Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме:

“Исследование функций с помощью производных”

Харьков, 2014 г.

Поурочное планирование (25 часов)

Урок 1. Критерий постоянства функции на промежутке. Доказательство тождеств.

Урок 2. Условия монотонности функции на промежутке.

Урок 3. Нахождение локальных экстремумов функции (первое правило).

Урок 4. Достаточные условия существования локального экстремума функции по знаку второй или высших производной.

Урок 5. *Самостоятельная работа* по теме: "Монотонность. Экстремумы".

Урок 6. Нахождение наибольших и наименьших значений функции на промежутке.

Урок 7. Упражнения, связанные с нахождением наибольших и наименьших значений функции на промежутке. Замена переменной. Задачи, содержащие квадратные трехчлены. Использование неравенств между средними.

Урок 8. Решение уравнений с использованием информации о монотонности и экстремумах функций. Локализация корней.

Урок 9. Доказательство неравенств с использованием информации о монотонности и экстремумах функций.

Урок 10. Решение задач геометрического содержания, сводящихся к нахождению наибольших и наименьших значений функции на промежутке.

Урок 11. *Самостоятельная работа* по теме: "Наибольшие и наименьшие значения функции на промежутке. Неравенства".

Урок 12. Задачи с параметрами на монотонность.

Урок 13. Задачи с параметрами на экстремумы.

Урок 14. Решение уравнений и неравенств с параметрами.

Урок 15. Понятие выпуклой функции. Геометрический смысл определения. Условия выпуклости функции.

Урок 16. Точки перегиба.

Урок 17. *Самостоятельная работа* по теме: "Выпуклость. Точки перегиба. Решение задач с параметрами".

Урок 18. Схема исследования функции.

Урок 19. Построение графиков функций при помощи производных.

Урок 20. Упражнения на построение графиков функций при помощи производных.

Урок 21. Упражнения на построение графиков функций при помощи производных.

Урок 22. *Самостоятельная работа* по теме: "Построение графиков функций при помощи производных".

Урок 23. Обобщающий урок по теме.

Урок 24. Контрольная работа.

Урок 25. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Критерий постоянства функции на промежутке

Домашнее задание

1) Докажите тождества:

(1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; (2) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $\arccos x = 2\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$; (4) $\operatorname{arctg}|x| = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2) Найдите значения следующих выражений при всех допустимых значениях x:

(1) $\arcsin|x| + \arcsin\sqrt{1-x^2}$; (2) $\arccos x - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Урок 2. Условия монотонности функции на промежутке

Домашнее задание

1) Определите промежутки монотонности следующих функций:

(1) $y = 3x - x^3$; (2) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$; (4) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$;

(5) $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \geqslant 0)$.

2) Докажите, что при увеличении числа сторон периметры P_n правильных n-угольников, вписанных в окружность, возрастают, а периметры Π_n правильных n-угольников, описанных около этой окружности, убывают. Пользуясь этим, докажите, что последовательности P_n и Π_n имеют общий предел при $n \to \infty$.

3) Докажите, что многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$ является монотонной (в строгом смысле) функцией в интервалах $(-\infty, -M)$ и $(M, +\infty)$, где M – достаточно большое положительное число.

Урок 3. Нахождение локальных экстремумов функции (первое правило)

Домашнее задание

Определите промежутки монотонности и найдите экстремумы следующих функций:

1) $f(x) = x^2(x-12)^2$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x-1}$;

3) $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$;

4) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

6) $f(x) = \lg^3 x - 3\lg x + 5$;

7) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

Урок 4. Достаточные условия существования локального экстремума функции

Домашнее задание

1) Определите точки экстремума следующих функций:
   (1) $f(x) = x \ln x$;
   (2) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$;
   (3) $f(x) = \sqrt{(2x+3)(x-3)^2}$;
   (4) $f(x) = \dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$.

2) Определите промежутки монотонности и найдите экстремумы следующих функций:
   (1) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$;
   (2) $f(x) = \sqrt{8x^2-x^4}$;
   (3) $f(x) = e^x \sin x$.

Урок 6. Нахождение наибольших и наименьших значений функции на промежутке

Домашнее задание

1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданном промежутке:
   (1) $f(x) = 4x^3 - 27x^2 + 24x - 6,\ \ x \in [0;2]$;
   (2) $f(x) = \sqrt{100-x^2},\ \ x \in [-6;8]$;
   (3) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x},\ \ x \in [-2;1]$;
   (4) $f(x) = 3^{x^2+2x-1},\ \ x \in [-2;0]$;
   (5) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x - \sqrt{3},\ \ x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$;
   (6) $f(x) = \dfrac{1}{3}e^{-2x}\cos 2x,\ \ x \in \left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$;
   (7) $f(x) = \left|x^2+x-2\right| - \ln\dfrac{1}{x},\ \ x \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

2) Найдите множество значений функции $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ при $x \in [-1,5;8]$.

Урок 7. Упражнения, связанные с нахождением наибольших и наименьших значений функции на промежутке

Домашнее задание

1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданном промежутке:

   (1) $f(x) = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{x}$, $x \in [-1; 1]$;

   (2) $f(x) = \left|x^2 - 6x + 5\right|$, $x \in [2; 6]$.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2^{\sqrt{1-x^2}}$.

3) Найдите множество значений функции $f(x) = 2\log_2^3 x - 15\log_2^2 x + 36\log_2 x$ при $x \in [4; 16]$.

4) Найдите число, которое превышало бы свой утроенный квадрат на наибольшее значение.

5) При каком значении x произведение $P(x) = (1-x)^5 (1+x) (1+2x)^2$ достигает наибольшего значения на $[0; +\infty)$ и каково это значение?

Урок 8. Решение уравнений с использованием информации о монотонности и экстремумах функций. Локализация корней

Домашнее задание

1) Решите уравнения:

   (1) $e^x - 1 = x$;

   (2) $5x^5 + 3\sqrt[3]{3x+11} + \arcsin(1+x) = 1$;

   (3) $(3x+1)\left(3 + \sqrt{(3x+1)^2 + 2}\right) + 2x\left(3 + \sqrt{4x^2+2}\right) = 0$.

2) Определите число вещественных корней уравнения и локализуйте эти корни:

   (1) $4e^{-x}\left(x^2 + x - 5\right) = 1$;

   (2) $2x^3 + 3x^2 - 36x + 47 = 0$.

3) При каких значениях a уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ имеет три различных вещественных корня?

4) Для каждого a укажите количество корней уравнения $\dfrac{a}{2x+1} = e^{-x^2}$.

Урок 9. Доказательство неравенств с использованием информации о монотонности и экстремумах функций

Домашнее задание

1) Докажите неравенства:

(1) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}, \ \ x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right);$

(2) $2x \ln x \leqslant x^2 - 1, \ \ x \geqslant 1;$

(3) $e^x > 1 + \ln(1 + x), \ \ x > -1;$

(4) $\sin x \, \sin 2x < 0,77.$

2) а) Докажите что при $x \geqslant 0$ справедливо неравенство $\operatorname{arctg} x \leqslant x$.

б) Пусть α, β, γ – углы остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta + \operatorname{arctg} \gamma < \pi.$$

Урок 10. Решение задач геометрического содержания

Домашнее задание

1) На графике функции $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x > 1$ найдите точку B, ближайшую к точке $A(1; 0)$.

2) Найдите косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине медианы, проведенной к его боковой стороне.

3) В круг радиуса R вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь?

4) Из куска жести, представляющего собой прямоугольник 11×10 с отрезанным уголком в виде прямоугольного треугольника с катетами 8 и 4 (больший катет лежит на большей стороне), вырезали прямоугольник наибольшей площади, стороны которого параллельны сторонам исходного прямоугольника. Вычислите площадь вырезанного прямоугольника.

5) Завод А расположен на расстоянии a км от прямолинейного участка железной дороги, идущей в город В, и на расстоянии b км от города В. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе от завода А, чтобы доставка грузов из А в В была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в k раз дороже, чем по железной дороге?

Урок 12. Задачи с параметрами на монотонность

Домашнее задание

1) Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x) = -x^3+3x+5$ убывает на интервале $(p; p+0,5)$.

2) При каких значениях параметра m функция $f(x) = 2e^x - me^{-x} + (1+2m)\,x - 3$ монотонно возрастает на всей числовой оси?

3) При каких значениях параметра a функция $f(x) = \dfrac{a+1}{2}\,x^2 + x + (3-a)\ln x$ является монотонной на множестве положительных чисел?

4) При каких значениях параметра a функция $f(x) = 2ax^3+3\,(a+1)\,x^2+6x-2$ убывает на отрезке $\left[-1; -\dfrac{1}{3}\right]$?

5) При каких b и каких отрицательных a функция $f(x) = ax^5 + bx^4 - b^2x^3 - 1$ убывает при положительных x?

6) При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$$

возрастает на всей числовой оси?

Урок 13. Задачи с параметрами на экстремумы

Домашнее задание

1) Для каждого значения параметра a найдите критические точки функции

$$f(x) = 0,5e^{2x} + (1-a)\,e^x - ax + \ln 5.$$

2) При каких значениях параметра a функция $f(x) = x^3+3x^2+ax-1$ не имеет критических точек?

3) При каких значениях параметров a и b функция $f(x) = ae^{2x} + be^{-x}$ не имеет экстремумов?

4) При каких значениях параметра m точки экстремумов функции

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x - 4$$

лежат в промежутке $(-2; 4)$?

5) При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \frac{a}{3}\,x^3 + (a+2)\,x^2 + (a-1)\,x + 2$$

имеет отрицательную точку минимума?

6) При каких значениях параметров a и b все значения экстремумов функции

$$f(x) = \frac{5a^2}{3}\,x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

положительны и максимум находится в точке $x_0 = -\dfrac{5}{9}$?

Урок 14. Решение уравнений и неравенств с параметрами

Домашнее задание

1) При каких значениях параметра a сумма обратных величин корней уравнения $x^2 - (a+1)\,x + a^2 = 0$ будет наименьшей?

2) При каких значениях параметра a неравенство $2\,(x-a)^4 \leqslant 1 - x$ имеет хотя бы одно решение?

3) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение

$$\frac{4}{\sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} = a$$

имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

4) При каких значениях параметра a уравнение $x^2 e^x = a$ имеет три корня?

Урок 15. Выпуклые функции

Домашнее задание

1) а) Докажите, что произведение выпуклой вниз функции на положительную постоянную есть выпуклая вниз функция.

   б) Докажите, что сумма конечного числа выпуклых вниз функций есть выпуклая вниз функция.

   в) Можно ли сказать что-либо конкретное о произведении двух выпуклых вниз функций?

2) а) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вниз возрастающая функция, а $g(x)$ – выпуклая вниз функция, то сложная функция $f\left(g(x)\right)$ – выпуклая вниз функция.

б) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вниз убывающая функция, а $g(x)$ – выпуклая вверх функция, то сложная функция $f\left(g(x)\right)$ – выпуклая вниз функция.

в) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вверх возрастающая функция, а $g(x)$ – выпуклая вверх функция, то сложная функция $f\left(g(x)\right)$ – выпуклая вверх функция.

г) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вверх убывающая функция, а $g(x)$ – выпуклая вниз функция, то сложная функция $f\left(g(x)\right)$ – выпуклая вверх функция.

3) а) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вниз строго возрастающая функция, то обратная функция $f^{-1}\left(x\right)$ – выпуклая вверх функция.

б) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вниз строго убывающая функция, то обратная функция $f^{-1}\left(x\right)$ – выпуклая вниз функция.

в) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вверх строго убывающая функция, то обратная функция $f^{-1}\left(x\right)$ – выпуклая вверх функция.

г) Докажите, что если $f(x)$ – выпуклая вверх строго возрастающая функция, то обратная функция $f^{-1}\left(x\right)$ – выпуклая вниз функция.

4) Докажите, что выпуклая вниз на промежутке $[a;b]$ функция $f(x)$, отличная от постоянной, не может достигать своего наибольшего значения внутри этого промежутка.

5) Пусть $f(x)$ выпукла вниз на промежутке $[a;b]$, $[x_1;x_2]\subset[a;b]$. Докажите, что тогда соотношение $f\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\right)\leqslant\alpha_1f\left(x_1\right)+\alpha_2f\left(x_2\right)$ выполняется либо всегда со знаком равенства, либо всегда со знаком неравенства.

6) Введем следующее определение:

> ***Средним степенным порядка $\boldsymbol{\alpha}$ двух положительных чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$*** *называется функция $S_\alpha\left(a,b\right)$, определяемая следующим образом:*
>
> $$S_\alpha\left(a,b\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}, & \textit{если } \alpha\neq0;\\ \lim\limits_{\alpha\to0}S_\alpha\left(a,b\right), & \textit{если } \alpha=0.\end{cases}$$

Докажите, что

а) $S_0\left(a,b\right)=\sqrt{ab}$;

б) $\min(a,b) \leqslant S_\alpha(a,b) \leqslant \max(a,b)$;

в) функция $S_\alpha(a,b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной α;

г) $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} S_\alpha(a,b) = \min(a,b)$; $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S_\alpha(a,b) = \max(a,b)$.

Урок 16. Точки перегиба

Домашнее задание

1) Исследуйте функции на выпуклость и найдите точки перегиба:

(1) $f(x) = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $a > 0$;

(2) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

(3) $f(x) = e^{-x^2}$;

(4) $f(x) = x\ln 3 - \sqrt[5]{x-3}$;

(5) $f(x) = x\,\sin(\ln x)$;

(6) $f(x) = x^x$.

2) Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

Урок 18. Схема исследования функции

Для исследования функции $y = f(x)$ и построения ее графика надо действовать по следующей схеме:

1) Найти область определения функции $f(x)$.

2) Найти область значений функции $f(x)$.

3) Исследовать функцию $f(x)$ на четность.

4) Исследовать функцию $f(x)$ на периодичность.

5) Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность, найти точки разрыва.

6) Исследовать поведение функции $f(x)$ вблизи точек разрыва, выяснить, имеются ли вертикальные асимптоты.

7) Исследовать поведение функции $f(x)$ на бесконечности, выяснить, имеются ли наклонные и горизонтальные асимптоты.

8) Найти точки пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат и промежутки постоянства знака.

9) Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность, найти точки экстремумов.

10) Исследовать функцию $f(x)$ на выпуклость, найти точки перегиба.

Урок 19. Построение графиков функций с помощью производных

Постройте графики функций:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$;

3) $f(x) = \dfrac{6}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Домашнее задание

Постройте графики функций:

1) $f(x) = \dfrac{1}{5}\,x^5 - \dfrac{1}{3}\,x^3$;

2) $f(x) = \dfrac{6\,(x-1)}{x^2+3}$;

3) $f(x) = x^2\sqrt{2-x}$.

Урок 20. Упражнения на построение графиков функций при помощи производных

Постройте графики функций:

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$;

2) $f(x) = xe^{-x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$.

Домашнее задание

Постройте графики функций:

1) $f(x) = 2\,(x+1) - 3\,\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

2) $f(x) = 4x \cdot e^{x/2}$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x\,(x-3)^2}$.

Урок 21. Упражнения на построение графиков функций при помощи производных-2

Постройте графики функций:

1) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

2) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$;

3) $f(x) = \log_{1/2} \sin x$.

Домашнее задание

Постройте графики функций:

1) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$;

2) $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$;

3) $f(x) = \dfrac{6\sin x}{2 + \cos x}$.