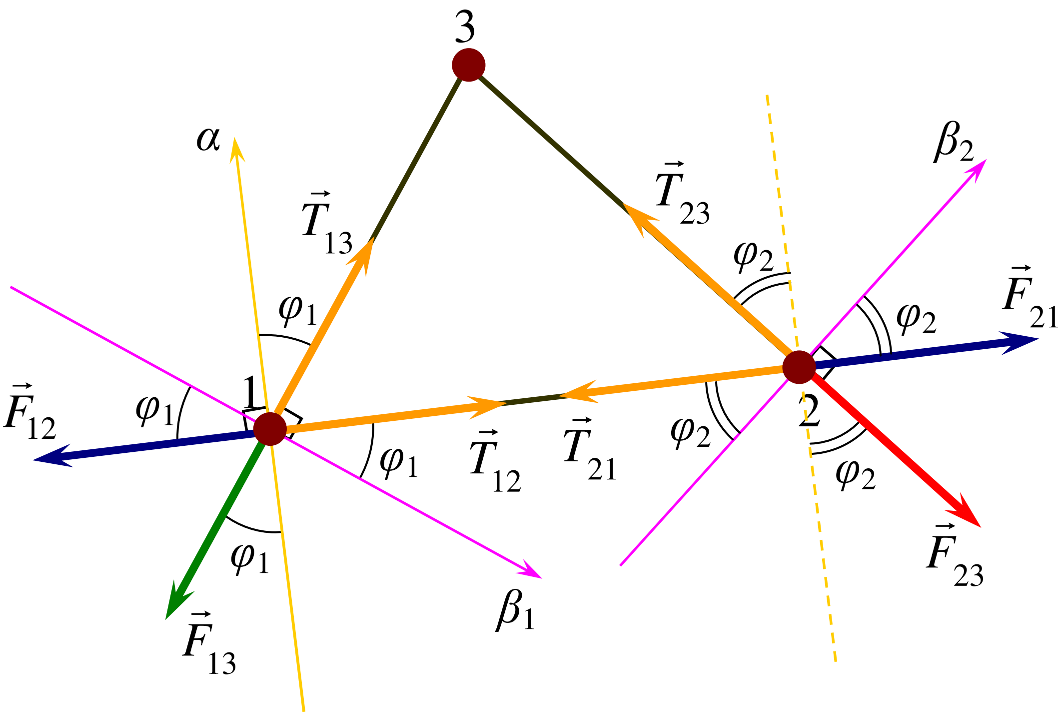
Задача № 1



Условие: На гладкую непроводящую нить длинной l надеты три бусинки с положительными зарядами q_1, q_2 и q_3. Концы нити соединены. Найдите силу натяжения нити $\vec{T}$, когда система находится в равновесии.

Решение: По условию, нить гладкая, поэтому сила натяжения одинакова для всех точек нити. Кроме того, так как все заряды одноименные, они отталкиваются и натягивают нить, то есть все участки нити натянутые. Такое возможно, только если бусинки находятся в вершинах треугольника, сторонами которого являются участки нити (см. рисунок). Расставим силы, действующие на бусинки 1 и 2 (на рисунке $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{23}$ – силы кулоновского взаимодействия бусинок 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3; $\vec{T}_{12}$, $\vec{T}_{13}$, $\vec{T}_{23}$ – силы натяжения нити (их модули одинаковы и равны T); α, β_1, β_2 – оси, причем ось α перпендикулярна нити 1-2, ось β_1 перпендикулярна нити 1-3, ось β_2 перпендикулярна нити 2-3). Все силы направлены вдоль нитей и равны соответственно:

$F_{12} = F_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{l_{12}{}^2}$, $F_{13} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_3}{l_{13}{}^2}$, $F_{23} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2 q_3}{l_{23}{}^2}$; где l_{12}, l_{13}, l_{23} – длины участков нити, соединяющих бусинки 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3 соответственно; ε_0 – электрическая постоянная.

Спроектируем силы на выбранные оси. Запишем первое условие равновесия бусинок 1 и 2 в проекциях на осях:

$$\begin{aligned}
\alpha:&\quad T\cos\varphi_1 - F_{13}\cos\varphi_1 = 0,\\
\beta_1:&\quad T\cos\varphi_1 - F_{12}\cos\varphi_1 = 0,\\
\alpha:&\quad T\cos\varphi_2 - F_{23}\cos\varphi_2 = 0,\\
\beta_2:&\quad F_{12}\cos\varphi_2 - T\cos\varphi_2 = 0;
\end{aligned}$$

Подставим значения кулоновских сил и упростим:

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{l_{12}{}^2}, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{l_{12}{}^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_3}{l_{13}{}^2}, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_3}{l_{13}{}^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2 q_3}{l_{23}{}^2}, \\ l_{12} + l_{13} + l_{23} = l; \end{cases}$$

Выразим l_{13} из второго уравнения системы:

$$l_{13} = l_{12}\sqrt{\frac{q_3}{q_2}};$$

и подставим в третье:

$$\frac{q_1 q_2}{q_3 l_{12}{}^2} = \frac{q_2}{l_{23}{}^2};$$

откуда

$$l_{23} = l_{12}\sqrt{\frac{q_3}{q_1}}.$$

Подставим l_{23} в последнее уравнение системы:

$$l_{12}\left(1 + \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_3}{q_1}}\right) = l;$$

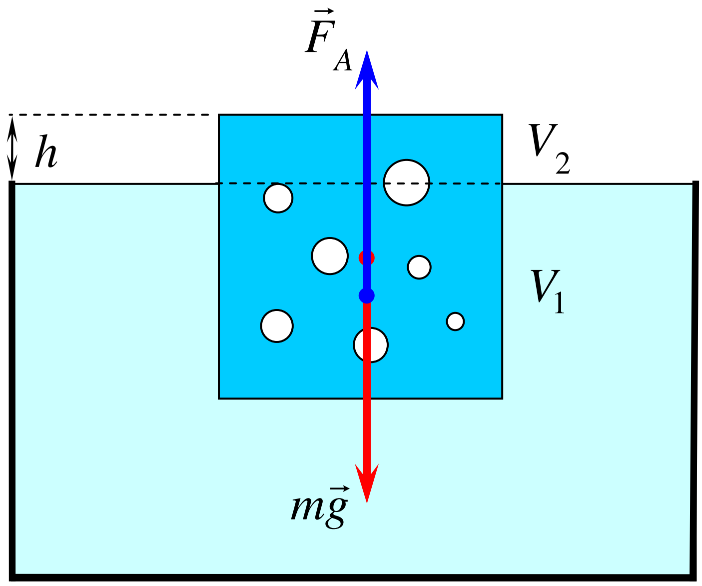
откуда $l_{12} = \dfrac{l}{\sqrt{q_3}\left(\sqrt{\dfrac{1}{q_1}} + \sqrt{\dfrac{1}{q_2}} + \sqrt{\dfrac{1}{q_3}}\right)}$.

Тогда $T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{l^2} q_3 \left(\sqrt{\dfrac{1}{q_1}} + \sqrt{\dfrac{1}{q_2}} + \sqrt{\dfrac{1}{q_3}}\right)^2$.

<u>Ответ</u>: $\dfrac{q_1 q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{q_1}} + \sqrt{\dfrac{1}{q_2}} + \sqrt{\dfrac{1}{q_3}}\right)^2$.

Задача № 2

Условие: Ледяной кубик с воздушными пузырьками аккуратно положили в кастрюлю, доверху заполненную водой. Часть воды при этом вылилась через край, и верхняя грань кубика, параллельная поверхности воды, стала выступать над ней на высоту h. Найти зависимости объемов воды, которые выльются сразу после опускания и после того, как кубик полностью растает, от плотности кубика. Постройте графики полученных зависимостей.



Решение: Изобразим кастрюлю с кубиком в ней сразу после погружения кубика схематически (см. рисунок). Пусть объем погруженной части V_1, надводной V_2, средняя плотность ρ. Будем считать, что кубик однородный, а также, что он не утонул (иначе выразить искомые объемы через известные величины невозможно).

На кубик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила Архимеда F_A, направленная вверх. Так как кубик неподвижен, то $mg = F_A$.

Подставив значения $mg = \rho(V_1 + V_2)g$, $F_A = \rho_0 V_1 g$, где ρ_0 – плотность воды, получим:

$$\rho(V_1 + V_2) = \rho_0 V_1.$$

Пусть ребро кубика a, тогда $V_1 = a^2(a-h), V_2 = a^2 h$, так как верхняя грань кубика параллельна поверхности воды по условию, и поверхность воды разбивает его на два прямоугольных параллелепипеда. Подставим в полученное уравнение:

$$\rho a^3 = \rho_0 a^3 - \rho_0 a^2 h;$$

откуда

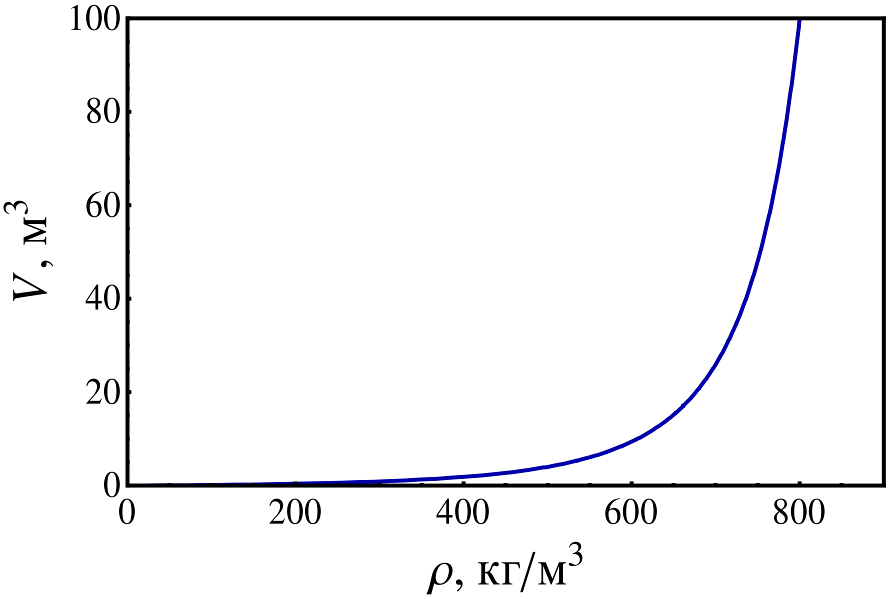
$$a = h\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}.$$

Объем воды, которая вылилась при погружении кубика, равен объему, который вытеснил кубик, т.е. V_1. Подставим выражение для a:

$$V_1(\rho) = h^2 \frac{\rho_0{}^2}{(\rho_0 - \rho)^2}\left(h\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho} - h\right) = h^3 \frac{\rho_0{}^2 \rho}{(\rho_0 - \rho)^3}.$$

График зависимости $V_1(\rho)$ представлен на рисунке 2 (при построении использовали значения $h = 1$ м и $\rho_0 = 1000$ кг/м^3).

По закону Архимеда, вес вытесненной кубиком воды равен весу самого кубика. Когда весь лед растает, его плотность станет равна плотности воды. Значит, лед, растаяв, будет занимать такой же объем, который ранее он вытеснял. Тогда объем воды, которая вылилась после таяния кубика, равен нулю.



Ответ: $V_1 = h^3 \dfrac{\rho_0{}^2 \rho}{(\rho_0 - \rho)^3}$, $V_1' = 0$.

Задача № 3