Problem 1

Последний вариант. Уравнение одно, лианеризации нет.

Задача № 1

Условие: Миномет установлен у основания некоторой горы под углом $\alpha = 1{,}5$ радиана к горизонту. Минометный расчет ведет записи о том, насколько далеко падают мины в зависимости от их начальной скорости. Определите по этим данным высоту и примерную форму горы.

v_0, м/с	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
l, м	0,710576	1,611942	2,85057	4,45474	6,48101	8,9838	12,0195	15,6393	19,879	24,7493
v_0, м/с	50	54	58	62	66	70	74	78	82	
l, м	30,2305	36,2765	42,8294	49,8405	57,2941	65,2363	73,8201	83,4179	95,0382	

Решение: Сопротивлением воздуха при решении задачи пренебрегаем. Введем систему координат, как на рис. 1.1. Рассмотрим движение снаряда, выпущенного из начала координат со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Его координаты при таком движении зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t \cos\alpha$ и $y(t) = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$ соответственно. Выразив t из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

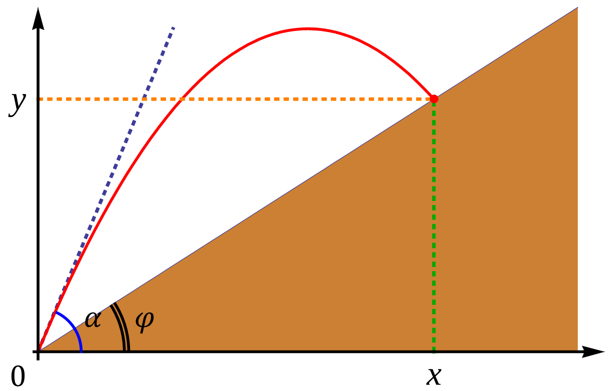

Рис. 1.1. Ось Ox горизонтальна, ось Oy вертикальна. Миномет расположен в начале координат.

Перейдем к полярным координатам (l, φ). Будем искать полярные углы φ точек падения снарядов. Координаты точек падения снаряда $x = l\cos\varphi$ и $y = l\sin\varphi$. Подставим их в уравнение (1) и разделим обе его части на x:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gl\cos\varphi}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

откуда, с использованием тождества $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\cos\varphi}$ получим

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{gl\cos^2\varphi}{2v_0^2\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Такое уравнение невозможно решить стандартными способами, оно приводится к уравнению четвертой степени с громоздким решением.

Попробуем тогда найти приближенное решение. Элементарными преобразованиями уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos^2\varphi} = \frac{gl}{2v_0^2\cos\alpha}.$$

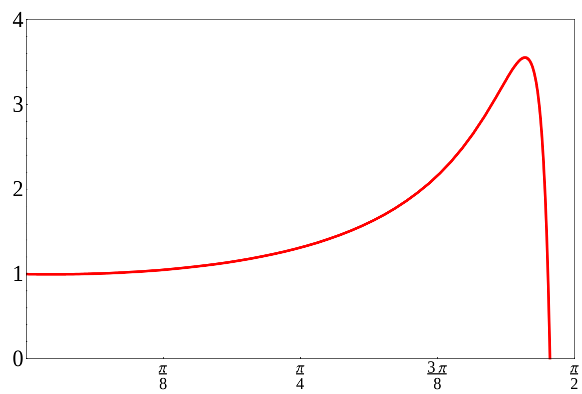

Рис. 1.3. График $f(\varphi) = \sin(\alpha - \varphi)/\cos^2\varphi$, где $\alpha = 1{,}5$ рад.

График зависимости левой части от переменной φ изображен на рис. 1.3. Так как во всех 19 случаях величина $\varepsilon = gl/2v_0^2\cos\alpha$ меньше, чем $f(0) = \sin\alpha$, то уравнение имеет единственный корень, близкий к $\pi/2$ (он соответствует пересечению изображенного графика с прямой $f(\varphi) = \varepsilon$, а функция, изображенная на графике, очень быстро убывает при φ, близком к α). Так как и угол α близок к $\pi/2$, то будем считать углы α и φ близкими между собой. А именно, применим приближения

$\sin(\alpha-\varphi)\approx\alpha-\varphi$ и $\cos\varphi=\sin(\pi/2-\varphi)\approx\pi/2-\varphi$. Уравнение (2) примет вид

$$\alpha-\varphi=\frac{gl}{2v_0^2\cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)^2,$$

которое легко привести к виду

$$q\varphi^2-\varphi\,(q\pi-1)+\left(\frac{q\pi^2}{4}-\alpha\right)=0,\quad q=\frac{gl}{2v_0^2\cos\alpha}.$$

Получили квадратное уравнение, корни которого

$$\varphi_{1,2}=\frac{1}{2q}\left(q\pi-1\pm\sqrt{(q\pi-1)^2-q\pi^2+4\alpha}\right).$$

Во всех случаях искомый корень — с плюсом перед радикалом (второй корень не подходит, так как он не соответствует примененным приближениям). В таблице представлены решения этого уравнения для всех случаев, представленных в условии, в порядке их перечисления. Как далее выяснится, ошибка по сравнению с точным решением $\Delta\varphi=0{,}001^\circ$.

$\varphi,^\circ$	85,7915	85,7645	85,7517	85,7419	85,7326	85,7229	85,7126	85,7018	85,6907
85,6797	85,6695	85,6604	85,6528	85,6466	85,6416	85,6373	85,6328	85,6266	85,6151

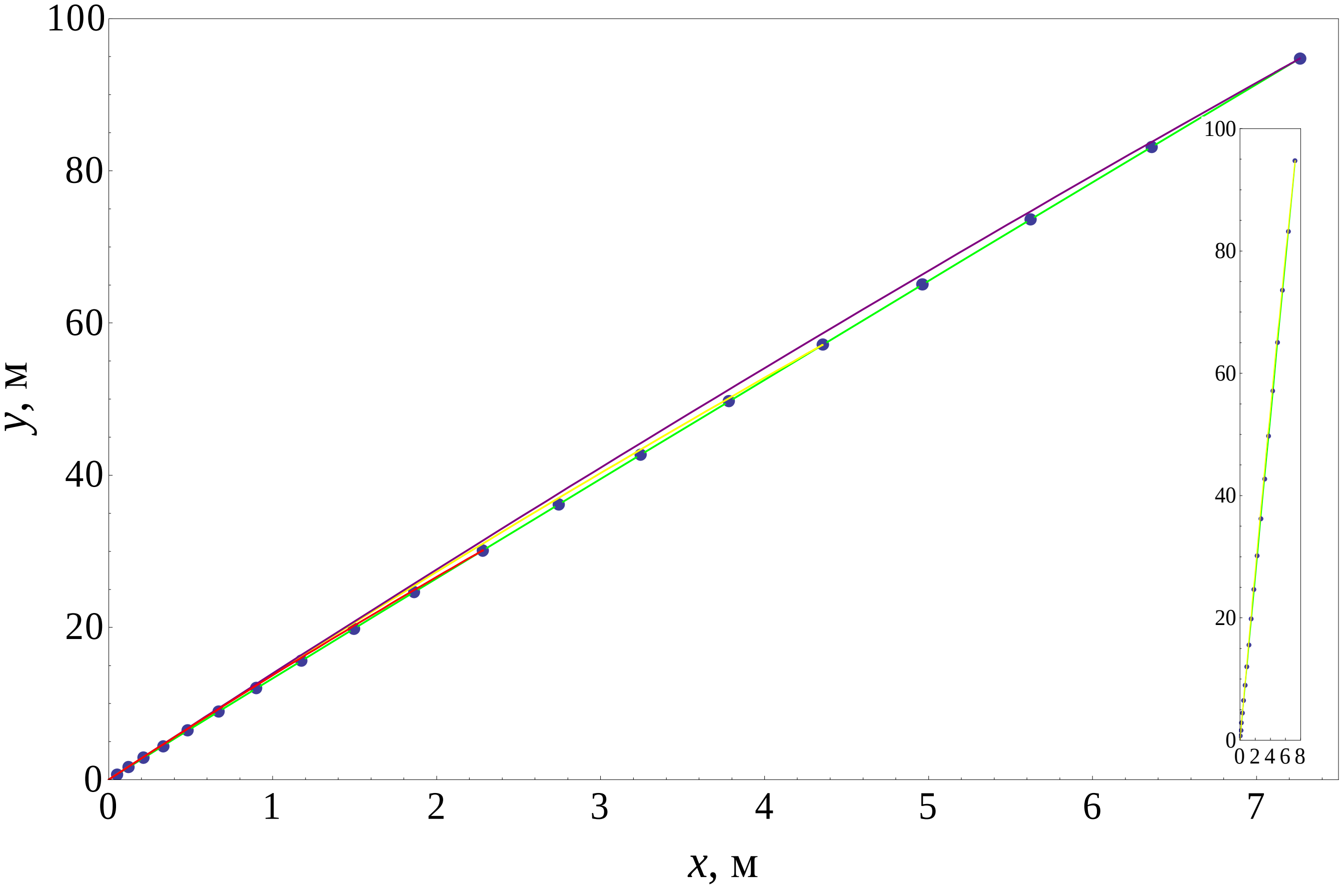

Рис. 1.4. График поверхности горы по точкам (не в масштабе). Зеленым изображена поверхность горы, другими цветами изображены траектории снарядов. Справа приведен график в масштабе.

По полученным данным был построен график[1], см. рис. 1.4. Траектории снарядов кажутся настолько прижатыми к поверхности из-за малой разности углов α и φ.

По полученным данным полярные углы φ всех точек близки, то есть форма горы близка к линейной. Однако в пределах погрешности можно утверждать, что гора выпукла вверх. Наилучшая линеаризация

[1]На самом деле он построен по данным точного решения. Впрочем, невооруженным глазом это различие не заметно.

горы соответствует углу наклона — среднему этих величин[2]: $\overline{\varphi} = 85{,}69°$. Высота горы $H = l_{19} \sin\varphi_{19} = 94{,}7601$ м.

Проверим полученные результаты при помощи точного решения. Уравнение (2) решила программа *Mathematica*[3]. Полученные данные иллюстрирует следующая таблица:

$\varphi,°$	85,7918	85,7648	85,7521	85,7423	85,7330	85,7234	85,7131	85,7023	85,6912
85,6803	85,6701	85,6610	85,6534	85,6472	85,6423	85,6380	85,6335	85,6273	85,6159

Как видим, отличие от приближенного решения в четвертом знаке после запятой.

Ответ: Высота $H = 94{,}7601$ м, форма — кривая с выпуклостью вверх, которую можно аппроксимировать наклонной плоскостью, образующей угол $\varphi = 85{,}69°$ с горизонтом.

[2]На самом деле правильно усреднять не углы, а их тангенсы.

[3]Имеется в виду программа компании Wolfram Research, Inc., см. www.wolfram.com/mathematica