Решения задач, 8й класс, 2011 г.

1. Велосипедист должен проехать некоторое расстояние. Со скоростью *45 км/ч* он проезжает половину этого расстояния, после чего вследствие поломки велосипеда вынужден пройти оставшуюся половину расстояния со скоростью *5 км/ч*. а) Найдите среднюю скорость, с которой велосипедист преодолел всё расстояние. б) Насколько велика могла бы быть средняя скорость велосипедиста, если бы он мог проехать первую половину пути со сколь угодно большой скоростью?

Решение.

а) Обозначим всё расстояние L, скорость на первой половине пути - v_1, на второй - v_2. По определению, средняя скорость равна $v = L/t$, где t - время, за которое пройдено расстояние L. В свою очередь, $t = L/(2\,v_1) + L/(2\,v_2)$. Тогда $v = 2\,v_1\,v_2/(v_1 + v_2) = 2\cdot 45 \cdot 5 / 50 = 9$ (км/ч).

б) Чем больше скорость, тем меньшее время потребуется на преодоление определённого расстояния. Предположим, что велосипедист первую половину расстояния преодолел мгновенно. Тогда время, затраченное на весь путь, целиком состоит из времени, затраченного после поломки велосипеда: $t = L/(2\,v_2)$. В этом случае $v = L/t = 2v_2 = 10$ км/ч, что ненамного отличается от результата предыдущего пункта.

2. Чтобы остановить снижение аэростата, пилот выбросил за борт балласт. Пилот увидел, что балласт достиг поверхности земли через *20с* после броска. Ещё через *3с* он услышал звук удара балласта об землю. Как двигался аэростат после выбрасывания балласта – вверх или вниз? Найти среднюю скорость движения аэростата после выбрасывания балласта. Скорость груза можно считать постоянной и равной *50 м/с*, скорость звука можно считать постоянной и равной *340 м/с*, погода безветренная.

Решение.

Балласт, падая со скоростью v_1 = 50 м/с в течение времени t_1=20с, пролетает расстояние $h_1 = v_1 t_1$=1000 м. На такой высоте находился аэростат в момент выбрасывания балласта. За время t_2=3с звук со скоростью v_2 = 340 м/с проходит расстояние $h_2 = v_2 t_2$ = 1020 м. На этой высоте пилот услышал звук удара балласта об землю. Так как $h_2 > h_1$, то после выбрасывания балласта аэростат стал подниматься. Средняя скорость подъёма составляет $v = (h_2 - h_1)/(t_1 + t_2) \approx 1$ м/с.

Примечание: строго говоря, время t_1 состоит из времени падения балласта $t_б$, времени распространения светового сигнала от места падения до наблюдателя t_c, и времени реакции человека t_p. Однако по сравнению с 20 с последними двумя временными интервалами можно пренебречь: $t_c \sim 1000$ м / $3\cdot 10^8$м/с $\sim 3\cdot 10^{-6}$ с, $t_p \sim 10^{-1}$ с. Кроме того, в численном ответе мы пренебрегли t_2 по сравнению с t_1, что соответствует малости скорости балласта по сравнению со скоростью звука.

3. Грузик на нитке, привязанной к гвоздю (1), вбитому в стенку (рис.1), совершает малые колебания в плоскости, параллельной стенке. Период колебаний *T*, длина нитки *L=1м*. В стенку можно вбить второй гвоздь (2), так что маятник часть своего движения будет совершать, вращаясь вокруг него, как показано на рис. Куда следует вбить гвоздь, чтобы движение маятника обладало периодом *3/4·T*?

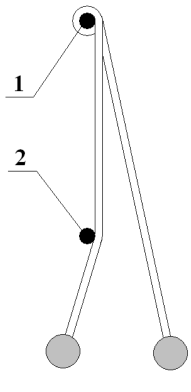


Рис.1.

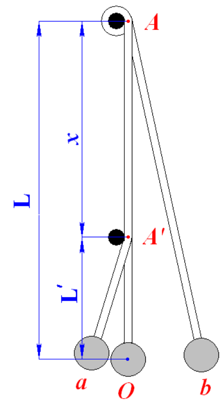


Рис.1а

Решение.

Обозначим расстояние между гвоздями x. Часть времени маятник ведёт себя, как математический маятник длины L с периодом T, и часть времени – как маятник длины L'=L-x с некоторым периодом T'. Обозначим период маятника со вбитым вторым гвоздём T''. Последний слагается из двух частей: времени движения t с длиной L, и времени движения t' с длиной L'. Известно, что математический маятник проходит от положения с максимальным отклонением до положения равновесия за четверть периода. Следовательно, вбив второй гвоздь так, чтобы положения равновесия маятника длины L и маятника длины L' совпадали, можно быть уверенными, что от крайнего правого положения *b* до положения равновесия *O* маятник проходит за T/4, и от положения равновесия до крайнего левого положения *a* – за T'/4 (см. рис.1а). Обратное движение от *a* до *O* длится T'/4 , и от *O* до *b* - T/4. Таким образом,

$$t' = T/4 + T/4 = T/2$$
$$t = T'/4 + T'/4 = T'/2$$
$$T'' = t + t' = (T+T')/2 = T(1+ T'/T)/2$$

Период математического маятника пропорционален корню из длины, так что $T'/T = \sqrt{(L'/L)}$ и $(T'/T)^2 = L'/L$. С другой стороны, $T'/T = 2T''/T - 1$, значит,

$$L' = L(2T''/T - 1)^2$$
$$x = L - L' = L(1 - (2T''/T - 1)^2) = 4L\,T''/T\,(1 - T''/T) = 0.75 \text{ м}$$

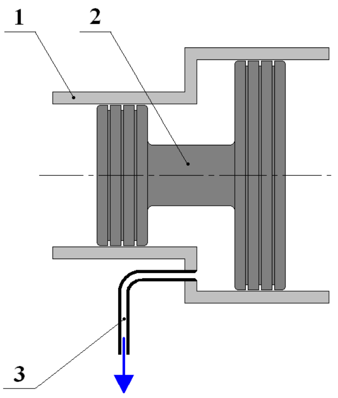
Решение в общем виде довольно громоздко, так что для школьников более приемлемо получить численный ответ непосредственно:

$$T'' = T(1+ T'/T)/2$$
$$3/4 = (1+ T'/T)/2$$
$$T'/T = 1/2$$
$$L'/L = 1/4,\ x = L - L' = 3/4\,L$$

Ответ: требуемый период получим, вбив второй гвоздь на расстоянии 0.75 м отвесно под первым гвоздём.

Примечание: Требование малости колебаний ограничивает геометрическое место точек подвеса A' отвесной линией, проведенной из A.

4. В цилиндре (1), составленном из двух частей разных диаметров, находится поршень (2), способный без трения скользить внутри цилиндра (рис. 2). Из цилиндра по патрубку (3) откачивается воздух. Будет ли перемещаться поршень? Если да, то какую силу и в каком направлении необходимо приложить к поршню, чтобы его остановить? Площади сечений цилиндра равны S_1=10 *см*^{2}, S_2=20 *см*^{2}. Снаружи давление воздуха равно атмосферному. Насос, осуществляющий откачку, способен удалить из цилиндра практически весь воздух.



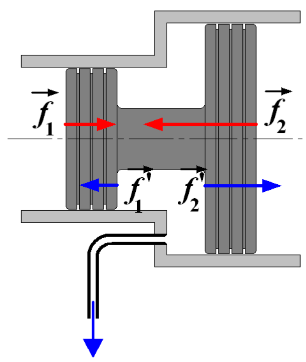


Рис.2.

Решение. Движение поршня по цилиндру определяется действующими на него силами давления воздуха изнутри и извне цилиндра, которые обозначим F_1 и F_2, соответственно. Сила F_1 создаётся силой давления f_1 на левую поверхность поршня S_1 и силой давления f_2 на правую поверхность поршня S_2:

$$f_1 = p\,S_1$$
$$f_2 = p\,S_2$$

Сила f_1 направлена вправо, а f_2 - влево. Поскольку $S_2 > S_1$, то $f_2 > f_1$ и результирующая сила давления наружного воздуха будет направлена влево. Её величина равна

$$F_1 = pS_2 - pS_1 = p(S_2 - S_1)$$

Эту силу уравновешивает сила F_2 давления на поршень со стороны газа внутри цилиндра. Она направлена противоположно F_1. Если же давление газа внутри цилиндра уменьшится (вследствие откачки), то уменьшится и сила давления F_2, равновесие нарушится и поршень станет перемещаться в сторону действия силы F_1.

Если насос удалит из цилиндра весь воздух, то последний не будет создавать силу давления на поршень изнутри цилиндра, и на поршень будет действовать только сила давления со стороны наружного воздуха F_1. Чтобы поршень оставался неподвижным в этих условиях, на него необходимо подействовать направленной противоположно F_1 и равной ей по величине силой F_x:

$$F_x = p(S_2 - S_1) = 10\ \text{Н/см}^2 \cdot (20\ \text{см}^2 - 10\ \text{см}^2) = 100\ \text{Н}$$

Примечание. Школьники 8го класса могут вычислить силу давления F_2 следующим образом. Силы давления, действующие на поверхности S_1', S_2'

$$f_1' = p'\,S_1'$$
$$f_2' = p'\,S_2'$$
$$F_1 = f_2' - f_1' = p'(S_2' - S_1')$$

где p' – давление внутри цилиндра. Предположив, что $S_1' - S_1 = S_2' - S_2$, получим $F_1 = p'(S_2 - S_1)$. Из равенства величин F_1 и F_2 получим равенство давлений внутри и вне цилиндра. Этот результат может быть ясен и интуитивно, как следствие закона Паскаля, поскольку поршень перемещается по цилиндру только под действием сил давления, так же как и газ в процессе выравнивания давления по объёму. Поэтому вполне допустимым представляется и такой способ решения: давление воздуха внутри цилиндра постоянно, тогда как движение поршня влево сопровождается уменьшением объёма газа, следовательно, чтобы давление оставалось неизменным, газ должен покидать объём, что и происходит при откачке.

5. На одной чаше весов находится источник света (1), а на другой – собирающая линза (2) (рис.3). Линза формирует изображение источника на экране (3). Коромысло весов совершает колебания, вследствие чего линза, источник и изображение на экране двигаются поступательно вверх-вниз. Амплитуды колебаний источника света и линзы равны *a=1 см*. Расстояния от центра линзы до изображения и от центра линзы до источника равны между собой. Найдите амплитуду колебаний изображения.

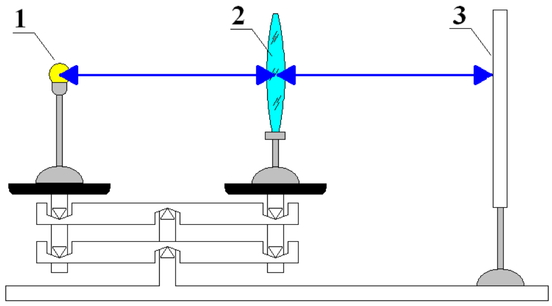


Рис.3.

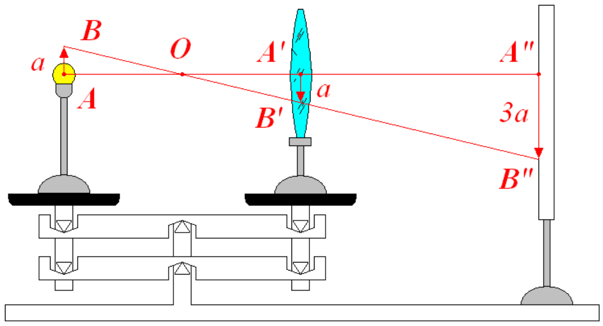


Рис.3а

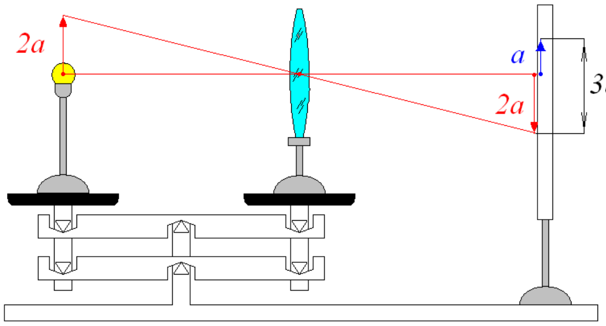


Рис.3б

Решение. Приведём способы решения, известные авторам на данный момент, в порядке роста их «ценности»

1) Наименее рациональным, по-видимому, является нахождение изображений источника, в двух крайних положениях или в равновесном и крайнем положении весов. Для этого замечаем, что предмет и изображение удалены от главной плоскости линзы на двойное фокусное расстояние (в этом можно убедиться, применив формулу тонкой линзы). Далее находим изображение стандартным способом (например, как пересечение двух лучей, проходящих через фокусы), для выбранных двух расположений линзы и источника. Расстояние между ними и есть амплитуда, которая оказывается равной 3*a*

2) Обращаем внимание на то, что изображение, по условию, находится на экране. Поскольку линза создаёт изображение, то все лучи, испущенные определённой точкой источника, попадут в соответствующую точку изображения. Чтобы найти амплитуду колебаний изображения, будем следить за лучом, соединяющим точку источника, центр линзы и точку изображения. Известно, что направление такого луча не изменяется при преломлении в линзе. На рис. 3а изображены два таких луча, соответствующие отклонению источника до амплитудного значения. Из подобия треугольников OA’B’ и OA”B” следует, что амплитуда колебаний точки изображения A”B” равна 3*a*.

3) Рассмотрим движение источника и экрана относительно линзы (рис.3б). Относительно линзы источник смещается на расстояние 2*a*, а изображение относительно линзы смещается точно так же, как источник, но в противоположную сторону (ввиду того, что источник и изображение расположены симметрично относительно центра линзы). Экран же смещается относительно линзы в ту же сторону, что и источник, на расстояние *a* . Сумма смещений экрана и изображения относительно линзы равна 3*a*. Данный способ (и родственные ему) до проведения олимпиады представлялись нам наиболее интересными.

4) Однако самым красивым, на наш взгляд, представляется решение, идея которого была подсмотрена в работе одного из участников олимпиады. Представим движение весов от положения равновесия до положения максимального отклонения как последовательность двух движений: 1) линза стоит на месте, источник перемещается на 2*a* вверх; 2) линза и источник, не меняя взаимного расположения, опускаются на *a* вниз. Нетрудно видеть, что в результате первого движения изображение сместится вниз на 2*a*, и в результате второго движения – ещё на *a* в том же направлении. В результате смещение изображения составит 3*a*.