Урок 9. Числовые последовательности и способы их задания. Нахождение общего члена рекуррентных последовательностей

1°. Числовые последовательности и способы их задания

1) Дадим определение числовой последовательности:

> *Если задано отображение множества натуральных чисел на некоторое подмножество множества действительных чисел* ($\mathbb{N} \to \mathbb{R}$), *то говорят, что задана* ***числовая последовательность***.

Обозначают последовательности чаще всего так: $\{a_n\}$.

2) Последовательность можно задать при помощи *формулы общего члена*, т. е. формулы, позволяющей найти n-й член последовательности непосредственно по его номеру. Напр., $a_n = n^2$, $x_n = 2^n - n + 1$ и т. п.

3) Часто последовательности задают при помощи метода математической индукции. Действительно, если мы определим первый член последовательности, и, допуская, что k-й член уже определен, выразим через него $(k+1)$-й член последовательности, то в соответствии с методом математической индукции вся последовательность будет определена.

Примеры.

(1) Пусть a и d – некоторые действительные числа. Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n + d, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.1}$$

Эту последовательность называют **арифметической прогрессией**.

(2) Пусть b и $q \neq 0$ – некоторые действительные числа. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом:

$$\begin{cases} b_1 = b, \\ b_{n+1} = b_n \cdot q, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.2}$$

Эту последовательность называют **геометрической прогрессией**.

4) Описанный только что способ задания последовательностей легко обобщается. А именно, можно задать не один, а несколько (напр., k) членов последовательности, а все члены, начиная с $(k+1)$-го, выражать через k предыдущих.

Пример. Определим последовательность $\{f_n\}$ следующим образом:

$$\begin{cases} f_1 = 1, \\ f_2 = 1, \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.3}$$

Эту последовательность называют **последовательностью Фибоначчи** в честь Леонардо Пизанского, итальянского ученого XIII столетия.

Определение.

> *Последовательности, задаваемые при помощи метода математической индукции, называют* ***рекуррентными*** *или* ***возвратными****.*

5) При изучении последовательностей часто приходится находить сумму первых n ее членов. Эту сумму обычно обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Очевидно, для любой последовательности справедлива формула

$$a_n = S_n - S_{n-1}. \tag{9.4}$$

Упражнение. Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ вычисляется по формуле $S_n = 6n - n^2$. Найдите шестой член этой последовательности.

2°. Нахождение общего члена рекуррентных последовательностей

1) Одной из основных задач, возникающих при изучении рекуррентных последовательностей, является нахождение формулы общего члена. Для широкого класса рекуррентных последовательностей (т. н. линейных рекуррентных последовательностей) существует общий метод, позволяющий решить поставленную задачу. Мы познакомимся с этим методом на кружке. Сейчас же рассмотрим несколько примеров.

2) Если формула общего члена присутствует в условии задачи, то проще всего воспользоваться методом математической индукции.

Упражнения.

(1) Докажите, что если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ при $n \geqslant 1$, то $a_n = 3n - 2$.

(2) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 3x_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n = \dfrac{1}{2}\left(5 \cdot 3^{n-1} - 1\right)$.

(3) Последовательность $\{u_n\}$ задана рекуррентно: $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что

$$u_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

3) Если формула общего члена в условии не фигурирует, то можно попробовать с помощью метода неполной индукции сперва выдвинуть гипотезу.

Упражнение. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Найдите формулу общего члена.

Домашнее задание

1) При любом n сумма первых n членов некоторой последовательности равна $S_n = 4n^2 - 3n$. Найдите три первых члена этой последовательности.

2) Последовательность $\{c_n\}$ задана рекуррентно: $c_1 = 6$, $c_{n+1} = 2c_n - 3n + 2$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что $c_n = 2^n + 3n + 1$.

3) Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентно: $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$ при $n \geqslant 1$. Найдите формулу общего члена.

4) Последовательность $\{d_n\}$ задана рекуррентно: $d_1 = 7$, $d_2 = 27$, $d_{n+2} = 6d_{n+1} - 5d_n$ при $n \geqslant 1$. Найдите формулу общего члена.

5) Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 8n$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что любой член последовательности является квадратом целого числа.

6) Последовательность $\{u_n\}$ задана рекуррентно: $u_1 = 3$, $u_2 = 15$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что

   а) все члены последовательности кратны 3;

   б) все члены последовательности с четными номерами кратны 15.