.

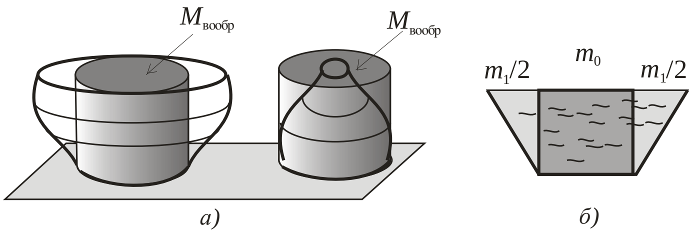


Рис. 2

Применим этот факт к рассматриваемому нами сосуду цилиндрической формы, разбив мысленно воду, которая заполняет его, на две части (рис. 2, *б*). Массу первой части, которая лежит над нижней гранью (параллелепипед), обозначим m_0. Общую массу двух боковых частей – m_1.

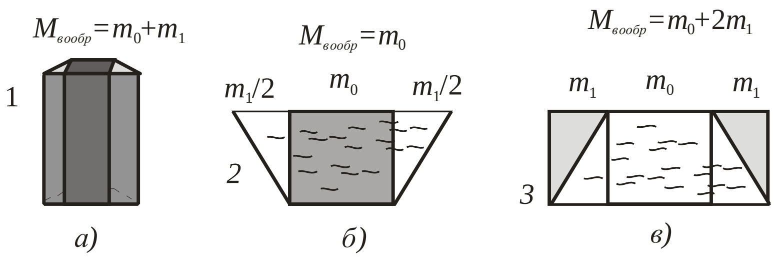


Рис. 3

Используя эти обозначения, запишем для первого сосуда $F_1 = (m_0 + m_1)g$ (обе части давят на дно, рис. 3, *а*). Для второго – $F_2 = m_0 g$ (только центральная часть давит на дно, рис. 3, *б*). И для третьего сосуда – $F_3 = (m_0 + 2m_1)g$ (здесь на дно давит не только центральная и боковая части, но и «дополнительная вода», появляющаяся при построении воображаемого сосуда, рис. 3, *в*). Из этих трех уравнений получаем ответ:

$$F_3 = 2F_1 - F_2 = 14 \text{ Н}$$

Ответ: $F_3 = 2F_1 - F_2 = 14$ Н.

8 клас

Задача № 5

Для охлаждения химического оборудования было предложено использовать в качестве охлаждающей жидкости смесь холодной воды ($t_0 = 0°C$) с мелко перетертым льдом. При тестировании установки выяснилось, что при закачивании в систему охлаждающей жидкости со скоростью $V_1 = 0,2\,м/с$ на выходе получалась вода с температурой $t_1 = 30°C$, а при закачивании охлождающей жидккости со скоростью $V_2 = 0,1\,м/с$ – вода с температурой $t_2 = 80°C$.

1) Какую объемную часть составляет лед в охлождающей жидкости?

2) При какой минимальной скорости прокачки система охлаждения еще будет нормально работать (т.е. жидкость не будет закипать внутри системы)?

Для расчетов принять: удельная теплоемкость воды равна $c = 4200\,Дж/(кг \cdot град)$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5\,Дж/кг$, отношение плотности льда к плотности воды $\rho_л / \rho_в = 0,9$

Примечание: *под термином «объемная часть льда» следует понимать долю объема льда в объеме охлаждающей жидкости, т.е. отношение объема люда к объему охлаждающей жидкости.*

Решение. Обозначим объемную часть льда буквой α, а сечение подводящих труб буквой S.

С какой бы скоростью не прокачивали бы охлаждающую жидкость, она всегда выносит из установки за единицу времени одно и то же количества тепла. Найдем эту тепловую мощность. Для этого учтем, что за время t в систему попадает:

1) объем охлаждающей жидкости равный $V_{об} = V \cdot S \cdot t$;

2) масса льда в нем равна $m_л = \alpha VSt \cdot \rho_л$ и масса воды – $m_в = (1-\alpha)VSt \cdot \rho_в$;

3) на плавление льда идет количества тепла равное $Q_1 = \lambda m_л = \alpha \cdot \lambda \cdot V \cdot S \cdot t \cdot \rho_л$, на нагрев всей воды (в том числе получившейся из растопленного льда) идет количество тепла равное $Q_2 = c(m_л + m_в)\Delta t = c \cdot \left[\alpha \cdot \rho_л + (1-\alpha) \cdot \rho_в\right] \cdot \Delta t \cdot V \cdot S \cdot t$.

Таким образом, тепловая мощность, которую уносит охлаждающая жидкость, равна

$$P = \frac{Q_1 + Q_2}{t} = \left[\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t\right] \cdot V \cdot S$$

2) Приравнивая два этих выражения для случаев, описанных в задаче, получаем уравнение:

$$\left[\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t_1) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t_1\right] \cdot V_1 \cdot S = \left[\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t_2) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t_2\right] \cdot V_2 \cdot S$$

Откуда вытекает ответ для объемной части льда в охлаждающей жидкости (обозначим $\varepsilon = (\rho_в - \rho_л)/\rho_в = 0,1$):

$$\alpha = \left[\frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в} + \frac{\lambda \cdot \rho_л}{c \cdot \rho_в} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_2 \Delta t_2 - V_1 \Delta t_2}\right]^{-1} = \left[\varepsilon + \frac{\lambda \cdot \rho_л}{c \cdot \rho_в} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_2 \Delta t_2 - V_1 \Delta t_2}\right]^{-1} = 0,275$$

3) Для предельно малой скорости охлаждающей жидкости V_3 на выходе будет выходить вода при температуре $t_3 = 100°C$. Связывая это течение с первым, получаем уравнение:

$$\left[\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t_1) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t_1\right] \cdot V_1 \cdot S = \left[\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t_3) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t_3\right] \cdot V_3 \cdot S$$

Откуда второй ответ (введем обозначение $\Theta = \frac{\lambda \cdot \rho_л}{c \cdot \rho_в} \cdot \frac{\alpha}{(1-\alpha \cdot \varepsilon)} \approx 20°C$):

$$V_3 = \frac{\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t_1) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t_1}{\alpha \cdot \rho_л (\lambda + c\Delta t_3) + (1-\alpha) \cdot \rho_в \cdot c\Delta t_3} \cdot V_1 = \frac{\Delta t_1 + \Theta}{\Delta t_3 + \Theta} \cdot V_1 = 0,083\,м/с$$

Ответ: 1) $\alpha = \left[\frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в} + \frac{\lambda \cdot \rho_л}{c \cdot \rho_в} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_2 \Delta t_2 - V_1 \Delta t_2}\right]^{-1} = 0,275$; 2) $V_3 = 0,083\,м/с$.