Харьковские областные олимпиады, 9 класс

Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2008 г.

1. *(7 баллов)* В зоопарке крокодила Гены живут три черепахи разного возраста. Однажды Гена с удивлением заметил, что произведение возрастов двух черепах совпадает с квадратом возраста третьей черепахи. Затем он вспомнил, что ровно несколько лет назад возрасты тех же трёх черепах удовлетворяли такому же условию. Можно ли наверняка утверждать, что крокодил Гена ошибся? (Гена считает, что возраст – это целое число полностью прожитых лет). *Ответ обоснуйте.*

2. *(9 баллов)* Максим выписал в тетради все натуральные числа от 1 до 2008 по одному разу каждое и покрасил некоторые из них в красный цвет. Костя хочет, не заглядывая в тетрадь, узнать наверняка, какие из чисел красные. Костя может взять любой набор различных натуральных чисел, не превосходящих 2008, и спросить Максима, сколько из них красных. Максим записывает все свои ответы в тетрадь. После того, как Костя задаст все свои вопросы, Максим читает все ответы, но не в том порядке, в котором записывал. Какие вопросы может задать Костя, чтобы наверняка определить все красные числа? Ответ обоснуйте.

3. *(9 баллов)* Найдите все многочлены $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами a, b, c и d, такие, что $p(x)$ кратно 2008 при любых натуральных значениях x. *Ответ обоснуйте.*

4. *(9 баллов)* Назовём выпуклый шестиугольник хорошим, если для каждой пары его противоположных сторон одна из них (назовем её “длинной”) параллельна и вдвое длиннее другой (назовем её “короткой”), причём “длинные” и “короткие стороны чередуются. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух “длинных” сторон хорошего шестиугольника, параллелен третьей “длинной” стороне.

5. *(11 баллов)* Суду предъявлены 10 одинаковых с виду монет. Суд знает, что среди них – ровно 5 фальшивых, все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но они легче настоящих. В распоряжении суда имеются чашечные весы без делений и без гирь, на которых разрешается взвешивать только по 4 монеты: 2 монеты класть на левую чашку и 2 – на правую. Адвокат знает, какие 5 монет на самом деле фальшивые. Однако он связан обязательством не разглашать ни о какой фальшивой монете, что она фальшивая, и поэтому он не имеет права выполнять взвешивания, из результатов которых такую информацию можно логически вывести. Какое наибольшее количество настоящих монет адвокат может наверняка указать суду, выполнив три взвешивания? *Ответ обоснуйте.*

Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2009 г.

1. *(8 баллов)* Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = x - y, \\ 2xy + y - z = x^2 + y^2, \\ (y - z)^2 = z - x. \end{cases}$$

2. *(8 баллов)* На плоскости расположены четыре точки. Известно, что попарные расстояния между ними – различные натуральные числа 1, 2, 10, x, y, z, причем $2 < x < y < z < 10$. Найдите все возможные тройки x, y, z. *Ответ обоснуйте.*

3. *(9 баллов)* На стороне AB треугольника ABC отметили точки C_1 и C_2, на стороне BC отметили точки A_1 и A_2, а на стороне CA – точки B_1 и B_2 так, что все отмеченные точки отличны от вершин треугольника и

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA}, \qquad \frac{BC_2}{BA} = \frac{CA_2}{CB} = \frac{AB_2}{AC}.$$

Докажите, что из отрезков A_2B_1, B_2C_1 и C_2A_1 можно составить треугольник.

4. *(9 баллов)* Последовательность натуральных чисел задана по правилу:

$$a_1 = k, \quad a_2 = k + 1, \quad a_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n + 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant 2.$$

Докажите, что для любого натурального числа k и любого простого числа p в этой последовательности встретится элемент, кратный p.

5. *(11 баллов)* На каждой клетке клетчатой доски $m \times n$ (m строк, n столбцов) стоит по фишке. Максим и Костя играют в следующую игру. За один ход можно либо снять с доски любую из оставшихся фишек, либо передвинуть любую из оставшихся фишек на соседнюю слева или снизу клетку, если она существует и свободна. Игроки ходят по очереди, начинает Максим. Проигрывает тот, кто снимает с доски последнюю фишку. Кто из игроков и как может обеспечить себе победу, независимо от игры соперника? *Ответ обоснуйте.*

Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2010 г.

1. *(8 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 2xy - 2x + 2y + 2z, \\ xy + yz + xz = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. *Ответ обоснуйте.*

2. *(8 баллов)* Докажите, что произвольный треугольник можно разрезать на четыре части, три из которых имеют ось симметрии, а четвертая – центр симметрии.

3. *(9 баллов)* На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BAC = 90^\circ$) отмечена точка D, такая, что $\angle CBD = 30^\circ$. Докажите, что $CD \geqslant 2AD$.

4. *(9 баллов)* Найдите все составные натуральные числа N, для каждого из которых можно так расположить все собственные (исключая 1 и N) натуральные делители N по кругу, чтобы любые два соседних делителя были взаимно просты. *Ответ обоснуйте.*

5. *(11 баллов)* Клетки доски $n \times n$ занумерованы числами от 1 до n “диагональным методом”, как показано на рисунке. Имеются фишки n различных цветов, по n фишек каждого цвета. Фишки каждого цвета пронумерованы числами от 1 до n. При каких n можно так расставить фишки на доске (по одной фишке на каждой клетке), чтобы номер каждой фишки совпал с номером клетки, на которой она стоит, и в каждой строке и каждом столбце встречались фишки всех цветов? *Ответ обоснуйте.*

1	2	3	$\ldots$	n
2	3	$\ldots$	n	1
3	$\ldots$	n	1	2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	1	2	$\ldots$	$n-1$

Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2011 г.

1. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2011^2 y^2 + 2012^2 z^2 = 2 \cdot 2011^2, \\ 2011xy + 2012z = 2011^2. \end{cases}$$

2. Петя и Дима выехали в полдень из города A в город B на велосипедах. Одновременно из B и A на велосипеде выехал Юра. Все они едут с постоянными, но разными скоростями. В два часа дня Дима был ровно посередине между Петей и Юрой, а в три часа дня Юра был ровно посередине между Петей и Димой. В котором часу Петя будет ровно посередине между Димой и Юрой? Ответ обоснуйте.

3. Пусть n – трехзначное число. Обозначим через $f(n)$ сумму таких семи слагаемых: трёх его цифр, трёх попарных произведений его цифр и произведения всех его цифр. Найдите все такие трёхзначные числа n, для которых $n = f(n)$. Ответ обоснуйте.

4. В каждую клетку таблицы $2 \times n$ (содержащей 2 строки и n столбцов) записывают по одному натуральному числу. Назовём такое заполнение таблицы *правильным*, если в каждом столбце верхнее число меньше нижнего, а из каждых двух чисел, стоящих в одной и той же строке, число, записанное левее, не больше числа, записанного правее. Пусть N_k – количество правильных заполнений таблицы $2 \times n$ числами $1, 2, \ldots, 2n-1$, в которых число k встречается два раза, а все остальные числа – по одному разу ($1 \leqslant k \leqslant 2n-1$). Докажите, что N_k не зависит от k.

5. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC$ и $\angle A = \angle C = 90°$. На стороне ED взяли такую точку F, что $\dfrac{EF}{FD} = \dfrac{AE}{CD}$. Докажите, что $\angle ACF = \angle ABE$.

Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2012 г.

I тур

1. На плоскости дано 5 окружностей, каждые три из которых не проходят через одну точку. Может ли случиться так, что они имеют:

а) ровно 12 различных точек пересечения;

б) ровно 24 различных точек пересечения?

2. График функции $y = f(x)$ симметричен графику функции $y = x^2$ относительно точки с координатами $(1; 1)$. Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$.

3. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения

$$5^n\left(5^n + 1\right) - 6^n\left(3^n + 2^n\right)$$

делится на 91.

4. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABC_1 и AB_1C так, что $\angle BAC_1 = \angle B_1AC = 30°$ и $\angle AC_1B = \angle CB_1A = 60°$, а внутри треугольника ABC отметили точку A_1 так, что $\angle CBA_1 = \angle BCA_1 = 30°$. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

5. На числовой прямой отметили точки с координатами $1, 2, 3, \ldots, 2n$, где $n > 3$ – заданное натуральное число. Блоха начинает прыгать из точки с координатой 1 и через $2n$ прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в точку с координатой 1. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна $n(2n - 1)$. Найдите длину последнего прыжка блохи. *Ответ обоснуйте.*

II тур

1. Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и число $a^3 + b^3 + ab$ делится нацело на $ab(a - b)$. Докажите, что число ab является кубом некоторого натурального числа.

2. В клетках таблицы $m \times n$ стоят неотрицательные числа, причём в каждом столбце и в каждой строке есть по крайней мере одно положительное число. Известно, что если на пересечении некоторого столбца и некоторой строки стоит положительное число, то сумма чисел в этом столбце равна сумме чисел в этой строке. Докажите, что $m = n$.

3. Дан треугольник ABC, точка E – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, а Q – точка касания этой окружности с отрезком BC. Окружность, построенная на отрезке AE как на диаметре, и описанная окружность треугольника ABC пересекаются в точке P, отличной от A. Точка M – середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A. Докажите, что точка Q лежит на отрезке MP.

Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2013 г.

I тур

1. Известно, что $a \neq b$ и уравнение $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ и $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ имеют общий действительный корень. Найдите $a + b$.

2. Найдите все такие пары простых чисел p и q, для которых имеет место равенство

$$p^5 - (4p - q)^2 = 2q^2.$$

3. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$3a^2 + b^2 + c^2 + bc \geqslant 3a\,(b + c)\,.$$

4. Пусть H – точка пересечения высот AQ, BL и CP остроугольного треугольника ABC, K – общая точка отрезков PQ и BH, M – середина стороны AC, N – середина отрезка BH. Луч BL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D, отличной от B. Известно, что $KQ = HQ$. Докажите, что прямые MN и AD перпендикулярны.

5. Руководитель математического кружка нарисовал на доске таблицу размером 30×30 и предложил ученикам заполнить ее числами 1, 2, …, 900, записывая ежесекундно в какую-то пустую клетку по своему усмотрению одно из тех чисел, что не использовались ранее. Смогут ли ученики выполнить задание так, чтобы в любой момент ни в одной строке, ни в одном столбце сумма всех записанных чисел не давала остаток 1 от деления на 3?

II тур

1. Найдите все действительные числа x, y такие, что

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}.$$

Ответ обоснуйте.

2. Дан треугольник ABC, в котором $AB + BC = 2AC$. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов AMN и CNM лежит на прямой AC.

3. Найдите количество натуральных чисел a, для которых найдется набор целых неотрицательных чисел x_0, x_1, $\ldots$, x_{2013} таких, что

$$a^{x_0} = a^{x_1} + \ldots + a^{x_{2013}}.$$

Ответ обоснуйте.

4. На соревнованиях 8 судей выставляют оценки “да” или “нет” участникам. Оказалось, что для любых двух участников какие-то два судьи поставили обоим “да”, какие-то два судьи поставили обоим “нет”, какие-то два судьи поставили первому “да”, а второму “нет”, и, наконец, какие-то два судьи поставили первому “нет”, а второму “да”. Какое наибольшее количество участников могло быть? *Ответ обоснуйте.*