КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 18.05.07

1. Вы смотрите на камешек, лежащий на дне ручья. Может ли «кажущаяся» глубина камешка быть в $k = 4{,}5$ раза меньше истинной? Если да, то при каком условии? Если нет, то почему? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

2. Юному волшебнику Гарри Поттеру для приготовления на экзамене зелья не хватает только воды объемом $V_0 = 1$ л при температуре $\theta = 50$ °С. В его распоряжении банка объемом V_0 и бочка воды, температура которой $t_0 = 20$ °С совпадает с температурой воздуха в классе. Имеется также открытый тонкостенный цилиндрический стакан, в котором Гарри может нагреть одну «порцию» воды с помощью своей волшебной палочки мощностью $P = 500$ Вт. С ее же помощью Гарри может как угодно изменять высоту стакана, но он еще не научился изменять радиус стакана ($R = 5$ см) или толщину стенок. Стакан наполняется полностью, вследствие наложенного на него заклятия тепловые потери происходят только через боковую поверхность. Предварительные измерения показали: если в стакан налить воду при температуре $t_1 = 74$ °С, то через $\tau_0 = 5$ мин эта вода остывает до $t_2 = 40$ °С.

а) Сколько времени необходимо Гарри для выполнения задания?

б) Какой должна быть высота стакана H?

3. На гладкой горизонтальной плоскости шарнирно укреплен конец невесомого стержня длины l, на другом конце которого находится точечная масса m. Удерживая стержень в вертикальном положении, к нему вплотную придвигают куб массой $4m$. Какую скорость может приобрести куб, если без толчка отпустить стержень? Длина ребра куба равна l.

4. Облако состоит из очень малых капель воды, которые можно считать неподвижными. Попавшая в это облако большая капля падает. За некоторое время скорость капли изменилась от v_0 до v, а ускорение — от a_0 до a. Какой путь прошла капля за это время, если для нее сопротивление воздуха пренебрежимо мало?

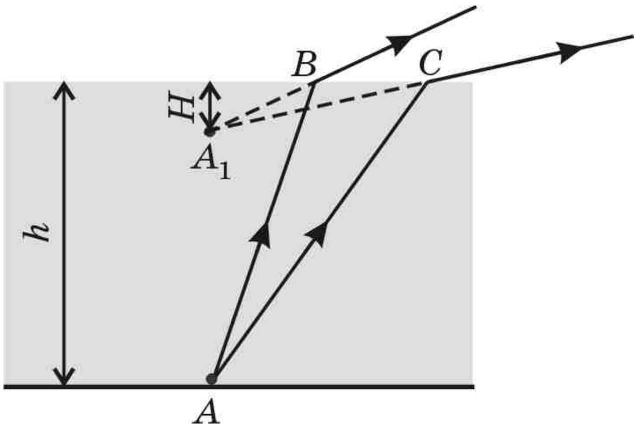
5. Четыре одинаковых положительных заряда и четыре равных им по модулю отрицательных заряда расположены по одному в вершинах куба. На концах каждого ребра куба находятся заряды противоположных знаков. Как зависит от расстояния напряженность создаваемого зарядами электростатического поля в точках, лежащих далеко от этой системы?

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 18.05.07

Задача 1. Описанная ситуация возможна, если в глаз наблюдателя попадает не вертикальный, а *наклонный* пучок света. Пусть один из лучей этого пучка в воде образует с вертикалью угол α; тогда в воздухе он образует с вертикалью угол $\beta = \arcsin(n\sin\alpha)$. Если другой луч образует с первым в воде малый угол $\Delta\alpha$, то в воздухе угол между лучами $\Delta\beta = \dfrac{n\cos\alpha}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}\Delta\alpha = \dfrac{n\cos\alpha}{\cos\beta}\Delta\alpha.$ Мнимое изображение A_1 камешка A, которое увидит наблюдатель, находится на пересечении преломленных лучей (на рисунке угол между ними преувеличен). С учетом малости углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ получаем $BC = h\mathrm{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - h\mathrm{tg}\alpha = h\Delta\alpha/\cos^2\alpha$. Глубина изображения камешка

$H = A_1B\cos\beta = \dfrac{BC\cos^2\beta}{\Delta\beta} = \dfrac{h\cos^3\beta}{n\cos^3\alpha} = \dfrac{h}{n}\left(\dfrac{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\right)^3.$ Отсюда $\sin^2\alpha = \dfrac{(k/n)^{2/3}-1}{(kn^2)^{2/3}-1} = \dfrac{5}{12}.$

$\sin\beta = \sqrt{\dfrac{20}{27}} = 0{,}86.$ Углы падения и преломления лучей соответственно 40 и 59°.



Задача 2. Пусть радиус стакана равен R, тогда за малое время $d\tau$ при температуре воды t тепловые потери $dQ = -k \cdot 2\pi RH \cdot (t - t_0) \cdot d\tau$. С другой стороны, $dQ = c\rho\pi R^2 H \cdot dt$. Если нет нагревателя, вода остывает по закону $t - t_0 = (t_1 - t_0)\exp(-2k\tau/c\rho R)$, т.е. $\dfrac{2k\tau_0}{c\rho R} = \ln\left(\dfrac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}\right) = A \approx 1.$ При нагревании же температура воды изменяется по закону $t - t_0 = \dfrac{P}{2\pi kRH}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{2k\tau}{c\rho R}\right)\right).$ Согласно уравнению теплового баланса, чтобы получить необходимую теплую воду, потребуется греть воду в стакане до такой температуры, что $\pi R^2 H(t - t_0) = V_0(\theta - t_0)$. Следовательно, $V_0(\theta - t_0) = \dfrac{PR}{2k}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{2k\tau}{c\rho R}\right)\right) = \dfrac{P\tau_0}{Ac\rho}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{A\tau}{\tau_0}\right)\right),$ откуда $\tau = -\dfrac{\tau_0}{A}\ln\left(1 - \dfrac{Ac\rho V_0(\theta - t_0)}{P\tau_0}\right) = 550$ с. Заметим, что от высоты стакана ответ не зависит. Значит ли это, что высота может быть любой? Нет: следует учесть, что слишком много воды греть не надо и в открытом стакане при нормальном атмосферном давлении (а его естественно по умолчанию считать нормальным) воду нельзя нагреть выше $t_{кип} = 100$ °С. Отсюда следуют ограничения: $H_{\min} = \dfrac{V_0(\theta - t_0)}{\pi R^2(t_{кип} - t_0)} = 4{,}8$ см, $H_{\max} = \dfrac{V_0}{\pi R^2} = 12{,}7$ см.

Задача 3. ЗСЭ и кинематическая связь двух скоростей дают выражение для скорости куба в зависимости от углового отклонения стержня: $v^2 = 2gl\dfrac{\xi^2(1-\xi)}{4\xi^2+1}$, где $\xi = \cos\alpha$. Нужно найти максимум этой функции (физически очевидно, что он соответствует точке отрыва). Из соотношения $\frac{d(v^2)}{d\xi} = -\xi\frac{4\xi^3+3\xi-2}{(4\xi^2+1)^2} = -\xi\frac{(2\xi-1)(2\xi^2+\xi+2)}{(4\xi^2+1)^2}$, откуда $\xi = ½$, $\alpha = 60°$, $v = \frac{\sqrt{2gL}}{4}$.

Задача 4. Следует учесть, что при падении радиус капли увеличивается и «пополнению» надо сообщить скорость и импульс. Если обозначить процентное содержание воды в облаке (по объему) через k, основные дифференциальные уравнения процесса можно записать в виде $a = g - \frac{3kv^2}{4r}$, $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{4}v$. Из первого уравнения можно выразить радиус капли через ее скорость и ускорение, а из второго получаем $\Delta r = \frac{k}{4}\int v \cdot dt = \frac{kL}{4}$. Отсюда $L = \frac{3v^2}{g-a} - \frac{3v_0^2}{g-a_0}$. В частности, если ускорение неизменно, получим $a = \frac{1}{7}g$.

Задача 5. Проще исследовать потенциал: для диполя… для двух диполей (квадруполя)… Для двух квадруполей… Потенциал обратно пропорционален 4-й степени расстояния, а напряженность – 5-й степени.

Для справки: у диполя $\varphi = -\vec{d}\nabla\frac{1}{R} = \frac{\vec{d}\vec{R}}{R^3}$, $\vec{d} = \Sigma q_i\vec{r}_i$.