Вторник, 23 июля, 2013

Задача 1. Докажите, что для любой пары натуральных чисел k и n существуют k (не обязательно различных) натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$, удовлетворяющих равенству

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Задача 2. Будем называть *колумбийской конфигурацией точек* набор из 4027 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, при этом 2013 из них покрашены в красный цвет, а остальные 2014 — в синий. Рассмотрим набор прямых, делящих плоскость на несколько областей. Назовем этот набор *хорошим* для данной колумбийской конфигурации точек, если выполнены следующие два условия:

- никакая прямая не проходит ни через одну из точек конфигурации;
- никакая область разбиения не содержит точек обоих цветов.

Найдите наименьшее k такое, что для любой колумбийской конфигурации из 4027 точек найдется хороший набор из k прямых.

Задача 3. Пусть вневписанная окружность треугольника ABC, лежащая напротив вершины A, касается стороны BC в точке A_1. Точки B_1 на стороне CA и C_1 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C, соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Вневписанной окружностью *треугольника ABC, лежащей напротив вершины A, называется окружность, которая касается отрезка BC, продолжения стороны AB за точку B и продолжения стороны AC за точку C. Вневписанные окружности, лежащие напротив вершин B и C, определяются аналогично.*

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Среда, 24 июля, 2013

Задача 4. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Пусть W — произвольная точка на отрезке BC, отличная от точек B и C. Обозначим через M и N основания высот треугольника ABC, проведенных из вершин B и C, соответственно. Пусть ω_1 — окружность, описанная около треугольника BWN, а X — такая точка на ω_1, что WX — диаметр ω_1. Аналогично, пусть ω_2 — окружность, описанная около треугольника CWM, и Y — такая точка на ω_2, что WY — диаметр ω_2. Докажите, что точки X, Y и H лежат на одной прямой.

Задача 5. Обозначим через $\mathbb{Q}_{>0}$ множество всех положительных рациональных чисел. Пусть $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим трем условиям:

(i) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено неравенство $f(x)f(y) \geqslant f(xy)$;

(ii) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено неравенство $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$;

(iii) существует рациональное число $a > 1$ такое, что $f(a) = a$.

Докажите, что $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Рассмотрим окружность и $n+1$ точек на ней, разбивающих её на равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами $0, 1, \ldots, n$ так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется *красивым*, если для любых четырех меток $a < b < c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d, не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c.

Пусть M — количество красивых способов пометки. Пусть N — количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leqslant n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Докажите, что

$$M = N + 1.$$

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов