Реликтовое излучение и космические лучи. Согласно современной космологии, наша Вселенная наполнена электромагнитным излучением, оставшимся после Большого взрыва. Это излучение называется реликтовым. С хорошей точностью реликтовое излучение однородно и изотропно в системе отсчета, связанной с нашей Галактикой, которую в дальнейшем будем считать лабораторной системой отсчета, а распределение по частотам этого излучения совпадает со спектром абсолютно черного тела при температуре $T_r = 2.7\,K$. Работы по открытию и исследованию свойств реликтового излучения отмечены Нобелевскими премиями по физике в 1978 и 2006 годах.

Реликтовые фотоны чрезвычайно многочисленны и поэтому могут влиять на имеющееся в Галактике излучение другой природы – космические лучи (КЛ). Считается, что КЛ образуются при взрывах звезд. КЛ состоят в основном из протонов, их энергия может превышать на много порядков энергии, доступные на земных ускорителях. Механизм генерации КЛ сверхвысоких энергий не вполне ясен, однако экспериментально наблюдаемое распределение по энергии КЛ ограничено сверху величиной $E_p^{max} \sim 10^{21} eV$. В данной задаче предполагается, что это ограничение обусловлено потерями энергии при взаимодействии протонов с реликтовым излучением. Протоны могут участвовать в комптоновском рассеянии

$$p + \gamma \to p + \gamma \tag{1}$$

и вызвать реакцию

$$p + \gamma \to \Delta \to \pi^0 + p, \tag{2}$$

где p – протон, γ – реликтовый фотон, Δ – самый легкий по сравнению с нуклоном барион с массой покоя $m_\Delta = 1.232 \times 10^9 eV/c^2$, который быстро распадается на пи-мезон π^0 и протон. (Δ-частица распадется также на π^+-мезон и нейтрон. Нейтрон довольно быстро превращается в протон за счет β-распада, поэтому явный учет этого канала реакции не имеет принципиального значения в данной задаче.) За счет рождения Δ-частицы вероятность взаимодействия протона с γ-квантом резко возрастает.
Цель данной задачи – определить верхнюю границу наблюдаемого спектра КЛ, предполагая, что реакция (2) является основным механизмом потерь энергии КЛ, и сравнить потери энергии протоном в реакциях (1) и (2). В следующих заданиях энергию измерять в электрон-вольтах, eV, а импульсы – в eV/c, где c – скорость света в вакууме. Масса покоя протона $m_p = 938 \times 10^6 eV/c^2$, масса покоя пи-мезона $m_\pi = 140 \times 10^6 eV/c^2$. Постоянная Больцмана $k = 1.38 \times 10^{-23}$ Дж K^{-1}.

1. Оцените наиболее вероятную энергию E_γ и соответствующий импульс p_γ реликтовых фотонов, учитывая, что они соответствуют излучению черного тела при температуре $T_r = 2.7\,K$. В следующих заданиях предполагать, что начальный фотон в реакциях (1) и (2) имеет найденные значения энергии и импульса.
2. Масса покоя частицы m связана с полной релятивистской энергией E и импульсом $\mathbf{p}$ этой частицы в произвольной инерциальной системе отсчета соотно-

шением $E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$. Здесь величина mc^2 не зависит от системы отсчета и является полной внутренней энергией частицы. Написать аналогичное выражение для полной внутренней энергии системы двух невзаимодействующих частиц (т.е. полной энергии в системе отсчета, в которой полный импульс физической системы равен нулю) с полными энергиями E_1, E_2, импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и массами покоя m_1, m_2, соответственно.

Для дальнейшего анализа может понадобится релятивистский закон преобразования импульса и энергии частицы. При переходе из инерциальной системы отсчета S в инерциальную систему S', движущуюся относительно первой со скоростью V_0 вдоль положительного направления оси Z ($OZ \uparrow\uparrow OZ'$), энергия и импульс преобразуются так же, как координаты пространственно-временной точки $(x, y, z, t) \to (x', y', z', t')$:

$$\begin{aligned} p_z c &= G(p'_z c + \frac{V_0}{c} E'), \\ p_x &= p'_x, \\ p_y &= p'_y, \\ E &= G(E' + \frac{V_0}{c} {p_z}' c), \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $E'/c = \sqrt{m^2c^2 + {p'_x}^2 + {p'_y}^2 + {p'_z}^2}$, $E/c = \sqrt{m^2c^2 + {p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2}$, $G = 1/\sqrt{1 - (V_0/c)^2}$.

3. Определите, при какой наименьшей энергии протона возможна реакция (2):
a) в системе центра масс протона и фотона $p + \gamma$ (то есть в системе отсчета, в которой суммарный импульс протона и фотона равен нулю),
b) в системе Галактики.
Исходя из полученных результатов, определите максимальную энергию протонов в спектре КЛ.
4. Предполагая, что в системе Галактики протон имеет максимальную энергию E_p^{max} и сталкивается с летящим ему навстречу реликтовым фотоном, определите импульс пи-мезона в реакции (2) в этой же системе отсчета для случая, когда вылетающие частицы движутся по или против направления начального импульса протона. Насколько при этом изменяется импульс протона?
5. Какова величина импульса конечного фотона в комптоновском рассеянии (1) при тех же условиях, что и в п.4?
6. Возможна ли реакция (2) с реликтовым излучением, если в системе Галактики импульсы начального протона и фотона направлены в одну сторону? Если реакция возможна, то какова при этом должна быть минимальная величина импульса фотона в системе Галактики?

Solution.

1. The most probable energy of the photon in the spectrum of the blackbody at temperature T is $E_\gamma = h\nu = kT$, and the corresponding momentum is $p_\gamma = E_\gamma/c$. Numerically one finds

$$E_\gamma = kT_r = 2.3 \times 10^{-4} eV, \qquad (4)$$
$$p_\gamma = 2.3 \times 10^{-4} eV/c.$$

2. The total internal energy of two non-interacting particle, Mc^2, is determined by the sum of the total energies of these particles in the total center mass frame $Mc = \sqrt{m_1^2c^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2c^2 + q^2}$, where q is the momentum of these particles in the total center mass frame. For a given M the following relation is valid in any reference frame

$$(E_1/c + E_2/c)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = M^2c^2, \qquad (5)$$

where E_1, E_2 are energies and $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ are momenta of these particles in the same reference frame.

2. Let us denote by E_0 the minimum (threshold) energy of the proton, at which the Δ can be created in the interaction between the proton and the relict photon. At $E \leq E_0$ the reaction (2) occurs with high probability and the proton loos the energy for the π-meson production. The outgoing protons in the reaction (2) repeat this process many times until their energy will be below E_0. At $E < E_0$ this channel of energy loss is closed. Since the excited states of proton with masses less than the Δ-particle are absent, then the energy E_0 has to be the maximum energy of the CR protons.

Let us choose the OZ direction along the incident proton momentum $\mathbf{p}_p$. Due to isotropy of the relict rays the flows of the relict photons are equal along the directions $\pm OZ$,$\pm OX$ and $\pm OY$. One can see that for a given module of momentum $|\mathbf{p}_\gamma|$ the threshold energy of the reaction (2) E_0 is minimal for the case of face-to-face collision, when the photon is going in opposite direction in respect of the proton. Indeed, the total internal energy of the colliding particles at the minimal proton energy (at the threshold) is equal to $M_\Delta c^2$. On the other hand, one has from Eq. (5)

$$M_\Delta^2 c^4 = (E_p + E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\gamma)^2 c^2. \qquad (6)$$

It is seen from this equation that at given energy of the photon E_γ the magnitude of the proton energy E_p is minimal, if the momenta $\mathbf{p}_p$ and $\mathbf{p}_\gamma$ have opposite directions.

3a. In the center mass reference frame of the proton and the photon (c.m. $p+\gamma$) one has $\mathbf{q}_p = -\mathbf{q}_\gamma$, where $\mathbf{q}_p$ is the momentum of the CR proton, $\mathbf{q}_\gamma$ is the photon momentum. The Δ-particle is at rest in this reference frame. Therefore, the reaction (2) takes the place at the condition

$$M_\Delta c^2 = \sqrt{m_p^2c^4 + q_\gamma^2c^2} + q_\gamma c, \qquad (7)$$

where M_Δ is the rest mass of the Δ-particle, m_p is the proton rest mass. One can find from Eq.(7)

$$[M_\Delta c^2 - q_\gamma c]^2 = m_p^2 c^4 + q\gamma^2 c^2$$

or

$$q_\gamma c = \frac{(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2M_\Delta \ c^2} \approx 257\,10^6\, eV/c. \qquad (8)$$

3b.**The method 1.**
The relation between the momentum of the relict photon in the c.m. $p+\gamma$ frame q_γ from Eq. (8) and the corresponding momentum in the Galaxy reference frame p_γ is given by the Lorenz transformation:

$$p_{\gamma_z} = G(q_{\gamma_z} + \frac{V_{0z}}{c} E_\gamma^{cm}/c). \qquad (9)$$

For the case of "face-to-face"collision one has $p_{\gamma_z} = -p_\gamma$, $q_{\gamma_z} = -p_\gamma$, $V_{0z} = V_{0z}$, therefore from Eq. (9) one finds

$$p_\gamma c = \frac{1}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}} \left[|\mathbf{q}_\gamma| c - \frac{V_0}{c} E_\gamma^{cm} \right] = \frac{1-(V_0/c)}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}} |\mathbf{q}_\gamma| c, \qquad (10)$$

here E_γ^{cm} is the photon energy in the c.m. $p+\gamma$ frame: $E_\gamma^{cm} = |\mathbf{q}_\gamma| c$.

Let us introduce the following ratio starting from (10).

$$\kappa = \frac{p_\gamma}{q_\gamma} = \frac{1-(V_0/c)}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}}. \qquad (11)$$

One can find numerically

$$\kappa = E_\gamma / q_\gamma = kT_r / q_\gamma c = \frac{2.3\,10^{-4}}{257 \times 10^6} = 8.9\,10^{-13} \ll 1. \qquad (12)$$

Due to smallness of the value κ, the ratio V_0/c is also close to unit. Therefore, one can write

$$\frac{V_0}{c} = 1 - \varepsilon, \qquad (13)$$

where $\varepsilon \ll 1$.

Similar transformation of the proton momentum from the c.m. $p+\gamma$ reference frame, ($\mathbf{q}_p$), to the Galaxy reference frame ($\mathbf{p}_p$) for the case of face-to-face collision ($p_{p_z} = p_p$, $q_{p_z} = q_p$) has a form

$$p_p c = G(|\mathbf{q}_p| c + \frac{V_0}{c} E_p{}^{cm}) = G \left[|\mathbf{q}_p| + (1 - \varepsilon \sqrt{m_p c^2 + q_\gamma^2} \right] c = \qquad (14)$$
$$G \left(M_\Delta c^2 - \varepsilon \sqrt{m_p^2 c^2 + |\mathbf{q}_\gamma|^2}\, c \right) \approx G M_\Delta c^2.$$

It is taken into account here that $\varepsilon\sqrt{m_p^2c^2 + |\mathbf{q}_\gamma|^2}\,c \ll M_\Delta c^2$.

Now one has to find the G-factor. From Eq. (13) one finds

$$\kappa^2 = \frac{(1-(V_0/c))^2}{1-(V_0/c)^2} = \frac{\varepsilon^2}{1-(1-\varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}. \tag{15}$$

From this equation one get

$$\varepsilon = \frac{2\kappa^2}{1+\kappa^2} \ll 1. \tag{16}$$

Therefore, the G-factor can be written as

$$G = \frac{1}{\sqrt{1-(V_0/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2-\varepsilon}} =$$
$$= \frac{\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{2\kappa^2}\sqrt{2-\frac{2\kappa^2}{1+\kappa^2}}} = \frac{1+\kappa^2}{2\kappa} \approx \frac{1}{2\kappa}. \tag{17}$$

The condition $\kappa^2 \ll 1$ is taken into account here.

Finally, for the face-to-face collision the minimal (thershold) momentum can be found from Eqs. (14)-(17) and (8) as

$$p_p\ c = \frac{1}{2\kappa}M_\Delta c^2 = \frac{q_\gamma}{2p_\gamma}M_\Delta c^2 = \frac{(M_\Delta c^2)^2(m_pc^2)^2}{2M_\Delta c^2}\frac{M_\Delta c^2}{2p_\gamma} = \frac{(M_\Delta c^2)^2-(m_pc^2)^2}{4p_\gamma} = \tag{18}$$
$$= \frac{1232^2-938^2}{42.310^{-4}} \times 10^{12}eV = 710^{20}eV. \tag{19}$$

Thus, the maximum energy of the CR proton is $E^{max} = E_0 = \sqrt{m_p^2c^4 + p_pc^2} \approx p_pc = 7 \times 10^{20}eV$. Experimental data show that the protons with energy above $10^{21}eV$ absent within an experimental errors.

The method 2. One can find the velocity of the center mass of $p+\gamma$ $x = V_0/c$ from Eq. (11), when rewriting this equation as

$$\kappa^2(1-x^2) = (1-x)^2. \tag{20}$$

This equation has two roots: a non-physical one $x=1$ and the following

$$x = \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}, \tag{21}$$

which coincides with the result following from Eqs. (13) and (16).

The method 3. One can find the threshold energy without usage of the Lorenz transformation, but taking into account that the total full energy (the rest mass) any of physical system M does not depend on the reference frame.

Considering Eq. (6) in the Galaxy reference frame, one can find at the threshold of the reaction (2) for antiparallel initial momenta ($\mathbf{p}_p \uparrow\downarrow \mathbf{p}_\gamma$)

$$M_\Delta^{2\,4} = m_p^2 c^4 + 2p_\gamma c(\sqrt{m_p^2 + p_p^2} + p_p c). \tag{22}$$

One finds fro this equation the momentum p_p

$$p_p = \frac{(M_\Delta^2 - m_p^2 - 2p_\gamma m_p)(M_\Delta^2 - m_p^2 + 2p_\gamma m_p)}{4p_\gamma(M_\Delta^2 - m_p^2)} c^2. \tag{23}$$

Eq. (23) is reduced to Eq. (18), since for the relict photon one has $2p_\gamma m_p \ll M_\Delta^2 - m_p^2$,

4. For the outgoing system $\pi + p$ in the c.m. system one has

$$M_\Delta c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_\pi^2 c^4 + q_\pi^2 c^2}, \tag{24}$$

where m_π is the π-meson rest mass. When twice squaring this relation, one obtains

$$(q_\pi c)^2 = \frac{[(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2 + m_\pi c^2)^2][(M_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2 - m_\pi c^2)^2]}{4M_\Delta^2\ c^4} \tag{25}$$

$$q_\pi \approx 225^6 eV/c. \tag{26}$$

Now we estimate the proton momentum loss in the reaction (2) in the Galaxy reference frame, considering two different configurations.

A) The π-meson is going along the positive direction of Z-axis whereas the proton is going in opposite direction. In this case the momentum of the outgoing proton in the Galaxy reference frame can be found by the Lorenz transformation:

$$p_{p_z}' = G(-q_\pi + \frac{V_0}{c}\sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2}) = \left|\frac{V_0}{c} = 1 - \varepsilon\right| =$$
$$= G(-q_\pi + \sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2} - \varepsilon\sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2}) \approx \frac{1}{2\kappa}(-q_\pi + \sqrt{m_p^2 c^2 + q_\pi^2}). \tag{27}$$

Here the factor G is taken from Eq. (17). Obviously, the momentum of outgoing proton $p_p{}'$ can be much less then the initial momentum p_p. Assuming the initial momentum is equal to the maximal one for the CR, $p_p = 10^{21}\, eV/c$, one has from Eq. (26) $q_\pi = 225\, 10^6 eV/c$ and $\kappa = 9\, 10^{-13}$ from Eq. (12). One finds numerically from Eq. (27): $p_p' \approx 4\, 10^{17}\, eV/c$.

B) The $\pi-$ meson is going in negative direction of OZ-axis, whereas the outgoing proton momentum has an opposite direction. In this case one has to change the sign of $q_\pi = 225\, 10^6\, eV/c$ to the opposite one. For the maximal momentum of the initial proton $p_p = 7\, \times 10^{20}\, eV/c$ the momentum of outgoing proton is $p_p' \approx 6\, \times 10^{20}\, eV/c$.

5. Let us determine the proton momentum loss in the reaction (1).

The method 1. Under conditions of this problem the outgoing photon and proton in the process $p + \gamma \to p + \gamma$ are flying in positive direction of the OZ axis in the

Galaxy reference frame. A) The energy and momentum conservation in this case gives in the Galaxy reference frame:

$$R_0 = E_p + E_\gamma = E'_p + E'_\gamma, \\ R = p_p - p_\gamma = p'_p + p'_\gamma. \quad (28)$$

When solving this system of equations in respect of p'_p, one finds

$$p_p{}'c = \frac{m_p{}^2c^4 - (R_0 - Rc)^2}{2(R_0 - Rc)}. \quad (29)$$

Using Eq. (28), for can find p'_γ for given p'_p,

B) If outgoing photon is flying backward in the Galaxy reference frame in respect of the momentum of the initial proton, then the energy-momentum conservation gives

$$E_p + E_\gamma = E'_p + E'_\gamma, \\ p_p - p_\gamma = p'_p - p'_\gamma. \quad (30)$$

One can find from these equations $\Delta p_p = p_p - p'_p = -\Delta E_p/c = (E_p - E'_p)/c$. Therefore, the energy (E/c) change is equal in absolute value to the change of momentum, but has the opposite sign. Only one possibility is allowed: $\Delta p_p = -\Delta E_p/c = 0$.

The method 2. A) In the c.m. reference frame the outgoing photon is flying along the positive direction of the OZ axis and the final proton is moving in opposite direction. Applying the Lorenz transformation for this case, one finds for the momentum of the outgoing photon in the Galaxy reference frame

$$p_{\gamma_z} = G(q_{\gamma_z} + \frac{V_{0z}}{c}E_\gamma^{cm}/c) = G(q_\gamma + \frac{V_{0z}}{c}E_\gamma^{cm}/c) = \\ = Gq_\gamma(1 + \frac{V_0}{c}) = \frac{1+\kappa^2}{2\kappa}\left(1 + \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}\right)q_\gamma = \frac{1}{2\kappa}q_\gamma \quad (31)$$

For the maximum momentum of the CR proton $p_p = 10^{21}\,eV/c$ one has $q_\gamma = 257MeV/c$ from Eq. (8), $\kappa = 9\,10^{-13}$ from Eq. (12). Therefore, one can find numerically from Eq. (31): $p'_\gamma \approx 1.5\,10^{20}\,eV/c$. The momentum of the outgoing proton is equal $p'_p = p_p - p_\gamma - p'_\gamma \approx 5.5\,10^{20}\,eV/c$. Thus, the momentum of the outgoing photon is comparable by order of magnitude with the momentum of incoming proton.

B) If the outgoing photon is flying backward in the Galaxy reference frame, therefore, in the c.m. frame it is flying in the negative direction of the OZ axis. In this case one has to change the sign in front of $(q_\gamma)_z$ in Eq. (9) to the opposite one. The obtained equation for p'_γ coincides in absolute value p'_γ with the initial photon momentum p_γ in (9).

6. For the parallel initial momenta in the Galaxy frame $\mathbf{p}_p \uparrow\uparrow \mathbf{p}_\gamma$ the reaction (2) is allowed, if only the photon is going after the proton and, therefore, can collide the proton (whereas the proton going after the photon can not interact with that photon). The photon has to have enough high energy in order to produce the Δ-particle in the γp- interaction. For $\mathbf{p}_p \uparrow\uparrow \mathbf{p}_\gamma$ the energy of the photon is minimal, if the proton is at rest, and can be found from the following condition

$$M_\Delta^2 c^4 = (m_p c^2 + E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_\gamma)^2 c^2 = m_p^2 c^4 + 2 E_\gamma m_p c^2, \tag{32}$$

that gives

$$E_\gamma = \frac{(M_\Delta^2 - m_p^2) c^4}{2 m_p c^2} = 340\, 10^6 eV/c. \tag{33}$$

This value is considerably higher as compared to the energy of the relict photon.

Мини-Задача .Один конец однородного стержня массой m и длиной l подвешен к вертикальной опоре с помощью идеального шарнира, а второй подвешен на нити, так что стержень находится в горизонтальном положении. В некоторый момент времени нить разрезают. Найти силу реакции опоры в зависимости от угла отклонения стержня от горизонтального положения α.

Решение. Потенциальная энергия стержня $U = mgl/2 \sin\alpha$ переходит в кинетическую энергию вращения стержня $E = J\omega^2/2$, где $J = ml^2/3$ – момент инерции относительно вертикального подвеса, ω – угловая скорость вращения. Приравнивая эти энергии, находим мгновенную угловую скорость вращения центра месс относительно оси подвеса, и с помощью поученного выражения находим нормальное (центростремительное) ускорение центра масс

$$a_n = \omega^2(l/2) = \frac{3}{2} g \sin\alpha \tag{34}$$

Тангенциальное ускорение находим из уравнения динамики $M = \beta J$, где $M = mgl/2 \cos\alpha$ – момент силы тяжести относительно оси вращения, β–угловое ускорение движения центра масс, связанное с тангенциальным ускорением $a_t = \beta l/2$:

$$a_t = \frac{3}{4} g \cos\alpha. \tag{35}$$

Усорение центра масс $\mathbf{a}$ определяется уравнением

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}, \tag{36}$$

где $\mathbf{P}$ - сила тяжести, $\mathbf{N}$ – сила реакции опоры. Разлагая это уравнение на вертикальную и горизонтальную компоненты, с учетом

$$a_{n||} = -a_n \cos\alpha,\ a_{n\perp} = a_n \sin\alpha, \tag{37}$$

$$a_{t||} = a_t \sin\alpha,\ a_{t\perp} = a_t \sin\alpha, \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

находим

$$N_{||} = mg\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{2}\sin^2\alpha - 1\right), \tag{40}$$

$$N_{\perp} = \frac{9}{4} mg \cos\alpha\, \sin\alpha. \tag{41}$$