

# Бесконечные цепи и сетки

18.04.2017

## Молекулярно-кинетическая теория

1. Пусть задана случайная величина  $\xi$ , причем вероятность ее нахождения в интервале  $[x, x + dx]$  равняется  $f(x)dx$ . Функцию  $f(x)$  называют функцией распределения величины  $\xi$ . Так, распределение молекул идеального газа по  $x$ -проекциям скоростей имеет вид

$$f_x(v_x)dv_x = A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x,$$

где  $m$  — масса молекулы газа,  $T$  — его температура,  $R$  — газовая постоянная. Распределение молекул по проекциям скоростей на другие координатные оси имеет тот же вид.

а) Найдите  $A$  из условия нормировки, т.е. из того, что вероятность попадания  $v_x$  в интервал  $[-\infty, +\infty]$  равна 1. Ответ выразите через  $m, k, T$ .

б) Пространством скоростей называют такое пространство, на осях которого отложены не координаты, а скорости  $v_x, v_y, v_z$  молекулы. Укажите, в какой области этого пространства находятся молекулы, модуль скорости которых лежит в интервале  $[v, v + dv]$ .

в) Вероятность попадания молекулы в элементарный объем  $[v_x, v_x + dv_x] \times [v_y, v_y + dv_y] \times [v_z, v_z + dv_z]$  имеет вид  $f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$ . Найдите  $f(v_x, v_y, v_z)$ .

г) Используя результаты предыдущих двух пунктов, найдите функцию распределения  $f(v)$  идеального газа по модулям скоростей, т.е. вероятность попадания модуля скорости в интервал  $[v, v + dv]$ , деленную на  $dv$ .

д) Среднеквадратичная скорость молекул газа определяется соотношением  $\langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v) dv$ , средний модуль скорости — соотношением  $\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv$ . Найдите  $\langle v \rangle$  и  $\langle v^2 \rangle$ .

е) Кинетическая энергия одной молекулы газа  $E = mv^2/2$ . Усредняя, получим среднюю кинетическую энергию  $\langle E \rangle = m\langle v^2 \rangle/2$ . Найдите  $\langle E \rangle$ .

2. Количество ударов молекул идеального газа о стенки сосуда на единицу площади стенок в единицу времени равно

$$J = \frac{d^2 N}{dS dt} = \frac{n\langle v \rangle}{4},$$

где  $n$  — его концентрация,  $\langle v \rangle$  — средний модуль скорости молекул. Рассмотрим орбитальную станцию массой  $M = 10000$  т и внутренним объемом  $V = 10^4$  м<sup>3</sup>. Внутри станции поддерживается постоянная температура  $T = 300$  К и давление  $p = 10^5$  Па. Пусть в некоторый момент времени астероид пробил в корпусе станции дырку площадью  $S = 2$  см<sup>2</sup>. Найдите:

а) зависимость концентрации газа в станции от времени  $n(t)$ ,

б) скорость  $v$ , приобретенную станцией из-за утечки за время  $t = 500$  с. Считайте, что молекулы газа вылетают из дырки равномерно по всем направлениям.

## Процессы в атмосфере

9. Пусть температура на поверхности Земли  $T_0$ , давление  $p_0$ . Молярная масса воздуха  $\mu$ , универсальная газовая постоянная  $R$ . Выразите через эти величины давление  $p(z)$  на высоте  $z$ , если температура атмосферы зависит от высоты по закону

а)  $T(z) = T_0$  (изотермическая атмосфера),

б)  $T(z) = T_0 - kz$ .

Поднятие влажного воздуха и выпадение осадков: IPhO 1987-1

Адиабатическая конвекция, потолок конвекции и конвекционная устойчивость: IPhO 2008-3

10. (Эстонско-финская, 2008-7) В безветренную погоду на земле горит костер, дым от которого на высоте  $h = 7$  м имеет температуру  $T = 40^\circ\text{C}$ . Температуру атмосферы считайте постоянной, не зависящей от высоты и равной  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Атмосферное давление на поверхности Земли также постоянно и равно  $p_0 = 100$  кПа. Дым считайте идеальным газом с молярной массой  $\mu = 0.029$  кг/моль и теплоемкостью при постоянном объеме  $c_V = 5R/2$  ( $R = 8.31$  Дж/(моль·К) — газовая постоянная). На какую максимальную высоту поднимется столб дыма?