

Вторник, 23 июля, 2013

Задача 1. Докажите, что для любой пары натуральных чисел k и n существуют k (не обязательно различных) натуральных чисел m_1, m_2, \dots, m_k , удовлетворяющих равенству

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

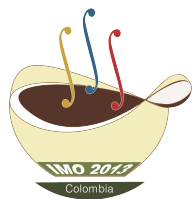
Задача 2. Будем называть *колумбийской конфигурацией точек* набор из 4027 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, при этом 2013 из них покрашены в красный цвет, а остальные 2014 — в синий. Рассмотрим набор прямых, делящих плоскость на несколько областей. Назовем этот набор *хорошим* для данной колумбийской конфигурации точек, если выполнены следующие два условия:

- никакая прямая не проходит ни через одну из точек конфигурации;
- никакая область разбиения не содержит точек обоих цветов.

Найдите наименьшее k такое, что для любой колумбийской конфигурации из 4027 точек найдется хороший набор из k прямых.

Задача 3. Пусть вневписанная окружность треугольника ABC , лежащая напротив вершины A , касается стороны BC в точке A_1 . Точки B_1 на стороне CA и C_1 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C , соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Вневписанной окружностью *треугольника ABC , лежащей напротив вершины A* , называется окружность, которая касается отрезка BC , продолжения стороны AB за точку B и продолжения стороны AC за точку C . Вневписанные окружности, лежащие напротив вершин B и C , определяются аналогично.



Среда, 24 июля, 2013

Задача 4. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Пусть W — произвольная точка на отрезке BC , отличная от точек B и C . Обозначим через M и N основания высот треугольника ABC , проведенных из вершин B и C , соответственно. Пусть ω_1 — окружность, описанная около треугольника BWN , а X — такая точка на ω_1 , что WX — диаметр ω_1 . Аналогично, пусть ω_2 — окружность, описанная около треугольника CWM , и Y — такая точка на ω_2 , что WY — диаметр ω_2 . Докажите, что точки X , Y и H лежат на одной прямой.

Задача 5. Обозначим через $\mathbb{Q}_{>0}$ множество всех положительных рациональных чисел. Пусть $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим трем условиям:

- (i) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено неравенство $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено неравенство $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) существует рациональное число $a > 1$ такое, что $f(a) = a$.

Докажите, что $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. Пусть $n \geq 3$ — целое число. Рассмотрим окружность и $n+1$ точек на ней, разбивающих её на равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами $0, 1, \dots, n$ так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется *красивым*, если для любых четырех меток $a < b < c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d , не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c .

Пусть M — количество красивых способов пометки. Пусть N — количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Докажите, что

$$M = N + 1.$$