

Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Материалы к урокам по теме:
“Понятие производной функции”**

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (13 часов)

Урок 1. Приращение функции. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Правая и левая производная. Необходимое и достаточное условие существования производной.

Урок 2. Производные элементарных функций. Таблица производных.

Урок 3. Функция, дифференцируемая в точке. Дифференциал функции. Непрерывность и дифференцируемость. Примеры непрерывных недифференцируемых функций.

Урок 4. Производная суммы, произведения и частного.

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: “Техника дифференцирования – I”.

Урок 6. Производная сложной функции.

Урок 7. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Урок 8. Упражнения на технику дифференцирования.

Урок 9. Упражнения на технику дифференцирования.

Урок 10. *Самостоятельная работа* по теме: “Техника дифференцирования – II”.

Урок 11. Обобщающий урок.

Урок 12. Контрольная работа.

Урок 13. Анализ контрольной работы.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(c)' = 0$	$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

* * *

Урок 1. Определение производной

Домашнее задание

- Определите приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = 1/x^2$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.
- Переменная x получает приращение Δx . Определите приращение Δy , если:
 - $y = ax^2 + bx + c$;
 - $y = a^x$.
- Докажите, что:
 - $\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;
 - $\Delta(f(x)g(x)) = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.
- Через точки $A(2, 4)$ и $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA' . Найдите угловой коэффициент этой секущей, если:
 - $\Delta x = 1$;
 - $\Delta x = 0,1$;
 - $\Delta x = 0,01$;
 - Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A ?
- Закон движения точки по оси Ox дается формулой $x = 10t + 5t^2$, где t – время в секундах и x – расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ и произведите численный расчет, если:
 - $\Delta t = 1$;
 - $\Delta t = 0,1$;
 - $\Delta t = 0,01$.

Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

Урок 2. Производные элементарных функций

Домашнее задание

1) Докажите, что в точке x_0 существует производная функции f :

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{если } x \leq 2, \\ 4x - 6, & \text{если } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$$

$$(3) f(x) = \sin^2 x \mathcal{D}(x), \quad x_0 = 0.$$

2) Докажите, что производная функции f в точке x_0 не существует:

$$(1) f(x) = |x^2 - 1|, \quad x_0 = -1;$$

$$(2) f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{если } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq \pi, \\ -\sin x, & \text{если } x > \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi.$$

Урок 3. Функция, дифференцируемая в точке

Домашнее задание

1) Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определите $\Delta f(1)$ и $df(1)$ и сравните их, если:

а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0,1$; в) $\Delta x = 0,01$.

2) Найдите: а) $d\left(\frac{1}{x}\right)$; б) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

3) Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно следующие значения:

а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\cos 151^\circ$; в) $\lg 11$.

4) а) Докажите приближенную формулу $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$ ($a > 0$), где $|x| \ll a$.

б) С помощью этой формулы приближенно вычислите: $\sqrt{5}$; $\sqrt{34}$; $\sqrt{120}$.

в) Проверьте точность вычислений.

Урок 4. Производная суммы, произведения и частного

Домашнее задание

1) Найдите производные следующих функций:

$$(1) \ y = 3x^7 - 6x^6 - 4x^3 + 5x^2 + 17;$$

$$(2) \ y = 3 \sin x + \cos x - x;$$

$$(3) \ y = (3x^2 - 5x)(\sqrt{x} - 1);$$

$$(4) \ y = (x^5 - x + 2)(x^3 - 3x^2 + 4);$$

$$(5) \ y = (3x^2 + 5x - 8) \operatorname{ctg} x;$$

$$(6) \ y = \frac{x - 2x^2}{2 - x};$$

$$(7) \ y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 4};$$

$$(8) \ y = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sin x};$$

$$(9) \ y = \frac{\ln x}{e^x};$$

$$(10) \ y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

2) Вычислите значения производной функции $f(x) = -\frac{2}{3} \sin x + \frac{x^3}{\pi^2} - 3$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

3) Вычислите значение производной функции $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x}$ в точке $x_0 = 0$.

4) При каких значениях x производная функции $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$ равна нулю?

5) При каких значениях x производная функции $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$ больше нуля?

Урок 5. Самостоятельная работа №1: “Техника дифференцирования – I”

Домашнее задание

1) Найдите производные функций:

$$(1) \ y = (1 + nx^m)(1 + mx^n);$$

$$(2) \ y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3};$$

$$(3) \ y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2};$$

$$(4) \ y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x;$$

$$(5) \ y = e^x (x^2 - 2x + 2);$$

$$(6) \ y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$(7) \ y = \left(\frac{1 - x^2}{2} \sin x - \frac{(1 + x)^2}{2} \cos x \right) e^{-x}.$$

2) Найдите $f'(0)$, если $f(x) = x(x - 1)(x - 2) \dots (x - 1000)$.

Урок 6. Производная сложной функции

Домашнее задание

1) Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – дифференцируемые функции от x . Найдите производную от функции y , если:

$$\text{а) } y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0);$$

$$\text{б) } y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) \quad (\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0).$$

2) Пусть $f(u)$ – дифференцируемая функция. Найдите y' , если:

$$\text{а) } y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

$$\text{б) } y = f(e^x) e^{f(x)}.$$

3) Найдите производные функций:

$$(1) \ y = (7 - 11x + x^2)^{200};$$

$$(2) \ y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$(3) \ y = \sin(\sin(\sin x));$$

$$(4) \ y = \frac{1}{\cos(x^3 - 1)};$$

$$(5) \ y = \sqrt[3]{\sin^2 x^3};$$

$$(6) \ y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}};$$

$$(7) \ y = e^{\sin^3 x - \cos x};$$

$$(8) \ y = \cos^2 x - 2 \ln \cos x;$$

$$(9) \ y = \ln^2 x - \ln(\ln x).$$

Урок 7. Производная обратной функции

Домашнее задание

Найдите производные функций:

$$1) \ y = \frac{1}{\arccos^2 x^2};$$

$$2) \ y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}};$$

$$3) \ y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x;$$

$$4) \ y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2);$$

$$5) \ y = \arccos \sqrt{x};$$

$$6) \ y = \operatorname{arcctg}(x^2 - 1);$$

$$7) \ y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x};$$

$$8) \ y = e^{\arcsin 2x};$$

$$9) \ y = \operatorname{arcctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$$

$$10) \ y = \frac{1}{\arccos \ln x};$$

$$11) \ y = \ln \arcsin x + \frac{1}{2} \ln^2 x + \arcsin \ln x.$$

Зачетное задание:

“101 упражнение на технику дифференцирования”

Найдите производные функций:

1. $y = \frac{2x}{1-x^2};$

3. $y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2};$

5. $y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x};$

7. $y = x\sqrt{1+x^2};$

9. $y = \sqrt[n+m]{(1-x)^m(1+x)^n};$

11. $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}};$

13. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$

15. $y = \sin^n x \cos nx;$

17. $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x};$

19. $y = \frac{1}{\cos^n x};$

21. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x;$

23. $y = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x));$

25. $y = e^{-x^2};$

27. $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}};$

28. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}};$

29. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x};$

31. $y = \ln(\ln(\ln x));$

33. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$

35. $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)};$

2. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3};$

4. $y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q};$

6. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x};$

8. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3};$

10. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$

12. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})};$

14. $y = \cos 2x - 2 \sin x;$

16. $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2};$

18. $y = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x);$

20. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x};$

22. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$

24. $y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right);$

26. $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x};$

30. $y = \lg^3 x^2;$

32. $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x));$

34. $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1});$

36. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}};$
37. $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4};$
38. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$
39. $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2};$
40. $y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2});$
41. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2});$
42. $y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x};$
43. $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x;$
44. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$
45. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \ln \operatorname{tg} x;$
46. $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}};$
47. $y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x};$
48. $y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6);$
49. $y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x};$
50. $y = \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right);$
51. $y = \frac{3}{2} \left(1 - \sqrt[3]{1+x^2} \right)^2 + 3 \ln \left(1 + \sqrt[3]{1+x^2} \right);$
52. $y = x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x));$
53. $y = \arcsin \frac{x}{2};$
54. $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}};$
55. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a};$
56. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{x};$
57. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x};$
58. $y = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x;$
59. $y = \operatorname{arctg} (x + \sqrt{1+x^2});$
60. $y = \arccos \sqrt{1-x^2};$
61. $y = \arcsin(\sin x);$
62. $y = \arccos(\cos^2 x);$
63. $y = \arcsin(\sin x - \cos x);$
64. $y = \arccos \frac{1}{x};$
65. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x};$
66. $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x};$
67. $y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) (a > b \geq 0);$
68. $y = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3;$
69. $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2};$
70. $y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \operatorname{arctg}(\sin x);$

71. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$
72. $y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right);$
73. $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b};$
74. $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0);$
75. $y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1};$
76. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}};$
77. $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}};$
78. $y = x (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x;$
79. $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1};$
80. $y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}};$
81. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x};$
82. $y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arccotg} x^6;$
83. $y = \frac{3 - x}{2} \sqrt{1 - 2x - x^2} + 2 \arcsin \frac{1 + x}{\sqrt{2}};$
84. $y = \operatorname{arccotg} \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}} \quad (a > 0);$
85. $y = \ln (e^x + \sqrt{1 + e^{2x}});$
86. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x};$
87. $y = \sqrt{1 - x^2} \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x;$
88. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2;$
89. $y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x};$
90. $y = \arcsin \left(\frac{\sin a \cdot \sin x}{1 - \cos a \cdot \cos x} \right);$
91. $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}};$
92. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}};$
93. $y = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}};$
94. $y = \ln^2 \left(\frac{1}{\cos 2\sqrt[3]{x}} \right);$
95. $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}};$

$$96. \quad y = e^{m \arcsin x} (\cos (m \arcsin x) + \sin (m \arcsin x));$$

$$97. \quad y = \arcsin (\sin x^2) + \arccos (\cos x^2);$$

$$98. \quad y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x};$$

$$99. \quad y = \frac{\ln^x x}{x^{\ln x}};$$

$$100. \quad y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x};$$

$$101. \quad y = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right)^{\operatorname{arctg}^2 x}.$$