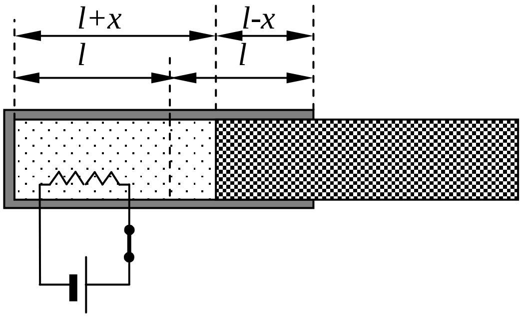
10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 1 (Розв'язок)

Малюнок з умови задачі:



Протягом часу t_1 = 41,55 с температура газу лінійно зростає від T_0 = 300 К до T_1 = 320 К (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41{,}55}{20} = \frac{5}{2}R.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності $C_{12} = C_V$. Це означає, що протягом часу t_1 після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює V_0.
При досягненні температури T_1 тиск газу в посудині зростає до значення

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \tag{1}$$

де F – сила тертя спокою, S – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right), \qquad p(x) = p_A + \frac{F}{S}\frac{(l-x)}{l} = p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}, \tag{2}$$

Виключивши з цих рівнянь величину $\frac{x}{l}$, отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F}{S}\frac{V}{V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A)\frac{V}{V_0} \tag{3}$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина - тиск p_1. Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від x *(див. рис. у розв'язку)*:

$$RT(x) = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right)\left(p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}\right). \tag{4}$$

Температура газу досягає максимуму T_m = 360 К (рис 2) при деякому значенні $\frac{x_m}{l}$, яке може бути визначене з умови екстремуму функції $T(x)$ як вершина параболи:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2}\frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \tag{5}$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що $p_1V_0 = RT_1$, отримуємо квадратне рівняння відносно величини $\frac{p_A}{p_1}$

$$4\left(\frac{T_m}{T_1} - 1\right)\left(1 - \left(\frac{p_A}{p_1}\right)\right) = \left(\frac{p_A}{p_1}\right)^2.$$

Розв’язуючи рівняння при підстановці числових значень T_1 та T_m отримуємо $p_1 = 2p_A$. Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме вигляд:

$$p = p_A\left(3-\frac{V}{V_0}\right) \qquad \text{або} \qquad \frac{V}{V_0} = 3-\frac{p}{p_A}. \qquad (6)$$

Початковий об’єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 = p_1\frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8}p_A.$$

Рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$\frac{V(3-V/V_0)}{T} = const.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об’єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплотою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки посудини, можна знехтувати):

$$\delta Q = \frac{5}{2}RdT + pdV.$$

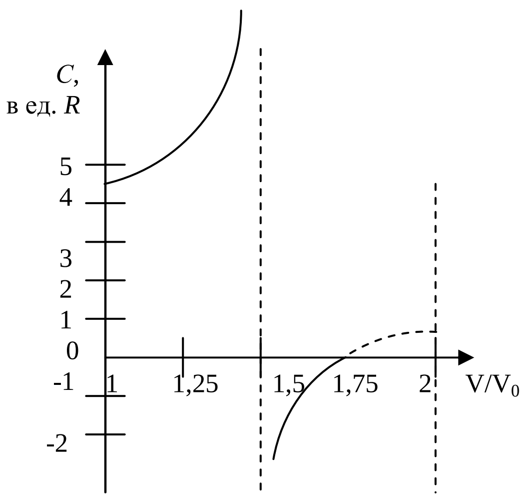
Звідки теплоємність газу $C = \frac{5}{2}R + p\frac{dV}{dT}$. Із рівняння стану

$$p_AV(3-\frac{V}{V_0}) = RT$$

отримаємо $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{(3-2V/V)p_A}$. Так як $p = p_A(3-V/V_0)$, то

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3-V/V_0}{3-2V/V_0}R.$$

На графику схематично зображено залежність $C=f\ (V/V_0)$. Як бачимо, при $1{,}5<V/V_0<1{,}75$ теплоємність від’ємна.



10 клас Старе авторське!

XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)

Задача 2 (Розв'язок)

Згідно даних задачі очевидно, що в момент початку руху системи $\alpha_0 = 60^0$, $\beta_0 = 30^0$ (рис.2).

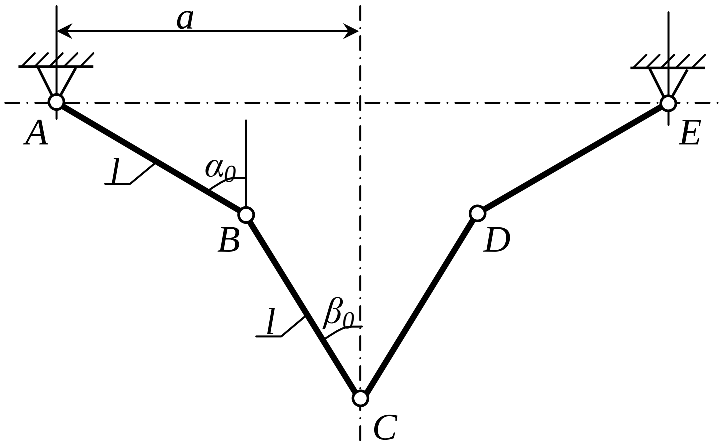


Рис.2

З часом система набуде стану стійкої рівноваги (рис. 3). Сила *F*, що діє з боку правої частини системи на ліву, в силу симетрії системи направлена так, як показано на рис. 3. Запишемо умову рівноваги стержня ВС відносно точки В:

$$Fl\cos\beta - mg\frac{l}{2}\sin\beta = 0.$$

Звідси

$$F = \frac{mg}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}. \quad (1)$$

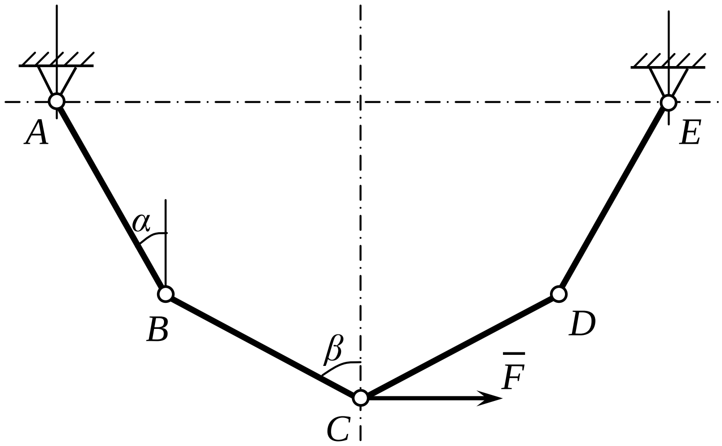


Рис.3

Тепер запишемо умову рівноваги лівої частини системи відносно точки А:

$$F(l\cos\alpha + l\cos\beta) - mg\frac{l}{2}\sin\alpha - mg(l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\beta) = 0.$$

Звідси

$$F = \frac{mg}{2}\frac{3\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}. \quad (2)$$

Прирівняємо (1) і (2):

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{3\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\,.$$

Звідси

$$\mathrm{tg}\beta=3\mathrm{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Шарнір C переміщується тільки по вертикалі, тому

$$l\sin\alpha+l\sin\beta=a=l\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,$$

або

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,. \qquad (4)$$

Дослідимо систему рівнянь (3) та (4). Рівнянню (4) відповідають ті значення кутів α і β, при яких точка C знаходиться на осі симетрії. Таких пар значень α і β безліч. Рівняння (3) виділяє з цієї безлічі конкретну пару кутів α_1 та β_1, яка відповідає умові стійкої рівноваги.

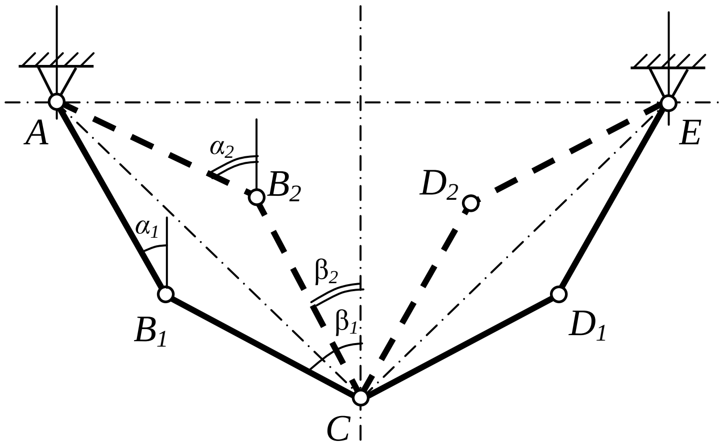


Рис.4

Значення α_1 і β_1 можна визначити, розв'язуючи вказану систему чисельними методами.

Але дана механічна система має ще одну особливість. Положенню точки C при стійкій рівновазі системи відповідає ще одна пара кутів α_2 і β_2. Це випливає з, що коли існує трикутник AB_1C, то при тих же положеннях шарнірів A і C існує також трикутник AB_2C (рис.4).Або це випливає також з рівняння (4), згідно якого α і β можна поміняти місцями.

Все сказане відповідає заміні $\alpha_1=\beta_2$ та $\beta_1=\alpha_2$. Така заміна трансформує умову (3) стійкої рівноваги в умову (5) існування другого розв'язку для заданого положення шарніра C. Одержимо

$$tg\alpha_2=3tg\beta_2\,. \qquad (5)$$

Так як при $\alpha_2=\alpha_0=60^0$ та при $\beta_2=\beta_0=30^0$ умова (5) виконується, то робимо висновок, що початкове положення шарніра C співпадає з його положенням за умови стійкої рівноваги.

Отже, шарнір C після перерізування нитки не зміститься, а за стійкої рівноваги $\alpha_1=30^0$, $\beta_2=60^0$.

Кількість тепла Q, що виділиться по закінченні руху системи, дорівнює зменшенню її потенціальної енергії. Враховуючи незмінність положень точок A, C і E, одержимо:

$$Q=2m(\frac{l}{2}\cos\alpha_1-\frac{l}{2}\cos\alpha_0)+2m(\frac{l}{2}\cos\beta_0-\frac{l}{2}\cos\beta_1)=2mgl(\cos30^0-\cos60^0)=mgl(\sqrt{3}-1)\,.$$

10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 3 (Розв'язок)

Схематично зобразимо положення супутників (див. Рис.1.) Зазначимо, що різниця часу відправлення і отримання сигналів від перших двох супутників однакова $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0{,}0479$ с. Отже приймач знаходиться в площині екватору.

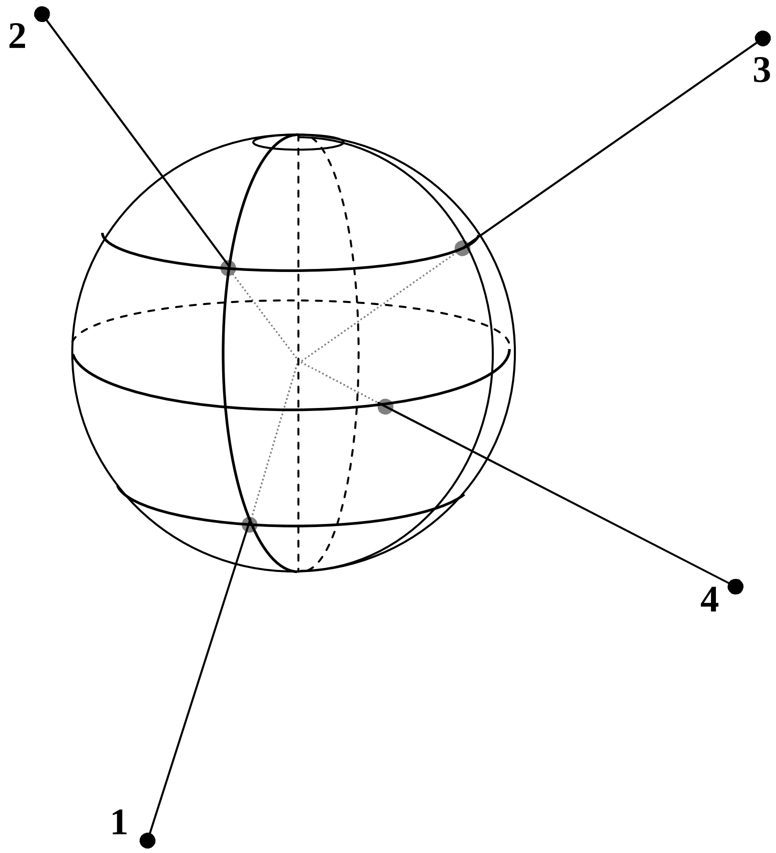


Рис.1.

Також однаковою є різниця часу відправлення і отримання сигналів від другого і третього супутників $\Delta t_2 = \Delta t_3 = 0{,}0479$ с. Отже приймач знаходиться в площині меридіану 45°. Дві площини перетинаються вздовж лінії з координатами четвертого супутника. Таким чином, приймач знаходиться безпосередньо під четвертим супутником. Перед тим як розглянути надходження сигналів до приймача від першого і четвертого супутників визначимо кут, який утворюють напрями на ці супутники з центру планети.

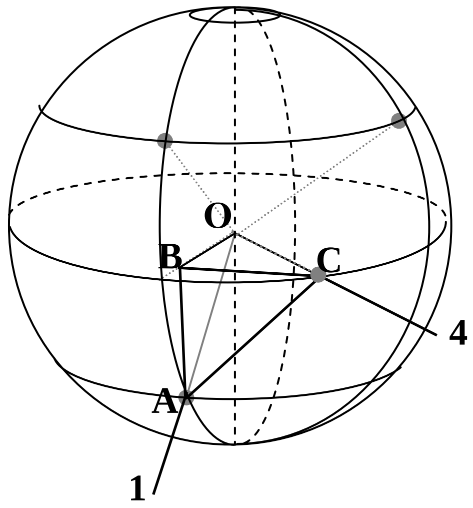


Рис.2.

Оскільки за умовою кути AOB і BOC дорівнюють 45°, $AB = BC = R/\sqrt{2}$, де R - відстань від центру планети до спостерігача (див. Рис.2). Отже $AC = R$ і трикутник OAC є рівностороннім з кутами по 60°. Розглянемо тепер площину цього трикутника (Рис.3). Позначимо через $\Delta\tau$ розходження у часі між годинником приймача і точним часом t супутників. Тоді відстань між спостерігачем (точка C) і 4-м супутником $r - R = c(\Delta t_4 + \Delta\tau)$, а відстань між спостерігачем і 1-м супутником $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos 60^\circ} = c(\Delta t_1 + \Delta\tau)$. Маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими R і $\Delta\tau$, звідки знаходимо:

$$\begin{cases} R = c(\Delta t_1 - \Delta t_4)\dfrac{2r + c(\Delta t_1 - \Delta t_4)}{r + 2c(\Delta t_1 - \Delta t_4)} \approx 6383{,}04\ \text{км} \\ \Delta\tau = \dfrac{r - R}{c} - \Delta t_4 \approx 0{,}0111\ \text{с.} \end{cases}$$

Отже повітряна куля знаходиться у точці з координатами 0°00’00’’ широти (тобто над екватором), 45°00’00’’ східної довготи (неподалік від східного узбережжя Африки), на висоті $R - R_e \approx 4$ км 890 м над рівнем Індійського океану.

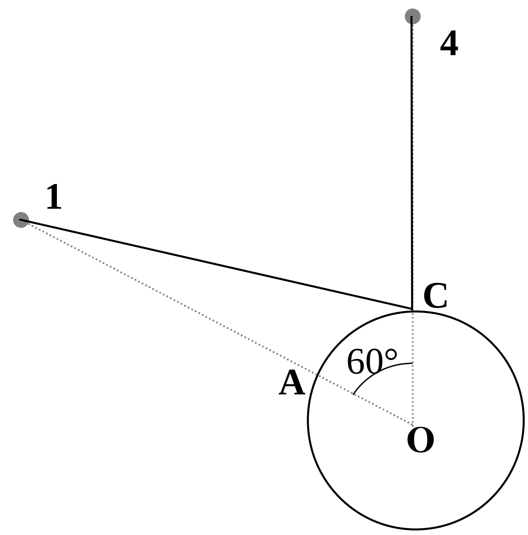


Рис.3.

Игорь!

То, что синим курсивом, можно частично или полностью включить в задачу. Тогда она будет похожа на межнаровскую (думаю, рано или поздно там что-нибудь по GPS дадут). Небольшие нюансы: Земля вращается, орбиты под углами (хотя вот это как раз и не очень существенно). Придется вычислять скорости спутников, периоды их обращения и думать.

Наконец, могу переделать основной вариант: задать не радиус орбиты, а период обращения равный, например, в точности полупериоду Земли (вначале работы GPS как раз эта схема и использовалась). Сейчас периоды незначительно отличаются от 12 часов, а радиусы орбит от заданных в условии задачи.

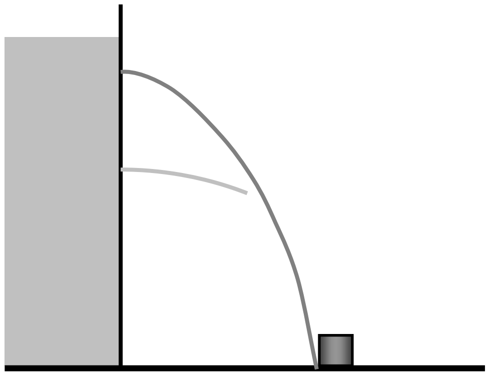
Наконец, условия избыточны: в основном варианте полярный радиус и сплюснутость Земли не используются, но если заранее выбросиь их из условия – получится подсказка об экваторе.

Вообщем, звони или пиши, как удобнее.

Олег

10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 4 (Розв'язок)

Малюнок з умови задачі:



Як відомо, за ідеальних умов швидкість вильоту води з отвору можна знайти або з рівняння Бернуллі, або з закону збереження енергії (з урахуванням великої площі перерізу діжки $v = \sqrt{2gh}$ - формула Торрічеллі). В реальних умовах швидкість завжди дещо менша і залежить від форми отвору (обговорення цього питання можна знайти, наприклад, у Фейнманівських лекціях з фізики). Тому будемо вважати, що

$$v_1 = \alpha\sqrt{2gh_1} = \alpha\sqrt{2gh}, \qquad v_2 = \alpha\sqrt{2gh_2},$$

де α – деяке менше за одиницю безрозмірне число, однакове для обох отворів внаслідок їх подібності, h_2 - глибина другого отвору. Знайдемо положення точки перетину струменів. У вертикальному напрямку за деякий час t вода опускається на відстань $y = \frac{gt^2}{2}$,у горизонтальному – зміщується на відстань $x = vt$. Таким чином, для системи координат з початком у точці виходу першого струменя і спрямованою вниз віссю ординат, маємо наступні рівняння ліній першого і другого струменів:

$$y_1 = \frac{gx_1^2}{2v_1^2}, \qquad y_2 = \Delta h + \frac{gx_2^2}{2v_2^2},$$

де $\Delta h = h_2 - h_1$ відстань між отворами. Оскільки в точці перетину координати співпадають $x_1 = x_2 \equiv x_0$, $y_1 = y_2 \equiv y_0$, з урахуванням виразу для швидкостей знаходимо:

$$\begin{cases} x_0 = 2\alpha\sqrt{h_1h_2}, \\ y_0 = h_2. \end{cases}$$

Тобто точка перетину струменів нижча від другого отвору на відстань $y_0 - \Delta h = h_1$. Дивний і красивий результат. Виявляється, точка перетину струменів буде завжди нижча за нижній отвір на відстань між верхнім отвором і поверхнею води (не зважаючи на те, яка відстань між самими отворами). В нашому випадку це h=10 см. Єдине застереження це сторонні предмети, які можуть завадити перетину струменів. В нашому випадку – поверхня столу, від якої нижній отвір повинен бути віддаленим щонайменше на ті ж самі 10 см.

Перейдемо до другої частини задачі. За умовою другий отвір зроблений на відстані $h_2 = 4h$ від поверхні води. Тоді $\begin{cases} x_0 = 4\alpha h, \\ y_0 = 4h, \\ v_2 = 2\alpha\sqrt{2gh} = 2v_1. \end{cases}$

Швидкість народженого в точці $(x_0; y_0)$ нового струменя знайдемо із закону збереження імпульсу. Маса води, яка проходить через отвір площею перерізу S за одиницю часу, дорівнює
$q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v$. Для першого і другого отворів маємо

$$q_1 = \rho S_1 v_1 = \alpha \rho S_1 \sqrt{2gh}, \qquad q_2 = \rho S_2 v_2 = \alpha \rho S_2 \cdot 2 v_1 = q_1 .$$

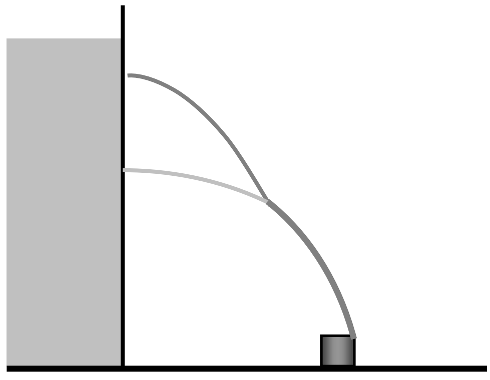
Виявляється, змішуються рівні маси рідини обох струменів. Тоді закон збереження імпульсу
зведеться до визначення середньоарифметичних швидкостей. У горизонтальному напрямку швидкості струменів залишаються незмінними, отже після з'єднання $v_x = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{3}{2} v_1$. У вертикальному напрямку $v_y = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2gy_0} + \sqrt{2g(y_0 - \Delta h)}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$. Для того, щоб знайти відстань від діжки, на якій опиниться струмінь, знизившись до рівня отвору стакана, знайдемо
спочатку час τ такого зниження. Точка перетину знаходиться на висоті $H - h - y_0 = 5h$ над поверхнею, а висота стакану h. Отже $4h = v_y \tau + \frac{g\tau^2}{2}$ або

$$g\tau^2 + 3\sqrt{2gh}\,\tau - 8h = 0 .$$

Додатний корінь квадратного рівняння $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. За цей час в горизонтальному напрямі струмінь зміститься на $l = v_x \tau = \frac{3}{2}\alpha\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3\alpha h$ і опиниться на відстані $L = x_0 + l = 7\alpha h$ від діжки. Стакан знаходиться від діжки на відстані 6 своїх діаметрів d. Цю ж відстань за умовою задачі спочатку долав у горизонтальному напрямку один перший струмінь. Тобто,

$$6d = v_1 t = \alpha\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 6\alpha h .$$

Отже $d = \alpha h$ і тоді $L = 7d$. Струмінь буде попадати у верхню крайню точку стакану (що може призвести навіть до перевертання останнього). Під час розрахунків ми знехтували опором повітря, впливом сил поверхневого натягу на рух струменя, завдяки яким той власне й утворює одне ціле. Навіть у цьому випадку завдяки товщині струменя вода буде частково попадати у стакан. Відповідь на останнє питання в ідеалізованому випадку: струмінь перелітатиме стакан, якщо $S_1/S_2 < 2$.



10 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 5 (Розв'язок)

Скористаємося методом електростатичних зображень.

1) Під час переміщення точкового заряду можна вважати заряд-зображення нерухомим. Отже, виконана під час переміщення робота

$$A = -k\frac{q^2}{3a} + k\frac{q^2}{2a} = k\frac{q^2}{6a}.$$

(ми збільшили відстань між зарядами від $2a$ до $3a$). За умовою ця робота $A = 36$ мкДж.

Застосуємо тепер закон збереження енергії:

$$W_1 + A = W_2 + Q.$$

Початкова енергія кулонівської взаємодії заряду з площиною

$$W_1 = -\frac{1}{2}\cdot k\frac{q^2}{2a},$$

а кінцева енергія

$$W_2 = -\frac{1}{2}\cdot k\frac{q^2}{4a}.$$

Ми врахували, що енергія взаємодії реального заряду з його зображенням удвічі менша, ніж енергія взаємодії двох відповідних реальних зарядів (досить згадати, що реальне електричне поле існує тільки у півпросторі).

Таким чином,

$$Q = W_1 - W_2 + A = k\frac{q^2}{24a} = \frac{1}{4}A = 9 \text{ мкДж}.$$

2) У цьому випадку легко помітити, що енергія кулонівської взаємодії не змінюється (можна вважати, що просто змінилися на протилежні знаки всіх зарядів). Отже, згідно з законом збереження енергії $Q = A = 36$ мкДж.