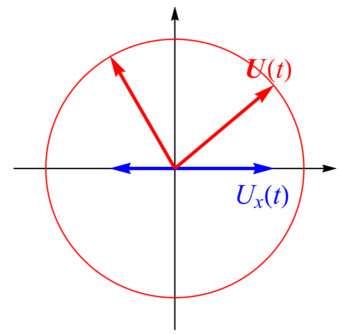
Комплексные импедансы - 1

16.04.2017

Внимание! В данной подборке мнимая единица обозначается буквой j во избежание путаницы с токами i.

1. Найдите координаты постоянного по модулю и непрерывного по времени вектора $\vec{U}(t)$ на плоскости xOy, проекция которого на ось Ox зависит от времени по закону $U_x(t) = U_0 \cos \omega t$ (у данной задачи 2 ответа, выберите вращающийся против часовой стрелки). Параметризуйте плоскость xOy множеством комплексных чисел. Чему равняется соответствующее вектору $\vec{U}(t)$ комплексное число $\tilde{U}(t)$?



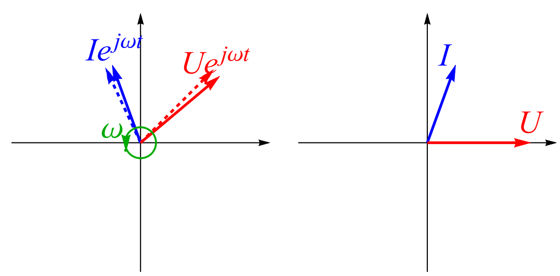
К задаче 1

2. Пусть ток и напряжение в некоторой схеме изменяются по гармоническому закону с частотой ω. Выберем начало отсчета времени так, чтобы напряжение изменялось по закону $u(t) = u_0 \cos \omega t$. При этом ток будет задаваться формулой $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где φ — разность фаз между током и напряжением.

а) Найдите постоянные по модулю комплексные величины $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{\imath}(t)$ (см. задачу 1), соответствующие величинам $u(t)$ и $i(t)$ (т.е. такие, что $u(t) = \mathrm{Re}\, \tilde{u}(t)$ и $i(t) = \mathrm{Re}\, \tilde{\imath}(t)$).

б) Определите среднюю мощность, потребляемую схемой.

в) Покажите, что предыдущий ответ не изменится, если $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{\imath}(t)$ одновременно домножить на $e^{j\theta(t)}$ (поворот на угол $\theta(t)$), где $\theta(t)$ — произвольная функция времени.



Если функции $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{\imath}(t)$ брать непосредственно из ответа задачи 2а, то соответствующие им векторы будут вращаться вместе как единое целое с угловой скоростью ω (рис). Между тем мы выяснили, что домножение на $e^{j\theta(t)}$ не изменяет физику задачи. Поэтому в реальных расчетах схем обычно умножают на $e^{-j\omega t}$, убирая вращение, т.е. фазы всех токов и напряжений отсчитывают от фазы входного напряжения. При этом величины $\tilde{u}$ и $\tilde{\imath}$ на элементах цепи также перестают зависеть от времени (т.к. разность фаз между ними и входным напряжением постоянна и задается лишь параметрами схемы), и их называют соответственно комплексными напряжениями и токами на них. Также, обычно при подсчете комплексных токов и напряжений амплитуду делят на нормировочный множитель $\sqrt{2}$, чтобы в 2б мощность получалась без численного коэффициента. Таким образом, комплексное напряжение $\tilde{u}(t) = u_0 e^{j\varphi}$ соответствует истинному напряжению $u(t) = u_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, а u_0 называют действующим (эффективным) значением напряжения. Отметим, что по-прежнему домножение комплексных напряжений и токов на $e^{j\delta}$ ничего не изменяет (физически это соответствует изменению фазы на δ, или, что то же самое, сдвижкой по времени на δ/ω). Далее под напряжением источника переменного тока будем всегда понимать именно действующее значение.

3. Пусть напряжение на резисторе с сопротивлением R изменяется по закону $u(t)$, а ток — по закону $i(t)$.

а) Найдите связь между этими величинами (закон Ома).

б) Пусть ток в резисторе изменяется по закону $i(t) = i_0\sqrt{2}\cos \omega t$. Найдите зависимость напряжения на резисторе $u(t)$ от времени.

в) Найдите соответствующие значения комплексного напряжения и тока $\tilde{u}$ и $\tilde{\imath}$ в резисторе. Покажите, что связь между ними можно записать в виде $\tilde{u} = \tilde{\imath}R$.

4. Пусть напряжение на катушке с индуктивностью L изменяется по закону $u(t)$, а ток — по закону $i(t)$.

а) Найдите связь между этими величинами.

б) Пусть ток в катушке изменяется по закону $i(t) = i_0\sqrt{2}\cos\omega t$. Найдите зависимость напряжения на катушке $u(t)$ от времени.

в) Найдите соответствующие значения комплексного напряжения и тока $\tilde{u}$ и $\tilde{\imath}$ в катушке. Покажите, что связь между ними можно записать в виде $\tilde{u} = \tilde{\imath}X_L$. Найдите X_L.

5. Пусть напряжение на конденсаторе с емкостью C изменяется по закону $u(t)$, а ток — по закону $i(t)$.

а) Найдите связь между этими величинами.

б) Пусть напряжение на конденсаторе изменяется по закону $u(t) = u_0\sqrt{2}\cos\omega t$. Найдите зависимость тока через конденсатор $i(t)$ от времени.

в) Найдите соответствующие значения комплексного напряжения и тока $\tilde{u}$ и $\tilde{\imath}$ в конденсаторе. Покажите, что связь между ними можно записать в виде $\tilde{u} = \tilde{\imath}X_C$. Найдите X_C.

Таким образом, мы получили, что у конденсаторов и катушек комплексные напряжения и токи связаны таким же соотношением, как и у резистора. Роль сопротивления играют величины X_L и X_C — их называют комплексными импедансами. Таким образом, для конденсаторов и катушек можно записывать обычный закон Ома, если в качестве напряжений и токов брать комплексные величины. Так, при последовательном включении катушки и конденсатора суммарный импеданс $Z = X_L + X_C$, а при параллельном включении конденсатора и резистора $1/Z = 1/R + 1/X_C$. Такой метод расчета называется методом комплексных импедансов, и он резко упрощает вычисления, связанные с цепями переменного тока.

6. Подключим последовательно резистор R, конденсатор C и катушку L к источнику переменного тока с действующим напряжением U_0. Найдите при помощи метода комплексных импедансов действующие напряжения и силы тока элементов цепи, а также их среднюю мощность.