Серия 2. В которой мы продолжаем разминаться

1. Даны три квадратных трехчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих трехчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что сумма этих трехчленов равна нулю.

2. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

3. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены полуокружности, лежащие вне треугольника. Высоты из вершин A и C пересекают эти полуокружности в точках X и Y. Докажите, что $BX = BY$.

4. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый список входит только он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий — все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т.д. В двенадцатый список входят все люди из одиннадцатого списка и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его двенадцатый список попал человек, которого не было в его одиннадцатом списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

5. Докажите, что при любых положительных x, y, z выполняются неравенства:

a) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geqslant \dfrac{9}{3+x+y+z}$;

b) $\dfrac{x^3}{y+2z} + \dfrac{y^3}{z+2x} + \dfrac{z^3}{x+2y} \geqslant \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$.

6. Имеются различные простые числа p, q, r. Известно, что pqr делится на $p+q+r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ является точным квадратом.

7. В остроугольном треугольнике ABC отрезок BH – высота. Прямые, симметричные AC относительно AB и BC пересеклись в точке K. Докажите, что угол KBC равен углу ABH.

Серия 2. В которой мы продолжаем разминаться

8. Даны три квадратных трехчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих трехчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что сумма этих трехчленов равна нулю.

9. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

10. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены полуокружности, лежащие вне треугольника. Высоты из вершин A и C пересекают эти полуокружности в точках X и Y. Докажите, что $BX = BY$.

11. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый список входит только он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий — все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т.д. В двенадцатый список входят все люди из одиннадцатого списка и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его двенадцатый список попал человек, которого не было в его одиннадцатом списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

12. Докажите, что при любых положительных x, y, z выполняются неравенства:

a) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geqslant \dfrac{9}{3+x+y+z}$;

b) $\dfrac{x^3}{y+2z} + \dfrac{y^3}{z+2x} + \dfrac{z^3}{x+2y} \geqslant \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$.

13. Имеются различные простые числа p, q, r. Известно, что pqr делится на $p+q+r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ является точным квадратом.

14. В остроугольном треугольнике ABC отрезок BH – высота. Прямые, симметричные AC относительно AB и BC пересеклись в точке K. Докажите, что угол KBC равен углу ABH.