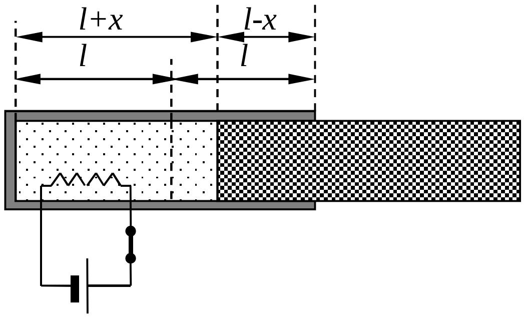
11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 1 (Розв'язок)

Малюнок з умови задачі:



Протягом часу t_1 = 41,55 с температура газу лінійно зростає від T_0 = 300 К до T_1 = 320 К (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41{,}55}{20} = \frac{5}{2}R\,.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності $C_{12} = C_V$. Це означає, що протягом часу t_1 після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює V_0.
При досягненні температури T_1 тиск газу в посудині зростає до значення

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \qquad (1)$$

де F – сила тертя спокою, S – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right), \qquad p(x) = p_A + \frac{F}{S}\frac{(l-x)}{l} = p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}, \qquad (2)$$

Виключивши з цих рівнянь величину $\frac{x}{l}$, отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F}{S}\frac{V}{V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A)\frac{V}{V_0} \qquad (3)$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина - тиск p_1. Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від x *(див. рис. у розв'язку)*:

$$RT(x) = V_0\left(1 + \frac{x}{l}\right)\left(p_1 - \frac{F}{S}\frac{x}{l}\right). \qquad (4)$$

Температура газу досягає максимуму T_m = 360 К (рис 2) при деякому значенні $\frac{x_m}{l}$, яке може бути визначене з умови екстремуму функції $T(x)$ як вершина параболи:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2}\frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}\,. \qquad (5)$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що $p_1V_0 = RT_1$, отримуємо квадратне рівняння відносно величини $\frac{p_A}{p_1}$

$$4\left(\frac{T_m}{T_1} - 1\right)\left(1 - \left(\frac{p_A}{p_1}\right)\right) = \left(\frac{p_A}{p_1}\right)^2.$$

Розв’язуючи рівняння при підстановці числових значень T_1 та T_m отримуємо $p_1 = 2p_A$. Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме вигляд:

$$p = p_A\left(3 - \frac{V}{V_0}\right) \qquad \text{або} \qquad \frac{V}{V_0} = 3 - \frac{p}{p_A}. \tag{6}$$

Початковий об’єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 = p_1\frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8}p_A.$$

Рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$\frac{V(3 - V/V_0)}{T} = const.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об’єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплотою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки посудини, можна знехтувати):

$$\delta Q = \frac{5}{2}RdT + pdV.$$

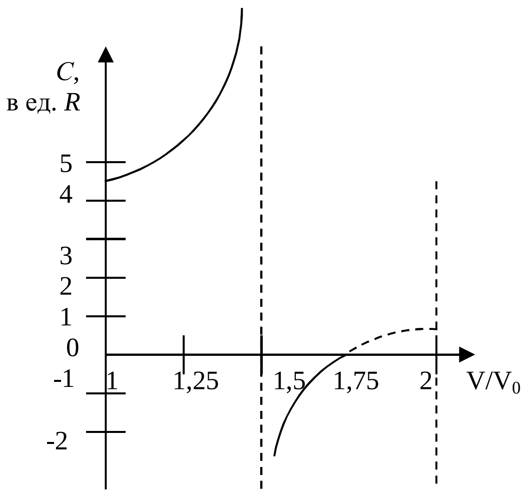
Звідки теплоємність газу $C = \frac{5}{2}R + p\frac{dV}{dT}$. Із рівняння стану

$$p_A V\left(3 - \frac{V}{V_0}\right) = RT$$

отримаємо $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{(3 - 2V/V)p_A}$. Так як $p = p_A(3 - V/V_0)$, то

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0}R.$$

На графику схематично зображено залежність $C=f\ (V/V_0)$. Як бачимо, при $1{,}5<V/V_0<1{,}75$ теплоємність від’ємна.



11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 2 (Розв'язок)

Для направления обхода контура, изображенного на рис.1, справедливы следующие уравнения и соотношения:

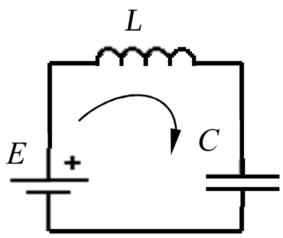


Рис.1

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E$$

или $q'' + \omega^2 q = \frac{E}{L}$, где $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ и $i = \frac{dq}{dt}$.

Если ввести новую переменную ($q - EC$), то уравнение колебаний принимает вид

$$(q - EC)'' + \omega^2 (q - EC) = 0, \qquad (1)$$

а его решение

$$q = A\cos\omega t + EC \cdot$$

Амплитуда A и начальная фаза φ определяются из начальных условий $q(0) = 0$ и $i(0) = 0$. Тогда

$$q(t) = EC(\cos\omega t - 1) \quad \text{и} \quad i(t) = \omega EC\sin\omega t \cdot \qquad (2)$$

Напряжение и заряд на конденсаторе будут максимальными через полпериода. При этом

$$q_{\max} = -2EC. \qquad (3)$$

Первое переключение. Для контура, изображенного на рис.2, начальные условия следующие: $q(0) = | q_{max} |$, $i(0) = 0$.

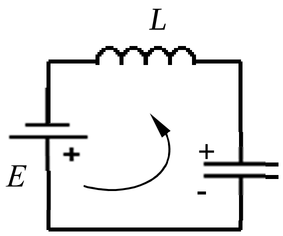


Рис.2

Для выбранного направления обхода применение второго правила Кирхгофа дает

$$-\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E \quad \text{и} \quad i = -\frac{dq}{dt}, \qquad (4)$$

а уравнение колебаний приводится к виду:

$$(q + EC)'' + \omega^2 (q + EC) = 0 \cdot \qquad (5)$$

Тогда $q = A\cos(\omega t + \varphi) - EC$.

С учетом новых начальных условий получаем $A = 3EC$ и, таким образом, после первого переключения

$$q_1(t) = EC(3\cos\omega t - 1) \quad \text{и} \quad i_1(t) = 3\omega EC\sin\omega t, \qquad (6)$$

а максимальное напряжение на конденсаторе

$$U_{1\max} = 4E \cdot$$

Очевидно, что при последующих переключениях колебания описываются уравнениям (5), а начальные условия определяются модулями максимальных значений заряда на конденсаторе и нулевым током. Обобщая результаты (6) на n переключений, получаем

$$q_n(t) = EC\left[(2n+1)\cos\omega t - 1\right], \qquad i_n(t) = \omega EC(2n+1)\sin\omega t \qquad (7)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_{n\max} = 2(n+1)E\,, \qquad i_{n\max} = (2n+1)\omega EC \cdot$$

На рис 3 представлены зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени при изменениях полярности источника каждые полпериода в отсутствие потерь.

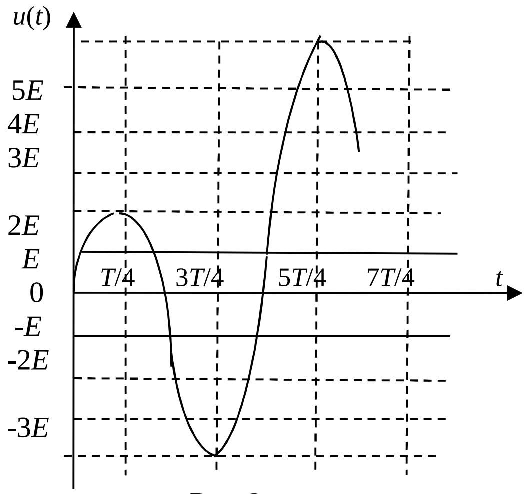


Рис.3

Рассмотрим контур с потерями. Т.к. $r << \rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, то изменением амплитуды тока и напряжения за полпериода, а также дополнительным фазовым сдвигом между током и напряжением можно пренебречь и пользоваться уже полученными результатами. Амплитуда напряжения на конденсаторе и тока в контуре будет оставаться неизменной по достижении такого значения, при котором энергия, подводимая за полпериода от источника, будет равна энергии теряемой за это же время.

Пусть энергетический баланс в контуре установился через n переключений. Рассчитаем энергию W, получаемую контуром от источника за полпериода:

$$W = \int_0^{T/2} Ei_n(t)dt = E^2C\omega(2n+1)\int_0^{T/2}\sin\omega t dt = 2E^2C(2n+1) \qquad (8)$$

Энергия, теряемая за это же время

$$W_r = \int_0^{T/2} i_n^2(t) r dt = \omega^2E^2C^2r(2n+1)^2\int_0^{T/2}\sin^2\omega t dt = \frac{\pi}{2}\frac{r}{\sqrt{L/C}}E^2C(2n+1)^2 \qquad (9)$$

Приравнивая выражения(8) и (9), получаем $2n+1 = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{\sqrt{L/C}}{r}$. Т.к. $\sqrt{\dfrac{L}{C}} >> r$, то $n >>1$ и

$$n \cong \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{L/C}}{r}.$$

Тогда с использованием (7) получаем

$$u(t) = E\left(\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{L/C}}{r}\cos\omega t - 1\right) \approx E\left(\frac{\sqrt{L/C}}{r}\cos\omega t - 1\right) \text{ и } i(t) = \frac{4}{\pi}\omega CE\frac{\sqrt{L/C}}{r}\sin\omega t \approx \frac{E}{r}\sin\omega t\,.$$

Если потери в контуре обусловлены внутренним сопротивлением источника тока, то полученный результат очевиден – сила тока в контуре не может превышать силу тока короткого замыкания.

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 3 (Розв'язок)

1) Запишемо вирази для довжини шляху $L^{\pm}$ в лабораторній (нерухомій) системі відліку (знак «+» відповідає хвилі, напрямок руху якої співпадає з напрямком обертання, знак «-» - хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку) :

   $L^{\pm} = 2\pi R + R\Omega t^{\pm}$, де R – радіус кільця, Ω – кутова швидкість обертання, $t^{\pm}$ - час, який витрачають хвилі на обхід кільця. Якщо V_{φ} – швидкість хвилі відносно нерухомого кільця, то відносно рухомого кільця будемо мати в лабораторній системі відліку згідно релятивістському закону додавання швидкостей

   $V_{\varphi}^{\pm} = \dfrac{V_{\varphi} \pm R\Omega}{1 \pm \dfrac{V_{\varphi} R\Omega}{c^2}}$, де c – швидкість світла.

   Тоді часи t^{+} і t^{-} визначаються, як відношення $\dfrac{L^{+}}{V_{\varphi}^{+}}$ і $\dfrac{L^{-}}{V_{\varphi}^{-}}$ відповідно:

   $t^{\pm} = \dfrac{L^{\pm}}{V_{\varphi}^{\pm}} = \dfrac{2\pi R(1 \pm \dfrac{V_{\varphi} R\Omega}{c^2})}{V_{\varphi}(1 - \dfrac{R^2\Omega^2}{c^2})}$, звідки знаходимо шукану різницю розповсюдження зустрічних хвиль

   $$\Delta t = t^{+} - t^{-} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - \dfrac{R^2\Omega^2}{c^2})}.$$

2), 3) зі знайденого виразу слідує, що різниця не залежить від швидкості розповсюдження хвилі, а отже не залежить від того, чи заповнений оптичним середовищем інтерферометр чи ні і не залежить від природи хвиль, які генеруються джерелом.

4) для обчислення різниці фаз зустрічних хвиль на виході кільця, зручно перейти в систему відліку k', яка супроводжує обертання кільцевого інтерферометра, в силу того, що інтерференційна картина, фіксується приймачем, який є нерухомим відносно системи, що обертається. Згідно перетворенням Лоренца різниця часів розповсюдження зустрічних хвиль в системі відліку k' є $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \dfrac{R^2\Omega^2}{c^2}} = \dfrac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 \sqrt{1 - \dfrac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$, а різниця фаз зустрічних хвиль на виході з кільця $\Phi_S = \omega \Delta t' = \dfrac{4 S \Omega \omega}{c^2 \sqrt{1 - \dfrac{R^2\Omega^2}{c^2}}}$ (S – площа кільця).

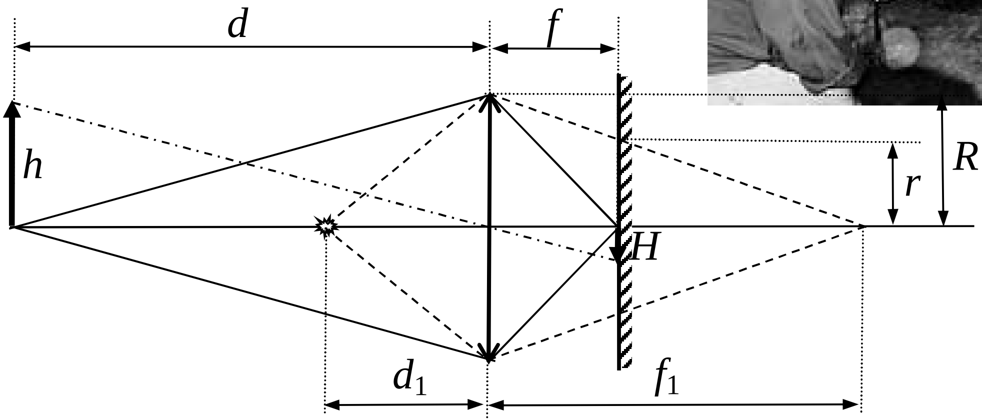
Коментар

Запропонована задача описує так званий ефект Саньяка:

Ефект Ж.Саньяка (1913) поряд з експериментом Майкельсона-Морлі є одним з основоположних дослідів спеціальної теорії відносності. Дослід Саньяка довів принципову можливість експериментального визначення кутової швидкості обертання системи спостерігачем, розташованим всередині системи, тобто можливість визначення неінерційного руху системи для спостерігача, який є нерухомим відносно цієї системи.

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 4 (Розв'язок)

Кулі з острова Пасхи. Розв'язок. Фотоапарат фокусує чітке зображення людини на матриці або фотоплівці. При цьому предмети, які знаходяться ближче або далі не будуть чіткими. Зображення маленьких краплинок перед об'єктивом буде утворюватись далеко позаду матриці, на якій потік світла від краплинки залишає бліду прозору пляму радіусом r (див. Рис.).



Запишемо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f}, \\ \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1}, \\ \dfrac{R}{f_1} = \dfrac{r}{f_1 - f}, \\ \dfrac{h}{H} = \dfrac{d}{f}. \end{cases}$$

Розміри, які ми міряємо на фотографії (H' і r') не співпадають з розмірами на матриці (H і r), але $H'/r' = H/r$. З урахуванням останнього рівняння з системи знаходимо $d_1 = \dfrac{d}{1 + \dfrac{h}{H'}\dfrac{r'}{R}}$. Висота кадру відповідає висоті $h \approx 1\,\text{м}$. Для першої краплинки $r'/H' \approx 1/6$, для другої $r'/H' \approx 9/80$. Отже $d_1 \approx 17\,\text{см}$, $d_2 \approx 24{,}5\,\text{см}$. Аналогічні результати для відстані від краплинки до площини лінзи об'єктиву отримуємо, якщо краплинка знаходиться не на головній оптичній осі. Для не дуже великих кутів це є досить точною оцінкою відстаней, які треба знайти.

Зауважимо, що розв'язок задачі відповідає випадку повністю відкритої діафрагми, на що вказує зйомка у печері за наявності у людини ліхтаря. Також можна було б розглянути випадок, коли краплинка ближче до об'єктиву ніж його фокусна відстань. Особливості цього розв'язку більшою мірою пов'язані з конструктивними особливостями фотоапарату (розмірами матриці, тощо…). Нарешті ідея, що концентричні кола, а з ними і сама природа кругів пов'язані з дифракційними явищами на отворі об'єктиву, не витримує оціночних розрахунків.

Середня яскравість E_1 кола на фотографії пропорційна відношенню світлової енергії W_1 до площі кола πr_1^2, на яку вона падає. Енергія W_1 пропорційна до добутку енергії W_0, яку віддзеркалює пилинка, і тілесного куту, який спирається на площу об'єктива $\Omega = \dfrac{\pi R^2}{d_1^2}$. Енергія W_0 пропорційна до добутку енергії W, яка випромінюється, і тілесного куту, який спирається на площу пилинки

$\Omega = \dfrac{S}{d_1^2}$. Отже, $E_1 = \alpha \dfrac{WR^2 S}{d_1^4 r_1^2}$ - величина обернено пропорційна четвертій степені відстані. Аналогічний вигляд має співвідношення для другої пилинки. Якщо $E_1 = E_2$, маємо $d_1^2 r_1 = d_2^2 r_2$. З урахуванням попередніх рівнянь знаходимо:

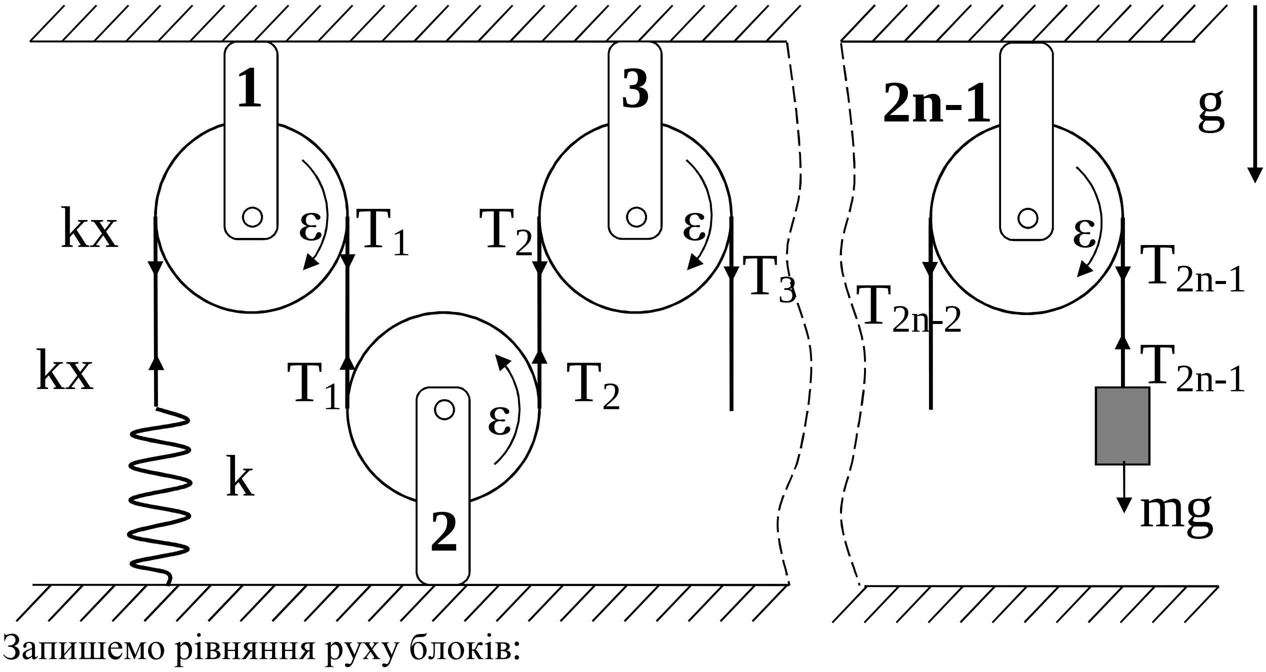
$$d_1 + d_2 = d, \qquad d_1 = \frac{d}{1 + \sqrt{r_1'/r_2'}}, \qquad d_2 = \frac{d}{1 + \sqrt{r_2'/r_1'}}, \qquad R = \frac{h}{H'}\sqrt{r_1' r_2'}.$$

11 клас
XLV олімпіада з фізики 2008 р. (Теоретичний тур)
Задача 5 (Розв'язок)

5) Дано систему блоків (рис.1). Через блоки перекинута тонка невагома нерозтяжна нитка. Всі **2n-1** (**n** – натуральнее число) однорідних блоків мають однакову масу **M** і радіус **r**. Блоки можуть обертатися навколо своєї вісі без тертя Нитка не ковзає по блоках. Коефіцієнт пружності пружини **k**. Визначити період малих вертикальних коливань тягарця маси **m** після виведення його з положення рівноваги.

Розв'язок

На малюнку показано введені позначення, сили, що діють у системі та прискорення які набудуть блоки при обертанні в одному з напрямів. Внаслідок кінематичної в'язі всі кутові прискорення блоків однакові, а прискорення тіла **m** пов'язане з кутовим прискоренням блоків співвідношенням: $\mathbf{a = \varepsilon \cdot r}$.



Запишемо рівняння руху блоків:

1-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_1 - kx) \cdot r}$;

2-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_2 - T_1) \cdot r}$;

3-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_3 - T_2) \cdot r}$;

………………………………

2n-2-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_{2n-2} - T_{2n-3}) \cdot r}$;

2n-1-й блок: $\mathbf{J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - T_{2n-2}) \cdot r}$,

де $\mathbf{J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2}$ момент інерції блока, як однорідного циліндру.

Додавши праві та ліві частини виписані виписаних рівнянь, маємо:

$$\mathbf{(2n-1) \cdot J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - kx) \cdot r} \qquad (1)$$

Рівняння руху тягарця:

$$\mathbf{m \cdot a = m \cdot g - T_{2n-1}} \qquad (2)$$

З рівнянь 1 та 2 з урахуванням зв'язку $\mathbf{a = \varepsilon \cdot r}$ маємо:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m\right)\cdot a = m\cdot g - k\cdot x \qquad (3)$$

Нехай $\mathbf{x = x_0 + \Delta x}$, де $\mathbf{x_0}$ – значення x в стані рівноваги:

$$m\cdot g - k\cdot x_0 = 0$$

Тоді рівняння (3) можна записати так:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m\right)\cdot a = - k\cdot\Delta x$$

Це рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega^2 = \frac{k}{\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m}$$

Звідки період коливань:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot M+m}{k}}$$