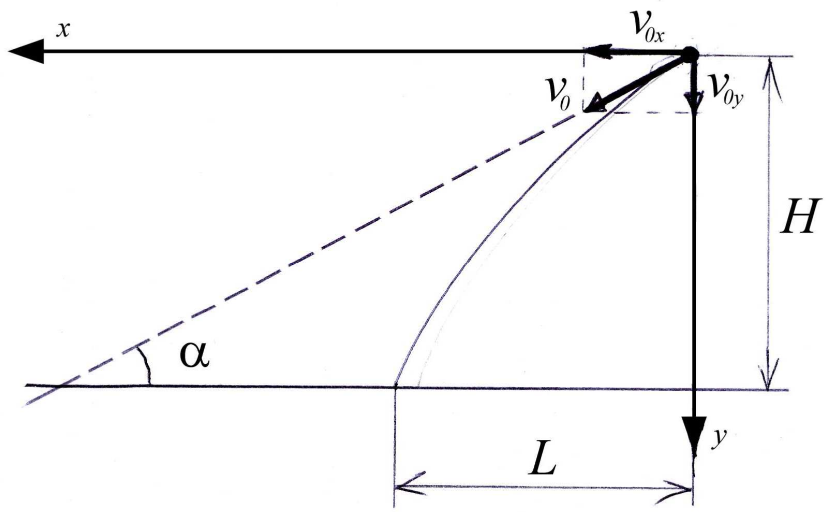
10 класс.

1. Бомбардировщик пикирует по прямой под углом α к горизонту. Если пилот хочет сбросить бомбу на высоте H и попасть точно в цель, то на каком расстоянии L по горизонтали от цели он должен это сделать? Скорость бомбардировщика v. Сопротивление воздуха не учитывать.
Решение:



$$m\vec{a} = \vec{F};$$

$$m\vec{a} = m\vec{g};$$

$$\begin{cases} ma_x = 0; \\ ma_y = mg; \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{0x}; \\ v_y = v_{0y} + gt; \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

$$H = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}; \quad \frac{gt^2}{2} + v_{0y}t - H = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gH}}{g}; \quad \frac{-v_{0y} - \sqrt{v_{0y}^2 + gH}}{g} < 0 \text{ не годится}$$

$$t = \frac{-v_{0y} + v_{0y}\sqrt{1 - \frac{gH}{v_{0y}^2}}}{g} = \frac{v_{0y}}{g}\left(\sqrt{1 - \frac{gH}{v_{0y}^2}} - 1\right);$$

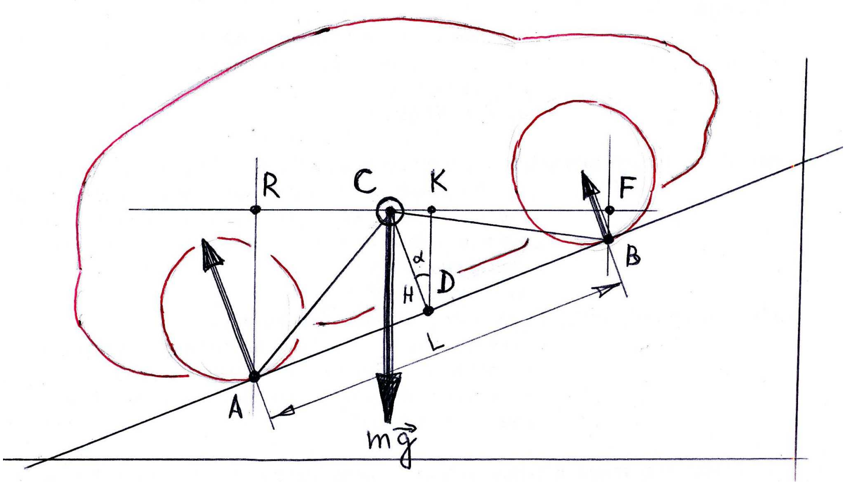
<u>ОТВЕТ:</u>

$$L = v_{0x} \cdot t = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g}\left(\sqrt{1 - \frac{gH}{v_{0y}^2}} - 1\right).$$

$$\left[\frac{м}{с} \cdot \frac{м}{с} \cdot \frac{с^2}{м} = м\right]; \quad \left[\frac{м}{с^2} \cdot м \cdot \frac{с^2}{м^2} = 1\right].$$

2. Автомобиль массы M = 1 т равномерно поднимается по наклонному участку шоссе с углом наклона α = 12° (sin 12° = 0,2). Определить, насколько отличаются нагрузки на передние и задние колеса автомобиля, если известно, что расстояние между осями L = 2,5 м, а центр тяжести расположен на равных расстояниях от осей на высоте H = 0,75 м.

Решение:



$$RF = L\cos\alpha;$$

$$RC = \frac{L}{2}\cos\alpha - H\sin\alpha;$$

$$CF = \frac{L}{2}\cos\alpha + H\sin\alpha;$$

$M = 1000$ кг; $H = 0{,}75$ м; $L = 2{,}5$ м.

$\alpha = 12°$; $\sin 12° \simeq 0{,}2$; $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}04} = \sqrt{0{,}96} \simeq 0{,}98$.*

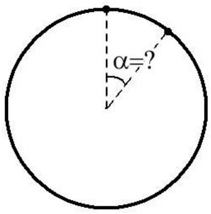
- $$\frac{\frac{L}{2}\cos\alpha - H\sin\alpha}{L\cos\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{H\sin\alpha}{L\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0{,}75\cdot 0{,}2}{2{,}5\cdot 0{,}98} \simeq 0{,}5 - 0{,}06 = 0{,}44.$$

$$1 - 0{,}44 = 0{,}56.$$

ОТВЕТ: нагрузка на передюю ось 440 кг (4312 Н);
на заднюю ось 560 кг (5488 Н).

3. Из проволоки с сопротивлением R = 10 Ом сделано круглое кольцо. Где следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление равнялось 1 ом?



$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 10; \\ \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 + R_2 = 10; \\ R_1 R_2 = 10; \end{cases}$$

$R_1 = 10 - R_2$;

$R_2^2 - 10R_2 + 10 = 0$; $\qquad R_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 40}}{2} = \dfrac{10 \pm 7{,}75}{2}$

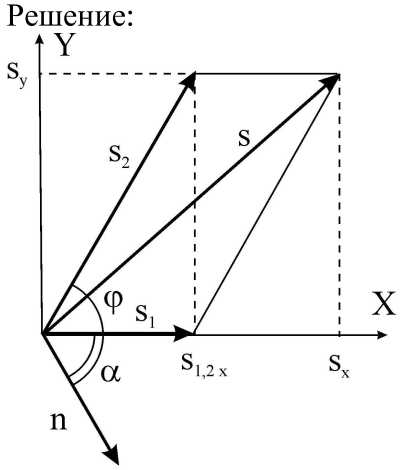
$$\begin{cases} R_1 = 8{,}875\ \Omega \\ R_2 = 1{,}125\ \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 = 1{,}125\ \Omega \\ R_2 = 8{,}875\ \Omega \end{cases}$$

ОТВЕТ:

$\alpha = 360° \cdot \dfrac{1{,}125}{10} \simeq 40{,}5°$

4. Первую половину времени тело движется со скоростью V_1 = 20 м/с под углом α = 60° к заданному направлению, а вторую половину времени – под углом β = 120° к тому же направлению со скоростью V_2 = 40 м/с. Найти среднюю скорость движения $V_{ср}$.

Решение:



Пусть со скоростью V_1 пройдено перемещение s_1 и со скоростью V_2 - перемещение s_2 , и каждое из них заняло время t. Обозначим заданное направление через n, угол между n и s_1 через α и угол между s_1 и s_2 через φ. По условию, α = 60°, а $\beta = \alpha + \varphi = 120^0$, значит, $\varphi = 60^0$. Разложим результирующее перемещение s по осям X и Y:

$s_x = s_{1x} + s_{2x} = t\,V_1 + t\,V_2 \cos\varphi$
$s_y = s_{1y} + s_{2y} = 0 \quad + t\,V_2 \sin\varphi$

По теореме Пифагора,

$s^2 = s_x^{\,2} + s_y^{\,2} = (t\,V_1)^2 + 2\,(t\,V_1)\,(t\,V_2)\cos\varphi + (t\,V_2)^2$

Средняя скорость равна

$V_{cp}^{\;2} = s^2 / (2t)^2 = (V_1^2 + 2\,V_1\,V_2\cos\varphi + V_2^2) / 4 = 700;$ =>

$V_{cp} = 10 \cdot 7^{1/2}$ м/с.

5. Известно, что центр масс сплошного полудиска (Рис. 1) расположен в точке $X_C = \dfrac{4r}{3\pi}$, где r – радиус полудиска.
   а) Определить, где расположен центр масс полукольца с радиусами r_0 и r_1 (Рис. 2).
   б) Определить, где расположен центр масс тонкого полукольца с радиуса r_0 (то есть, когда $r_1 \to r_0$).

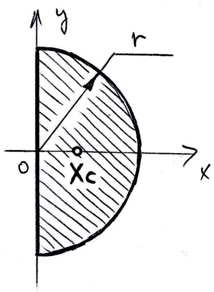


Рис.1

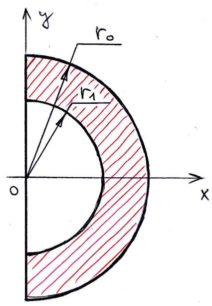


Рис. 2

Решение:

$X_0 = \dfrac{4r_0}{3\pi}$; $X_1 = \dfrac{4r_1}{3\pi}$; пусть центр масс полукольца находится в точке X_2.

$m_0 g\,(x_2 - x_0) - m_1 g\,(x_2 - x_1) = 0$;

$m_0 x_2 - \dfrac{4 m_0 r_0}{3\pi} - m_1 x_2 + \dfrac{4 m_1 r_1}{3\pi} = 0$;

$x_2\,(m_0 - m_1) = \dfrac{4}{3\pi}\,(m_0 r_0 - m_1 r_1)$;

плотность
толщина

$x_2 = \dfrac{4}{3\pi}\left(\dfrac{m_0 r_0 - m_1 r_1}{m_0 - m_1}\right).$ $\qquad m_0 = \rho\tau \cdot \dfrac{\pi r_0^2}{2}$;

$m_1 = \rho\tau\,\dfrac{\pi r_1^2}{2}$; $\quad \rho\tau\,\dfrac{\pi}{2} = \lambda$;

$$x_2 = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{\lambda r_0^3 - \lambda r_1^3}{\lambda r_0^2 - \lambda r_1^2}\right) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{r_0^3 - r_1^3}{r_0^2 - r_1^2}\right) = \frac{4}{3\pi}\,\frac{\cancel{(r_0 - r_1)}(r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2)}{\cancel{(r_0 - r_1)}(r_0 + r_1)} = \bigstar$$

$$\star = \frac{4}{3\pi} \; \frac{r_0(r_0+r_1) + r_1^2}{r_0+r_1} \, .$$

<u>ОТВЕТ</u>:

$$X_2 = \frac{4}{3\pi}\left(r_0 + \frac{r_1^2}{r_0+r_1} \right)$$

при $r_1 \to r_0$

$$\frac{r_1^2}{r_0+r_1} \to \frac{r_0^2}{r_0+r_0} = \frac{r_0}{2}$$

$$X_2 \longrightarrow \frac{4}{3\pi}\left(r_0 + \frac{r_0}{2} \right) = \frac{4}{3\pi}\,\frac{3}{2} r_0 = \frac{2r_0}{\pi} \, .$$