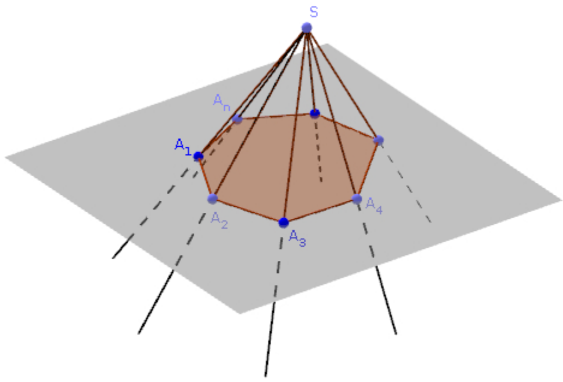
Многогранные углы

Определение. *Пусть $\Phi = A_1A_2\ldots A_n$ — плоский n-угольник, а точка $S \notin (A_1A_2\ldots A_n)$. Тогда объединение лучей, имеющих общее начало в точке S и пересекающих многоугольник Φ в точках A_i соответственно, называют* **многогранным** *(n-**гранным**) углом. Обозначают $SA_1A_2\ldots A_n$, специальные значки отсутствуют. Точку S называют* **вершиной** *многогранного угла, прямые (лучи, отрезки) SA_i — его* **ребрами**, *плоскости (треугольники) SA_iA_{i+1} (а также SA_nA_1) —* **гранями**.

Определение. **Плоским углом** *многогранного угла называют угол между двумя его соседними ребрами,* **двугранным углом** *многогранного угла называют угол между двумя его соседними гранями.*

Трехгранный угол имеет специальное название — *триэдр*. Плоские углы триэдра обозначают α, β, γ соответственно букве противоположной вершины, двугранные — $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$; или SA, SB, SC; или просто A, B, C соответственно букве вершины, находящейся на пересечении граней.



Многогранный угол $SA_1A_2\ldots A_n$

Очевидно, не для любой комбинации линейных углов существует соответствующий трехгранный. Можно попробовать доказать теорему о единственности (в принципе, она довольно очевидна). Достаточное условие будет сформулировано далее.

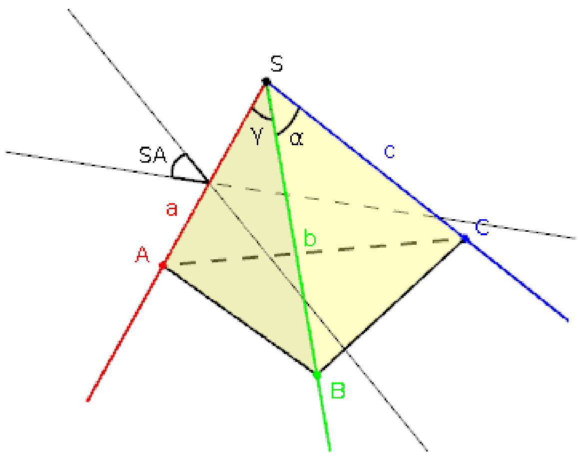
Приведу некоторые необходимые условия существования триэдра с заданными элементами.

Теорема 1. (*Неравенство треугольника в триэдре*) Величина каждого плоского угла триэдра меньше суммы величин двух других углов.

□ Пусть $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Докажем тогда, что $\gamma < \alpha + \beta$. Отметим на ребре AB такую точку M, что $\angle ASM = \beta$ (см. рис, так как $\angle ASB = \gamma > \beta$, то точка M лежит внутри отрезка AB). Отметим на луче SC такую точку D, что $SD = SM$. Тогда $\triangle ASM = \triangle ASD$ по двум сторонам и углу между ними (AS общая, $SM = SD$ и $\angle ASM = \angle ASD$ по построению). Из равенства этих треугольников следует, что $AD = AM$.

Из неравенства треугольника в $\triangle ABD$ получим $AB < AD + BD$. Но так как $AD = AM$ и $AB = AM + MB$, то неравенство можно преобразовать к виду $AM + MB < AM + BD$, т.е. $MB < BD$.

Рассмотрим $\triangle BSM$ и $\triangle BSD$. В них SB — общая, $SM = SD$ и $BM < BD$. Тогда $\angle MSB < \angle BSD$ (это легко видеть, например, из теоремы косинусов). Но угол MSB как раз и равен $\gamma - \beta$, а $\angle BSD = \alpha$. Отсюда получаем $\gamma < \alpha + \beta$, ч.т.д. ■

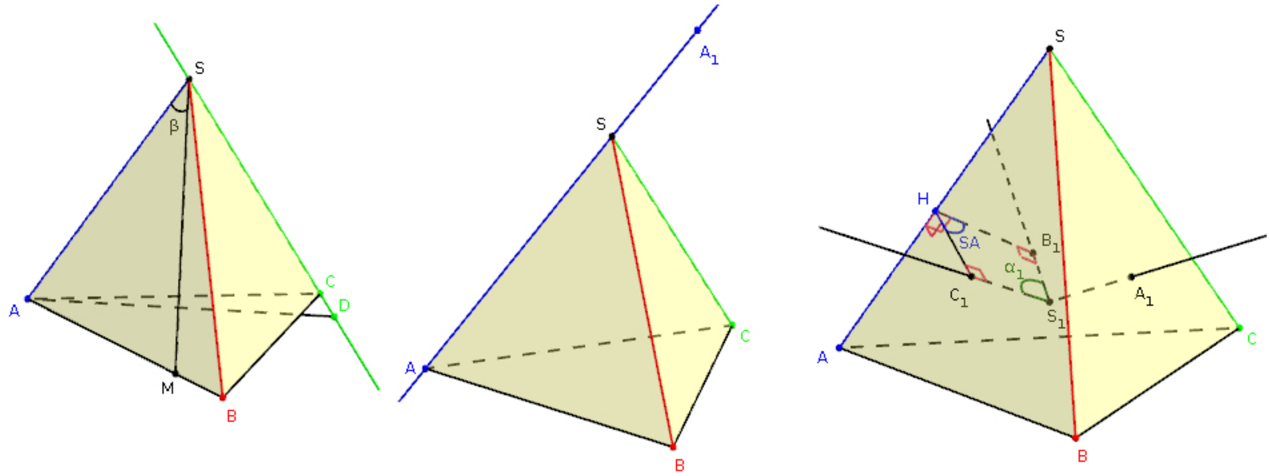


Триэдр $SABC$. На рисунке α, γ — плоские углы триэдра; SA — двугранный угол при ребре a

Теорема 2. Сумма плоских углов триэдра не превышает 2π.

□ Отметим на продолжении отрезка AS точку A_1 (см. рис). Рассмотрим триэдр SA_1BC. В нем плоские углы равны α, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$ соответственно. Тогда по теореме 1 для этого триэдра $\alpha < (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)$, откуда $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$, ч.т.д. ■

Определение. *Отметим точку S_1 внутри триэдра. Спроектируем ее на грани триэдра и отметим ее проекции A_1, B_1 и C_1. Тогда триэдр $S_1A_1B_1C_1$ называют* **полярным** *данному триэдру.*



К теоремам 1, 2 и 3 соответственно

Обозначения элементов полярного триэдра соответствуют обозначениям элементов в исходном триэдре, к которым приписывают индексы или штрихи (например, $\angle B_1$, γ').

Нетрудно доказать, что если триэдр T_1 полярен триэдру T_2, то и T_2 полярен T_1. Действительно, так как $S_1B_1 \perp (ASC)$ и $S_1C_1 \perp (ASB)$, то $S_1B_1 \perp AS$ и $S_1C_1 \perp AS$. А так как прямые S_1B_1 и S_1C_1 не параллельны, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости получим $AS \perp (B_1S_1C_1)$. Аналогично доказывается и перпендикулярность других двух пар прямых и плоскостей. Таким образом, можно говорить о *взаимной полярности.*

Также вполне очевидно, что все полярные триэдры одинаковы независимо от положения выбранной точки S_1, ведь все соответствующие стороны и грани таких триэдров будут попарно параллельны.

Теорема 3. Сумма плоского угла триэдра и соответствующего ему двугранного угла полярного триэдра равна π.

□ Отметим точку H пересечения прямой AS и плоскости $B_1S_1C_1$ (см. рис). Тогда, так как $AS \perp (B_1S_1C_1)$, то $B_1H \perp AS$ и $C_1H \perp AS$. А это как раз означает, что $\angle B_1HC_1$ — это и есть угол между гранями ASB и ASC, т.е. $\angle B_1HC_1 = \angle A$. Также, из определения полярного триэдра следует, что $B_1S_1 \perp B_1H$ и $C_1S_1 \perp C_1H$. Рассмотрим 4-угольник $B_1S_1C_1H$. В нем $\angle B_1S_1C_1 = \alpha_1$, $\angle B_1HC_1 = \angle A$, а $\angle HB_1S_1 = \angle HC_1S_1 = \pi/2$. Тогда из теоремы о сумме углов в 4-угольнике незамедлительно получаем $\alpha_1 + \angle A = \pi$, ч.т.д. ■

При помощи этой теоремы можно получить также соотношения между плоскими углами триэдра.

Теорема 4. Сумма двугранных углов триэдра принадлежит интервалу $(\pi, 3\pi)$.

□ Из предыдущей теоремы следует, что $\angle A = \pi - \alpha_1$, $\angle B = \pi - \beta_1$ и $\angle C = \pi - \gamma_1$. Просуммировав эти уравнения, получим $\angle A + \angle B + \angle C = 3\pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)$. А так как в силу теоремы 2 $0 < \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 2\pi$, то $\pi < \angle A + \angle B + \angle C < 3\pi$, ч.т.д. ■

Докажем еще одно интересное утверждение.
Утверждение. Для плоских углов α, β, γ триэдра выполнено неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим единичные векторы $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{SA}/SA$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{SB}/SB$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{SC}/SC$, направленные вдоль сторон триэдра. Тогда, т.к. $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \neq 0$ (ведь эти векторы не лежат в одной плоскости), то $(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})^2 > 0$. Но $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \cos\gamma$, $\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = \cos\alpha$, $\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_1} = \cos\beta$ и $\overrightarrow{e_1}^2 = \overrightarrow{e_2}^2 = \overrightarrow{e_3}^2 = 1$. Значит, при раскрытии скобок получим $3 + 2\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma > 0$, откуда $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -3/2$, ч.т.д.

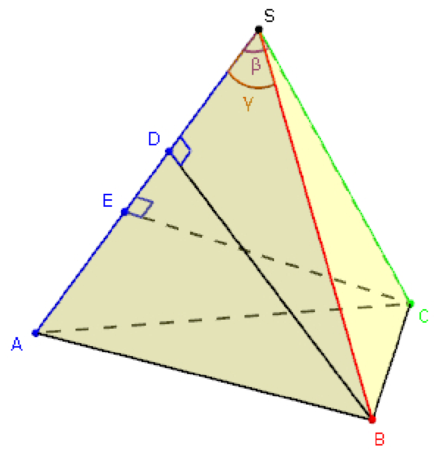
Для триэдра, так же как и для треугольника, существуют метрические теоремы. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 5. (*Косинусов в триэдре*) Для плоских углов триэдра α, β, γ и соответствующих двугранных углов A, B, C выполнены соотношения

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \tag{1}$$
$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha. \tag{2}$$

☐ Докажем вначале формулу 1. Отметим на ребрах триэдра такие точки A, B и C, что $SA = SB = SC = 1$ (см. рис). Опустим перпендикуляры BD и CE на прямую AS ($D, E \in AS$). Из прямоугольных $\triangle SBD$ и $\triangle SCE$ соответственно получим $BD = \sin\gamma$, $CE = \sin\beta$, а также $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA}\cdot\cos\gamma$ и $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SA}\cdot\cos\beta$.

Запишем скалярное произведение векторов $p = \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC}$. С одной стороны, $p = \left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right) = \cos\alpha$. С другой стороны, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EC}$. Тогда $p = \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{SA}\cdot\cos\gamma\right)\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{SA}\cdot\cos\beta\right)$. Так как $SA \perp DB$ и $SA \perp EC$, то $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{EC} = 0$.



К теореме 5

Заметим также, что $\angle(BD, CE) = \angle A$, так как $BD \perp AS$ и $CE \perp AS$, откуда $\angle(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{EC}) = \angle A$. Значит, величина $p = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{SA}^2\cos\beta\cos\gamma = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$. Сравнивая полученные уравнения, получим уравнение 1.

Формулу же 2 легко получить, пользуясь формулой 1. Рассмотрим триэдр, полярный данному. В нем $\angle A_1 = \pi - \alpha$, $\angle B_1 = \pi - \beta$, $\angle C_1 = \pi - \gamma$ и $\alpha_1 = \pi - \angle A$ по теореме 3. Тогда $\cos\alpha = -\cos A_1$, $\cos\beta = -\cos B_1$, $\cos\gamma = -\cos C_1$, $\sin\beta = \sin B_1$, $\sin\gamma = \sin C_1$ и $\cos A = -\cos\alpha_1$. Подставив в уравнение 1, получим $-\cos A_1 = \cos B_1\cos C_1 - \sin B_1\sin C_1\cos\alpha_1$. Переходя к старым переменным (без индексов), получим уравнение 2. ■

Частным случаем этой теоремы является следующая.

Теорема 6. (*Пифагора в триэдре*)

(1) Если в триэдре $\angle A = \pi/2$, то $\cos\alpha = \cos\beta + \cos\gamma$.

(2) Если в триэдре $\alpha = \pi/2$, то $\cos A = -\cos B\cos C$.

☐ Необходимые уравнения следуют из теоремы 5 при подстановке $\cos A = 0$ и $\cos\alpha = 0$ соответственно. ■

Кроме теоремы косинусов, существуют другие известные метрические соотношения в триэдре.

Теорема 7. (*Синусов в триэдре*) Для плоских углов триэдра α, β, γ и соответствующих двугранных углов A, B, C выполнены соотношения

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

☐ Из теоремы 5 (косинусов) следует, что

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Тогда

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos^2 A}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma} = \frac{\left(1-\cos^2\beta\right)\left(1-\cos^2\gamma\right) - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma} =$$
$$= \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}.$$

Полученное выражение симметрично относительно углов α, β, γ. Значит, проделывая такую же процедуру для других пар углов, получим то же выражение, т.е.

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 \gamma} \Leftrightarrow \left|\frac{\sin A}{\sin \alpha}\right| = \left|\frac{\sin B}{\sin \beta}\right| = \left|\frac{\sin C}{\sin \gamma}\right|.$$

А так как все рассматриваемые углы лежат в интервале $(0, \pi)$, то все их синусы положительны. Тогда во всех случаях модуль раскрывается с одним и тем же знаком, и выражение принимает искомый вид. ■

Из этой теоремы легко получить, что $\sin A \sin \beta \sin \gamma = \sin \alpha \sin B \sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta \sin C$, а также $\sin \alpha \sin B \sin C = \sin A \sin \beta \sin C = \sin A \sin B \sin \gamma$. Тогда логично ввести соответствующие определения.

Определение. **Синусом первого рода** *триэдра назовем величину* $\sin A \sin \beta \sin \gamma$.

Синусом второго рода *триэдра назовем величину* $\sin \alpha \sin B \sin C$.

Теоремы 1, 2 и 4 выражают необходимые условия существования триэдра, теоремы 5 и 7 определяют соотношения между элементами триэдра. При помощи приведенных выше теорем можно доказать и достаточное условие.

Теорема 8. (*Достаточное условие существования триэдра*) Триэдр с плоскими углами α, β, γ существует при выполнении условий теорем 1 и 2.

□ Запишем соответствующие условия в виде $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$; $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$. Рассмотрим 2 случая:

1) $\beta + \gamma \leqslant \pi$. Тогда тем более $\alpha < \beta + \gamma < \pi$. Пользуясь убыванием функции косинуса на промежутке $(0, \pi)$, можно получить:

$$\cos(\beta + \gamma) < \cos \alpha < \cos(\beta - \gamma).$$

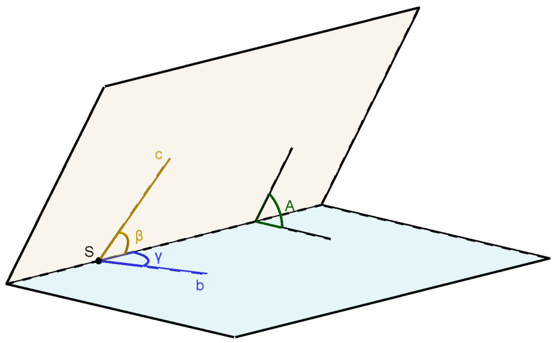
Раскрыв скобки, получим:

$$\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma < \cos \alpha < \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma.$$

Так как все углы лежат в интервале $(0, \pi)$, то $\sin \beta > 0$ и $\sin \gamma > 0$. Разделив тогда на $\sin \beta \sin \gamma$, нетрудно получить:

$$-1 < \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} < 1.$$

Тогда существует такой $\angle A$, что $\cos A$ равен выражению в последней формуле. Построим двугранный $\angle A$, отметим точку S на его ребре и отложим в разных плоскостях его граней углы β и γ с его ребром (см. рис). Тогда в полученном триэдре $Sabc$ два плоских угла равны β и γ, а двугранный угол между ними равен $\angle A$. Тогда из теоремы 5 и выражения для $\cos A$ нетрудно получить, что для угла α' в построенном триэдре выполнено соотношение $\cos \alpha' = \cos \alpha$. Но так как $\alpha' < \pi$ (ибо плоский угол), а функция косинуса монотонна на $(0, \pi)$, то $\alpha' = \alpha$. Тогда построенный триэдр и является искомым.



К теореме 8

2) $\beta + \gamma > \pi$. Тогда в этом случае угол $\tilde{\alpha} = 2\pi - \beta - \gamma < \pi$, а также из теоремы 2 следует, что $\tilde{\alpha} > \alpha$. Значит, углы $|\beta - \gamma|$, α и $\tilde{\alpha}$ принадлежат промежутку $(0, \pi)$. Как и в первом случае, запишем неравенства с косинусами:

$$\cos \tilde{\alpha} = \cos(\beta + \gamma) < \cos \alpha < \cos(\beta - \gamma).$$

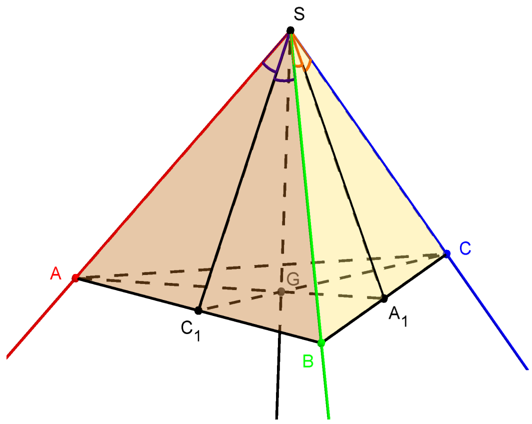
Дальнейшее доказательство дословно повторяет первый случай. ■

Аналогичным образом можно доказать и *единственность* вышеуказанного построения, однако этот факт настолько очевиден, что полное доказательство приводить не буду.

Введем важное определение:

> ***Определение.*** *Рассмотрим двугранный угол с ребром a. Проведем произвольную плоскость α, перпендикулярную прямой a. Очевидно, что эта плоскость пересечет стороны двугранного угла по двум лучам a и b. Проведем биссектрису l угла, образованного этими двумя лучами, и назовем* **биссектором** *геометрическое место таких прямых l.*

Докажем, что полученное ГМТ является (полу)плоскостью. Так как все такие плоскости α попарно параллельны (ведь прямая a перпендикулярна любой из них), то все соответствующие лучи a и b также попарно параллельны. А значит, что и все соответствующие биссектрисы l попарно параллельны, т.е. лежат в одной плоскости. Доказать же, что любая точка этой плоскости принадлежит одной из прямых l можно, например, проводя соответствующую плоскость α через эту точку.



К теореме 11

Докажем, что биссектор двугранного угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от граней угла. Опустим высоты DB и DC из точки D биссектора двугранного угла к его граням, и отметим точку A пересечения его ребра с плоскостью α. Тогда $DB \perp AB$ и $DC \perp AC$ по построению, а $DB \perp a$ и $DC \perp a$ в силу перпендикулярности прямой a и плоскости α. Но так как $AB \nparallel a$ и $AC \nparallel a$, то тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости получим $DB \perp \beta$ и $DC \perp \gamma$, где β и γ — соответственные стороны двугранного угла. А значит, длины отрезков DB и DC равны расстояниям между точкой D и сторонами угла (и они же — расстояния между точкой D и прямыми a, b соответственно). Осталось добавить, что точка D лежит на биссектрисе угла, образованного прямыми a и b, а значит, равноудалена от них. Утверждение доказано.

Обратное также верно: если точка равноудалена от сторон двугранного угла, то она лежит на его биссекторе. Доказать это легко, проводя соответствующую плоскость α через эту точку, как показано выше.

> **Теорема 9.** Биссекторы двугранных углов триэдра пересекаются по прямой.

□ Пусть α и β — биссекторы двугранных углов углов A и B триэдра $SABC$ соответственно. Так как, очевидно, $\alpha \nparallel \beta$, то α и β пересекаются по прямой, назовем ее l. Отметим произвольную точку $M \in l$. Тогда, т.к. $M \in \alpha$, то по доказанному выше $\rho(M,(ASB)) = \rho(M,(ASC))$. Аналогично, т.к. $M \in \beta$, то $\rho(M,(BSA)) = \rho(M,(BSC))$. Значит, точка M равноудалена от всех трех граней триэдра, а значит, лежит и на биссекторе γ угла C. Так как все это доказательство верно для любой точки $M \in l$, то и вся прямая $l \subset \gamma$, ч.т.д. ■

> **Теорема 10.** Биссекторы двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

□ По теореме 9 биссекторы двугранных углов при ребрах SA, SB и SC пересекаются по прямой, назовем ее l. Пусть δ — биссектор двугранного угла при ребре AB. Очевидно, что $l \nparallel \delta$, тогда отметим точку I их пересечения. Тогда точка I равноудалена от *всех* четырех граней тетраэдра, а значит, лежит на биссекторах *всех* шести ребер тетраэдра, ч.т.д. ■

Можно доказать, что точка I является *центром вписанной* в тетраэдр $SABC$ *сферы*. Прямая l же является *осью вписанного* в триэдр *конуса*, ее можно назвать *биссекториальной осью* или просто *биссектрисой* триэдра.

Введем еще несколько определений по аналогии с треугольником, и докажем далее, что для них справедливы теоремы, аналогичные соответствующим в треугольнике.

> ***Определение.*** *Плоскость, содержащую ребро триэдра и биссектрису противоположного плоского угла, называют* **медианной**.

> **Теорема 11.** Три медианные плоскости триэдра пересекаются по прямой.

□ Отметим на ребрах триэдра $Sabc$ точки A, B и C такие, что $SA = SB = SC = 1$. Проведем медианные плоскости SAA_1, SBB_1 и SCC_1 (см. рис). Так как $\triangle ASB$ — равнобедренный, и в нем SC_1 — биссектриса (по определению медианной плоскости), то $AC_1 = C_1B$. При помощи аналогичных рассуждений можно получить, что $BA_1 = A_1C$ и $AB_1 = B_1C$. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке — центроиде G треугольника ABC. А так как каждая из этих прямых принадлежит соответствующей медианной плоскости, то точка G принадлежит всем трем медианным плоскостям. Учитывая то, что и точка S является общей для всех трех медианных плоскостей, то эти плоскости пересекаются по прямой SG, ч.т.д. ■

Следует заметить, что эта прямая в общем случае не является медианой тетраэдра $SABC$ (если длины его ребер не равны), и такие прямые в тетраэдре, вообще говоря, *не пересекаются в одной точке.*

Определение. *Плоскость, проходящую через биссектрису грани триэдра перпендикулярно самой грани, назовем* **серединной**.

Важно понимать, что серединная плоскость грани является геометрическим местом точек, *равноудаленных от ее ребер.* Действительно, пусть грань образована лучами a и b, и l — ее биссектриса. Отметим произвольную точку S серединной плоскости и опустим перпендикуляр SH к плоскости грани. Из определения серединной плоскости следует, что точка $H \in l$. Опустим также перпендикуляры SA и SB к прямым a и b соответственно. Тогда из теоремы о трех перпендикулярах $AH \perp a$ и $BH \perp b$. Но поскольку точка H равноудалена от прямых a и b (ведь лежит на биссектрисе угла, образованного ими), то $AH = BH$. Осталось добавить, что прямая SH перпендикулярна плоскости грани, а значит, треугольники $\triangle ASH$ и $\triangle BSH$ прямоугольны и равны. Следовательно, $AS = BS$ — точка S равноудалена от прямых a и b. Нетрудно понять, что и обратное утверждение верно: точка, равноудаленная от ребер угла, лежит на этой плоскости.

Теорема 12. Три серединные плоскости триэдра пересекаются по прямой.

□ Очевидно, серединные плоскости граней триэдра не параллельны. Пусть l — прямая пересечения двух из них. Тогда по описанному выше свойству любая точка этой прямой равноудалена от всех трех ребер триэдра, а значит, лежит и на третьей серединной плоскости. ■

Теорема 13. Серединные плоскости тетраэдра пересекаются в одной точке.

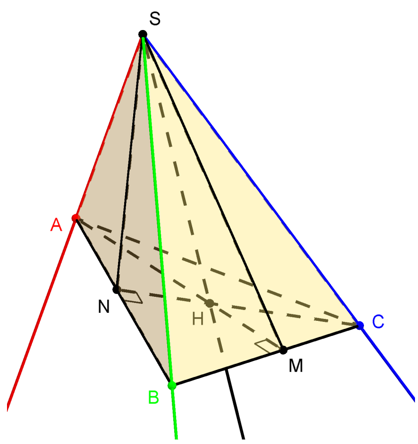
□ Этот факт не является содержательным, поскольку, очевидно, серединная плоскость основания тетраэдра (последняя оставшаяся) не параллельна прямой l (см. доказательство предыдущей теоремы). ■

Можно доказать, что прямая l является *осью описанного* вокруг триэдра *конуса.*

Определение. *Плоскость, проходящую через ребро триэдра перпендикулярно противоположной грани, называют* **высотной**.

Теорема 14. Три высотные плоскости триэдра пересекаются по прямой.

□ Возьмем такие точки A, B, C, что плоскость $(ABC) \perp SA$ (см. рис). Опустим высоту $AM \perp BC$. Тогда, так как $(ABC) \perp SA$, то из теоремы о трех перпендикулярах $SM \perp BC$. Следовательно, BC — нормаль к плоскости (SAM), и плоскость $(SBC) \perp (SAM)$. Таким образом, плоскость (SAM) — высотная в триэдре $SABC$ по определению.



К теореме 14

Отметим на прямой AB точку N такую, что $(SCN) \perp (SAB)$ — еще одна высотная плоскость. Тогда, т.к. $SA \perp (ABC)$, то $(SAB) \perp (ABC)$. Так как $(SCN) \perp (SAB)$ и $(ABC) \perp (SAB)$, то и их линия пересечения $CN \perp (SAB)$. А тогда прямая CN перпендикулярна любой прямой в плоскости (SAB), например, прямой AB.

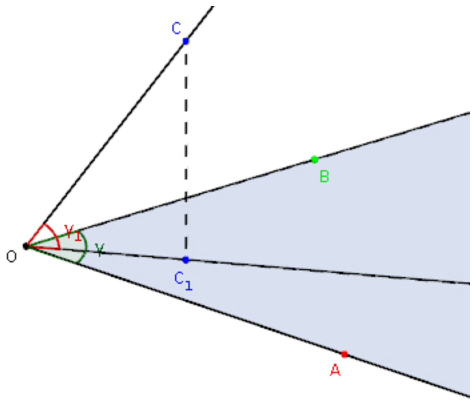
По доказанному выше прямые AM и CN являются высотами в $\triangle ABC$, а следовательно, пересекаются в ортоцентре H треугольника. Отметим точку K на прямой AC аналогично точке N. Прямая BK — также высота в $\triangle ABC$ (доказательство дословно повторяет предыдущий абзац при замене соответствующих названий вершин), тогда BK проходит через точку H.

Так как каждая из прямых AM, BK, CN принадлежит соответствующей высотной плоскости, то точка H является общей для всех высотных плоскостей. Очевидно, точка S также является общей точкой этих трех плоскостей, а значит, они пересекаются по прямой SH, ч.т.д. ■

Прямую SH называют *высотной осью* или *ортоосью* триэдра.

С высотными плоскостями связано еще одно интересное метрическое соотношение.

Утверждение. Рассмотрим триэдр $OABC$. Опустим высотную плоскость $(OCC_1) \perp (OAB)$ и обозначим $\gamma_1 = \angle OCC_1$, углы α_1 и β_1 определим аналогично. Тогда $\sin\alpha\sin\alpha_1 = \sin\beta\sin\beta_1 = \sin\gamma\sin\gamma_1$.



Доказательство. Опустим перпендикуляр CC_1 на плоскость (OAB), $C_1 \in (OAB)$ (см. рис). Тогда $\angle COC_1 = \gamma_1$ по определению угла между прямой и плоскостью. Рассмотрим триэдр $OACC_1$. В нем плоские углы равны β, γ_1 и $\angle BOC_1$, а соответствующие двугранные углы $\angle(OC_1) = \pi/2$ (ведь $(OCC_1) \perp (OAC_1)$), $\angle A$ и $\angle(OC)$. Тогда по теореме 7 (синусов)

$$\frac{\sin A}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\pi/2}{\sin\beta},$$

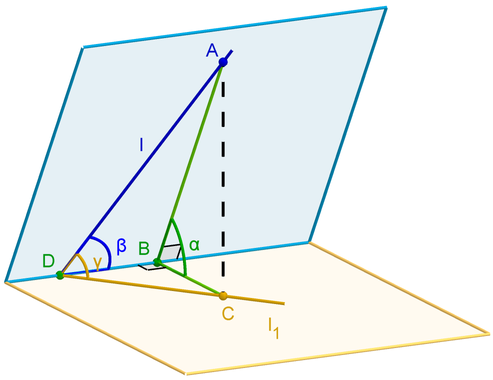
откуда $\sin\gamma_1 = \sin A\sin\beta$. Значит, $\sin\gamma\sin\gamma_1 = \sin A\sin\beta\sin\gamma$ — синус первого рода. Полученное выражение симметрично относительно углов триэдра (как в доказательстве теоремы синусов), а значит, все такие выражения равны. Доказано.

Теорема 15. Пусть Sh — ортоось триэдра $Sabc$. Тогда Sa — ортоось триэдра $Sbch$.

□ Так как Sh — ортоось триэдра $Sabc$, то $Sbh \perp Sac$ и $Sch \perp Sab$. Тогда Sab и Sac — высотные плоскости триэдра $Sbch$, а следовательно они пересекаются по ортооси — прямой Sa, ч.т.д. ■

Теорема 16. Пусть плоскости φ и ψ пересекаются по прямой a. Проведем прямую l в плоскости φ. Обозначим $\alpha = \angle(\varphi, \psi)$, $\beta = \angle(l, a)$, $\gamma = \angle(l, \psi)$. Тогда $\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$.

□ Пусть l_1 — проекция прямой l на плоскость ψ. Отметим точку D пересечения прямых l и a. Возьмем произвольную точку A на прямой l и опустим перпендикуляр AC на плоскость ψ. Опустим также перпендикуляр $AB \perp a$ (см. рис). Тогда $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, $\angle ADC = \gamma$ по определению. Из теоремы о трех перпендикулярах $BC \perp a$.



Из прямоугольного $\triangle ACD$ получим $AC = AD\sin\gamma$. Из прямоугольного $\triangle ABD$ получим $AB = AD\sin\beta$. Наконец, из прямоугольного $\triangle ABC$ получим $AC = AB\sin\alpha$. Комбинируя эти равенства, получим $AC = AD\sin\gamma = AB\sin\alpha = AD\sin\beta\sin\gamma$, откуда после сокращения на AD получаем требуемое выражение. ■