Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ГЕОМЕТРИЯ-11

Конспекты уроков по теме: "Векторы и координаты-2"

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (17 часов)

Урок 1. Векторы в пространстве (повторение).

Урок 2. Векторное произведение векторов.

Урок 3. Векторное произведение в координатах.

Урок 4. Смешанное произведение векторов.

Урок 5. Смешанное произведение векторов в координатах. Нахождение объемов с помощью смешанного произведения векторов.

Урок 6. Решение задач с помощью векторного и смешанного произведения векторов.

Урок 7. *Самостоятельная работа* по теме: “Векторное и смешанное произведение векторов”.

Урок 8. Общее уравнение плоскости.

Урок 9. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.

Урок 10. Различные способы задания плоскости.

Урок 11. Параллельные и перпендикулярные плоскости.

Урок 12. Угол между плоскостями. Биссекторная плоскость.

Урок 13. Пучок и связка плоскостей.

Урок 14. *Самостоятельная работа* по теме: “Уравнения плоскости”.

Урок 15. Обобщающее занятие по теме.

Урок 16. Контрольная работа.

Урок 17. Анализ контрольной работы.

Урок 2. Векторное произведение

1°. Ориентация тройки векторов

1) Введем понятие ориентации тройки векторов.

Определение.

> *Пусть в пространстве задана упорядоченная тройка некомпланарных векторов (базис)* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$. *Отложим векторы базиса от одной точки* O. *Если для наблюдателя, находящегося на конце вектора* $\overrightarrow{c}$, *кратчайший поворот вокруг точки* O *от вектора* $\overrightarrow{a}$ *к вектору* $\overrightarrow{b}$ *виден против часовой стрелки, то тройка* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ *называется* ***правой***. *В противном случае, тройка называется* ***левой***.

Замечание 1. *С подобным подходом к введению понятия ориентации вы уже встречались в физике (правило буравчика, правило левой руки и т. п.).*

Замечание 2. *Исторические названия* правая *и* левая *происходят от того, что если большой и указательный палец вытянуть в плоскости ладони, а средний палец согнуть в сторону ладони, то на правой руке получится правая система, а на левой – левая.*

2) Понятно, что при циклической перестановке векторов ориентация тройки не меняется, т. е. тройки

$$\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}, \left\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right\}, \left\{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\}$$

имеют одинаковую ориентацию.

Если же мы поменяем местами любые два вектора тройки, то тройка изменит ориентацию на противоположную. Таким образом, тройки

$$\left\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right\}, \left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right\}, \left\{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right\}$$

имеют ориентацию, противоположную тройкам, рассмотренным ранее.

2°. Понятие векторного произведения

1) Дадим определение векторного произведения:

Определение.

> *Пусть даны два неколлинеарных вектора* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$. ***Векторным произведением*** *векторов* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *называется такой вектор* $\overrightarrow{c}$, *что*
>
> *1)* $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$,
>
> *2)* $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$,
>
> *3) тройка* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ *– правая.*

2) Векторное произведение обозначают $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ или $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$.

3) **Упражнение:** Пусть векторы $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ образуют правый ортонормированный базис. Найдите $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}$. Что изменится, если эти векторы будут образовывать левый ортонормированный базис.

3°. Свойства векторного произведения

1) Векторное произведение обладает следующими свойствами:

   (1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ – антикоммутативность.

   Замечание. *Из этого свойства следует, что* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = 0$.

   (2) $(\alpha\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\alpha\overrightarrow{b}) = \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ – однородность.

   (3) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}$
   $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b_2}$ – аддитивность.

   Замечание. *Из свойств (2) и (3) следует линейность векторного произведения как по первому так и по второму сомножителю:*

$$(\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) + \beta(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

   Свойства (1) и (2) сразу следуют из определения векторного произведения. Свойство (3) будет нами доказано через урок.

2) Сформулируем еще одно свойство векторного произведения:

   Утверждение (Геометрический смысл векторного произведения)**.**

   Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на сомножителях.

3) Сформулируем теперь критерий того, что два вектора коллинеарны:

   Утверждение (Критерий коллинеарности векторов)**.**

   Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}.$$

4°. Упражнения

1) Докажите, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

2) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – взаимно перпендикулярные единичные векторы. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$.

Домашнее задание

1) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – данные векторы. Всегда ли можно подобрать такой вектор $\overrightarrow{c}$, что $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$? Сколько решений имеет задача?

2) Пусть $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 7$. Найдите $A = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)^2 + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2$.

3) Пусть $|\overrightarrow{m}| = 5$, $|\overrightarrow{n}| = 3$, $\angle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}$.

4) Пусть $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ – взаимно перпендикулярные орты. Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}$, вычислите длину его высоты, опущенной из вершины C.

5) Известно, что для ненулевых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ справедливы равенства:
$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}.$$
Найдите длины векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и углы между ними.

6) Докажите, что для трех попарно неколлинеарных векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ равенства $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$ выполняются тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$.

Урок 3. Векторное произведение в координатах

1°. Векторное произведение векторов в координатах

1) Вспомним, что такое определитель 3-го порядка и правило его раскрытия по строке (столбцу):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2) Докажем очень важную теорему, существенно облегчающую работу с векторным произведением:

Теорема.

Пусть $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ *– правый ортонормированный базис, и в этом базисе*

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

Тогда

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Замечание. *В случае левого ортонормированного базиса в левой части приведенной формулы нужно поставить знак “минус”. Если же базис не ортонормированный, то формула неверна.*

2°. Упражнения

1) Найдите векторное произведение векторов $\overrightarrow{a} = (3; -4; -8)$ и $\overrightarrow{b} = (-5; 2; -1)$.

2) Дан вектор $\overrightarrow{q} = (3\overrightarrow{m} + 4\overrightarrow{n} + 5\overrightarrow{p}) \times (\overrightarrow{m} + 6\overrightarrow{n} + 4\overrightarrow{p})$, где $\{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}\}$ – левый ортонормированный базис. Найдите $|\overrightarrow{q}|$.

3) Найдите площадь треугольника, заданного координатами вершин: $A(3; 4; -1)$, $B(2; 0; 4)$, $C(-3; 5; 4)$.

4) Вычислите синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} - \overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, где $\{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}\}$ – ортонормированный базис.

Домашнее задание

1) Даны векторы $\overrightarrow{a} = (2;5;7)$ и $\overrightarrow{b} = (1;2;4)$. Найдите их векторное произведение.

2) Разложите вектор $\overrightarrow{p} = \left(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}\right) \times \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}\right)$ по взаимно перпендикулярным ортам $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, образующим правую тройку.

3) На векторах $\overrightarrow{a} = (2;3;1)$ и $\overrightarrow{b} = (-1;1;2)$ построен треугольник. Найдите его площадь и длины высот.

4) В пространстве даны три точки $A(1;1;1)$, $B(2;2;2)$ и $C(4;3;5)$. Найдите площадь треугольника ABC.

5) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите площадь сечения его плоскостью, проходящей через середины трех ребер, имеющих общую вершину.

6) Пусть в некотором базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ для любых двух векторов $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ справедлива формула
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$
Верно ли, что базис $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ – правый ортонормированный?

Урок 4. Смешанное произведение

1°. Смешанное произведение трех векторов

1) Рассмотрим три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. Поскольку $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ – это вектор, то мы можем рассмотреть число $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

Определение.

> *Число $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ называют* ***смешанным*** *произведением векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и обозначают $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.*

2) Обсудим геометрический смысл смешанного произведения:

Теорема.

Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на сомножителях.

3) Несложно понять, что

- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) > 0$, если векторы a, b, c образуют правую тройку.
- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) < 0$, если векторы a, b, c образуют левую тройку.

Легко также доказать следующий критерий:

Теорема (Критерий компланарности векторов)**.**

Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.

2°. Свойства смешанного произведения

1) Для любых $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = \\ = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}).$$

2) Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей:

$$(\lambda\overrightarrow{a_1} + \mu\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \mu(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}),$$

и т. д.

3°. Аддитивность векторного произведения

Теперь мы легко можем доказать аддитивность векторного произведения:

$$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}.$$

Выберем ортонормированный базис $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ и рассмотрим смешанное произведение $(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b})$. В силу линейности векторного произведения по второму сомножителю имеем:

$$(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}) =$$
$$= \overrightarrow{e_i} \cdot (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{e_i} \cdot (\overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{e_i} \cdot (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}).$$

С другой стороны

$$(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{e_i} \cdot ((\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b}).$$

Следовательно, при $i = 1, 2, 3$ имеем

$$\overrightarrow{e_i} \cdot ((\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{e_i} \cdot (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}).$$

Но это означает, что координаты векторов $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}$ базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ совпадают. Следовательно, совпадают и сами векторы.

4°. Полезные замечания о смешанном произведении

1) Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно 0:
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0.$$

2) Смешанное произведение, имеющее хотя бы два коллинеарных сомножителя, равно 0:
$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Rightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0.$$

Упражнение: Упростите выражение $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 5\overrightarrow{c})$.

Домашнее задание

1) Докажите, что если $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ – правый ортонормированный базис, то $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 1$. Как изменится это равенство в случае левого ортонормированного базиса?

2) Упростите выражение: $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\right)$.

3) На трех диагоналях граней параллелепипеда, выходящих из одной вершины, построен как на ребрах новый параллелепипед. Докажите, что его объем вдвое больше объема исходного параллелепипеда.

4) Докажите, что если $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, то векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны.

5) Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$ компланарны, то они коллинеарны.

6) Произведение $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$ называется *двойным векторным произведением*. Докажите, что $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\, \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \overrightarrow{c}$.

Урок 5. Смешанное произведение в координатах. Вычисление объемов с помощью смешанного произведения

1°. Смешанное произведение в координатах

1) Существует очень удобная формула, позволяющая найти смешанное произведение, если известны координаты векторов в каком-нибудь **(не обязательно ортонормированном!)** базисе:

Теорема.

Пусть $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ *– произвольный базис и в этом базисе*

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

Тогда

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

2) Сформулируем два следствия из доказанной теоремы:

Следствие 1.

Если $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ *– правый ортонормированный базис, то*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие 2.

Пусть в произвольном базисе

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

Тогда векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *компланарны в том и только том случае, если*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3) **Упражнение:** Проверьте, компланарны ли векторы $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$ ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – произвольный базис).

2°. Вычисление объемов с помощью смешанного произведения

Применение смешанного произведения часто связано с вычислением объемов геометрических тел. Приведем формулы для вычисления некоторых из них:

1) *Объем параллелепипеда*, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:
$$V = |(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|.$$

2) *Объем треугольной призмы*, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:
$$V = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|.$$

3) *Объем тетраэдра*, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:
$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|.$$

3°. Упражнения

1) Известно, что $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 5$. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

2) Даны точки $A(2;1;-1)$, $B(3;0;2)$, $C(0;-1;3)$, $D(5;1;1)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ и длину высоты, опущенной из вершины D.

Домашнее задание

1) Пусть $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ – произвольный базис. Являются ли компланарными векторы $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r} = 7\overrightarrow{a} + 14\overrightarrow{b} - 13\overrightarrow{c}$?

2) Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ некомпланарны. При каких λ компланарны векторы $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{n} = 4\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} + 6\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{k} = 7\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b} + \lambda^2\overrightarrow{c}$?

3) Найдите объем треугольной призмы, построенной на векторах
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}, \quad \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - 3\overrightarrow{r}, \quad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r},$$
где $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}\}$ – ортонормированный базис.

4) На векторах $\overrightarrow{AB} = (3;2;-5)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-1;4)$, $\overrightarrow{AD} = (1;-3;1)$ построен параллелепипед. Найдите его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

5) Даны точки $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(4;1;2)$ и $D(1;1;0)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ и длину высоты, опущенной из вершины C.

6) Вершина параллелепипеда и центры трех не содержащих ее граней являются вершинами некоторого тетраэдра. Найдите отношение его объема к объему данного параллелепипеда.

Урок 6. Решение задач с помощью векторного и смешанного произведения

1°. Нахождение расстояния от точки до плоскости

1) Ранее мы уже умели находить расстояние от точки до плоскости, используя метод неопределенных коэффициентов и скалярное произведение. Как мы это делали?

2) На прошлом уроке (и в классе и в д. з.) мы снова столкнулись с этой задачей. Мы находили высоты параллелепипеда, призмы, тетраэдра. Решали мы эти задачи с помощью векторного и смешанного произведений.

   В общем виде решение такой задачи можно сформулировать так:

   Пусть задана плоскость α и точка $M \notin \alpha$. Нужно найти $\rho(M, \alpha)$.

   Выберем точку O плоскости α, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – два неколлинеарных вектора, лежащих в α. Обозначим $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OM}$. Предположим, что векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{m}$ нам известны (например известны их координаты в некотором базисе). Тогда

$$\rho(M, \alpha) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|}.$$

3) **Упражнение:** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние от центра M грани AA_1B_1B до плоскости BC_1D.

4) Через несколько уроков мы познакомимся с еще одним способом решения поставленной задачи, основанным на использовании метода координат в пространстве (этот метод аналогичен нахождению расстояния от точки до прямой на плоскости).

2°. Задача

На боковых ребрах AA_1, BB_1, CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбраны соответственно точки M, N, K так, что сумма длин отрезков AM, BN и CK равна длине бокового ребра призмы. Точка Q – центроид треугольника ABC. Найдите отношение объема призмы и объема тетраэдра $QMNK$.

3°. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

1) Оказывается, при помощи векторного и смешанного произведений можно находить и расстояния между скрещивающимися прямыми. А именно, пусть $\overrightarrow{a}$

и $\overrightarrow{b}$ – направляющие векторы прямых l и m соответственно, $A \in l$, $B \in m$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$. Тогда

$$\rho(l, m) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|}.$$

Доказательство этой формулы см. КТ §11.2, стр.438.

Этой формулой удобно пользоваться в случае, когда легко найти как смешанное, так и векторное произведение.

2) **Упражнение:** Найдите расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.

Домашнее задание

1) В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, P и Q лежат на ребрах BC, AD, AB и CD соответственно, причем $AP = PB$, $AN = ND$, $CQ = QD$, $MC = 2BM$. Пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 выбраны на отрезках NM и PQ соответственно так, что $NA_1 = A_1B_1 = B_1M$ и $PC_1 = C_1D_1 = D_1Q$. Найдите отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

2) Даны точки $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ и $D(-5;-4;8)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

3) Найдите расстояние между прямой, проходящей через точки $A(-3;0;1)$ и $B(2;1;-1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2;2;0)$ и $D(1;3;2)$.

4) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра AA_1 равна a, угол B_1AB равен α, а угол C_1BC равен β. Найдите

   а) расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1;

   б) расстояние между прямыми AD_1 и DC_1.

Урок 8. Общее уравнение плоскости

1°. Уравнение плоскости, задаваемой одной своей точкой и вектором нормали

1) Мы уже встречались с понятием нормали к плоскости. Вспомним соответствующее определение:

Определение.

> *Пусть ненулевой вектор $\overrightarrow{n}$ перпендикулярен плоскости α. Тогда вектор $\overrightarrow{n}$ называется* ***нормалью*** *к плоскости α.*

2) Несмотря на то, что вектор нормали к плоскости определен неоднозначно (как по длине, так и по направлению), плоскость однозначно задается указанием какой-либо ее точки и любой нормали (в прошлом году нами было доказано, что через точку пространства проходит ровно одна плоскость, перпендикулярная заданной прямой).

3) Пусть A_0 – некоторая точка плоскости α с радиус вектором $\overrightarrow{r_0}$, A – произвольная точка пространства с радиус вектором $\overrightarrow{r}$. Точка A лежит в плоскости α тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{A_0A} \perp \overrightarrow{n}$. Т. о., мы получаем уравнение плоскости, задаваемой точкой и вектором нормали:
$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

4) Запишем теперь полученной уравнение в декартовой системе координат. Пусть
$$\overrightarrow{n} = (a, b, c), \quad \overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0), \quad \overrightarrow{r} = (x, y, z).$$
Тогда
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

5) **Упражнение:** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $K(-2; 7; 1)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$, где $A(-1; 2; 8)$ и $B(1; -1; 3)$.

2°. Общее уравнение плоскости

1) Преобразуем, полученное ранее, уравнение плоскости $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Обозначая $\overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{n} = p$, получаем **общее уравнение плоскости**
$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} - p = 0.$$

2) В декартовой системе координат имеем $ax + by + cz - p = 0$. Обозначая $d = -p$, получаем **общее уравнение плоскости в координатах**
$$ax + by + cz + d = 0.$$

3) Уравнение $ax + by + cz + d = 0$ называется **линейным уравнением** (или **уравнением первой степени**) с тремя переменными. Имеет место следующая теорема:

Теорема.

Всякая плоскость в пространстве может быть задана линейным уравнением $ax + by + cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$. Обратно, всякой уравнение такого вида задает в пространстве некоторую плоскость.

4) Рассмотрим особые случаи положения плоскости $ax + by + cz + d = 0$ относительно системы координат.

- Уравнение $ax + by + cz = 0$ задает плоскость, проходящую через начало координат.
- Уравнение $ax + by + d = 0$ задает плоскость, параллельную оси OZ (т. к. вектор нормали $\overrightarrow{n} = (a, b, 0)$ перпендикулярен этой оси).
- Уравнение $ax + d = 0$ задает плоскость, параллельную плоскости YOZ (т. к. вектор нормали $\overrightarrow{n} = (a, 0, 0)$ перпендикулярен этой плоскости).

5) В заключение отметим, что изложенная теория полностью аналогична рассуждениям, позволившим нам в свое время получить общее уравнение прямой на плоскости.

Домашнее задание

1) Укажите особенности в расположении относительно осей координат следующих плоскостей:

   а) $x = 0$; б) $9y - 2 = 0$; в) $3y - 5z = 0$; г) $x + z - 5 = 0$; д) $2x + 3y - 7z = 0$.

2) Найдите точки пересечения осей координат с плоскостью $2x + 3y - z - 5 = 0$.

3) Найдите уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и точку $A(-3; 1; -2)$.

4) Найдите уравнение плоскости, параллельной оси OX и проходящей через точки $A(4; 0; -2)$ и $B(5; 1; 7)$.

5) Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3; 8; 5)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{p}(1; 2; -7)$.

6) Найдите уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной этому отрезку, если $A(-3; 1; 5)$, $B(3; 9; -1)$.

7) Пусть $P(a;b;c)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость α. Найдите уравнение плоскости α в декартовой системе координат.

Урок 9. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

1°. Нормальное уравнение плоскости

1) Рассмотрим векторное общее уравнение плоскости $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} - p = 0$. Предположим, что $|\overrightarrow{n}| = 1$ и $p > 0$ (этого всегда можно добиться, выбирая одно из двух возможных направлений нормали). Тогда это уравнение называется **нормальным уравнением плоскости**.

2) Точно так же мы поступали, определяя нормальное уравнение прямой на плоскости $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} - p = 0$, где $\overrightarrow{n}$ – орт нормали к прямой. Вспомним, что нормальное уравнение прямой использовалось для определения расстояния (отклонения) от данной точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $l: \ \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} - p = 0$:
$$\rho(M, l) = |\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - p|.$$
В координатной форме
$$\rho(M, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3) Аналогично плоскому случаю, нормальное уравнение плоскости позволяет легко найти расстояние от данной точки пространства до данной плоскости:

Теорема.

Расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине левой части нормального уравнения плоскости, в которой текущий радиус вектор заменяем радиус вектором данной точки:
$$\rho(M, \alpha) = |\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - p|.$$

4) Если в правой части полученного уравнения убрать модуль, то мы получим **отклонение** точки M от плоскости α:
$$\delta(M, \alpha) = \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - p.$$
Значение $\delta(M, \alpha)$ будет положительным, если точка M и начальная точка O находятся по разные стороны от плоскости α, и отрицательным, если точка M и точка O находятся по одну сторону от α.

5) В декартовой системе координат нормальное уравнение плоскости можно получить, если разделить обе части общего уравнения $ax + by + cz + d = 0$ на $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ со знаком, противоположным знаку d:
$$\frac{ax + by + cz - |d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Коэффициенты перед x, y, z в этом уравнении представляют собой координаты орта нормали, т.е. направляющие косинусы этой нормали (вспомним, что направляющие косинусы – это косинусы углов, образованных вектором с осями координат). Поэтому нормальное уравнение плоскости в координатах часто записывают так:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0.$$

Здесь $p = \dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на нашу плоскость.

6) Из вышесказанного следует, что расстояние от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости может быть найдено с помощью нормального уравнения так:

$$\rho(M, \alpha) = |x_1 \cdot \cos\alpha + y_1 \cdot \cos\beta + z_1 \cdot \cos\gamma - p|.$$

В случае общего уравнения:

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Для нахождения отклонения $\delta(M, \alpha)$ нужно убрать модуль в правой части.

2°. Задачи и упражнения

1) Найдите расстояние от точки $M(-3;1;2)$до плоскости $\alpha : 3x+4y-12z+2 = 0$.

2) Найдите все такие значения параметра t, при котором отрезок AB не пересекает плоскость $2x + 3y - 5z - 2 = 0$, если $A(2t;t+1;2)$, $B(3;-5;3t+1)$.

3) Даны две точки: $A(3;2;1)$ и $B(7;-1;2)$. Докажите, что отрезок AB пересекает плоскость $\alpha : 3x - 5y + 2z - 5 = 0$ и найдите отношение, в котором плоскость α делит AB.

4) Напишите уравнение плоскости, содержащей ось OY, если расстояние от этой плоскости до точки $M(-3;8;1)$ равно 1.

Домашнее задание

1) Даны точки $A(-3;0;1)$, $B(2;1;-1)$, $C(-2;2;0)$ и $D(1;3;2)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

2) Найдите все значения параметра t, при которых точки $A(3t;t-2;3)$ и $B(2;1;5t+3)$ лежат по разные стороны от плоскости $3x + 5y - z - 1 = 0$.

3) Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от плоскостей $3x + 12y - 4z - 1 = 0$ и $4x - 3y + 12z + 5 = 0$.

4) Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $A(-6;2;1)$, если расстояние от плоскости до точки $M(1;1;0)$ равно 1.

5) Найдите точку, симметричную началу координат относительно плоскости $x+2y-2z-5=0$.

Урок 10. Различные способы задания плоскости

1°. Способы здания плоскости

1) Мы уже умеем записывать уравнение плоскости, если известны одна ее точка и вектор нормали: $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Однако существует много других способов задания плоскости.

2) Вспомним, что любой ненулевой вектор, параллельный плоскости α, называется **направляющим** вектором плоскости α. Очевидно, что плоскость можно задать однозначно двумя неколлинеарными направляющими векторами и точкой.

   Итак, пусть $A(\overrightarrow{r_0}) \in \alpha$, $\overrightarrow{a} \parallel \alpha$, $\overrightarrow{b} \parallel \alpha$. тогда уравнение плоскости α может быть записано в виде
   $$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0.$$
   Запишем это уравнение в декартовой системе координат. Пусть $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$ имеет вид
   $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3) **Упражнение:** Напишите уравнение плоскости, параллельной орту $\overrightarrow{k}$ и вектору $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, которая проходит через точку $A(2; 4; -3)$.

4) Плоскость можно задать также двумя ее точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_1, y_2, z_2)$ и одним направляющим вектором $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$. В этом случае удобно записать уравнение плоскости в виде:
   $$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{a}) = 0,$$
   или в координатах (уравнение плоскости, заданной двумя точками и направляющим вектором)
   $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$
   Замечание. *Конечно, можно задать уравнение плоскости и в виде* $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{a}) = 0$*, но это уравнение будет нелинейным.*

5) **Упражнение:** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{a}(4; -1; -1)$.

6) Теперь понятно, как написать уравнение плоскости, проходящей через три заданный точки $A_1(\overrightarrow{r_1})$, $A_2(\overrightarrow{r_2})$, $A_3(\overrightarrow{r_3})$:

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_1}) = 0.$$

В декартовой системе координат уравнение плоскости, заданной тремя точками имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

7) **Упражнение:** Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$. Найдите уравнение плоскости ABC.

2°. Уравнение плоскости в отрезках

1) Пусть плоскость α проходит через три точки A, B, C, лежащие на осях OX, OY и OZ соответственно. Тогда, если координаты этих точек $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, то уравнение плоскости α имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow bc \cdot x + ac \cdot y + ab \cdot z = abc.$$

Разделив обе части на abc, получаем *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Здесь a, b, c – отрезки (ориентированные), отсекаемые плоскостью на осях координат.

Замечание. *Это уравнение аналогично уравнению прямой в отрезках на плоскости.*

2) **Упражнения:**

(1) Запишите общее уравнение плоскости $3x + 2y - 6z - 12 = 0$, как уравнение в отрезках.

(2) Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(3; 0; 0)$, $N(0; -5; 0)$, $K\left(0; 0; \frac{1}{8}\right)$.

(3) Через точку $P(7; -5; 1)$ проведите плоскость, которая бы отсекала на осях координат равные положительные отрезки.

Домашнее задание

1) Найдите уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно векторам $\overrightarrow{a} = (4; -1; 2)$ и $\overrightarrow{b} = (3; 2; -5)$.

2) Через точки $A\left(\dfrac{3}{2}; 3; -\dfrac{2}{3}\right)$ и $B(4; 5; 1)$ проведите плоскость, параллельную вектору $\overrightarrow{a} = (0; 6; -1)$.

3) Точки $A\,(0; 0; 2)$, $B\,(3; 0; 5)$, $C\,(1; 1; 0)$ и $D\,(4; 1; 2)$ – вершины тетраэдра $ABCD$, точка N – середина ребра AD, а точка M – точка пересечения медиан треугольника ACD. Найдите

   а) общее уравнение плоскости BCD; б) общее уравнение плоскости BMN.

4) Запишите уравнения плоскостей

   а) $5x + y - 3z - 15 = 0$; б) $x - 4z + 6 = 0$; в) $x - 7 = 0$.

   как уравнения в отрезках и найдите отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат.

5) Три грани тетраэдра, расположенного во втором октанте $(x > 0, y < 0, z > 0)$, совпадают с координатными плоскостями. Найдите уравнение четвертой грани, если длины ребер, ее ограничивающих, равны $AB = 6$, $BC = \sqrt{29}$ и $CA = 5$ (точка A лежит на оси OX, точка B – на оси OY, точка C – на оси OZ).

Урок 11. Параллельные и перпендикулярные плоскости

1°. Параллельные плоскости

1) Пусть даны две плоскости $\alpha_1 : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} - p_1 = 0$ и $\alpha_2 : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} - p_2 = 0$. Очевидно, что $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$. Последнее условие можно переписать в виде $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = 0$ или $\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$.

2) Посмотрим, как выглядит условие параллельности плоскостей в координатах. Пусть $\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Тогда

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = ta_2, \\ b_1 = tb_2, \\ c_1 = tc_2. \end{cases}$$

3) **Примеры:**

   (1) Плоскости $2x - 3y - 4z + 11 = 0$ и $-4x + 6y + 8z + 36 = 0$ параллельны, т. к. $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-4}{8}$.

   (2) Плоскости $2x - 3z - 12 = 0$ и $4x + 4y - 6z + 7 = 0$ не параллельны, т. к. $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{0}{4}$.

4) Во многих задачах требуется провести через данную точку плоскость, параллельную данной плоскости. В общем виде эта задача решается так:

   Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ – данная точка, а $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ – данная плоскость. Тогда искомая плоскость β задается уравнением:

$$\beta : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

   которое легко приводится к общему виду.

5) **Упражнения:**

   (1) Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 2; 9)$ параллельно плоскости $2x - 3y - z - 1 = 0$.

   (2) Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$, $D(1; 3; 2)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC.

6) Часто просят найти расстояние между параллельными плоскостями $\alpha_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ и $\alpha_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$. Эту задачу можно решать различными способами.

I способ: Выберем произвольную точку $A \in \alpha_1$ (например $\left(0, 0, -\dfrac{d_1}{c}\right)$). Найдем расстояние от нее до плоскости α_2. Получаем:

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \rho(A, \alpha_2) = \frac{|c(-\frac{d_1}{c}) + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

II способ: Этот же результат можно получить из других соображений. Если начало координат находятся между плоскостями, то искомое расстояние определяется как сумма расстояний от начала координат до каждой из плоскостей. В противном случае – как разность.

7) **Упражнения:**

   (1) Найдите расстояние между плоскостями $\alpha : 11x - 2y - 10z + 15 = 0$ и $\beta : 11x - 2y - 10z - 45 = 0$.

   (2) На расстоянии три от плоскости $3x - 6y - 2z + 14 = 0$ проведите параллельную ей плоскость.

2°. Перпендикулярные плоскости

1) Очевидно, что две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормали. Пусть $\alpha_1 : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} - p_1 = 0$ и $\alpha_2 : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} - p_2 = 0$. Тогда
$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0.$$

2) Переходя к координатной записи для плоскостей $\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ получаем:
$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

3) **Примеры:**

   (1) Плоскости $3x - 2y - 2z + 7 = 0$ и $2x + 2y + z + 4 = 0$ перпендикулярны, т. к. $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$.

   (2) Плоскости $3x - 2y = 0$ и $y + z = 4$ не перпендикулярны, т. к. $3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \neq 0$.

4) Часто бывает полезным следующее соображение: если плоскости α и β перпендикулярны, то вектор нормали к β является направляющим вектором плоскости α.

5) **Упражнение:** Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2x+3y-z-5 = 0$ и $x+2y+z-11 = 0$.

Домашнее задание

1) Через точку $M(-2;0;3)$ проведите плоскость, параллельную плоскости $2x - y - 3z + 5 = 0$.

2) Даны точки $A(2;-1;0)$, $B(3;2;1)$, $C(1;2;2)$ и $D(-3;0;4)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC.

3) Найдите расстояние между плоскостями $2x + 3y - 6z + 14 = 0$ и $2x + 3y - 6z - 35 = 0$.

4) На расстоянии пяти единиц от плоскости с уравнением $4x + 2y - 4z - 27 = 0$ проведите параллельную ей плоскость.

5) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;0;-3)$ и перпендикулярной к двум плоскостям: $\alpha : x + 2y + 3z - 5 = 0$ и $\beta : 3x - 5y + 4z - 12 = 0$.

6) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;3;8)$ и $N(2;5;-1)$ перпендикулярно плоскости $\alpha : 2x - y + z = 0$.

Урок 12. Угол между плоскостями. Биссекторная плоскость

1°. Угол между плоскостями

1) Ранее мы договорились называть углом между двумя пересекающимися плоскостями наименьший из двугранных углов, образованных при их пересечении. Но тогда угол между плоскостями $\alpha_1 : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} - p_1 = 0$ и $\alpha_2 : \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} - p_2 = 0$ либо равен углу между нормалями $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, либо дополняет его до 180°. Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$.

2) Последнее соотношение в декартовых координатах принимает вид

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Здесь $\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\alpha_1 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

3) **Пример:** Найдите угол между плоскостями $2x + 2y - z - 2 = 0$ и $5x + 12y - 2 = 0$.

4) **Упражнения:**

   (1) Даны точки $A(1;0;1)$, $B(-2;2;1)$, $C(2;0;3)$, $D(0;4;-2)$. Найдите угол между плоскостями ABC и BCD.

   (2) Через точку $M(-5;16;12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось OX, а другая – ось OY. Найдите угол между этими двумя плоскостями.

   (3) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(0;0;1)$ и $N(3;0;0)$ и образующей угол 60° с плоскостью XOY.

5) Иногда возникает необходимость определить, является ли данный двугранный угол острым или тупым. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема.

Двугранный угол, образованный пересекающимися плоскостями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, содержащий точку $A(x_0, y_0, z_0)$, является острым тогда и только тогда, когда

$$(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2) < 0.$$

2°. Биссекторная плоскость

1) Ранее мы определяли биссектор двугранного угла как полуплоскость, делящую двугранный угол на два равных угла. Под *биссекторной плоскостью* мы будем понимать плоскость, делящую пополам каждый из пары вертикальных двугранных углов.

2) Найдем уравнение биссекторных плоскостей (они перпендикулярны), делящих пополам двугранные углы между плоскостями $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} - p_1 = 0$ и $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} - p_2 = 0$. Поскольку биссектор – ГМТ, равноудаленных от сторон угла, то

$$\frac{|\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} - p_1|}{|\overrightarrow{n_1}|} = \frac{|\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} - p_2|}{|\overrightarrow{n_2}|}.$$

Раскрывая модули, получим две перпендикулярные плоскости.

3) **Пример:** Напишите уравнения плоскостей, делящих пополам углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$.

Домашнее задание

1) Найдите угол между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и $x - 4y - z + 9 = 0$.

2) Найдите косинусы углов, образованных плоскостью $3x - 5y + z - 8 = 0$ и координатными плоскостями.

3) Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите угол между плоскостями MNK и NKL.

4) Через ось OZ проведите плоскость, образующую угол $60°$ с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}\,z - 7 = 0$.

5) Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями $x + 2y - 2z - 7 = 0$ и $3x + 4y + 12z + 1 = 0$ и содержащего начало координат.

6) Даны плоскости $8x + 4y + z + 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 1 = 0$. Напишите уравнение биссекторной плоскости пары вертикальных двугранных углов, если известно, что

   а) точка $A(1; 1; 1)$ лежит в одном из углов этой пары;

   б) эти углы острые.

Урок 13. Пучок и связка плоскостей

1°. Пучок плоскостей

1) Мы знаем, что две плоскости либо параллельны, либо пересекаются по прямой. Рассмотрим множество плоскостей, проходящих через одну прямую. Это множество называют **пучком плоскостей**, а их общую прямую – **осью пучка**.

2) Имеет место следующая теорема:

Теорема.

Пусть ось пучка определена как линия пересечения плоскостей α и β:

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Тогда:

- *При любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, уравнение*

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \qquad (1)$$

  задает плоскость, принадлежащую пучку.

- *Обратно, для любой плоскости γ пучка найдутся такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, что уравнение (1) задает плоскость γ.*

2°. Упражнения

1) Через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 5y - z + 2 = 0$ проведите плоскость:
а) проходящую через $A_0(1; 1; 1)$; б) параллельную оси OY; в) перпендикулярно к плоскости $2x - y + 5z - 3 = 0$.

2) Через линию пересечения плоскостей $x + 5y + z = 0$ и $x - z + 4 = 0$ проведите плоскость, образующую угол 45° с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

3) При каких значениях параметров a и d плоскости $2x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$ и $ax + y - 2z + d = 0$ принадлежат одному и тому же пучку (т. е. пересекаются по одной прямой)?

3°. Связка плоскостей

1) Три плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо принадлежать одному пучку, либо не иметь общих точек.

2) Для того, чтобы три плоскости пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы их нормали были некомпланарны.

Определение.

> *Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется* ***связкой*** *плоскостей, а данная точка –* ***центром связки****.*

3) Если координаты центра связки известны, то связка плоскостей задается уравнением $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, где a, b, c – вещественные числа такие, что $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Но бывает, что центр связки задается уравнениями трех плоскостей, проходящих через него. Тогда уравнение связки записывается в виде:

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \nu(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) = 0,$$

где λ, μ, ν – вещественные числа и $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$.

4) В принципе, существует формула, позволяющая найти радиус-вектор точки пересечения трех плоскостей:

$$\overrightarrow{r} = \frac{p_1(\overrightarrow{n_2} \times \overrightarrow{n_3}) + p_2(\overrightarrow{n_3} \times \overrightarrow{n_1}) + p_3(\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2})}{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3})}.$$

Упражнение: Докажите эту формулу.

Однако на практике эту формулу применяют редко. Обычно просто решают систему трех линейных уравнений.

5) **Упражнение:** Найдите точку пересечения плоскостей:

$$5x + 8y - z - 7 = 0, \quad x + 2y + 3z - 1 = 0, \quad 2x - 3y + 2z - 9 = 0.$$

Домашнее задание

1) Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 5; -3)$ и линию пересечения плоскостей $3x + y - z - 5 = 0$ и $x + 2z = 0$.

2) Через линию пересечения плоскостей $3x + y - 2z - 6 = 0$ и $x - 2y + 5z - 1 = 0$ проведите плоскости, перпендикулярные данным плоскостям.

3) Найдите уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости
$$5x - y + 3z - 2 = 0$$
и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости XOY.

4) Докажите, что плоскости $3x - 4y + 5 = 0$, $x - 2z + 1 = 0$ и $2y - 3z - 1 = 0$ пересекаются по одной прямой.

5) Имеют ли общие точки следующие четыре плоскости:

а) $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$ и $3x + 4y + 5z - 3 = 0$;

б) $5x + 2y - 6 = 0$, $x + y - 3z = 0$, $2x - 3y + z + 8 = 0$ и $3x + 2z - 1 = 0$?

6) Через точку пересечения плоскостей $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3y + z - 1 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$ проведите плоскость:

а) проходящую через ось абсцисс;

б) параллельную плоскости XOZ;

в) проходящую через начало координат и точку $P(1; 3; 2)$.