Задание 1.

1. Обозначим $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Конечно или бесконечно множество натуральных n, для которых n делится на $\pi(\sqrt{n})$?

2. На прямой отмечено 2013 точек. Они покрашены в 239 цветов так, что все цвета присутствуют. Докажите, что на прямой найдется отрезок, содержащий точки каждого цвета, причем для каких-то двух цветов ровно по одной точке.

3. На эваторе планеты Транай растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то общая длина участков экватора, покрытых более чем пятью деревьями, составит 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то общая длина более чем пятикратно покрытых участков экватора тоже составит 100 км. (Высота деревьев намного меньше размера планеты.)

4. Даны три квадратных трехчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих трехчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что сумма этих трехчленов равна нулю.

5. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

6. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый список входит только он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий — все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т.д. В двенадцатый список входят все люди из одиннадцатого списка и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его двенадцатый список попал человек, которого не было в его одиннадцатом списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

7. В остроугольном треугольнике ABC отрезок BH – высота. Прямые, симметричные AC относительно AB и BC пересеклись в точке K. Докажите, что угол KBC равен углу ABH.