

1. Из рисунков можно получить чудную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \varphi; \\ \frac{v_{z0}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \operatorname{tg} \theta; \\ \frac{\sqrt{v_{z0}^2 - 2gh}}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Здесь ось Ox направлена горизонтально вдоль сетки, ось Oy – горизонтально перпендикулярно сетке, Oz – вертикально вверх. Проекции v_x и v_y постоянны, а v_{z0} относится к начальному моменту времени. Из этой системы получим:

$$\begin{cases} v_x = \sqrt{\frac{2gh \cos^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \theta - \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \\ v_y = \sqrt{\frac{2gh \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \theta - \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \\ v_{z0} = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \theta}}}. \end{cases}$$

Тогда искомая высота $H = v_{z0}T - gT^2/2 = \frac{a \operatorname{tg} \theta}{\sin \varphi} - \frac{a^2(\operatorname{tg}^2 \theta - \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4h \sin^2 \varphi} = 2,54 \text{ м}$ (здесь $T = a/v_y$ – время полета мяча до плоскости сетки).

2. На элемент жидкости, находящийся над уровнем поверхности жидкости в сосуде, действует кроме сил тяжести и натяжения, еще и сила реакции опоры, распределенная некоторым образом¹ по поверхности капилляра. Давление же в жидкости падает при подъеме равномерно (это обусловлено ее весом). Вблизи поверхности жидкости давление $p = p_0 - \rho gh$, где p_0 – атмосферное давление. Там оно резко возрастает до атмосферного на величину, задаваемую формулой Лапласа. Из баланса давлений получим:

$$\rho gh^2 \alpha - \rho g H h \alpha + 4\sigma = 0.$$

Его корни

$$h = \frac{H}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16\sigma}{\rho g H^2 \alpha}} \right).$$

Если $16\sigma > \rho g H^2 \alpha$, то уравнение не имеет решений – жидкость сама заполняет весь капилляр. Если $16\sigma = \rho g H^2 \alpha$, то уравнение имеет одно неустойчивое решение – жидкость по инерции заполнит капилляр. Если же $16\sigma < \rho g H^2 \alpha$, то устойчиво решение с “минусом” перед радикалом. Другое решение неустойчиво: если нагнетать жидкость в капилляр, то по достижении некоторого уровня (а именно, решения с “плюсом”) она перестает вытекать и заполняет весь капилляр (то же самое произойдет, если погрузить капилляр, заполненный жидкостью).

¹ А именно, $dN/dh = \pi \alpha (H - h)(p_0 - \rho gh)$. Интегрирование дает полную силу реакции опоры: $N = \pi \alpha (p_0 H h - h^2(\rho g H + p_0)/2 + \rho gh^3/3)$.

3. Попытки решить эту задачу точно приводят к дифференциальному уравнению, решить которое не представляется возможности даже численно. Если $M(r)$ – суммарная масса вещества внутри сферы радиуса r , то оно выглядит так:

$$-\frac{5}{3}A(M''r - 2M') = (4\pi)^{2/3}GM(M')^{1/3}r^{1/3},$$

где штрих означает производную по радиусу.

У этой задачи есть два приближенных решения. Первое – просто проанализировать размерности данных величин (считаем, что ответ является произведением некоторых их степеней). Безразмерный коэффициент в формуле считаем равным единице (необходим оценочный расчет!). В этом случае ответ выглядит так:

$$R \approx \frac{A}{GM^{1/3}} = 6,4 \text{ км.}$$

Более точный ответ (все равно очень оценочный!) учитывает, что внутри сферы такого радиуса находится ровно половина массы:

$$R \approx \frac{2^{1/3}A}{GM^{1/3}} = 8,1 \text{ км.}$$

Второй способ – рассмотреть область, ограниченную малым телесным углом $d\Omega$ и находящуюся вне сферы радиуса R . Масса вещества внутри области $dM = Md\Omega/8\pi$, так как вне этой сферы находится ровно половина изотропно распределенного вещества. Считаем (первое грубое приближение), что внутри сферы R вещество однородно. Тогда его плотность

$$\rho = \frac{3M}{8\pi R^3}.$$

(на самом деле она меньше). Также считаем (второе грубое приближение, усиливающее первое), что центр масс выделенного объема вещества находится на расстоянии R от центра (на самом деле он дальше). Приравняв силы, действующие на выделенную массу газа (третье приближение: пренебрегаем проекцией силы давления соседних слоев газа на интересующее нас направление; насколько оно грубое – неизвестно), получим ответ:

$$R = \frac{A}{GM^{1/3}} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} = 4,7 \text{ км.}$$

4. Простенькая задачка на применение момента импульса. Считаем ядро покоящимся. Очевидно, для реакции с участием нейтрона сечение $S_n = \pi R^2$. Найдем максимальный прицельный параметр протона ρ из предположения, что на поверхности ядра протон движется по касательной к ней. Из законов сохранения энергии и момента импульса получим:

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} = W - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R}; \\ mvR = mv_0\rho; \end{cases}$$

где v – скорость протона на поверхности ядра, v_0 – начальная скорость, m – масса протона. Из этой системы получим:

$$\rho = R \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{RW}}.$$

Тогда сечение реакции с участием протона $S_p = \pi\rho^2$, и отношение сечений

$$\frac{S_p}{S_n} = \frac{\rho^2}{R^2} = 1 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{RW}.$$

При $W < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R}$ реакция с участием протона вообще не произойдет. При равенстве она теоритически возможна, но практически – нет.