Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

АЛГЕБРА-11

Материалы к урокам по теме: “Логарифмические уравнения”

Харьков, 2016 г.

Поурочное планирование (13 часов)

Урок 1. Простейшие логарифмические уравнения.

Урок 2. Уравнения вида $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$. Уравнения, сводящиеся к показательным.

Урок 3. Уравнения, решаемые с помощью замены $t = \log_a f(x)$.

Урок 4. Уравнения, решаемые с помощью логарифмирования. Использование тождества $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: "Простейшие логарифмические уравнения".

Урок 6. Более сложные логарифмические уравнения.

Урок 7. Использование свойств логарифмической функции при решении уравнений.

Урок 8. Системы логарифмических уравнений.

Урок 9. Логарифмические уравнения с параметрами.

Урок 10. *Самостоятельная работа* по теме: "Логарифмические уравнения-2".

Урок 11. Обобщающий урок по теме.

Урок 12. Контрольная работа.

Урок 13. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Простейшие логарифмические уравнения

1°. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$

1) Мы приступаем к изучению еще одного типа уравнений.

Определение.

> *Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются* ***логарифмическими***.

2) Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид

$$\log_a f(x) = b, \quad a > 0,\ a \neq 1. \tag{1.1}$$

Из определения логарифма следует, что уравнения вида (1.1) решаются по схеме

$$\boxed{\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.}$$

3) **Упражнения**. Решите уравнения:

(1) $\log_3(3x-1) = 2$;
(2) $\log_6(x+2) = \sqrt{3}$;
(3) $\log_{0,25}\left(x^2 - 3x\right) = -1$;
(4) $\log_x 4 = 2$;
(5) $\log_{x-\sqrt{x}}\left(4+\sqrt{3}\right) = 0$;
(6) $\lg\lg\lg x = 0$;
(7) $\left(3x^2 - 4x - 7\right)\log_3(2-x) = 0$.

2°. Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

1) Рассмотрим уравнение вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0,\ a \neq 1. \tag{1.2}$$

Из монотонности логарифмической функции получаем, что $f(x) = g(x)$. Однако последнее равенство не равносильно уравнению (1.2): необходимо, чтобы выполнялись неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Очевидно, что достаточно потребовать выполнения одного из них (более простого). Т. о.,

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}}$$

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

(1) $\log_5(3x-5)=\log_5(x-3)$;

(2) $\lg\left(x^2-4x+2\right)=\lg(2x-3)$;

(3) $2\log_7(-x)=\log_7(x+2)$;

(4) $\log_2\sin x=\log_2(-\cos x)$.

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $\log_{\sqrt{3}} x=-6$;

2) $\log_{25}\left(2x^2-3\right)=0$;

3) $\log_{x+1} 4=-3$;

4) $\log_7\log_4(x-2)=0$;

5) $\left(x^2-3x-4\right)\log_5(3x-8)=0$;

6) $\log_9(4x-6)=\log_9(x-2)$;

7) $\log_3(1-x)=\log_3\left(17-x-x^2\right)$;

8) $2\log_8(1-x)=\log_8(2,5x+1)$.

Урок 2. Уравнения вида $\log_a f(x)+\log_a g(x)=b$. Уравнения, сводящиеся к показательным

1°. Уравнения вида $\log_a f(x)+\log_a g(x)=b$

1) Рассмотрим уравнение вида

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=b,\quad a>0,\ a\neq 1. \tag{2.1}$$

Для его решения необходимо воспользоваться тем, что сумма логарифмов равна логарифму произведения. Однако переход к уравнению $\log_a(f(x)\cdot g(x))=b$ расширяет область определения исходного уравнения. Необходимо дополнительно потребовать выполнения неравенств $f(x)>0$ и $g(x)>0$. Поскольку из справедливости одного из этих неравенств следует справедливость другого, то правильной является следующая схема решения уравнения (2.1):

$$\boxed{\log_a f(x)+\log_a g(x)=b\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(f(x)\cdot g(x))=b, \\ f(x)>0. \end{cases}}$$

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

(1) $\log_5 x + \log_5 (x-4) = 1$;

(2) $\log_2 (5-x) - \log_2 (x-1) = 1 - \log_2 (x+2)$;

(3) $\log_6 (x+4) - 2\log_6 (5x-4) = \log_7 \dfrac{1}{7}$;

(4) $\dfrac{1}{2} \lg x^2 + \lg (x+7) = 1$;

(5) $1 + \log_{\sqrt{2}} \cos x = \log_2 (3 - 3\sin x)$.

2°. Уравнения, сводящиеся к показательным

1) Многие логарифмические уравнения легко сводятся к показательным (иногда с дополнительными ограничениями на неизвестное).

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

(1) $\log_2 (26 - 2^x) = x$;

(2) $\log_6 (6^{-x} - 5) = x + 1$;

(3) $\log_3 (5^x + 2) + \log_3 (5^x - 1) = 2 + \log_3 2$;

(4) $\log_x \left(2^{x+2} + 25 \cdot 2^{1-x} - 3 \cdot 0{,}25^{x-1{,}5} - 27 + x\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $\log_3(5-x) + \log_3 (3-x) = 1$;

2) $\log_2 (2x-1) - \log_2 (x+2) = 2 - \log_2 (x+1)$;

3) $2\log_5 (x+1) - \log_5 (x+9) = \log_5 (3x-17)$;

4) $\dfrac{1}{4} \log_2 x^4 + \log_2 (x+10) = 3 + \log_2 3$;

5) $\log_2 (3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0$;

6) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$;

7) $\log_3 \left(2^{2x} + 2^x\right) = 2\log_9 12$;

8) $\log_{\sqrt{3}} (2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}} (2^x - 1) = 2$;

9) $\log_x \left(x\sqrt[5]{x} - 9^x + 92 \cdot 3^{x-1} - 101 + 2 \cdot 3^{3-x}\right) = 1{,}2$.

Урок 3. Логарифмические уравнения, решаемые с помощью замены $t = \log_a f(x)$

1) Часто логарифмические уравнения можно свести к алгебраическим с помощью замены $t = \log_a f(x)$.

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

(1) $\dfrac{\lg x}{\lg x + 2} - \dfrac{2}{\lg x - 1} = 1;$

(2) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5;$

(3) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0;$

(4) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \dfrac{16}{x} = 2;$

(5) $2\lg(\lg x) = \lg(2\lg x + 8);$

(6) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2;$

(7) $\log_x \left(9x^2\right) \cdot \log_3^2 x = 4;$

(8) $5\log_{x/9} x + \log_{9/x} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2;$

(9) $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$

(10) $\lg^2(x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2\lg^2(x-1).$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $3\log_8^2(-x) - 2\log_8(-x) - 1 = 0;$

2) $3\log_3 x + 3\log_x 3 = 10;$

3) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0;$

4) $\log_7(7x) \cdot \log_7 \dfrac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1;$

5) $\log_5(\log_2 x) + \log_5\left(\log_2 x^3 - 14\right) = 1;$

6) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10;$

7) $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1;$

8) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0;$

9) $2\lg^2(2x-1) = \lg^2(2x+1) - \lg(2x-1) \cdot \lg(2x+1).$

Урок 4. Уравнения, решаемые с помощью логарифмирования. Использование тождества $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

1°. Уравнения, решаемые с помощью логарифмирования

1) Если неизвестное встречается как в основании, так и в показателе степени, то уравнение часто можно решить, логарифмируя обе его части.

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

   (1) $x^{\log_3 x-3} = \dfrac{1}{9}$;

   (2) $x^{\log_6 x} = 216x^2$;

   (3) $x^{(\lg x+5)/3} = 10^{5+\lg x}$;

   (4) $x^{\log_5(8x)} = 16\sqrt[3]{x^4}$;

   (5) $x^{\log_2(x/98)} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$;

   (6) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$;

   (7) $(\sin x)^{\log_2(2-2\cos 2x)} = 16$;

   (8) $\dfrac{x}{18} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.

2°. Использование тождества $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

1) Иногда логарифмические уравнения легко решаются с использованием тождества
$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a},$$
которое мы доказывали ранее.

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

   (1) $2^{\log_5 x} + 3 \cdot x^{\log_5 2} = 8$;

   (2) $x^{\lg 9} + 3^{2\lg x} = 162$.

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

   (1) $x^{\log_3(3x)} = 729$;

   (2) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x} = 10^{6+\lg x}$;

   (3) $x^{2\log_4 x} = \dfrac{8}{x^2}$;

(4) $3 \cdot 6^{\log_6^2 x} - x^{\log_6 x} = 12;$

(5) $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)};$

(6) $(\operatorname{tg} x)^{\log_2 \operatorname{ctg} x} = 0,5;$

(7) $7^{\log_2 x} = 98 - x^{\log_2 7};$

(8) $x^{\log_3^3 x - 3\log_3 x} = 3^{-\log_{2\sqrt{2}} 64 + 8}.$

2) Докажите, что корни уравнения $5 \cdot x^{\log_{15} x} - 3 \cdot 5^{\log_{15} x^2} = 0$ являются рациональными числами.

Урок 5. Самостоятельная работа №1: “Простейшие логарифмические уравнения”

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $\lg \sqrt{5x - 4} + \lg \sqrt{x + 1} = 2 + \lg 0,18;$

2) $\log_2 (x - 5)^2 - 2\log_2 (x + 2) = 2;$

3) $\log_6 \left(3^{x^2} + 1\right) - \log_6 \left(3^{2 - x^2} + 9\right) = \log_6 2 - 1;$

4) $\left(\dfrac{1}{2} \log_3 x - 6\right) \cdot \log_9 x = 4\,(2 - \log_9 x);$

5) $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x;$

6) $\log_{x+1} \left(x^3 - 9x + 8\right) \cdot \log_{x-1} (x + 1) = 3;$

7) $x^{2 - \lg^2 x - \lg x^2} = \dfrac{1}{x};$

8) $4^{\log_3 (1 - x)} = \left(2x^2 + 2x - 5\right)^{\log_3 2}.$

Урок 6. Более сложные логарифмические уравнения

Решите уравнения:

1) $\log_{2x}\left(\frac{32}{x}-16x\right)=\frac{1}{\log_{56}(2x)}-3;$

2) $(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\frac{8}{3}\log_2\left(x^2-1\right);$

3) $\frac{1}{\log_6(x+3)}+\frac{2\log_{0{,}25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1;$

4) $\log_2(4\cos x+3)\cdot\log_3(4\cos x+3)=\log_2(4\cos x+3)+\log_3(4\cos x+3);$

5) $\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)-\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)=2;$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $\lg(x-10)\cdot\lg(x+10)=\lg\left(x^2-100\right)-1;$

2) $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4;$

3) $2\log_{2x+1}(3-4x)\cdot\log_{4x^2}(2x+1)=-1;$

4) $\log_2\log_3(2x+3)+\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x+1}{2x+3}=1;$

5) $\log_{0{,}5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0;$

Урок 7. Использование свойств логарифмической функции при решении уравнений

1) При решении логарифмических уравнений часто можно использовать информацию о монотонности логарифмической функции. Также бывают полезны различные оценки левой и правой частей уравнения.

2) **Упражнения**. Решите уравнения:

   (1) $\log_7(x+8)=-x;$

   (2) $x^4=\log_x 4;$

   (3) $(1-\lg 2)\cdot\log_5 x=\lg 3-\lg(x-2);$

   (4) $\log_5 \operatorname{tg}^2 x=\cos 2x;$

   (5) $\left(\sqrt{x}\right)^x+x\log_2 x=24;$

(6) $\dfrac{\log_4(x+1)}{\log_5(x+2)} + \dfrac{\log_7(x+4)}{\log_8(x+5)} = 2;$

(7) $\log_2 \dfrac{x}{\sqrt{4x-3}} = \sqrt{4x-3} - x;$

(8) $\left(4x - x^2 - 3\right) \log_2 \left(\cos^2 \pi x + 1\right) = 1.$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $\log_{1/3}(x-5) = x - 9;$

2) $2x^6 = \log_x 3;$

3) $\operatorname{ctg} x + \log_{\pi/4} x = 2, \;\; x \in (0; \pi);$

4) $2^{-|x-2|} \cdot \log_2 \left(4x - x^2 - 2\right) = 1;$

5) $\sqrt{x^2+2x+4} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}} = 4 - \log_3^4 \left(x^2 + x^4 + 1\right);$

Урок 8. Системы логарифмических уравнений

Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2, \\ \log_y(2x+3y) = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg(2y-3x) = \lg(4-4x+y)\,; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^{0{,}5 + \log_y x} = \sqrt{y}, \\ \log_{x+1} \dfrac{xy+y}{x} = 1 + \log_{x+1}(3+4x^2); \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2(xy) - \dfrac{1}{2} \log_2 x^2 = 1, \\ \log_{x^2} y^2 + \log_2(y+6) = 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x+y)\,3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y) = x-y. \end{cases}$

Домашнее задание

Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x-2y) = \lg(5+x-3y)\,; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x+y)\,, \\ \log_2(x+y) + \log_2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4^{x/y+y/x} = 32, \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y)\,; \end{cases}$

Урок 9. Логарифмические уравнения с параметрами

1) При каких значениях параметра a уравнение
$$(x-a)\log_2(3x-7) = 0$$
имеет единственное решение?

2) Сколько решений имеет уравнение
$$(\log_2(x+1) - 3)\sqrt{x-a} = 0$$
в зависимости от значения параметра a ?

3) Решите уравнение
$$-\log_5\left(2 - \left|x-b\right|\right) = \log_{0,2}(5-x)$$
при всех значениях параметра b.

4) При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_{\sqrt{2ax+4}}\left(2x^2 - x + 3\right) = 2\,\log_{2ax+4}\left(x^2 + 2x + 1\right)$$
имеет единственное решение?

5) Найдите значения параметра a, при которых уравнение
$$(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a - 3 = 0$$
имеет корни, причем все его корни меньше 3.

Домашнее задание

1) При каких значениях параметра a уравнение
$$(x+a)\log_3(2x-5)=0$$
имеет единственное решение?

2) Сколько решений имеет уравнение
$$\sqrt{x-a}\,(\log_3(x-2)-2)=0$$
в зависимости от значения параметра a?

3) При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_{\sqrt{ax-6}}\left(2x^2-3x+2\right)=2\,\log_{ax-6}\left(x^2+2x-4\right)$$
имеет единственное решение?

4) Решите уравнение
$$\log_3(x-5)=\log_9\left(x^2+3x-a\right)$$
при всех значениях параметра a.

Урок 11. Обобщающий урок

Домашнее задание

Решите уравнения:

1) $5^{\log_2 x}+2\cdot x^{\log_2 5}=15;$
2) $\log_{x^2-6x+8}\left(\log_{2x^2-2x+3}\left(x^2+2x\right)\right)=0;$
3) $\log_{(\cos 2x-\sin 2x)}(1-\cos x-\sin x)=1;$