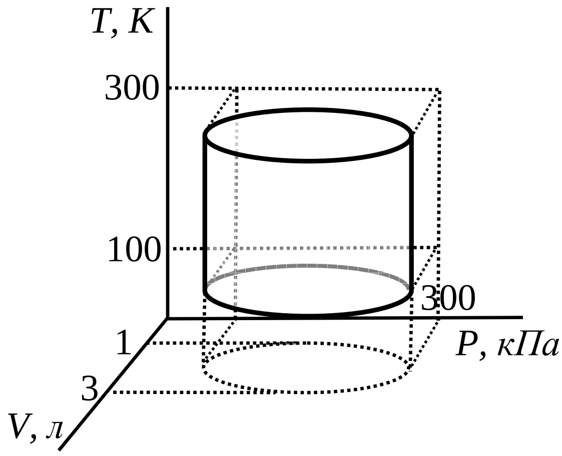
10 клас. Задача 1

Гелій знаходиться у спеціальному циліндрі з рухомим поршнем. Контролюючий пристрій забезпечує обмеження на можливі значення об'єму, тиску, температури і маси газу. Ці обмеження мають вигляд циліндричної поверхні на P-V-T діаграмі (див. рис.), де тиск може змінюватись від 100 кПа до 300 кПа, об'єм – від 1 л до 3 л, а температура – від 100 К до 300 К. Знайдіть мінімальне і максимальне значення, яке може мати маса газу у циліндрі, і вкажіть на діаграмі відповідні точки. Вантаж якої маси можна покласти на невагомий поршень, якщо циліндр закріпити у вертикальному положенні? Знайдіть максимальну корисну роботу, яку може виконати газ під поршнем, піднімаючи вантаж. Зовнішній атмосферний тиск P_A=100 кПа, площа поршня S=1 дм^2.



З рівняння Менделєєва-Клапейрона знаходимо, що максимальна маса газу $m = \frac{\mu}{R}\frac{PV}{T}$ буде при максимальному значенні добутку PV і мінімальному значенні температури T. Залежність $P(V)$ при будь-яких сталих значеннях температури (включно з $T_{\min} = 100\text{К}$) має у запропонованому масштабі вигляд кола (див. Рис.1). У безрозмірних координатах $x = V/V_{\min} = V/1\,\text{л}$, $y = P/P_{\min} = P/1\,\text{кПа}$ рівняння кола має вигляд

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, \qquad (1)$$

а рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$yx = \frac{mRT}{\mu P_{\min} V_{\min}}. \qquad (2)$$

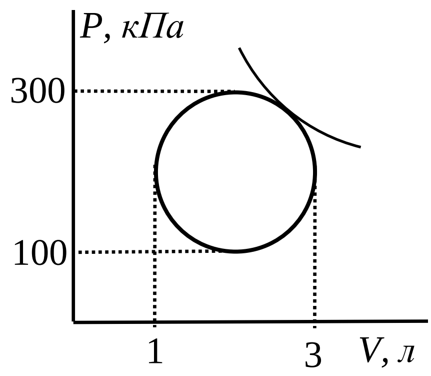


Рис.1

Знайти максимальне значення добутку yx можна по різному. Наприклад, виразити y з рівняння (1), підставити в yx, взяти похідну, значення якої в точці максимуму дорівнює нулю. Можна обійтися і без похідної. Зауважимо, що лінії сталої маси (ізомаси) у випадку $T = Const$ на діаграмі $P(V)$ мають вигляд гіпербол $P = \frac{mRT}{\mu}\frac{1}{V}$ аналогічно вигляду ізотерм у випадку $m = Const$. Більшій масі відповідає більш «висока» гіпербола. Найвища гіпербола не перетинатиме коло у двох точках, а тільки дотикатиметься до нього (див. Рис.1). Отже, слід розв'язати систему рівнянь, а саме рівняння кола (1) та гіперболи (2), і обрати випадок, коли рівняння за даної маси газу і температури має один розв'язок. Можна зробити ще простіше. Оскільки система рівнянь (1) і (2) є симетричною відносно заміни $x \leftrightarrow y$ і має один розв'язок, для нього $x = y$. З урахуванням цього з рівняння (1) для нашого випадку знаходимо $y = x = 2 \pm \sqrt{2}/2$. Перше значення $2+\sqrt{2}/2$ відповідає максимальному значенню добутку yx, друге $2-\sqrt{2}/2$ – мінімальному.

Отже, $\dfrac{mRT}{\mu P_{\min} V_{\min}} = yx\big|_{\max} = \left(2+\sqrt{2}/2\right)^2 = 4{,}5 + 2\sqrt{2} \approx 7{,}33$,

звідки знаходимо $m_{\max} = 7{,}33\dfrac{\mu P_{\min} V_{\min}}{RT_{\min}} \approx 3{,}5$ г.

Для мінімальної маси $m_{\min} = \left(2-\sqrt{2}/2\right)^2 \dfrac{\mu P_{\min} V_{\min}}{RT_{\max}} \approx 0{,}27$ г.

Як бачимо, маси відрізняються більш ніж у 13 разів.

Так як тиск може змінюватися від $P_{\min}$=100 кПа до $P_{\max}$=300 кПа, то відповідна маса вантажу який завдяки силі тяжіння стискає газ під поршнем, може змінюватися від

$(P_{\min} - P_A)S/g = 0$ кг до

$(P_{\max} - P_A)S/g = 200$ кг.

Для того, аби знайти роботу по підніманню вантажу не потрібно знати формулу для розрахунку роботи газу, як може здаватися на перший погляд. Корисна робота йде на збільшення потенціальної енергії вантажу.

$$mg \cdot h = (P - P_A)S \cdot \frac{V_2 - V_1}{S} = (P - P_A)\cdot(V_2 - V_1)$$

(нам не потрібно враховувати роботу газу проти сил атмосферного тиску, адже мова йде про корисну роботу по підніманню вантажу)

Числові розрахунки дають

$y = 2{,}5$ (відповідає масі вантажу150 кг)

$A = 1{,}5\sqrt{3} P_{\min} V_{\min} \approx 260$ Дж.

10 клас. Задача 2.

Учень вирішив зробити новорічну гірлянду з однакових лампочок розжарювання, розрахованих на потужність $P = 4{,}9$ Вт і напругу $U = 220$ В кожна. Для цього він з'єднав між собою п'ять клем лампочками (по одній лампочці між будь-якою парою клем) і до двох клем підключив джерело напруги 220 В. Нехтуючи залежністю опору від температури, знайдіть потужності, що виділятимуться на лампочках. Якими стануть ці потужності, якщо перегорить одна з лампочок? Дайте відповіді на попередні питання у випадку довільної кількості клем n.

Відразу розглянемо загальний випадок. Кожна з n клем з'єднана лампочками з іншими $n-1$ клемами. Отже, усього $n(n-1)/2$ лампочок у гірлянді. Лампочка, що безпосередньо з'єднує клеми, до яких підведена напруга 220 В, горітиме на повну потужність. Інші лампочки можна умовно розділити на три групи: $n-2$ лампочки, що безпосередньо підходять до першої клеми, $n-2$ лампочки, що безпосередньо підходять до другої клеми, і всі інші, які з'єднують $n-2$ клеми між собою. В силу симетрії задачі всі ці $n-2$ клеми рівноправні. Отже, вони мають однаковий потенціал, і струм між ними не йтиме, а відповідні лампочки не горітимуть. На рис. 1 наведено схематичне зображення даного з'єднання. Можна вважати, що лампочки двох перших груп попарно послідовно з'єднані, а можна – що послівно з'єднані дві паралельні групи, на відповідь це не вплине. Напруга на кожній з цих лампочок удвічі менша за $U = 220$ В. Тоді потужність буде меншою у чотири рази. Висновок: одна лампочка випромінюватиме 4,9 Вт, $2(n-2)$ лампочки – по 1,225 Вт. Всі інші $(n-2)(n-3)/2$ лампочки не горітимуть. Розглянемо випадок, коли перегорить одна лампочка. Жодна з $(n-2)(n-3)/2$ лампочок із зони, тонованої на рис.1, перегоріти не може, оскільки струм нею не йде. Якщо перегорить лампочка, що безпосередньо з'єднує клеми, до яких підведена напруга, нічого для інших лампочок не зміниться, оскільки вона підключена паралельно. Ситуація зміниться тільки тоді, коли перегорить одна з $2(n-2)$ лампочок. Причому яка саме, значення немає.

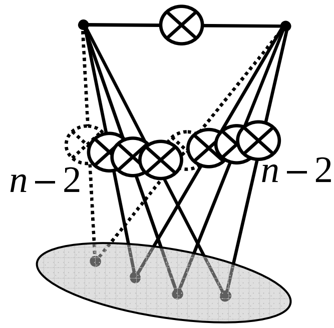


Рис.1

На рис. 2 наведено схематичне зображення нового з'єднання. Знову клеми у тонованій зоні рівноправні (тепер їх уже $n-3$). Струм між ними йти не буде, відповідні $(n-3)(n-4)/2$ лампочок не горітимуть. Зазначимо, що навіть якби ми враховували залежність температури від опору, рис. 2 не змінився би. Зобразимо еквівалентну схему отриманого з'єднання (див. рис.3). Опір

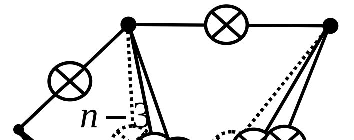


Рис.2

однієї лампочки $r = \dfrac{U^2}{P}$. Верхня лампочка випромінюватиме на повну потужність. Загальний опір нижньої частини схеми $R_{abcd} = \dfrac{2n-3}{n-1}\dfrac{r}{n-3}$. Отже, через неї йтиме струм $I_{abcd} = I_d = \dfrac{U}{R_{abcd}} = \dfrac{(n-1)(n-3)}{2n-3}\dfrac{U}{r}$.

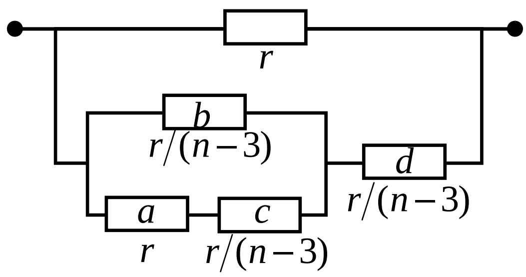


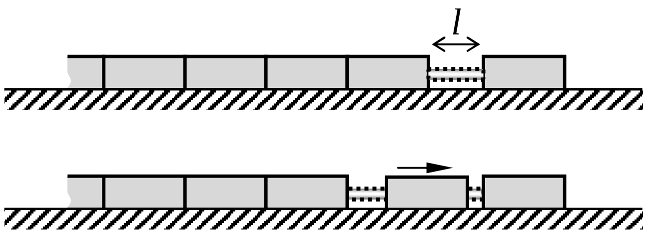
Рис.3

Потужність, що виділятиметься на кожному з $n-3$ резисторів, які безпосередньо з'єднанні з правим контактом (ділянка *d*), $P_d = \left(\dfrac{n-1}{2n-3}\right)^2 \dfrac{U^2}{r}$. У випадку $n=5$, $P_d = \dfrac{16}{49}\dfrac{U^2}{r}$. Напруга на ділянці *abc*: $U_{abc} = U_{ac} = U_b = \dfrac{n-2}{2n-3}U$. Отже, потужність, що виділяється на кожному з $n-3$ резисторів ділянки *b*: $P_b = \left(\dfrac{n-2}{2n-3}\right)^2 \dfrac{U^2}{r}$. Аналогічно знаходимо потужність кожного з $n-3$ резисторів ділянки *c*: $P_c = \dfrac{1}{(2n-3)^2}\dfrac{U^2}{r}$, а також потужність резистору *a*: $P_a = \left(\dfrac{n-3}{2n-3}\right)^2 \dfrac{U^2}{r}$. У випадку $n=5$ потужності, які випромінюватимуть лампочки: $P_a = \dfrac{4}{49}P = 0{,}4\,\text{Вт}$, $P_b = \dfrac{9}{49}P = 0{,}9\,\text{Вт}$, $P_c = \dfrac{1}{49}P = 0{,}1\,\text{Вт}$, $P_d = \dfrac{16}{49}P = 1{,}6\,\text{Вт}$, і, звичайно, потужність лампочки, що безпосередньо з'єднана з джерелом напруги: 4,9 Вт.

10 клас

Задача 3.

Модель гусениці складається з n однакових частин-модулів, що можуть віддалятися один від одного в напрямку руху на відстань $l = 1\,\text{см}$. Гусениця висовує вперед перший модуль, потім приєднує до нього другий, і так далі аж до останнього. Чому може дорівнювати швидкість гусениці? Гусениця з якою кількістю частин виявиться найпрудкішою? Коефіцієнт тертя між поверхнями столу і гусениці $\mu = 0{,}8$. Під час руху одного модуля всі інші нерухомі, а сила, з якою гусениця рухає модуль, спрямована вздовж її тулуба.



Зрозуміло, що гусениця може рухатись з якою завгодно малою швидкістю. Отже, слід знайти максимальну швидкість її руху. Під час такого руху гусениця повинна зміщувати свій модуль на відстань l за якомога коротший час Δt. Але сила, з якою гусениця розганяє свій модуль, має обмеження, оскільки за третім законом Ньютона сила протидії може зсунути інші модулі з місця, що суперечить умові задачі. У граничному випадку гусениця половину часу розганяє модуль з максимально можливим прискоренням a, а половину часу з цим же прискоренням гальмує. Скористаємось другим законом Ньютона для модуля $\frac{1}{n}ma = F - \frac{1}{n}\mu mg$ і для гусениці без модуля: $F = \frac{n-1}{n}\mu mg$. Знаходимо максимальне прискорення: $a = (n-2)\mu g$. Тоді час пересування одного модуля $\Delta t = 2\sqrt{\frac{l}{a}} = 2\sqrt{\frac{l}{(n-2)\mu g}}$. Час пересування всієї гусениці на відстань l буде в n разів більшим. Максимальна швидкість гусениці $v = \frac{l}{n\Delta t} = \frac{1}{2n}\sqrt{(n-2)\mu g l} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\mu g l}$. Максимальна швидкість залежить від кількості частин n. Виділивши повний квадрат, знайдемо n найпрудкішої гусениці. Швидкість

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\mu g l} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\right)^2\right)\mu g l}$$

набуває найменшого значення, коли вираз у квадраті дорівнює нулю, а саме, коли $n = 4$. Швидкість гусениці з чотирьох модулів $v_{\max} = \sqrt{\mu g l / 32} = 5\,\text{см/с}$. Звичайно, дану відповідь можна було отримати, знайшовши екстремум за допомогою похідної.

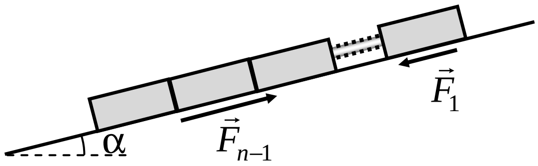
Виявляється, що, без ніг, коліс або реактивного двигуна можна доволі швидко рухатись, граючись з силами тертя, що діють на різні частини тіла.

Максимальний кут, під яким гусениця може рухатись вгору вздовж похилої площини, буде у тому випадку, коли прискорення її частини прямує до нуля. Зовнішні сили, що діють всю гусеницю, – це сила тяжіння mg, сили реакції опори на більшу частину гусениці $\frac{n-1}{n}mg\cos\alpha$ та на один модуль $\frac{1}{n}mg\cos\alpha$ та сили тертя $F_{n-1}=\frac{n-1}{n}\mu mg\cos\alpha$, $F_1=\frac{1}{n}\mu mg\cos\alpha$ (див. рис.). Проекція сил на напрям руху дає:

$$0=mg\sin\alpha-F_{n-1}+F_1=mg\sin\alpha-\frac{n-1}{n}\mu mg\cos\alpha+\frac{1}{n}\mu mg\cos\alpha.$$

Звідки знаходимо

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{n-2}{n}\mu.$$

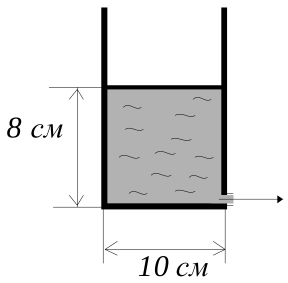


Отже, гусениця з двох модулів рухатись вгору не зможе (як і поступально рухатись горизонтально). Максимальний кут нахилу ($\mathrm{tg}\alpha=\mu$) відповідає гусениці з дуже великою кількістю модулів ($n\to\infty$).

10 класс

Задача. 4

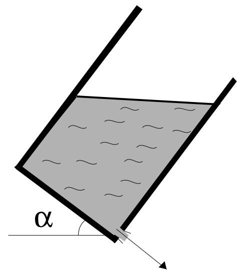
Высокий призматический сосуд наполняют водой до высоты 8 см и затем открывают небольшое отверстие, расположенное у дна (рис. 1, *а*). На рисунке 1, *б* приводится таблица, которая показывает, как понижается после этого уровень воды в сосуде со временем.



а)

высота уровня (см)	*время (с)*
8,0	0
7,0	20,0
6,0	41,2
5,0	64,4

б)



в)

Рис. 1

После того, как уровень воды опустился на 3 см, отверстие закрывают и наклоняют сосуд на угол $\alpha = 37°$ (рис. 1, *в*).

Через какое время после открытия отверстия уровень воды в наклоненном сосуде понизится еще на 1 см?

Основание сосуда – квадрат со стороною 10 см, для расчетов принять $\sin\alpha = 3/5$ и $\cos\alpha = 4/5$.

Решение.

1) Найдем высоту уровня воды в сосуде после его наклона. Для этого воспользуемся «законом сохранения объема» (рис. 2):

$$H_0 \cdot b^2 = H_x \cdot B \cdot b - \frac{1}{2} B b^2 \sin\alpha .$$

Здесь $H_0 = 5\,см$ – высота уровня воды в «прямом» сосуде до его наклона, b - размер стороны основания сосуде, $B = \dfrac{b}{\cos\alpha}$ – поперечный размер поверхности воды в наклоненном сосуде.

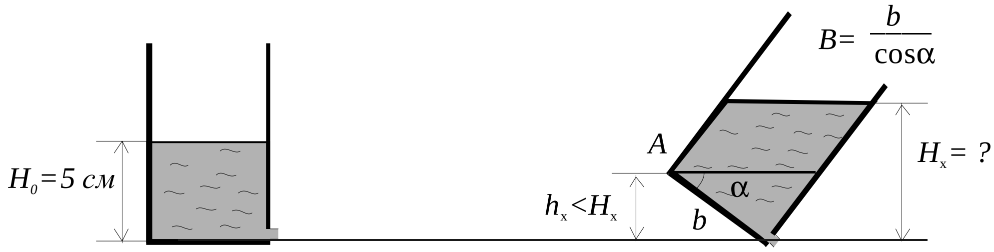


Рис. 2

Отсюда получаем:

$$H_x = H_0 \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} b \sin\alpha = 7\ см\ .$$

Проверим, что рисунок 1, *в* соответствует реальной ситуации, т.е. что уровень воды в наклонном сосуде и в начале и в конце измерения не ниже точки А: $h_x = b\sin\alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6\ см \le H(t)$

2) Скорость вытекания воды из малого отверстия в широком сосуде зависит только от высоты уровня воды над отверстием. Видно, что исходная задача о вытекании воды и конечная задача полностью эквивалентны. Разница состоит лишь в том, что «эффективное» сечение сосуда стало больше в 5/4 раза: $S_{накл} / S_0 = Bb / b^2 = 1/\cos\alpha = 5/4$. Это изменение мы ниже легко учтем.

3) Итак, нам надо узнать за какое время уровень воды в конечном сосуде понизится с 7 см до 6 см. Для «прямого» сосуда таблица дает $\Delta t_{прямого} = t(6\ см) - t(7\ см) = 21{,}2\ с$.

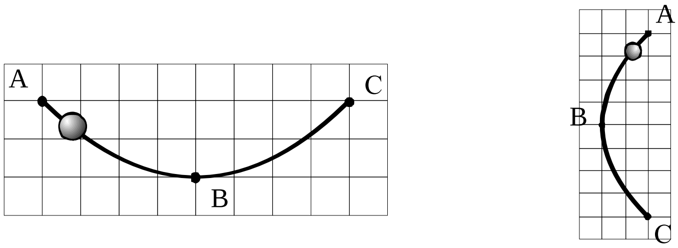
Для наклонного сосуда время выливания будет в 5/4 раза больше:

$$\Delta t_{наклон} = \frac{S_{наклон}}{S_0}\Delta t_{прямого} = \frac{1}{\cos\alpha}\left[t(6\ см) - t(7\ см)\right] = \frac{5}{4}\cdot 21{,}2\ с = 26{,}5\ с$$

Ответ: $\Delta t_{наклон} = \frac{1}{\cos\alpha}\left[t(6\ см) - t(7\ см)\right] = 26{,}5\ с$.

10 клас. Задача 5

По изогнутой проволочке может без трения скользить бусинка (рис. 1). Если расположить проволочку горизонтально (рис. 1, *а*) и отпустить бусинку из точки А без начальной сокрости, то ее ускорение в нижней точке В будет равно $a_1 = 10\ м/с^2$.



а) *б)*

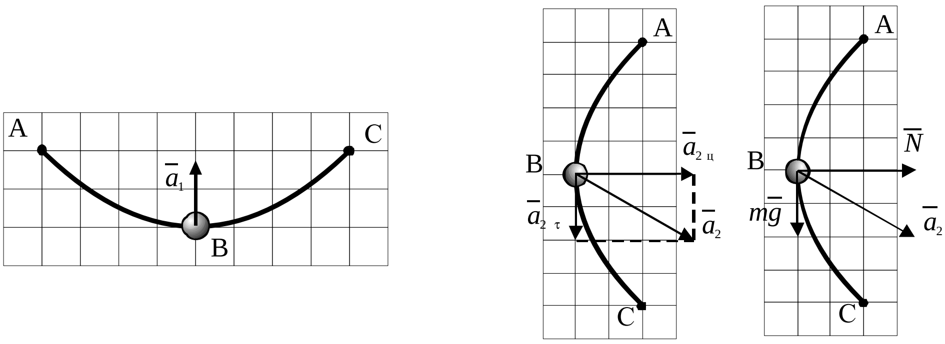
Рис. 1

Проволочку располагают вертикально и снова отпускают бусинку из точки А без начальной скорости (рис. 1, *б*). Какое теперь ускорение она будет иметь в точке В?

Для расчетов принять $g = 10\ м/с^2$, все необходимые размеры взять из рисунка.

Решение.

В первом случае бусинка в точке В будет иметь только центростремительное ускорение, которое направлено к центру кривизны и равно $a_1 = \dfrac{V_1^2}{R}$, $V_1^2 = 2gh_1$, где $h_1 = 2\ клетки$ – перепад высот между точкой А и В.



а) *б)* *в)*

Рис. 2

Во втором случае в точке В бусинка будет иметь уже две составляющие ускорения: горизонтальную (центростремительную) $a_{2ц}$ и вертикальную (тангенциальную) $a_{2\tau}$ (рис. 2, *б*). Первую составляющую мы снова находим по формуле $a_{2ц} = \dfrac{V_2^2}{R} = \dfrac{2gh_2}{R} = 2a_1 = 2g$, где $h_2 = 4\ клетки$ – новый перепад высот между точками А и В. Вертикальную составляющую ускорения $a_{2\tau}$ находим из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ (рис. 2, *в*). Проектируя его на вертикальную ось получаем $a_{2\tau} = g$.

Теперь мы можем записать окончательный ответ:

$$a = \sqrt{a_{2\tau}^2 + a_{2ц}^2} = \sqrt{g^2 + 4g^2} = \sqrt{5}g = 22{,}4\ м/с^2.$$

Ответ: $a = \sqrt{5}g = 22{,}4\ м/с^2$.