Задача № 3

Условие: Подъемник поднимается и опускается в шахте, глубина которой $l = 400$ м, за $t_0 = 40$ с. Сначала он разгоняется с постоянным ускорением, а затем с тем же по модулю ускорением замедляется. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы подъемника по сравнению с неподвижными часами? Подъемник находится в движении в течение $T = 5{,}0$ ч ежедневно.

Решение: Рассмотрим движение подъемника в шахте. Считаем, что в течение одного цикла разгона-остановки он движется ускоренно ровно половину пути (соответственно, половину времени), а остальную половину движется замедленно. Найдем его ускорение a при таком движении. Подъемник проходит путь $l/2$ за время $t_0/2$, при этом его начальная или конечная скорость равна нулю. По формуле равноускоренного движения

$$\frac{l}{2} = \frac{a\left(\frac{t_0}{2}\right)^2}{2},$$

откуда

$$a = \frac{4l}{t_0^2}.$$

Согласно условию, часы представляют собой маятник, по количеству колебаний которого определяют время. Его отставание от правильного времени вызвано уменьшением количества колебаний, что в свою очередь является следствием неинерциальности системы отсчета, связанной с часами. В нормальном состоянии (без перегрузок) период колебаний маятника $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. За один цикл разгона-остановки длительностью t_0 он должен совершить $n_0 = t_0/T_0$ колебаний, чтобы показывать правильное время. Для простоты будем считать, что $t_0 \gg T_0$, так что погрешностью округления n_0 можно пренебречь.

Найдем, какое количество колебаний совершит маятник в действительности. Перейдем в систему отсчета, связанную с лифтом. В этой системе отсчета в течение половины времени эффективное ускорение $g_1 = g+a$, а в течение второй половины $g_2 = g-a$. Соответственно, периоды колебаний маятника часов в этих двух случаях равны соответственно

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = T_0\left(1+\frac{a}{g}\right)^{-1/2} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} = T_0\left(1-\frac{a}{g}\right)^{-1/2}.$$

По прежнему считаем, что $t_0 \gg T_1, T_2$; так что погрешностью округления можно пренебречь. Тогда количество колебаний, совершенных маятником за эти промежутки времени, равны соответственно:

$$n_1 = \frac{t_0}{2T_1} = \frac{n_0}{2}\sqrt{1+\frac{a}{g}} \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{t_0}{2T_2} = \frac{n_0}{2}\sqrt{1-\frac{a}{g}}.$$

Найдем отставание ΔT часов за один день. Относительное отставание (отношение абсолютного отставания к правильно измеренному промежутку времени) равно

$$\eta = \frac{n_0 - n_1 - n_2}{n_0} = 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{a}{g}} + \sqrt{1-\frac{a}{g}}\right).$$

Тогда отставание часов в течение одного дня

$$\Delta T = \eta T = T\left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4l}{gt_0^2}} + \sqrt{1-\frac{4l}{gt_0^2}}\,\right]\right).$$

Проверим размерность:

$$\text{с} \;=\; \text{с} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2}} + \sqrt{1 - \frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2}}\right]\right) \;=\; \text{с}.$$

Найдем численное значение:

$$\{\Delta T\} = 5 \cdot 3600 \left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 400}{9{,}8 \cdot 40^2}} + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 400}{9{,}8 \cdot 40^2}}\;\right]\right) = 23{,}5; \qquad \Delta T = 23{,}5\,\text{с}.$$

<u>Ответ</u>: $\Delta T = T\left(1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4l}{gt_0^2}} + \sqrt{1 - \frac{4l}{gt_0^2}}\;\right]\right) = 23{,}5\,\text{с}.$