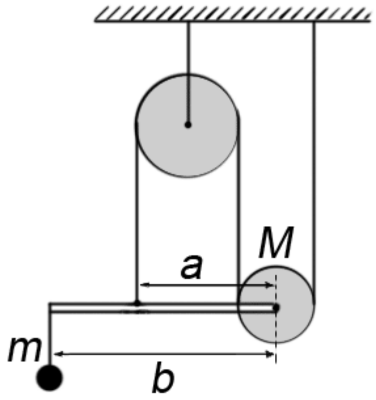
Решение задач 9 класс



Задача №1 «Блоки и нити»

Груз массы m подвешен к концу легкой горизонтальной балки, которая прикреплена к системе блоков с помощью нитей, как показано на рисунке. Длина балки b, расстояние от оси подвижного блока, на которой закреплен второй конец балки, то точки крепления нити a. Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны, нить считать легкой и нерастяжимой. Какой должна быть масса подвижного блока M, чтобы система находилась в равновесии?

Решение

Во-первых, если пренебрегать трением в блоках, то в равновесии сила натяжения нити одинакова по длине. Обозначим ее через T. Соответственно, нить действует на балку с силой T, направленной вверх, а на подвижный блок с силой $2T$, также вверх.

Для равновесия должны компенсироваться силы и моменты сил. Равенство сил, действующих на систему «подвижный блок + балка»: $3T = (M + m)g$.

Равенство моментов сил относительно оси подвижного блока (суммарный момент сил, действующих со стороны нити на подвижный блок, равен нулю): $b \cdot mg = a \cdot T$.

Подставляя $T = mg\frac{b}{a}$ в первое уравнение, получаем $M = m\left(\frac{3b}{a} - 1\right)$.

Задача №2 «Из пустого в порожнее»

Есть два сосуда с водой, в одном вода массы m_1 и температуры T_1, во втором вода массы m_2 и температуры T_2. Из одного сосуда в другой перелили некоторое количество воды, и стали подогревать оба с одинаковой тепловой мощностью. Сколько воды и в который из сосудов перелили, если оба закипели одновременно? Который из сосудов раньше выкипит?

Решение.

Пусть $T = 100°C$. Введем обозначения: $\tau_1 = T - T_1$; $\tau_2 = T - T_2$. Пусть также Δm – масса воды, которую перелили из второго сосуда в первый (если на самом деле перелили из первого во второй, то эта величина отрицательна). Условие одновременного закипания – равенство количества теплоты, которую необходимо затратить для нагрева первого и второго сосудов до $100°C$, после перемешивания:

$$m_1\tau_1 + \Delta m\tau_2 = (m_2 - \Delta m)\tau_2$$

Выражая Δm, получаем $\Delta m = \frac{m_2\tau_2 - m_1\tau_1}{2\tau_2}$.

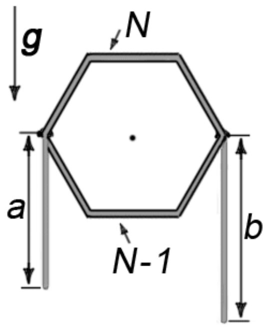
Раньше выкипит тот из сосудов, в котором в момент закипания (а значит, и после переливания) было меньше воды. Массы воды в сосудах после переливания:

$$m_1' = m_1 + \Delta m = m_1 + \frac{m_2\tau_2 - m_1\tau_1}{2\tau_2} = \frac{m_1(2\tau_2 - \tau_1) + m_2\tau_2}{2\tau_2};$$

$$m_2' = m_2 - \Delta m = m_2 - \frac{m_2\tau_2 - m_1\tau_1}{2\tau_2} = \frac{m_1\tau_1 + m_2\tau_2}{2\tau_2}.$$

Тогда выкипает раньше первый сосуд, если $m_1' < m_2' \Leftrightarrow 2\tau_2 - \tau_1 < \tau_1 \Leftrightarrow \tau_2 < \tau_1 \Leftrightarrow T_1 < T_2$, то есть если в самом начале его температура была меньше, чем во втором.

Этот же результат можно было получить сразу, следующим рассуждением: выкипает раньше тот сосуд, в котором после переливания масса воды меньше. Но раз закипают два сосуда одновременно, и количество тепла на нагрев до температуры кипения было потрачено одинаковое, до нагревания в нем должна была быть температура ниже. Значит и до переливания в нем была температура ниже.



Задача №3 – «Полая труба»

Гладкая изнутри жесткая трубка намотана в N оборотов на горизонтальную балку, сечение которой представляет собой правильный шестиугольник, так что концы ее находятся на уровне оси балки (см. рисунок). В трубку продет гибкий канат длины L, так что оба его конца свисают на длину a и b соответственно. Канат начинает выскальзывать без начальной скорости. Найдите скорость каната в момент выхода из трубки.

Решение

Вначале найдем длину ребра призмы d.

$$L = a + b + 3d \cdot N + 3d \cdot (N-1) \Rightarrow d = \frac{L-a-b}{3(2N-1)}.$$

Дальше задача решается использованием закона сохранения энергии. Высоту отсчитываем от оси балки. Если линейная плотность каната равна ρ, то вначале его потенциальная энергия в поле силы тяжести складывается из потенциальных энергий свисающих хвостов (их центры тяжести ниже оси на $a/2$ и $b/2$ соответственно), энергии полных $N-1$ колец вокруг балки (которая равна нулю, т.к. центр тяжести каждого кольца находится на оси балки) и энергии «лишней» полупетли сверху:

$$U_1 = -\rho a \cdot g \cdot \frac{a}{2} - \rho b \cdot g \cdot \frac{b}{2} + 6\rho d(N-1) \cdot g \cdot 0 + 2\rho d \cdot g \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}d + \rho d \cdot g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}d$$
$$= \rho g\left(-\frac{a^2+b^2}{2} + \sqrt{3}d^2\right).$$

В момент отрыва аналогично

$$U_2 = -\rho L \cdot g \cdot \frac{L}{2} = -\rho g\frac{L^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии

$$U_1 = U_2 + \rho L \cdot \frac{v^2}{2}$$

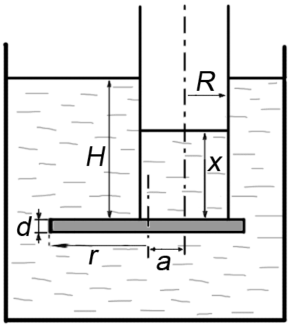
получаем

$$v^2 = \frac{2}{\rho L}(U_1 - U_2) = \frac{2g}{L}\left(\frac{L^2 - a^2 - b^2}{2} + \sqrt{3}d^2\right).$$

Подставляя сюда d, получаем окончательный ответ, который можно записать несколько более элегантно, если ввести безразмерные величины $\alpha = \frac{a}{L}, \beta = \frac{b}{L}$:

$$v^2 = gL\left(1 - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{(1-\alpha-\beta)^2}{(2N-1)^2}\right)$$

Так как $L > a + b \iff 1 > \alpha + \beta$, то v^2 очевидно положительно.



Задача №4 «Трубки и пластинки»

Цилиндрическая трубка радиуса R, закрытая снизу круглой металлической пластинкой радиуса r и толщины d, погружена в воду на глубину H (см. рисунок). Расстояние между осями трубки и пластинки равно a. До какой высоты x нужно налить воду в трубку, чтобы пластинка отвалилась? Плотность воды ρ_0, плотность пластинки $\rho > \rho_0$.

Решение

Понятно, что если в трубке совсем нет воды, то пластина удерживается на дне стакана силой давления воды под стаканом. Если в трубке вода есть, то это давление отчасти компенсируется, и если вода налита до уровня $x = H$, то сумма всех сил давлений, действующих на пластину, будет равна просто силе Архимеда на глубине H, которая меньше чем сила тяжести (т.к. $\rho > \rho_0$). Значит, пластина должна отваливаться при некотором $x < H$. Условие компенсации сил удобнее всего посчитать, выделив из результирующей сил давления силу Архимеда. Разница – недостающая сила давления столба воды в трубке высоты $(H - x)$:

$$\rho g \cdot \pi r^2 d = \rho_0 g \cdot \pi r^2 d - \rho_0 g (H - x)\pi R^2 \;\Rightarrow\; H - x = d\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}.$$

Значит условие равновесия

$$\frac{x}{d} < \frac{H}{d} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}.$$

Пластина, однако, может отвалиться и при меньших x, если момент сил давления станет недостаточным для удерживания ее от поворота вокруг правого края трубки. Для счета моментов силы считаются так же; точки приложения силы тяжести и силы Архимеда – центр масс пластинки, следовательно их рычаг равен $(R + a)$.

Сила давления столба жидкости в трубке распределена по сечению трубки. Направим ось y горизонтально в плоскости рисунка, и начало отсчета поместим в правый край трубки. Нарежем мысленно столб жидкости в трубке на тонкие пластинки одинаковой толщины по оси y. Для каждой пластинки с координатой y и толщины δy будет точно такая же пластинка с координатой $2R - y$, симметричная первой относительно оси трубки. Суммарный момент сил давления этих двух пластинок на металлическую пластину будет тогда равен $\delta m\, g \cdot (y + 2R - y) = 2\delta m\, gR$, где δm -- масса каждой из пластинок. Таким образом, весь столб воды действует на металлическую пластину так, как будто точка приложения силы давления находится на оси трубки.

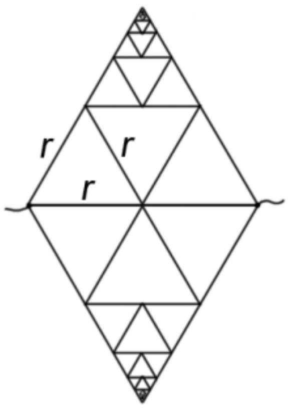
Условие компенсации моментов относительно нижнего правого края трубки запишем, так же выделяя из результирующей сил давления силу Архимеда:

$$(\rho - \rho_0) g \cdot \pi r^2 d \cdot (R + a) = \rho_0 g \cdot \pi R^2 (H - x) \cdot R \;\Rightarrow\; H - x = d\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}\left(1 + \frac{a}{R}\right).$$

Значит условие равновесия

$$\frac{x}{d} < \frac{H}{d} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}\left(1 + \frac{a}{R}\right).$$

Оно нарушается при меньших x, чем условие для сил, а потому и определяет то минимальное x, при котором пластинка отваливается от дна трубки.



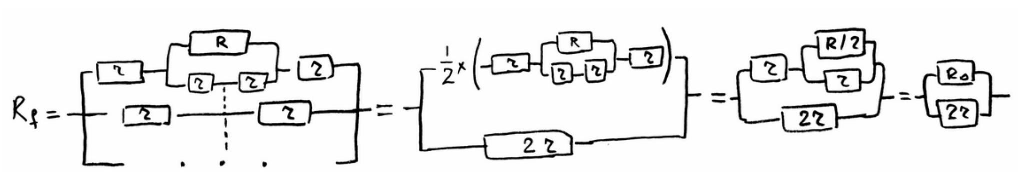
Задача №5 «Фрактальная цепь»

Электрическая цепь собрана из проволочек одного материала и сечения, как показано на рисунке. Она представляет собой ромб, составленный из двух равносторонних треугольников. Верхний большой треугольник делится такими же проволочками на четыре одинаковых равносторонних треугольника в два раза меньшего размера, верхний из этих четырех так же делится на четыре, и так далее. Нижний большой треугольник делится таким же образом. Найдите полное сопротивление цепи, если расстояние между клеммами равно $2a$, сопротивление проволоки на единицу длины равно ρ.

Решение

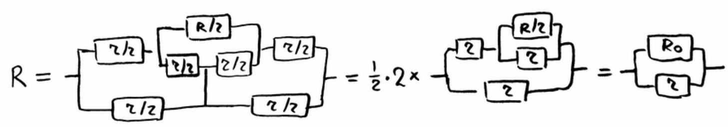
Задачу можно решать разными способами, но для решения нужны две ключевые идеи. Первая это объединение/разъединение точек с одинаковым потенциалом (то же можно делать из соображений симметрии или рассуждая о скомпенсированном мосте), вторая это запись уравнения для сопротивления самоподобной части цепи. Приведем одно из возможных решений.

Пусть $r = \rho a$; обозначим полное сопротивление цепи как R_f, а сопротивление верхнего из восьми треугольников, на которые делится ромб, между двумя вершинами при горизонтальном основании через R. Тогда R_f записывается в виде



Здесь мы разъединили проволочки в центральном узле (обозначенные штриховой линией), соединили параллельно верхнюю половину цепи с нижней, а появившийся множитель $1/2$ учли, отбросив половину этой симметричной части. Наконец, обозначили $R_0 = r + \frac{rR/2}{r+R/2}$.

Уравнение для R получаем, записывая выражение для него как для сопротивления последовательно и параллельно соединенных проводников и учитывая, что сопротивление точно такого же треугольника в два раза меньших линейных размеров – в два раза меньше. Здесь мы вынесли множитель $1/2$, а затем, соединив точки одного потенциала, разбили цепь на две одинаковые половинки. При этом выделилась подцепь R_0, введенная ранее:



Из двух уравнений $\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2r}$; $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{r}$, получаем $\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R} - \frac{1}{2r}$. Введя новую переменную $x = r/R$, перепишем R_f в виде $R_f = \frac{2rR}{2r-R} = \frac{r}{x-1/2}$.

Значение x получим из уравнения для R, выбирая физически значимый положительный корень квадратного уравнения:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + \frac{rR}{2r + R}} \Rightarrow \ x - 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2x + 1}} \Rightarrow \ x - 1 = \frac{2x + 1}{2x + 2} \Rightarrow \ x^2 - 1 = x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - x = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow \ x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Подставляя в выражение для R_f, получаем окончательно $R_f = \frac{2\,r}{\sqrt{7}} = \frac{2\rho a}{\sqrt{7}}$.