

Реєстраційний номер	396970
Назва олімпіади	Всеукраїнська учнівська інтернет-олімпіада з фізики
Прізвище, ім'я та по батькові учасника	Шумаєв Олександр Ігорович
Рік народження	1999
Область	Харківська
Місто	Харків
Повна назва навчального закладу	Фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області
Клас, до якого перейшов учень	10
Клас, за який виконується конкурсне завдання	11
Статус	учень
Електронна адреса учасника	sashashumaev@rambler.ru

Задача № 1

Условие: Между двумя гладкими кирпичами массы m_1 каждый вставлен клин массы m_2 с углом γ . Определите ускорения тел.

Решение: Расставим силы, действующие на тела при движении, см. рис. 1.1. Силы N_1 , N_2 и N_3 направлены перпендикулярно соответствующей боковой поверхности клина. При этом угол между их направлением и горизонтом равен $\gamma/2$. Из симметрии и третьего закона Ньютона все эти силы равны по модулю: $N_1 = N_2 = N_3 = N$. Очевидно, крайние грузы движутся только горизонтально, а средний — только вертикально. Рассмотрим вертикальное движение 2-го тела (клина). Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальное направление:

$$m_2 g - 2N \sin(\gamma/2) = m_2 a_2,$$

где a_2 — ускорение 2-го тела. После несложных преобразований получим

$$a_2 = g - \frac{2N \sin(\gamma/2)}{m_2}. \quad (1.1)$$

Запишем второй закон Ньютона для 1-го тела в проекции на горизонталь:

$$N \cos(\gamma/2) = m_1 a_1,$$

где a_1 — ускорение 1-го тела. После несложных преобразований получим

$$N = \frac{m_1 a_1}{\cos(\gamma/2)}. \quad (1.2)$$

Подставим (1.2) в (1.1):

$$a_2 = g - \frac{2m_1 a_1 \tan(\gamma/2)}{m_2}. \quad (1.3)$$

Используем наконец последнее условие — кинематическую связь.

Так как второй груз движется относительно первого вдоль его поверхности, то его относительное ускорение \vec{a}_{rel} направлено под углом $\beta = (\pi - \gamma)/2$ к горизонту (см. рис. 1.1). Из “треугольника ускорений” получим

$$a_2 = a_1 \cot(\gamma/2). \quad (1.4)$$

Сравнивая уравнения (1.3) и (1.4), получим

$$g = a_1 \left(\frac{2m_1 \tan(\gamma/2)}{m_2} + \cot(\gamma/2) \right),$$

откуда

$$a_1 = g \left(\frac{2m_1 \tan(\gamma/2)}{m_2} + \cot(\gamma/2) \right)^{-1}. \quad (1.5)$$

Наконец, из уравнения (1.4) находим ускорение второго груза:

$$a_2 = g \left(\frac{2m_1 \tan^2(\gamma/2)}{m_2} + 1 \right)^{-1}. \quad (1.6)$$

Ответ: $a_1 = g \left(\frac{2m_1 \tan(\gamma/2)}{m_2} + \cot(\gamma/2) \right)^{-1}$, $a_2 = g \left(\frac{2m_1 \tan^2(\gamma/2)}{m_2} + 1 \right)^{-1}$.

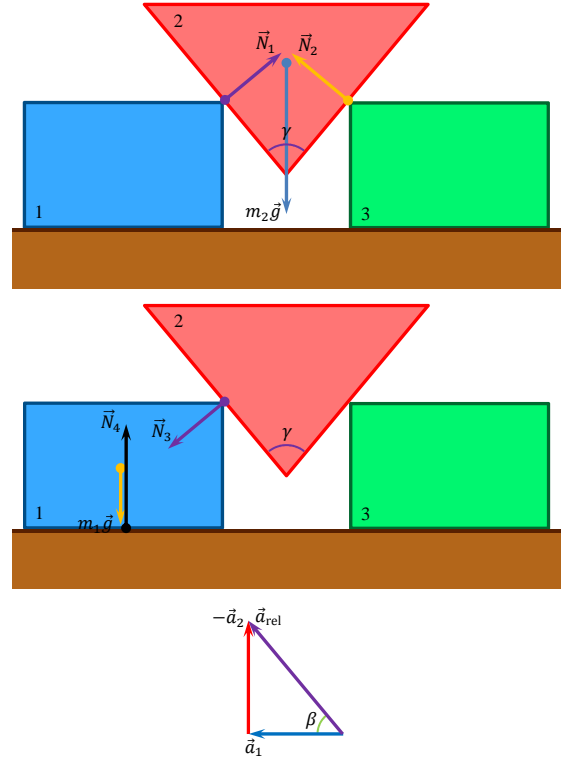


Рис. 1.1: изображение сил, действующих на тела 1 и 2. Относительное ускорение тел 1 и 2 направлено вдоль боковой поверхности тела 2.

Задача № 2

Условие: Тонкая доска массой m_1 и длиной L скользит по гладкому столу со скоростью V_1 . Маленькая шайба массой m_2 плавно въезжает на доску со скоростью V_2 относительно Земли. При каких значениях коэффициента трения μ между доской и шайбой потери механической энергии при их взаимодействии максимальны?

Решение: При решении задачи будем считать, что скорости \vec{V}_1 и \vec{V}_2 противоположно направлены. Если они сонаправлены, то в ответе необходимо поменять знак перед одной из этих скоростей.

Очевидно, наибольшие потери будут наблюдаться при абсолютно неупругом столкновении, когда скорости шайбы и доски уравниются. Это произойдет, если шайбе не хватит скорости проскользнуть через всю доску и упасть на стол. При этом существует некое критическое значение μ_0 коэффициента трения, меньше которого шайба начинает соскальзывать с доски. В предельном случае шайба остановится на самом краю доски. Найдём μ_0 из этого условия. Сила трения между доской и шайбой $F_{\text{тр}} = \mu_0 m_2 g$. Ускорение доски относительно Земли $a_1 = F_{\text{тр}}/m_1 = \mu_0 m_2 g/m_1$, а шайбы $a_2 = F_{\text{тр}}/m_2 = \mu_0 g$. Ускорение шайбы относительно доски $a_{\text{rel}} = \mu_0 g (1 + m_2/m_1)$, а скорость $V_{\text{rel}} = V_1 + V_2$. В конце же движения относительная скорость становится равной нулю, а относительное перемещение равно L . Тогда из формулы равноускоренного движения

$$L = \frac{V_{\text{rel}}^2}{2a_{\text{rel}}} = \frac{(V_1 + V_2)^2}{2\mu_0 g (1 + m_2/m_1)},$$

откуда

$$\mu_0 = \frac{(V_1 + V_2)^2}{2gL (1 + m_2/m_1)}.$$

Потери энергии максимальны при $\mu \geq \mu_0$.

Ответ: При $\mu \geq \frac{(V_1 + V_2)^2}{2gL (1 + m_2/m_1)}$.

Задача № 3

Условие: В электрической цепи (см. рис. 3.1) сопротивления резисторов $R_0 = 15$ Ом, $r = 16$ Ом. Параллельно резистору r подсоединен электронный ключ D (диод). Вычислите сопротивление резистора R_1 , если суммарная мощность, выделяемая на резисторах R_1 и r , не зависит от полярности приложенного напряжения.

Решение: Изобразим эквивалентные схемы для двух случаев полярности источника (см. рис. 3.2). В первом случае (верхнем) сопротивление цепи $R_a = R_0 + R_1$, тогда полный ток в цепи

$$I_a = \frac{U}{R_a} = \frac{U}{R_0 + R_1},$$

где U — напряжение источника. Тогда суммарная мощность тока, выделяемая в резисторах R_1 и r (а именно, в резисторе R_1), определяется по формуле

$$P_a = I_a^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_0 + R_1)^2}. \quad (3.1)$$

Во втором случае (нижнем) сопротивление цепи $R_b = R_0 + R_1 + r$, тогда полный ток в цепи

$$I_b = \frac{U}{R_b} = \frac{U}{R_0 + R_1 + r}.$$

Тогда суммарная мощность тока, выделяемая в резисторах R_1 и r , определяется по формуле

$$P_b = I_b^2 (R_1 + r) = \frac{U^2 (R_1 + r)}{(R_0 + R_1 + r)^2}. \quad (3.2)$$

Сравнивая формулы (3.1) и (3.2), получим:

$$R_1 (R_0 + R_1 + r)^2 = (R_1 + r) (R_0 + R_1)^2.$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$R_1^2 + R_1 r - R_0^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(-r \pm \sqrt{r^2 + 4R_0^2} \right).$$

Подставив численные значения, получим $R_1 = -25$ Ом и $R_1 = 9$ Ом. Очевидно, подходит только второй корень, с плюсом перед радикалом.

Ответ: $R_1 = \frac{1}{2} \left(-r + \sqrt{r^2 + 4R_0^2} \right) = 9$ Ом.

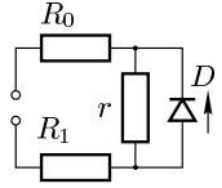


Рис. 3.1: из условия.

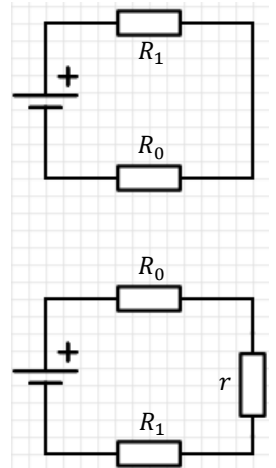


Рис. 3.2: эквивалентные схемы в двух случаях.

Задача № 4

Условие: Латунные разновесы использовались для взвешивания алюминиевого образца на аналитических весах. Один раз взвешивали в сухом воздухе, другой раз в влажном с давлением насыщенных паров равным $P_{\text{vap}} = 2 \cdot 10^3$ Па. В обоих случаях полное атмосферное давление было $P = 10^5$ Па и температура $t = 20^\circ\text{C}$. Какова должна быть масса образца, чтобы можно было установить разницу показаний весов, если их чувствительность составляет $m = 0,1$ мг? Плотность алюминия и латуни $\rho_1 = 2700$ кг/м³ и $\rho_2 = 8500$ кг/м³ соответственно.

Решение: Различие в показаниях весов вызваны изменением силы Архимеда, действующей со стороны воздуха на тела, находящиеся на весах. Будем считать среднюю молярную массу сухого воздуха равной $\mu_0 = 0,029$ кг/моль, а воды $\mu_w = 0,018$ кг/моль. По закону Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где V — объем элемента воздуха, m — его масса, μ — его средняя молярная масса, T — его температура в кельвинах и $R = 8,314$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная. С учетом этого уравнения плотность сухого воздуха

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{P\mu_0}{RT}. \quad (4.1)$$

Молярная доля водяного пара во влажном воздухе $\chi_w = P_{\text{vap}}/P$, а сухого воздуха $\chi_0 = 1 - P_{\text{vap}}/P$. Тогда средняя молярная масса влажного воздуха (отношение полной массы к полному количеству вещества) равна

$$\mu = \chi_w\mu_w + \chi_0\mu_0 = \mu_0 - (\mu_0 - \mu_w)\frac{P_{\text{vap}}}{P}.$$

Тогда с учетом формулы (4.1) разность плотностей сухого и влажного воздуха

$$\Delta\rho = \frac{P(\mu_0 - \mu)}{RT} = \frac{P_{\text{vap}}(\mu_0 - \mu_w)}{RT}. \quad (4.2)$$

Изменение плотности воздуха вызывает изменение силы Архимеда. Рассмотрим равновесие тел, находящихся на весах. Пусть масса алюминиевого образца m_1 , латунных гирь m_2 . Исходные силы Архимеда, действующие на рассматриваемые тела, равны соответственно $F_1 = m_1g\rho_0/\rho_1$ и $F_2 = m_2g\rho_0/\rho_2$. Так как $F_1 \ll m_1g$, $F_2 \ll m_2g$ и $m_0 \ll m_1, m_2$ то можно с достаточной точностью считать массы равными: $m_1 = m_2$. Во влажном воздухе по сравнению с сухим изменения сил Архимеда, действующих на рассматриваемые тела, равны соответственно $\Delta F_1 = m_1g\Delta\rho/\rho_1$ и $\Delta F_2 = m_2g\Delta\rho/\rho_2$. Для того, чтобы обнаружить различие в показаниях весов, разность изменений сил Архимеда $\Delta F_1 - \Delta F_2$ должна быть не менее mg . С учетом выражений для ΔF_1 и ΔF_2 получим

$$\frac{m_1}{\rho_1} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \geq \frac{m}{\Delta\rho},$$

откуда

$$m_1 \geq m \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)\Delta\rho} = m \frac{\rho_1\rho_2RT}{(\rho_2 - \rho_1)(\mu_0 - \mu_w)P_{\text{vap}}} \approx 43 \text{ г.}$$

Ответ: $m_1 \geq m \frac{\rho_1\rho_2RT}{(\rho_2 - \rho_1)(\mu_0 - \mu_w)P_{\text{vap}}} \approx 43 \text{ г.}$

Задача № 5

Условие: Прикрепите грузик к центру длиной нити. Концы нити закрепите, например, в дверном проеме, так, чтобы прямая, соединяющая точки крепления была горизонтальна. Изучите и опишите, как изменяется период продольных и поперечных мод колебаний грузика в зависимости от глубины провиса грузика (глубина провиса — расстояние от точки подвеса до мысленной линии, проходящей через точки крепления).

Цель эксперимента: исследовать колебания вышеописанной конструкции, найти их моды.

Оборудование: шарик металлический, нить, гвозди, лазерная указка, фоторезистор, электронный микроконтроллер Arduino Uno¹ и программное обеспечение к нему, кабель универсальной последовательной шины, резистор 10 кΩ, силиконовый клей, клеевой пистолет, линейка, соединительные провода.

Теоретические сведения: Вышеописанная конструкция по сути является математическим маятником, причем длина подвеса в продольном состоянии отличается от длины в поперечном на величину провиса нити. Период малых колебаний математического маятника определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где T — период колебаний, l — длина подвеса маятника, g — ускорение свободного падения. Если посмотреть на конструкцию во время проведения опыта, становится очевидно: роль длины подвеса при продольных колебаниях выполняет длина нити, прикрепленной к грузу, а при поперечных — расстояние между грузом и мысленной линией, проходящей через точки подвеса. Таким образом, если длина нижней нити l_0 , а глубина провиса h , то периоды продольных и поперечных мод равны соответственно $T_{\parallel} = 2\pi\sqrt{l_0/g}$ и $T_{\perp} = 2\pi\sqrt{(l_0 + h)/g}$.

Постановка эксперимента: Для измерения периода колебаний была собрана светочувствительная установка, см. рис. 5.1. Фоторезистор подключили к микроконтроллеру Arduino последовательно с дополнительным сопротивлением $R = 10$ кΩ. Микроконтроллер подавал на цепь напряжение $U_0 = 5,0$ В и снимал напряжение с резистора R . Таким образом, фоторезистор выступал как делитель напряжения. На него навели луч лазерной указки перпендикулярно плоскости колебаний шарика. Луч был периодически прерываем шариком, проходящим положение равновесия. Когда фоторезистор был освещен, его сопротивление было практически равно нулю, и микроконтроллер получал значения напряжения около 5 В; а во время “затмения” сопротивление фоторезистора возрастало, и показания значительно изменялись. Эти измерения микроконтроллер проводил с периодом около $\tau = 0,05$ с, и отправлял на последовательный порт компьютера, более известный как USB; в состав элементарной пары данных входило значение напряжения и время с момента начала эксперимента. Далее из этих данных выкинули пары, в которых напряжение превышало некое пороговое значение, для данного эксперимента его приняли равным $U_{\min} = 4,5$ В. Таким образом, оставшиеся пары показывали моменты времени, когда шарик закрывал лазерный луч. Соседние моменты, отличающиеся по времени меньше чем на $\delta t = 0,1$ с, были собраны в один, а в качестве нового значения времени было выбрано их среднее. Каждое полученное таким образом значение обозначало ровно один промежуток затмения. По таким образом обработанным данным были построены графики. Период определяли по формуле $T = \delta t / 2(n - 1)$, где δt — разность времен между первым и последним затмениями, а n — количество затмений. Для учета поправки на смещение лазера относительно положения равновесия колебаний в учет брали каждую вторую точку затмения.

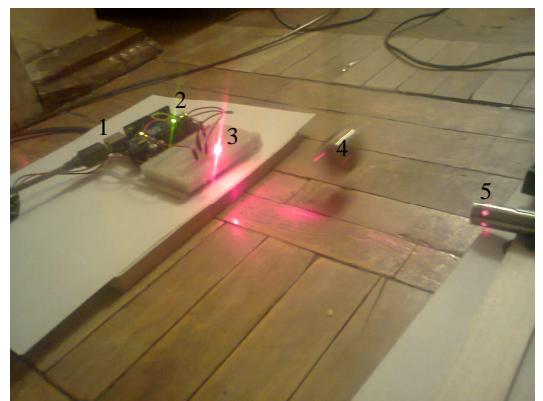


Рис. 5.1: фотография установки. На рисунке 1 — последовательный порт, 2 — микроконтроллер, 3 — фоторезистор, освещенный лазером, 4 — шарик, 5 — лазерная указка.

Глубину провиса измеряли линейкой при помощи нити, туго натянутой между точками подвеса. Расстояние измеряли от центра шарика. Эффектом отличия эффективного радиуса инерции от измеренного можно пренебречь, так как длина нити больше радиуса шарика не менее чем в 20 раз.

Обработку данных производили при помощи программы *Mathematica*².

Результаты эксперимента: При проведении эксперимента были получены следующие данные:

t , с	0,13	1,70	3,51	5,31	7,11	8,90	10,70	12,51	14,30	16,10	17,91	19,72	21,50
t , с	23,31	25,11	26,91	28,70	30,56	32,31	34,10	35,90	37,71	39,50	41,31	43,10	44,89
t , с	46,70	48,51	50,30	52,11	53,91	55,70	57,50	59,31	61,10	62,93	64,70	66,51	68,29
t , с	70,10	71,91	73,69	75,50	77,31	79,11	80,90	82,71	84,50	86,31	88,10	89,91	91,69
t , с	93,50	95,30	97,10	98,90	100,69	102,50	104,30	106,11	107,89	109,71	111,49	113,30	115,11
t , с	116,90	118,69	120,50	122,30	124,11	125,90	127,70	129,49	131,29	133,10	134,89	136,70	138,50
t , с	140,30	142,10	143,91	145,70	147,51								

В таблице приведены моменты времени t , соответствующие затмениям с нечетными номерами при поперечных колебаниях при $l_0 = 73,5$ см и $h = 6,5$ см. Аналогичные данные были собраны для других значений h . Значение l_0 всегда оставалось равным 73,5 см. По этим данным были составлены две таблицы — для продольных и поперечных колебаний соответственно, а также построен график, см. рис. 5.2. Построен график зависимости *квадрата* периода от глубины провиса, поскольку ожидается корневая зависимость $T(h)$. Как видно из рисунка, прямые, соответствующие теоретическим аппроксимациям полученных данных, пересекаются при $h \approx 0$.

¹ См. www.arduino.cc.

² Имеется в виду программа Wolfram Mathematica 10, см. www.wolfram.com/mathematica.

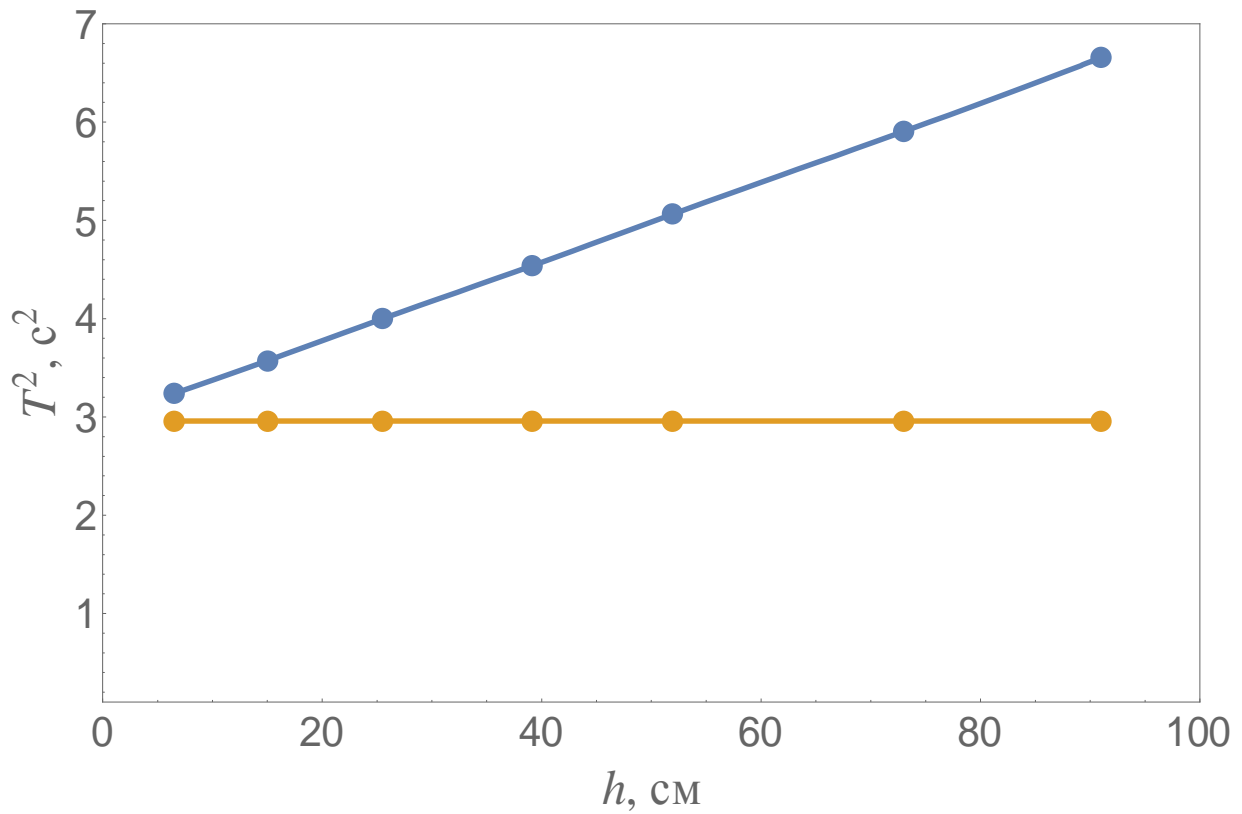


Рис. 5.2: график зависимости квадрата периода колебаний от глубины провиса. Оранжевым изображены точки, относящиеся к продольным колебаниям, а синим — к поперечным.

h , см	6,5	15,0	25,5	39,1	51,9	73,0	91,0
T , с	1,72	1,72	1,72	1,72	1,72	1,72	1,72

h , см	6,5	15,0	25,5	39,1	51,9	73,0	91,0
T , с	1,80	1,89	2,00	2,13	2,25	2,43	2,58

Погрешность в измерении расстояния при помощи линейки $\Delta h = \Delta l_0 = 0,5$ мм. Погрешность в измерении времени затмения $\Delta t = 0,05$ с. Погрешность в измерении среднего определяется по формуле

$$\Delta T = \sqrt{\sum \frac{(T_i - T)^2}{n(n-1)}},$$

где n — количество затмений с нечетными номерами. Так как погрешность в измерении среднего времени намного меньше погрешности одного измерения, то конечная погрешность времени $\Delta T = 0,05$ с. Относительная погрешность в измерении длины $\Delta h/h \approx \Delta l_0/l_0 \approx 0,1$ %, а относительная погрешность в измерении времени $\Delta t/t \approx 2,5$ %. Как видим, погрешностью в измерении расстояний также можно пренебречь.

Выводы: Как видим, полученные экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией. Период продольных колебаний остается постоянным при изменении глубины провиса, а период поперечных зависит от глубины провиса по корневому закону. По полученным данным период продольных колебаний $T_{||} = 1,72$ с, а период поперечных изменялся от 1,80 с до 2,58 с.