

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

14 января 2014 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
 - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*;
 - Черновые листы;
 - Неиспользованные листы;
 - Отпечатанные условия задачи

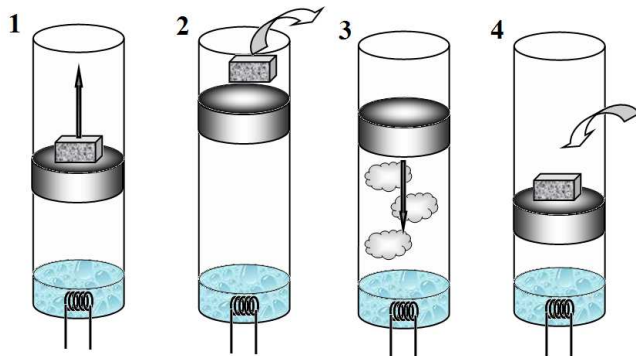
Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

Задача 1 (10 баллов)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1А (3.0 балла)

Паровая машина состоит из вертикального цилиндрического сосуда, в котором может двигаться без трения поршень. В сосуде находится вода, внутри которой расположен электрический нагреватель. Цикл паровой машины состоит из 4 этапов, показанных на рисунке:



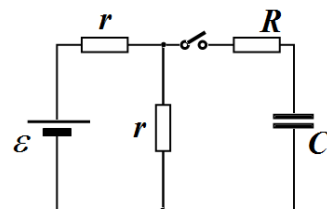
1. На поршне находится груз, включают нагреватель, вода кипит, пар поднимает поршень с грузом.
2. После того, как поршень поднялся на некоторую высоту, груз быстро снимают и выключают нагреватель.
3. Пар под поршнем остывает и конденсируется, поршень медленно опускается.
4. После того как поршень опустился на определенную высоту, на него снова кладут груз.

Постройте на диаграмме (P, V) схематически цикл данной машины и найдите ее КПД.

Атмосферное давление $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$, масса поршня $M = 2,0 \text{ кг}$, его площадь $S = 10 \text{ см}^2$, масса груза $m = 1,0 \text{ кг}$. Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Считайте, что под поршнем находится только водяной пар. Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры в рассматриваемом диапазоне описывается функцией $P = at - b$, где, $a = 4,85 \text{ кПа/К}$, $b = 384 \text{ кПа}$, t - температура в градусах Цельсия.

Задача 1В (5.0 балла)

В схеме, изображённой на рисунке, все элементы идеальные, указанные параметры считать известными. До замыкания ключа конденсатор был незаряжен. Какое количество теплоты выделится в резисторе R после замыкания ключа?

**Задача 1С (2.0 балла)**

Тонкая линза дает изображение предмета, расположенного перпендикулярно ее оптической оси. Размер изображения 1 см. Если расстояние от предмета до линзы увеличить на 5 см, то опять получится изображение размером 1 см. Каким будет размер изображения, если расстояние от предмета до линзы увеличить ещё на 5 см?

Задача 2 Реактивное движение (10 баллов)

В ракетных двигателях сила тяги создается в результате выброса продуктов горения топлива в направлении, противоположном движению. При этом, естественно, масса ракеты уменьшается. Эта идея была впервые высказана великим русским ученым К.Э. Циолковским для осуществления движения объектов в пустоте, например, в космическом пространстве. Сейчас полеты в космос стали уже привычными, на территории Казахстана расположен космодром Байконур, с которого был запущен первый спутник Земли и стартовал первый космонавт – Ю.А. Гагарин. Космодром Байконур представляет собой комплекс высокотехнологических



сооружений, предназначенных для запуска пилотируемых аппаратов в космос, в частности, на Международную космическую станцию.

Классическая ракета

Пусть ракета имеет начальную массу m_0 , а скорость истечения топлива относительно ракеты постоянна и равна u . Считайте пока, что в начальный момент времени ракета покоится в лабораторной системе отсчета и внешние силы отсутствуют.

1. [0.5 балла] Найдите зависимость скорости ракеты v от ее массы m . Эта формула называется формулой Циолковского. Ответ выразите через m, m_0, u .

2. [0.5 балла] Пусть объект массы $m = 1000 \text{ кг}$ требуется разогнать до первой космической скорости. Найдите начальную массу ракеты m_0 с топливом, если $u = 5,00 \text{ км/с}$, ускорение свободного падения $g = 9.80 \text{ м/с}^2$, радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$.

Пусть ракета движется в поле тяжести Земли, ускорение свободного падения g которого будем считать постоянным, а расход топлива $\mu(t) = -dm(t)/dt$ может зависеть от времени.

3. [0.75 балла] Запишите уравнение движения ракеты в гравитационном поле Земли. Это уравнение называется уравнением Мещерского. Ответ выразите через m, v, u, g, μ .

Далее считайте, что скорость истечения топлива u направлена вдоль ускорения свободного падения g , а начальная скорость ракеты равна нулю.

4. [0.75 балла] Найдите, как расход топлива $\mu_{st}(t)$ должен зависеть от времени t , чтобы ракета висела на одной высоте неподвижно. Ответ выразите через m_0, u, g, t .

Пусть теперь расход топлива постоянен во времени и равен μ , причем всегда $\mu > \mu_{st}(t)$.

5. [2.0 балла] Тогда зависимость скорости ракеты $v(t)$ от времени t может быть представлена в виде

$$v(t) = A_1 t + A_2 \ln(1 + A_3 t),$$

где A_1, A_2, A_3 – некоторые постоянные.

Найдите A_1, A_2, A_3 и выразите их через m_0, u, g, μ .

6. [1.0 балла] Пусть начальная масса ракеты равна m_0 , а конечная масса – m . Найдите максимальную высоту H_{\max} , которую может достигнуть ракета и соответствующий расход топлива μ_{opt} . Ответ выразите через m_0, m, u, g .

Релятивистская ракета

В предыдущей части считалось, что ракета движется с нерелятивистской скоростью. Для осуществления межзвездных путешествий необходимо разгонять ракеты до скоростей, близких к скорости света и тогда в расчетах нельзя пренебрегать эффектами теории относительности.

Для установления характера движения ракеты в релятивистском случае введем понятие сопутствующей системы отсчета. Сопутствующая система отсчета – это инерциальная система отсчета, которая движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью самой ракеты, то есть это система отсчета, в которой ракета в данный момент времени покоится.

7. [2.5 балла] Найдите связь ускорения ракеты в сопутствующей системе отсчета a_p с ее ускорением в лабораторной системе отсчета a_r , если скорость ракеты в данный момент времени равна v , а скорость света – c . Ответ выразите через a_p, a_r, v, c .

8. [1.5 балла] Пусть ракета в начальный момент времени покоится. Тогда используя результаты предыдущего пункта можно показать, что масса ракеты в некоторый момент времени в

сопутствующей системе отсчета связана с ее скоростью в лабораторной системе соотношением

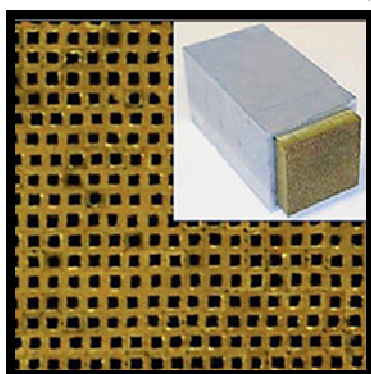
$$m = m_0 \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^\alpha.$$

Найдите α и выразите его через u, c .

9. [0.25 балла] Пусть объект массы $m = 1000 \text{ кг}$ требуется разогнать до скорости $v = 0.5c$, равной половине скорости света $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Найдите начальную массу ракеты m_0 с топливом в виде степени с основанием 10, если скорость истечения топлива $u = 5,00 \text{ км/с}$,

10. [0.25 балла] С точки зрения практики наилучшей является так называемая фотонная ракета, которая выбрасывает назад не раскаленные газы, получаемые при сгорании топлива, а фотоны. Пусть объект массы $m = 1000 \text{ кг}$ требуется разогнать до скорости $v = 0.5c$. Найдите начальную массу фотонной ракеты m_0 .

Задача 3. Метаматериалы (10 баллов)



Метаматериал – композиционный материал, свойства которого обусловлены не столько свойствами составляющих его элементов, сколько искусственно созданной периодической структурой. Метаматериалы синтезируются в современных нанолaborаториях внедрением в исходный природный материал различных периодических структур с самыми различными геометрическими формами, которые модифицируют физические свойства исходного материала. В очень грубом приближении такие внедрения можно рассматривать как искусственно внесенные в исходный материал атомы чрезвычайно больших размеров. Разработчик метаматериалов при их синтезировании имеет

возможность варьирования различных свободных параметров (размеры структур, форма, постоянный и переменный период между ними и т. д.).

В одной из нанолaborаторий был получен метаматериал, из которого изготовили проводник длиной $L = 5.00 \text{ см}$ и радиусом $R = 1.00 \text{ мм}$, проводимость которого зависит от расстояния до оси по закону $\sigma_0 = \beta r$. Свойства проводника были экспериментально определены и представлены в следующей таблице:

| ФИЗИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО | ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ |
|-----------------------------------|--|
| Проводимость $\sigma_0 = \beta r$ | $\beta = 1.00 \times 10^9 \text{ См} / \text{м}^2$ |
| Коэффициент теплоотдачи | $\alpha = 20 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К})$ |
| Коэффициент теплопроводности | $\kappa = 0,01 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$ |
| Модуль Юнга | $E = 1.00 \times 10^7 \text{ Па}$ |
| Коэффициент линейного расширения | $\gamma = 1.00 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ |

1. [1.0 балла] Найдите аналитическую формулу для полного сопротивления проводника R_0 и рассчитайте его численное значение.

По проводнику пропускают ток силой $I = 1 \text{ А}$. Известно, что теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона-Рихмана

$$P_{\text{ext}} = \alpha(T_s - T_0),$$

где P_{ext} – мощность потерь с единицы поверхности проводника с температурой поверхности T_s , $T_0 = 293K$ – температура окружающей среды, α – некоторая постоянная, называемая коэффициентом теплоотдачи.

2. [1.0 балла] Найдите аналитическую формулу для температуры поверхности проводника T_s и рассчитайте ее численное значение.

Температура проводника меняется с глубиной вследствие явления теплопроводности, которое описывается следующим законом Фурье

$$P = -\kappa S \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

где P – мощность теплового потока между гранями параллелепипеда площадью S , ΔT – перепад температур между гранями параллелепипеда, расположенными на расстоянии Δx друг от друга, κ – коэффициент теплопроводности.

3. [2.5 балла] Найдите аналитическую формулу для температуры в центре проводника T_{max} и рассчитайте ее численное значение.

4. [0.5 балла] Найдите аналитическую формулу для изменения радиуса проводника δR_T , обусловленного тепловым расширением, и рассчитайте его численное значение.

Внимание! В дальнейших расчетах считайте проводник бесконечно длинным.

5. [0.5 балла] Найдите зависимость индукции магнитного поля $B(r)$ внутри проводника в зависимости от расстояния r до его оси.

6. [1.0 балла] Найдите аналитическую формулу для энергии магнитного поля W_B внутри проводника и рассчитайте ее численное значение.

7. [1.0 балла] В результате пропускания электрического тока по проводнику в нем возникает механическое напряжение. Найдите зависимость давления $p(r)$ внутри проводника в зависимости от расстояния r до его оси.

8. [1.0 балла] Найдите аналитическую формулу для механической энергии деформаций проводника W_σ и рассчитайте ее численное значение.

9. [1.0 балла] Найдите аналитическую формулу для изменения радиуса проводника δR_σ , обусловленного механическими напряжениями, и рассчитайте его численное значение.

10. [0.5 балла] Найдите величину коэффициента теплового расширения γ , при которой радиус проводника не изменился бы при пропускании через него электрического тока.

Справка. Значение магнитной постоянной равно $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн / м}$.