Задача № 4

Условие: Какой минимальный заряд q нужно закрепить в нижней точке сферической полости радиуса R, чтобы в поле тяжести небольшой шарик массы m и заряда Q находился в верхней точке полости в положении устойчивого равновесия?

Решение: При решении задачи будем пренебрегать размером шарика. Шарик может находиться в верхней точке полости благодаря электростатическому отталкиванию от заряда внизу. Так как расстояние между зарядами $l = 2R$, то по закону Кулона электростатическая сила

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{l^2} = \frac{Qq}{16\pi\varepsilon_0 R^2},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Равновесие должно быть устойчиво по отношению к малому смещению шарика в любом направлении. Достаточно рассмотреть смещения в двух направлениях: вниз и по касательной к поверхности полости. Для первого направления электростатическая сила должна быть не менее силы тяжести. При минимально возможном q эти силы равны: $F_{\text{el}} = mg$, откуда

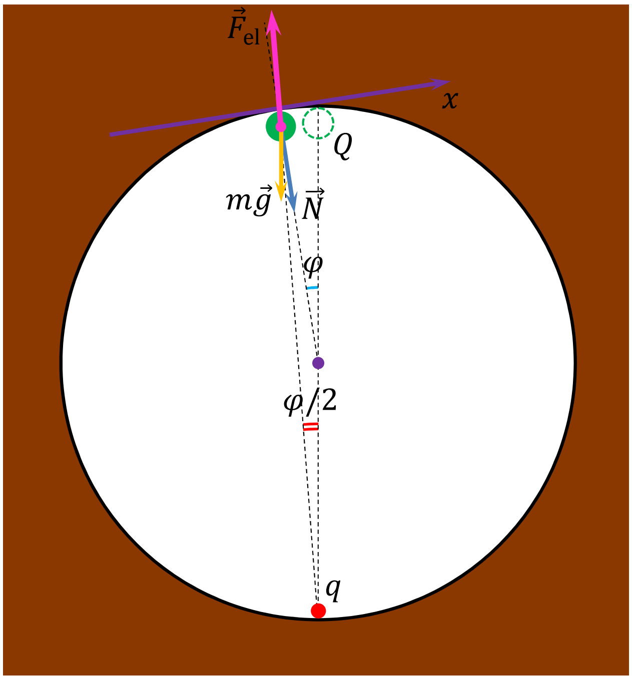

Рис. 4.1.

$$q = \frac{16\pi\varepsilon_0 mgR^2}{Q}. \quad (1)$$

Найдем минимальный заряд q, необходимый для равновесия при отклонении по касательной. Пусть он отклонился от равновесия на малый угол φ (см. рис. 4.1). Рассмотрим движение шарика вдоль оси Ox, направленной перпендикулярно радиусу, проведенному из центра полости к шарику. Так как длина хорды окружности радиуса R с центральным углом φ равна асимптотически $R\varphi$, то новое расстояние между зарядами $l' = \sqrt{l^2 - R^2\varphi^2} \approx l^2 - R^2\varphi^2/2$. Изменение расстояния квадратично по φ, им пренебрежем. Соответственно, при небольшом смещении шарика электрическая сила не изменится по модулю. Для устойчивости достаточно равенство нулю проекции результирующей сил, действующих на шарик[1]. Проекция силы реакции опоры $N_x = 0$, силы тяжести $mg_x = -mg\sin\varphi \approx -mg\varphi$, электрической силы $F_{\text{el}x} = F_{\text{el}}\sin(\varphi/2) \approx F_{\text{el}}\varphi/2$. Тогда из условия устойчивости получим

$$mg = \frac{F_{\text{el}}}{2} = \frac{Qq}{32\pi\varepsilon_0 R^2},$$

откуда

$$q = \frac{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}{Q}.$$

В этом случае ответ в два раза больше, чем по формуле (1). Соответственно, второе требование сильнее, оно и является определяющим.

Ответ: $q = \dfrac{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}{Q}.$

[1] На самом деле равнодействующая должна быть ненулевой и направленной противоположно отклонению шарика. При ее стремлению к нулю приходим к уравнению, как в решении.