

Задача № 1

Условие: Миномет установлен у основания некоторой горы под углом $\alpha = 1,5$ радиана к горизонту. Минометный расчет ведет записи о том, насколько далеко падают мины в зависимости от их начальной скорости. Определите по этим данным высоту и примерную форму горы.

v_0 , м/с	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
l , м	0,710576	1,611942	2,85057	4,45474	6,48101	8,9838	12,0195	15,6393	19,879	24,7493
v_0 , м/с	50	54	58	62	66	70	74	78	82	
l , м	30,2305	36,2765	42,8294	49,8405	57,2941	65,2363	73,8201	83,4179	95,0382	

Решение: Сопротивлением воздуха при решении задачи пренебрегаем. Введем систему координат, как на рис. 1.1. Рассмотрим движение снаряда, выпущенного из начала координат со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Его координаты при таком движении зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t \cos \alpha$ и $y(t) = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2$ соответственно. Выразив t из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Перейдем к полярным координатам (l, φ) . Будем искать полярные углы φ точек падения снарядов. Координаты точек падения снаряда $x = l \cos \varphi$ и $y = l \sin \varphi$. Подставим их в уравнение (1) и разделим обе его части на x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl \cos \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

откуда, с использованием тождества $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha \cos \varphi}$ получим

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{gl \cos^2 \varphi}{2v_0^2 \cos \alpha}. \quad (2)$$

Такое уравнение невозможно решить стандартными способами, оно приводится к уравнению четвертой степени с громоздким решением.

Попробуем тогда найти приближенное решение. Элементарными преобразованиями уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos^2 \varphi} = \frac{gl}{2v_0^2 \cos \alpha}.$$

График зависимости левой части $f(\varphi)$ от переменной φ изображен на рис. 1.2. Так как во всех 19 пар данных $\{l_i, v_{0i}\}$ случаях величина $\varepsilon_i = gl_i/(2v_{0i}^2 \cos \alpha)$ меньше, чем $f(0) = \sin \alpha$, то уравнение имеет единственный корень, близкий к $\pi/2$ (он соответствует пересечению изображенного графика с прямой $g(\varphi) = \varepsilon_i$, а функция, изображенная на графике, очень быстро убывает при φ , близком к α). Так как и угол α близок к $\pi/2$, то будем считать углы α и φ близкими между собой. А именно, применим приближения $\sin(\alpha - \varphi) \approx \alpha - \varphi$ и $\cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi) \approx \pi/2 - \varphi$. Уравнение (2) примет

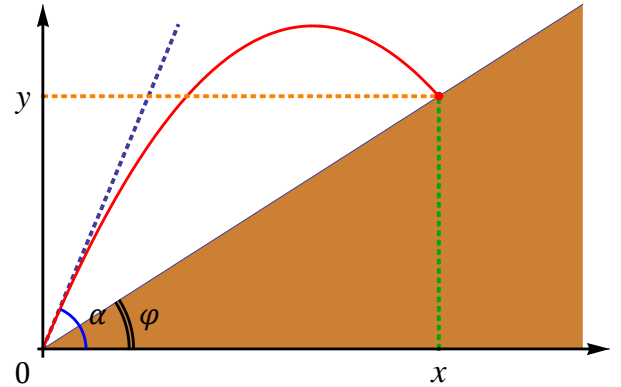


Рис. 1.1. Ось Ox горизонтальна, ось Oy вертикальна. Миномет расположен в начале координат.

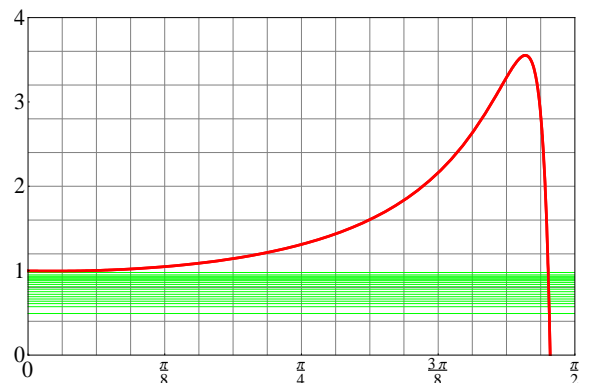


Рис. 1.2. График $f(\varphi) = \sin(\alpha - \varphi)/\cos^2 \varphi$, где $\alpha = 1,5$ рад. Зеленым изображены прямые $g(\varphi) = \varepsilon_i$.

вид

$$\alpha - \varphi = \frac{gl}{2v_0^2 \cos \alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2,$$

которое легко привести к виду

$$q\varphi^2 - \varphi(q\pi - 1) + \left(\frac{q\pi^2}{4} - \alpha \right) = 0, \quad q = \frac{gl}{2v_0^2 \cos \alpha}.$$

Получили квадратное уравнение, корни которого

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2q} \left(q\pi - 1 \pm \sqrt{(q\pi - 1)^2 - q\pi^2 + 4\alpha} \right).$$

Во всех случаях искомый корень — с плюсом перед радикалом (второй корень не подходит, так как он не соответствует примененным приближениям). В таблице представлены решения этого уравнения для всех случаев, представленных в условии, в порядке их перечисления. Как далее выяснится, ошибка по сравнению с точным решением $\Delta\varphi = 0,001^\circ$.

$\varphi, ^\circ$	85,7915	85,7645	85,7517	85,7419	85,7326	85,7229	85,7126	85,7018	85,6907
85,6797	85,6695	85,6604	85,6528	85,6466	85,6416	85,6373	85,6328	85,6266	85,6151

По полученным данным полярные углы φ всех точек близки, то есть форма горы близка к линейной. Однако в пределах погрешности можно утверждать, что гора выпукла вверх. Форму этой кривой можно аппроксимировать прямой с углом наклона, равным среднему полученным величин¹: $\bar{\varphi} = 85,69^\circ$. Высота горы $H = l_{19} \sin \varphi_{19} = 94,7601$ м.

Проверим полученные результаты при помощи точного решения. Уравнение (2) решили с помощью программы *Mathematica*². Полученные данные иллюстрирует следующая таблица:

$\varphi, ^\circ$	85,7918	85,7648	85,7521	85,7423	85,7330	85,7234	85,7131	85,7023	85,6912
85,6803	85,6701	85,6610	85,6534	85,6472	85,6423	85,6380	85,6335	85,6273	85,6159

Как видим, отличие от приближенного решения в четвертом знаке после запятой.

Ответ: Высота $H = 94,7601$ м, форма — кривая с выпуклостью вверх, которую можно аппроксимировать наклонной плоскостью, образующей угол $\varphi = 85,69^\circ$ с горизонтом.

¹На самом деле правильно усреднять не углы, а их тангенсы.

²Имеется в виду программа компании Wolfram Research, Inc., см. www.wolfram.com/mathematica