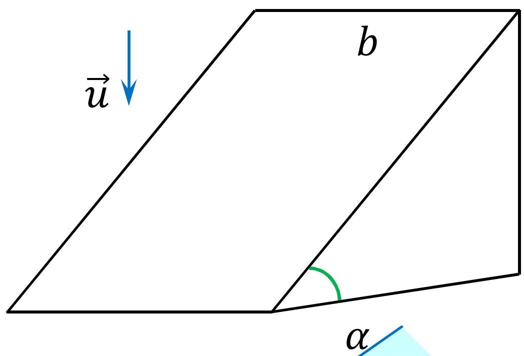
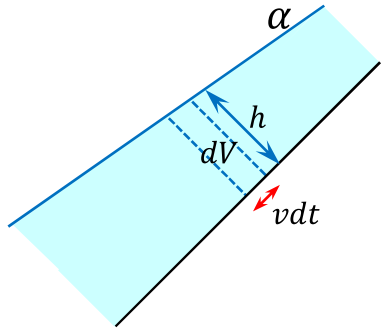
Условие: У некоторого здания есть очень длинная крыша, расположенная под углом α к горизонту. На нее начинает капать мелкий дождь, причем капли движутся вертикально вниз с постоянной скоростью. Найдите ускорение a потока жидкости в зависимости от расстояния l до карниза крыши в двух предельных случаях: а) $l \to 0$; б) $l \to \infty$. Предполагается, что концентрация воды в воздухе всюду одинакова, а вода не стекает с краев крыши. Трением внутри воды и между водой и крышей пренебречь. Соударение капель воды с крышей абсолютно неупругое.

Решение: Пусть k – относительная концентрация воды в воздухе (т.е. отношение объема, занимаемого водой, ко всему объему, $k \ll 1$); b – горизонтальная ширина крыши (см. рисунки), u – скорость капель дождя; ρ_0 – плотность воды. Выделим на некотором расстоянии от карниза малый объем dV. Пусть его высота h, а скорость воды в нем v. Тогда его длина равна vdt. Имеем уравнение:





$$dV = bhv \cdot dt.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим:

$$d^2V = b(v'h + h'v)dt^2,$$

где штрих означает производную по времени.

Физический смысл величины d^2V – это приращение объема вследствие поглощения потоком атмосферной воды. Считая, что угол наклона поверхности воды мало отличается от α (такое возможно при $k \ll 1$), получаем, что эффективная площадь, на которую падает дождь, $dS^* = bv \cdot dt \cos\alpha$. Тогда изменение объема воды $d^2V = ku \cdot dS^* dt = kbuv \cdot dt^2 \cos\alpha$.

Сравнив выражения для d^2V, получим:

$$v'h + h'v = kuv \cos\alpha. \tag{1}$$

Применим теперь второй закон Ньютона к выделенному объему. Его масса $dm = \rho dV = \rho bhv \cdot dt$, приращение $d^2m = \rho d^2V = \rho kbuv \cdot dt^2 \cos\alpha$. На выделенный объем действуют только сила тяжести и сила нормальной реакция опоры. Запишем второй закон Ньютона в дифференциальной форме в проекции на направление движения воды:

$$dm \cdot g \sin\alpha = dm \cdot v' + d^2m(v - u \sin\alpha)/dt.$$

На самом деле нельзя писать второй закон Ньютона, не учтя сил давления жидкости.

Последнее слагаемое в уравнении отвечает за то, что приращенную массу необходимо разогнать от скорости $u \sin\alpha$ до скорости v.

Подставив значения масс и проделав несложные преобразования, получим:

$$h(g \sin\alpha - v') = ku \cos\alpha\, (v - u \sin\alpha),$$

откуда

$$v' = a = g\,sin\,\alpha - ku\,cos\,\alpha\,(v - u\,sin\,\alpha)/h. \qquad (2)$$

Получили два дифференциальных уравнения. Рассмотрим теперь предельные случаи.

а) $l \to 0$. Очевидно, что тогда $h \to 0$. Подставив это в уравнение (1), получим:

$$h'v = kuv\,cos\,\alpha,$$

откуда

$$h' = ku\,cos\,\alpha.$$

Рассмотрим теперь правую сторону выражения (2). В нем есть отношение малых величин $(v - u\,sin\,\alpha)/h$. Заменим отношение этих величин на отношения их производных по правилу Лопиталя:

$$\frac{v - u\,sin\,\alpha}{h} = \frac{v'}{h'}.$$

Подставим это в уравнение (2):

$$v' = g\,sin\,\alpha - \frac{kuv'\,cos\,\alpha}{h'} = g\,sin\,\alpha - v',$$

откуда

$$v' = a_1 = \frac{g\,sin\,\alpha}{2}.$$

б) $l \to \infty$. Пусть в этом случае установившееся ускорение a_2, тогда скорость $v = a_2 t$, где t – время движения воды. Это оправдано, так как участок приобретения водой установившегося ускорения намного меньше дальнейшего пути. Пусть $h = \gamma v$, тогда $h = \gamma a_2 t$. Подставим в уравнение (1):

$$\gamma a_2^2 t + \gamma a_2^2 t = ku a_2 t\,cos\,\alpha,$$

откуда

$$\gamma = \frac{ku\,cos\,\alpha}{2a_2}.$$

Тогда $h = kuv\,cos\,\alpha\,/2a_2$. Так как $v \gg u\,sin\,\alpha$, то $v - u\,sin\,\alpha \approx v$. Подставим в (2):

$$a_2 = g\,sin\,\alpha - \frac{kuv\,cos\,\alpha}{h} = g\,sin\,\alpha - ku\,cos\,\alpha \cdot \frac{2a_2}{ku\,cos\,\alpha} = g\,sin\,\alpha - 2a_2,$$

откуда

$$a_2 = \frac{g\,sin\,\alpha}{3}.$$

Ответ: а) $a_1 = g\,sin\,\alpha\,/2$; б) $a_2 = g\,sin\,\alpha\,/3$.