

Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-10

Материалы к урокам по теме:
“Обратные тригонометрические
функции”

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (19 часов)

Урок 1. Решение уравнений вида $\sin x = a$. Функция $g(x) = \arcsin x$.

Урок 2. Решение уравнений вида $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Функции $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$.

Урок 3. Тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Выражения вида $\cos(\arcsin x)$, $\operatorname{tg}(\arccos x)$, $\sin(\operatorname{arctg} x)$ и т. п.

Урок 4. Соотношения между обратными тригонометрическими функциями. Тождества и выражения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Урок 5. Формулы сложения для обратных тригонометрических функций. Сравнение значений арифметических выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 6. *Самостоятельная работа* по теме: “Преобразование выражений. Тождества”.

Урок 7. Решение простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 8. Метод решения уравнений, основанный на рассмотрении области определения и области значений.

Урок 9. Решение более сложных уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 10. Использование монотонности и непрерывности при решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 11. *Самостоятельная работа* по теме: “Уравнения”.

Урок 12. Решение простейших неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 13. Решение более сложных неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 14. Графики функций, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 15. Построение графиков функций, содержащих обратные тригонометрические функции.

Урок 16. *Самостоятельная работа* по теме: “Неравенства. Графики”.

Урок 17. Обобщающее занятие по теме.

Урок 18. Контрольная работа.

Урок 19. Анализ контрольной работы.

Свойства обратных тригонометрических функций

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$g(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\mathcal{D}_g = \mathcal{E}_f$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\mathcal{E}_g = \mathcal{D}_f$	$[-\pi/2; \pi/2]$	$[0; \pi]$	$(-\pi/2; \pi/2)$	$(0; \pi)$
$g \circ f$	$\arcsin(\sin x) = x,$ $x \in [-\pi/2; \pi/2]$	$\arccos(\cos x) = x,$ $x \in [0; \pi]$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,$ $x \in (-\pi/2; \pi/2)$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,$ $x \in (0; \pi)$
$f \circ g$	$\sin(\arcsin x) = x,$ $x \in [-1; 1]$	$\cos(\arccos x) = x,$ $x \in [-1; 1]$	$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,$ $x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,$ $x \in \mathbb{R}$
$g(-x)$	$-\arcsin x$	$\pi - \arccos x$	$-\operatorname{arctg} x$	$\pi - \operatorname{arcctg} x$
У р а в н е н и я	$\sin x = a, a \leq 1 \iff$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\cos x = a, a \leq 1 \iff$ $x = \pm \arccos a + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{tg} x = a \iff$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{ctg} x = a \iff$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$
Г р а ф и к и	 $\sin x$ ——— $\arcsin x$	 $\cos x$ ——— $\arccos x$	 $\operatorname{tg} x$ ——— $\operatorname{arctg} x$	 $\operatorname{ctg} x$ ——— $\operatorname{arcctg} x$

Значения обратных тригонометрических функций в некоторых точках

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для суперпозиций тригонометрических и обратных тригонометрических функций

$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) =$	$\frac{1}{x}$
$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) =$	$\sqrt{1-x^2}$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \cos(\operatorname{arcctg} x) =$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos(\operatorname{arctg} x) = \sin(\operatorname{arcctg} x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{ctg}(\arccos x) =$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{ctg}(\arcsin x) =$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$	$\arctg x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$
---	---

$\arcsin x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x^2} \\ -\frac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{1-x^2} \end{cases} =$	$\begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2} \\ -\arccos \sqrt{1-x^2} \end{cases} = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$	$\begin{cases} , & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ , & \text{если } -1 \leq x < 0; \end{cases}$
$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2} \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2} \end{cases} =$	$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{1-x^2} \\ \frac{\pi}{2} + \arccos \sqrt{1-x^2} \end{cases} = \begin{cases} \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$	$\arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$	$\begin{cases} , & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ , & \text{если } -1 \leq x < 0; \end{cases}$
$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$	$\begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \end{cases} =$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \end{cases} =$	$\begin{cases} , & \text{если } x \geq 0, \\ , & \text{если } x < 0; \end{cases}$
$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} =$	$\begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \end{cases} =$	$\begin{cases} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\ \frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \end{cases} =$	$\begin{cases} , & \text{если } x \geq 0, \\ , & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Формулы сложения для обратных тригонометрических функций

$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^s \arcsin \left(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} \right) + \pi s,$	$\begin{cases} 0 & , \text{ если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sign} x & , \text{ если } xy > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$
$\arccos x + \arccos y = (-1)^s \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \right) + 2\pi s,$	$\begin{cases} 0 & , \text{ если } x + y \geq 0, \\ 1 & , \text{ если } x + y < 0; \end{cases}$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi s,$	$\begin{cases} 0 & , \text{ если } xy < 1, \\ \operatorname{sign} x & , \text{ если } xy > 1; \end{cases}$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{xy-1}{x+y} + \pi s,$	$\begin{cases} 0 & , \text{ если } x + y > 0, \\ 1 & , \text{ если } x + y < 0. \end{cases}$

Урок 1. Арксинус

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

$$(1) \sin x = \frac{1}{4};$$

$$(2) \sin x = -\frac{3}{11}.$$

2) Вычислите:

$$(1) \sin \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right);$$

$$(2) \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$(3) \arcsin (\sin 10).$$

3) Справедливы ли равенства:

$$(1) \arcsin (-1) = \frac{3\pi}{2};$$

$$(2) \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2};$$

$$(3) \arcsin \frac{8}{13} - \arcsin \frac{99}{100} = -\frac{\pi}{2}?$$

4) Докажите, что для функции $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ существует обратная, и найдите ее.

5) Найдите область определения и область значений функций:

$$(1) f(x) = \arcsin (\ln x);$$

$$(2) g(x) = \arcsin \frac{1}{x}.$$

6) Выразите функцию, обратную к функции $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, через $\arcsin x$.

7) Выбрав подходящий промежуток изменения независимой переменной, дайте определение функций $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, обратных соответственно к $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

а) Постройте графики этих функций.

б) Исследуйте полученные функции на четность.

в) Выпишите общие решения уравнений $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Урок 2. Арккосинус. Арктангенс. Арккотангенс

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

$$(1) \cos x = -\frac{2}{5};$$

$$(2) \operatorname{tg} x = \frac{9}{7};$$

$$(3) \operatorname{ctg} x = -\sqrt{5}.$$

2) Справедливо ли равенство $\operatorname{arctg} \frac{11}{15} + \operatorname{arcctg} \frac{24}{7} = \frac{3\pi}{2}$?

3) Вычислите:

$$(1) \sin \left(3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2} \right);$$

$$(2) \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg} 1 \right).$$

4) Найдите:

$$(1) \arcsin \left(\sin \frac{5\pi}{7} \right) - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} \right) - \arccos \left(\cos \frac{8\pi}{7} \right) + \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \left(-\frac{3\pi}{7} \right) \right);$$

$$(2) \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$(3) \operatorname{arcctg} (\operatorname{tg} 11);$$

$$(4) \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right) + \arccos \left(\sin \frac{11\pi}{5} \right) + \arcsin \left(\cos \frac{9\pi}{5} \right) + \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right).$$

5) Найдите области определения функций:

$$(1) f(x) = \arccos \frac{1}{x+2} + \operatorname{arctg} \sqrt{x+1};$$

$$(2) g(x) = \arccos (-1 - x^2).$$

6) Найдите области значений функций:

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}};$$

$$(2) g(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1+x^2}.$$

7) Выразите функцию, обратную к функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right)$ через $\operatorname{arctg} x$.

Урок 3. Тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

Домашнее задание

1) Найдите:

$$(1) \cos \left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13} \right);$$

$$(2) \sin \left(2 \arccos \frac{12}{13} \right);$$

$$(3) \sin \left(\operatorname{arcctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17} \right);$$

$$(4) \cos (2 \operatorname{arctg} 2);$$

$$(5) \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - 2 \operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right);$$

$$(6) \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{4}{7} \right) \right);$$

$$(7) \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(-\frac{2}{3} \right) + \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) \right).$$

2) Решите уравнения:

$$(1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2};$$

$$(2) \cos (\arccos \sqrt{x-1} + \arcsin \sqrt{x-1}) = 0.$$

Урок 4. Различные соотношения и тождества

Домашнее задание

1) Докажите тождества:

$$(1) \arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg} \frac{2}{11};$$

$$(2) \operatorname{arcctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arcctg} \frac{1}{7} = \frac{3\pi}{4};$$

$$(3) \arccos \frac{15}{17} - \arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{36}{85} = -\frac{\pi}{2}.$$

2) Найдите значения выражений:

(1) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$;

(2) $2 \arcsin \frac{1}{6} - \arccos \frac{17}{18}$;

(3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

3) Докажите, что при всех допустимых x справедливы тождества:

(1) $2 \arcsin |x| = \arccos (1 - 2x^2)$;

(2) $2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \arccos x$.

Урок 5. Теоремы сложения. Сравнение выражений

Домашнее задание

1) а) Докажите формулы сложения для арккосинуса и арккотангенса из таблицы.

б) Попробуйте вывести еще какие-нибудь формулы сложения для обратных тригонометрических функций.

2) Докажите тождество: $\arcsin \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5}$.

3) Найдите значения выражений:

(1) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{7}} + \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$;

(2) $2 \operatorname{arctg} 4 + \arcsin \frac{8}{17}$.

4) Сравните следующие выражения:

(1) $\operatorname{arctg} (-2)$ и $\operatorname{arctg} 2$;

(2) $\arcsin (\sqrt{2} - 1)$ и $\arcsin (\sqrt{5} - 2)$;

(3) $\arcsin \frac{15}{17}$ и $\arccos \frac{79}{170}$;

(4) $\arcsin \left(-\frac{7}{26}\right)$ и $\operatorname{arctg} \left(-\frac{7}{24}\right)$.

Урок 6. Самостоятельная работа №1: “Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции”

Домашнее задание

1) Вычислите: $\cos \left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin \frac{1}{2} \right)$.

2) Найдите области определения функций:

(1) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$;

(2) $g(x) = \arccos(x^2 - 2x + 2)$.

3) Найдите:

(1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$;

(2) $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) + \arcsin \frac{20}{29} \right)$;

(3) $\sin(2 \operatorname{arctg} 0, 3)$;

(4) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg}(-2) \right)$;

4) Докажите, что $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

Урок 7. Решение простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

Решите уравнения:

1) $\arcsin \frac{x-1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

2) $\arccos \frac{2}{x} = 2$;

3) $23 \operatorname{arctg}(1-6x) = -10\pi$;

4) $2 \operatorname{arctg} x + 3 \operatorname{arctg} x = 5$;

5) $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $\operatorname{arctg}(4x + 9) = -\frac{\pi}{6}$;

2) $7 \arccos(3x + 4) = 2\pi$;

3) $4 \arcsin(12 - x) + 11 = 0$.

4) $6(\operatorname{arctg} x)^2 + 5 \operatorname{arcctg} x = \frac{5\pi}{2} - 1$.

5) $(\arcsin x)^2 - (\arccos x)^2 = \frac{\pi^2}{12}$.

6) $\arcsin x \cdot \arccos x = -\frac{3\pi^2}{16}$.

Урок 8. Метод решения уравнений, основанный на рассмотрении области определения и области значений

1°. Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

Решите уравнения:

1) $\arcsin(2x - 15) = \arcsin(x^2 - 6x - 8)$;

2) $\arcsin x = \arccos(1 - 2x)$;

3) $\arcsin(1 + 2 \cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 + 3 \operatorname{tg} x)$.

2°. Метод решения уравнений, основанный на рассмотрении области определения и области значений

1) Решите уравнения:

(1) $\arcsin \frac{2}{x} = 2$;

(2) $2 \arcsin x = -\pi - x^2 - 2x - 1$;

(3) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$.

2) Для всех целых значений параметра k решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos x + \arccos y = \frac{3\pi k}{2}, \\ 4 \arcsin x \cdot \arcsin y = \pi^2. \end{cases}$$

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

$$(1) \arccos x = -(x-1)^2;$$

$$(2) \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + x^2;$$

$$(3) \sin(\arcsin(x-1)) = x^2 - 4x + 5.$$

$$(4) 4 \arcsin(12-x) + 11 = 0.$$

$$(5) \arccos(3x-16) = \arccos(x^2-26);$$

$$(6) \arccos x = \operatorname{arctg} x;$$

$$(7) \arccos |x| = \arcsin 2x.$$

2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos x + \arcsin y = a, \\ 2 \arcsin x \cdot \arccos y = \pi^2 \end{cases}$$

при всех значениях параметра a .

Урок 9. Решение более сложных уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

Решите уравнения:

$$1) \arcsin 2x = 2 \arcsin x;$$

$$2) 2 \arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} = \arcsin \frac{2x}{5};$$

$$3) \arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}.$$

Домашнее задание

Решите уравнения:

$$1) 2 \arcsin x = \arccos 2x;$$

$$2) 3 \arccos x = \arccos(2x-1);$$

$$3) 2 \operatorname{arctg}(\cos x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sin x};$$

$$4) \arccos 4x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3};$$

$$5) \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{4};$$

$$6) \arcsin \left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} x \right) + \arccos \left(\frac{6}{\pi} + \operatorname{tg} x \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Урок 10. Использование монотонности и непрерывности при решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

Решите уравнения:

$$1) \arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}.$$

$$2) 3x + \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\pi} = 4;$$

$$3) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi;$$

$$4) \arcsin x + \arcsin (x\sqrt{2}) + \arcsin (x\sqrt{3}) = \pi.$$

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

$$(1) 2 \arcsin 3x = \arcsin 2x;$$

$$(2) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2};$$

$$(3) \arcsin 3x - \arccos 4x + \arcsin 5x = \frac{\pi}{2}.$$

$$2) \text{ Найдите все положительные корни уравнения } \arcsin \frac{5}{x} + \arccos \frac{x\sqrt{3}}{20} = \frac{\pi x}{30}.$$

Урок 12. Простейшие неравенства

Домашнее задание

Решите неравенства:

$$1) \arccos x < \pi;$$

$$2) \frac{x^2 + 1}{|x|} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} > \frac{2}{5};$$

$$3) \arcsin \frac{1-3x}{2+7x} > \log_{1/2} 7;$$

- 4) $\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi} - 0,2x \leq 0,05;$
- 5) $\arcsin \frac{4}{x^2} + \arccos \frac{4}{x^2} > \frac{3}{2};$
- 6) $\cos(\arccos(x+1)) < x+2;$
- 7) $\sin(\arcsin \sqrt{x}) \geq \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7).$

Урок 13. Более сложные неравенства

Домашнее задание

Решите неравенства:

- 1) $\arcsin(2-3x) < \frac{\pi}{4};$
- 2) $\operatorname{arcctg}(x-2) < \frac{5\pi}{6};$
- 3) $\arccos \frac{2}{x} < \frac{\pi}{3};$
- 4) $16 \operatorname{arctg} x \operatorname{arcctg} x \geq \pi^2;$
- 5) $3 \arccos^2 x - 10 \arccos x + 3 > 0;$
- 6) $\arcsin(x^2 - x) > \arcsin(3x - 4);$
- 7) $\arccos(1-2x) < \arccos \frac{1}{x-1};$
- 8) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \leq \operatorname{arcctg} x;$
- 9) $\arcsin x < \arccos 2x.$

Урок 14. Графики – I

Домашнее задание

Постройте графики функций:

- 1) $y = \operatorname{sign}(\arcsin x);$
- 2) $y = \cos(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x);$
- 3) $y = \sin(\arccos x);$
- 4) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x);$
- 5) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x);$
- 6) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}};$
- 7) $y = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$

Урок 15. Графики – II

Домашнее задание

1) Постройте графики функций:

(1) $y = -\operatorname{arctg}(x - 1);$

(2) $y = -\arcsin(1 - 3x) + \frac{\pi}{4};$

(3) $y = \arcsin x - \arccos x;$

(4) $y = -2 \arccos |x + 1|;$

(5) $y = \left| \arcsin(2|x| - 1) \right|;$

(6) $x = \arccos y;$

2) Постройте гмт, удовлетворяющих уравнениям:

(1) $|y| = \operatorname{arctg} x;$

(2) $|y| = |\operatorname{arctg} x|.$