Кто не согласится, что никакая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию?

Н.И.Лобачевский

АКСИОМАТИКА ГИЛЬБЕРТА

Исходные (неопределяемые) понятия:

1) точка;
2) прямая;
3) плоскость;
4) отношение связи точки и прямой;
5) отношение связи точки и плоскости;
6) отношение “находиться между” для точек;
7) отношение равенства отрезков;
8) отношение равенства углов.

I Аксиомы принадлежности (связи)

Аксиома I.1. *Через каждые две различные точки проходит прямая и притом только одна.*

Аксиома I.2. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

Аксиома I.3. *Существуют три точки, не лежащие на одной и той же прямой.*

Аксиома I.4. *Через каждые три точки, не лежащие на одной и той же прямой, проходит плоскость и притом только одна.*

Аксиома I.5. *Каждой плоскости принадлежит по крайней мере одна точка.*

Аксиома I.6. *Если две различные точки лежат на некоторой прямой и на некоторой плоскости, то и всякая точка, лежащая на этой прямой, лежит на этой плоскости.*

Аксиома I.7. *Никакие две различные плоскости не могут иметь ровно одну принадлежащую им обеим точку.*

Аксиома I.8. *Существуют четыре точки, не лежащие на одной и той же плоскости.*

* * *

Теорема 1. *Две различные прямые не могут иметь более одной точки, принадлежащей им обеим.*

Теорема 2. *Пусть прямая проходит через две различные точки, а третья точка не лежит на этой прямой. Тогда не существует прямой, проходящей через все эти точки.*

Теорема 3. *Для каждых двух различных точек A и B найдется такая точка C, что точки A, B и C не лежат на одной прямой.*

Теорема 4. *Для каждой плоскости существует более одной принадлежащей ей точки.*

Определение.

Про две различные прямые, про две различные плоскости, а также про прямую и плоскость будем говорить, что они ***пересекаются****, если существует точка, принадлежащая им обеим.*

Теорема 5. *Пусть две различные прямые пересекаются. Тогда существует ровно одна плоскость, проходящая через эти прямые.*

Определение.

Будем говорить, что ***плоскости α и β пересекаются по прямой p****, если*
1) прямая p принадлежит как плоскости α, так и плоскости β;
2) любая точка, принадлежащая плоскостям α и β, принадлежит прямой p.

Теорема 6. *Если две плоскости пересекаются, то они пересекаются по некоторой прямой.*

Упражнение. Докажите, что каждая точка лежит на некоторой прямой.
Упражнение. Докажите, что каждая прямая лежит на некоторой плоскости.

$*\ *\ *$

Геометрия 14 объектов (геометрия тетраэдра)

Рассмотрим систему, состоящую из объектов трех различных видов. Предметы первого вида назовем *точками*, их у нас будет четыре: A, B, C, D. Предметы второго вида назовем *прямыми*, их у нас будет шесть: p, q, r, s, t, u. Предметы третьего вида назовем *плоскостями*, их у нас снова будет четыре: α, β, γ, δ.

Объявим, что некоторые точки принадлежат некоторым прямым и некоторым плоскостям. А именно, будем считать, что $A \in q, r, s$; $B \in p, r, t$; $C \in p, q, u$; $D \in s, t, u$; $B, C, D \in \alpha$; $A, C, D \in \beta$; $A, B, D \in \gamma$; $A, B, C \in \delta$.

Замечание. *Эта модель соответствует тетраэдру, вершины которого названы точками, ребра – прямыми, а грани – плоскостями.*

Упражнение. Докажите, что для такой системы, состоящей из 14 объектов, выполнены все аксиомы принадлежности.

II Аксиомы порядка

Аксиома II.1. *Если точка B лежит между точками A и C, то все три точки A, B и C различны.*

Аксиома II.2. *Если точка B лежит между точками A и C, то все три точки A, B и C лежат на одной прямой.*

Замечание. Эта аксиома показывает, что к точкам, не лежащим на одной прямой, отношение "между" неприменимо.

Аксиома II.3. *Если точка B лежит между точками A и C, то B лежит также между C и A.*

Аксиома II.4. *Для любых двух различных точек A и B существует такая точка C, что B лежит между A и C.*

Опираясь на аксиомы **II.1 – II.4**, можно доказать следующую теорему:

Теорема 7. *На каждой прямой лежит не менее трех точек.*

Замечание. *А вот существование на прямой четырех точек из аксиом II.1 – II.4 не следует. Действительно, прямая, на которой имеется ровно три точки, причем каждая из них объявлена лежащей между двумя другими ("три точки на окружности"), образует модель для аксиом II.1 – II.4. Однако уже следующая аксиома порядка делает такую трехточечную модель невозможной.*

Аксиома II.5 (Аксиома единственности промежуточной точки)**.** *Среди любых трех точек существует не более одной, лежащей между двумя остальными.*

Замечание. *Трехточечная прямая из комментария к предыдущей аксиоме уже не является моделью для системы аксиом II.1 – II.5. Для этой системы аксиом можно предложить такую модель: прямая содержит четыре различные точки A, B, C и D, причем точка B объявляется лежащей между A и C, точка C – между B и D, точка D – между C и A, точка A – между D и B ("четыре точки на окружности").*

Аксиома II.6 (Аксиома Паша)**.** *Пусть три точки A, B и C не лежат на одной прямой. Пусть прямая p принадлежит плоскости, проходящей через эти три точки, не проходит ни через одну из этих трех точек, но проходит через какую-то точку, лежащую между A и B. Тогда эта прямая непременно проходит и через какую-то точку, лежащую либо между B и C, либо между A и C.*

Замечание. *Наглядная геометрическая формулировка аксиомы Паша такова: прямая, расположенная в плоскости треугольника и пересекающая одну из сторон этого треугольника, пересекает и какую-то другую его сторону.*

С помощью аксиомы Паша доказывается ряд важнейших свойств, которым подчинено расположение точек на прямой. В частности, справедливы следующие теоремы:

Теорема 8. *Если три различные точки лежат на одной прямой, то ровно одна из них лежит между двумя другими.*

Теорема 9. *Для любых двух различных точек A и C существует точка X, лежащая между A и C.*

План доказательства. Разобьем доказательство на 5 этапов:

1-й этап: Находим такую точку E, что A, C и E не лежат на одной прямой;

2-й этап: Находим такую точку B, что E лежит между A и B.

3-й этап: Находим такую точку F, что C лежит между B и F.

4-й этап: Находим прямую p, проходящую через E и F.

5-й этап: Находим точку X, принадлежащую как прямой p, так и прямой, проходящей через точки A и C; эта точка и будет искомой.

Теорема 10. *Между любыми двумя различными точками лежит бесконечно много точек.*

Замечание. *Кажется, что утверждение теоремы 10 сразу следует из теоремы 9. Однако не забудьте доказать, что все точки получающейся последовательности различны и лежат между исходными точками.*

Теорема 11. *Каковы бы ни были три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, невозможна прямая, которая проходила бы одновременно и через некоторую точку, лежащую между A и B, и через некоторую точку, лежащую между B и C, и через некоторую точку, лежащую между C и A.*

III Аксиомы равенства (конгруэнтности)

Определение.

__Отрезком AB__ называется множество точек, состоящее из точек A и B и всех точек, лежащих между ними. При этом точки A и B называются __концами отрезка__, а все остальные точки – его __внутренними точками__.

Замечание. *Понятно, что обозначения AB и BA задают один и тот же отрезок.*

Аксиома III.1. *Если $A'B' = AB$ и $A''B'' = AB$, то $A'B' = A''B''$.*

Аксиома III.2. *Пусть точка B лежит между точками A и C, а точка B' лежит между точками A' и C'. Если при этом $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$.*

Утверждение. *Если $AB = A'B'$, то $A'B' = AB$.*

Определение.

Говорят, что __точки A и B лежат по одну сторону от точки C__, если точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка C не лежит между точками A и B.

Аксиома III.3. *Пусть дан отрезок AB, прямая p и на ней две различные точки O и E. Тогда можно найти точку X, обладающую двумя свойствами: 1) X лежит на p, причем по ту же сторону от O, что и E; 2) $AB = OX$.*

Теорема 12 (о существовании луча)**.** *Пусть даны прямая p и точка O, лежащая на этой прямой. Тогда множество всех точек прямой p, отличных от точки O, разбивается на два подмножества, обладающих следующими двумя свойствами:*

1) если две точки принадлежат одному и тому же подмножеству, то они лежат по одну сторону от точки O;

2) если две точки прямой p лежат по одну сторону от точки O, то они принадлежат одному и тому же подмножеству.

Определение.

Каждое из двух подмножеств, указанных в теореме о существовании луча, называется ***открытым лучом****, а сама точка O –* ***началом*** *этого открытого луча.* ***Замкнутый луч****, или просто* ***луч****, определяется как открытый луч с добавленным к нему его началом.*

Определение.

Углом *называется совокупность двух лучей, имеющих общее начало. Эти лучи называются* ***сторонами*** *угла, а их общее начало –* ***вершиной*** *угла.*

Упражнение. Сформулируйте определение **смежных** и **вертикальных** углов.

Аксиома III.4. *Всякий угол равен самому себе.*

Замечание. *Необходимо обратить внимание, что аналогичной аксиомы для отрезков нет. Дело в том, что утверждение "****Всякий отрезок равен самому себе****" можно доказать, исходя из аксиом конгруэнтности отрезков. Подумайте, как это сделать.*

Аксиома III.5. *Пусть даны три различные точки A, B и C и три различные точки A', B' и C'. Если $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.*

Замечание. *В школьном курсе геометрии эта аксиома образует признак равенства треугольников "по двум сторонам и углу между ними".*

Определение.

Говорят, что ***точки A и B лежат по одну сторону от прямой p****, если точки A, B и p лежат в одной плоскости и прямая p не имеет общих точек с отрезком AB.*

Упражнение.

а) Сформулируйте **Теорему о существовании полуплоскости**, аналогичную сформулированной выше теореме "о существовании луча".

б) Пользуясь этой теоремой, определите понятие **полуплоскости с данным ребром**.

Аксиома III.6. *Пусть даны четыре объекта:*

а) угол (h, k), стороны которого не принадлежат одной прямой;

б) точка O';

в) луч h' с началом в этой точке;

г) полуплоскость α, границе которой принадлежит этот луч.

Тогда существует единственный луч k', который обладает следующими тремя свойствами:

1) k' имеет своим началом O';

2) $k' \in \alpha$;

3) $\angle(h', k') = \angle(h, k)$.

Теорема 13. *Каждый отрезок можно разделить пополам, т. е. для любых двух точек A и B найдется такая точка C, что:*

1) C лежит между A и B;

2) $AC = CB$.

IV Аксиомы непрерывности

Аксиома IV.1 (Архимеда)**.** *Пусть AB и CD – произвольные отрезки. Тогда на прямой, проходящей через точки A и B, существует конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенных следующим образом:*

1) точка A_1 лежит между точками A и A_2, и далее каждая точка A_i лежит между точками A_{i-1} и A_{i+1};

2) отрезок AA_1 и каждый из отрезков $A_{i-1}A_i$ равен отрезку CD;

3) точка B лежит между точками A и A_n.

Аксиома IV.2 (Кантора)**.** *Пусть на некоторой прямой дана бесконечная последовательность вложенных отрезков. Тогда существует точка, лежащая внутри каждого из отрезков последовательности.*

* * *

Теперь можно ввести понятие **длины отрезка**:

Определение.

> ***Длиной отрезка*** *называется числовая функция, заданная на множестве всех отрезков, и обладающая следующими свойствами:*
> ***Д1*** *(положительность). Длина каждого отрезка положительна.*
> ***Д2*** *(инвариантность). Равные отрезки имеют равные длины.*
> ***Д3*** *(аддитивность). Если точка B лежит внутри отрезка AC, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC.*
> ***Д4*** *(нормированность). Существует отрезок, длина которого равна единице.*

Далее необходимо проверить корректность данного определения, т. е. исследовать вопрос о существовании и единственности длины отрезка. Положительный ответ на этот вопрос дают следующие теоремы, которые можно доказать, опираясь на аксиому Архимеда:

Теорема (о существовании длины отрезка)**.** *На множестве всех отрезков пространства можно задать функцию, удовлетворяющую условиям* ***Д1*** *–* ***Д4****. При этом любой фиксированный отрезок можно выбрать в качестве единицы длины.*

Теорема (о единственности длины отрезка)**.** *Если функции l_1 и l_2 являются длинами отрезков с единичными отрезками e_1 и e_2, то $l_2 = \alpha l_1$, где $\alpha = l_2(e_1)$. Если же $e_1 = e_2$, то $l_1 = l_2$.*

Замечание. *Аналогично понятию длины отрезка может быть введено понятие меры угла. При этом дополнительных аксиом вводить не нужно: утверждения, аналогичные аксиомам Архимеда и Кантора, могут быть доказаны.*

V Аксиома параллельности

Определение.

> *Две прямые называются* ***параллельными****, если они лежат в одной плоскости и не существует точки, принадлежащей им обеим.*

Аксиома V.1 (Евклида о параллельных)**.** *Через всякую точку, не лежащую на какой-либо прямой p, проходит не более одной прямой, параллельной прямой p.*

Аксиома о параллельных занимает особое место в системе аксиом геометрии. Дело в том, что она не столь "очевидна", как другие аксиомы. В связи с этим в течение долгого времени предпринимались попытки доказать аксиому о параллельных, исходя из остальных аксиом. Но в каждое такое "доказательство" проскальзывало какое-нибудь геометрическое утверждение, равносильные аксиоме V.1.

Словосочетание "утверждение, равносильное аксиоме о параллельных", имеет следующий смысл:

1) в системе аксиом, включающей аксиому о параллельных, рассматриваемое утверждение может быть доказано (т. е. является теоремой);

2) если же из аксиоматики вычеркнуть аксиому о параллельных, а вместо нее вставить рассматриваемое утверждение, то в этой новой системе аксиом аксиома о параллельных может быть доказана как теорема.

Ниже сформулированы некоторые утверждения, равносильные аксиоме V.1:

Утверждение 1. *Через любую точку внутри угла можно провести секущую, пересекающую обе стороны угла.*

Утверждение 2. *Сумма углов треугольника равна удвоенному прямому углу.*

Утверждение 3. *Сумма углов треугольника не зависит от выбора треугольника.*

Утверждение 4. *Существуют два треугольника, у которых углы попарно равны, а противолежащие этим углам стороны не равны (т. е. существуют подобные треугольники).*

В первой половине XIX века российский математик Николай Лобачевский и венгерский математик Янош Бойяи независимо друг от друга построили геометрическую теорию, основанную на отрицании аксиомы V.1. Эту теорию обычно называют ***геометрией Лобачевского****, а геометрию, основанную на аксиоме V.1, –* ***евклидовой геометрией****. В геометрии Лобачевского аксиома V.1 заменена на следующее положение:*

Аксиома (Лобачевского)**.** *Через всякую точку, не лежащую на какой-либо прямой p, проходит более одной прямой, параллельной прямой p.*

В геометрии Лобачевского справедливы многие факты, выглядящие странно для человека, воспитанного на евклидовой геометрии. Например:

а) сумма углов треугольника всегда меньше двух прямых и притом своя у каждого треугольника;

б) если треугольники подобны, то они равны;

в) площадь любого треугольника не превосходит некоторого фиксированного числа.

Кажется естественным вопрос, какая же из аксиом (Евклида или Лобачевского) "истинна", т. е. соответствует реальному положению вещей? Но в реальном мире нет ни прямых, ни точек, ни плоскостей, ни других объектов геометрии. Поэтому вопрос надо ставить так: какая из рассматриваемых аксиом точнее описывает те представления о структуре реального физического пространства, которые отражаются в геометрических образах. Строгий ответ на этот вопрос таков: неизвестно.