Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Материалы к урокам по теме: “Определенный интеграл”

Харьков, 2015 г.

Поурочное планирование (21 час)

Урок 1. Площадь криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла (по Риману).

Урок 2. Определенный интеграл Римана (точные определения). Ограниченность интегрируемой функции.

Урок 3. Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости функции.

Урок 4. Теоремы существования.

Урок 5. Свойства определенного интеграла.

Урок 6. Теорема о среднем значении. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции.

Урок 7. *Самостоятельная работа* по теме: "Определение и свойства определенного интеграла".

Урок 8. Формула Ньютона-Лейбница. Нахождение определенных интегралов при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

Урок 9. Особенности применения формулы Ньютона-Лейбница.

Урок 10. Формула интегрирования по частям для определенных интегралов.

Урок 11. Формула замены переменной в определенном интеграле.

Урок 12. Вычисление пределов последовательностей с помощью определенных интегралов.

Урок 13. *Самостоятельная работа* по теме: "Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных".

Урок 14. Простейшие задачи на вычисление площадей с помощью определенных интегралов.

Урок 15. Вычисление площадей с помощью определенных интегралов.

Урок 16. Задачи с касательными. Задачи с параметрами.

Урок 17. *Самостоятельная работа* по теме: "Вычисление площадей с помощью определенных интегралов".

Урок 18. Обобщающий урок.

Урок 19. Контрольная работа.

Урок 20. Анализ контрольной работы.

Урок 21. Зачет по теории.

Урок 1. Площадь криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла

Домашнее задание

1) Найдите интегральную сумму S_n для функции $f(x) = 1+x$ на отрезке $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i, $i = \overline{0, n-1}$ в серединах этих промежутков.

2) Исходя из определения интеграла, найдите $\int\limits_0^T (v_0 + gt)\, dt$, где v_0 и g – постоянные.

3) Вычислите определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интегрирования надлежащим образом:

(1) $\int\limits_0^1 a^x\, dx \quad (a > 0)$;

(2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx$;

(3) $\int\limits_0^x \cos t\, dt$;

(4) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b)$.

Урок 2. Точные определения. Ограниченность интегрируемой функции

Домашнее задание

1) Докажите, что если интегрируемая на $[-a; a]$ функция $f(x)$ нечетна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

2) Докажите, что если интегрируемая на $[-a;a]$ функция $f(x)$ четна, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

3) Докажите, что если интегрируемая на $[a;b]$ функция $f(x)$ периодична с периодом T, то $f(x)$ интегрируема и на $[a+T;b+T]$, причем $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$

4) Вычислите: а) $\int\limits_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)^5\,dx$; б) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{\cos 2x\,dx}{4-\sin^2 x} - 2\int\limits_{0}^{3} \frac{\cos 2x\,dx}{4-\sin^2 x}.$

5) Считая известными формулы для площадей из курса геометрии, вычислите, пользуясь геометрическими соображениями, следующие интегралы:

(1) $\int\limits_{0}^{6} |x-3|\,dx$;

(2) $\int\limits_{0}^{2} \big||x-1|-1\big|\,dx$;

(3) $\int\limits_{0}^{3} (|x-1|+|x-2|)\,dx$;

(4) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$;

(5) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$;

(6) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx.$

Урок 3. Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости функции

Домашнее задание

1) Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;1]$, который разбит на n равных частей. Вычислите верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, если:

   а) $f(x) = x$; б) $f(x) = \sin n\pi x$;

   в) $f(x) = 2\{nx\}$; г) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

2) Покажите, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$ интегрируема на промежутке $[0,1]$.

3) Покажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{x}\right\}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ интегрируема на промежутке $[0,1]$.

4) Покажите, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{НОД}(m,n) = 1 \end{cases}$$

   интегрируема на любом конечном промежутке.

Урок 4. Теоремы существования

Домашнее задание

1) Найдите: а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} [x]\,dx$; в) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \{x\}\,dx$.

2) Определите знаки следующих интегралов: а) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} x\sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$.

3) Найдите все значения a, при которых имеют смысл следующие интегралы:

   а) $\displaystyle\int_{3}^{a} \left(x^2 - x + 1\right)\,dx$; б) $\displaystyle\int_{2}^{a} \frac{dx}{x^2-9}$; в) $\displaystyle\int_{4}^{a} \frac{dx}{x^2-9}$.

4) (доп.) Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и на этом отрезке $|f(x)| > c > 0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ также интегрируема на $[a;b]$.

5) (доп.) Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функция $f(x)\,g(x)$ также интегрируема на этом отрезке.

6) (доп.) Докажите, что ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция со счетным множеством точек разрыва интегрируема на этом отрезке.

7) (доп.) Говорят, что множество E имеет *лебегову меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется покрывающая E конечная или счетная система интервалов, сумма длин которых меньше ε. Докажите, что ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция с множеством точек разрыва лебеговой меры нуль интегрируема на этом отрезке.

Урок 5. Свойства определенного интеграла

Домашнее задание

1) Сравните интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$ и $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2} x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{1} e^{-x}\,dx$ и $\displaystyle\int\limits_0^{1} e^{-x^2}\,dx$.

2) Докажите, что:

а) $\displaystyle 4 \leqslant \int\limits_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx \leqslant 2\sqrt{30}$; б) $\displaystyle \frac{2}{3} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Интеграл неотрицательной непрерывной функции равен нулю. Докажите, что эта функция тождественно равна нулю.

4) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a;b]$ вместе со своими квадратами. Докажите неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

5) Не вычисляя интегралов, найдите сумму: $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int\limits_0^1 x^2\,dx$.

6) Не вычисляя интегралов, найдите сумму: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx + \int\limits_0^1 \arcsin \sqrt[5]{x}\,dx$.

7) а) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – взаимно обратные возрастающие функции, определенные на $[0;+\infty)$, интегрируемые на любом отрезке $[0;c]$ $(c>0)$ и такие, что $f(0)=g(0)=0$. Докажите, что для всех положительных a и b выполнено неравенство $\int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_0^b g(x)\,dx \geqslant ab$.

б) Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $p>1$, $q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то выполнено неравенство $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\geqslant ab$.

Урок 6. Теорема о среднем значении. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Домашнее задание

1) Определите средние значения данных функций в указанных промежутках:

(1) $f(x)=x^2$ на $[0;1]$;

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ на $[0;100]$.

2) Пользуясь первой теоремой о среднем, оцените интегралы:

(1) $I=\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+0,5\cos x}$;

(2) $I=\int\limits_0^1 \dfrac{x^9dx}{\sqrt{1+x}}$.

3) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,dx=0$.

4) Найдите:

(1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^3\varepsilon}$;

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\dfrac{f(x)}{x}\,dx,$ где $a>0$, $b>0$ и $f(x)\in C\,[0;1]$.

Урок 8. Формула Ньютона-Лейбница

Домашнее задание

Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{1/3}^{3}(3x-1)^2\,dx;$

2) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(5x+11)^3};$

3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{5}\sqrt{3x+1}\,dx;$

4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{7{,}5}\frac{dx}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}};$

5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{3\pi/2}\frac{dx}{\cos^2\dfrac{2x}{9}};$

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin 5x\cos x\,dx;$

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin^2 x\cos x\,dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}\cos^4 x\,dx;$

$$9)\ \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx;$$

$$10)\ \int\limits_{-2}^{2} \left(10^{x/4} - \sin \pi x\right)\,dx.$$

Урок 9. Особенности применения формулы Ньютона-Лейбница

Найдите:

$$1)\ \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx;$$

$$2)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx, \quad 0 < r < 1;$$

$$3)\ \int\limits_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'\,dx;$$

$$4)\ \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1/\cos^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx.$$

$$5)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx;$$

$$6)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx;$$

$$7)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Домашнее задание

1) Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдите следующие определенные интегралы:

(1) $$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

(2) $$\int\limits_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

(3) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\,\cos\alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi);$$

(4) $$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\,\cos^2 x} \quad (ab \neq 0);$$

(5) $$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon\,\cos x} \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

2) Найдите:

(1) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right) dx;$$

(2) $$\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx.$$

Урок 10. Формула интегрирования по частям

Применяя формулу интегрирования по частям, найдите следующие определенные интегралы:

1) $$\int\limits_{1}^{e} x^\alpha \ln x\,dx, \quad \alpha \neq -1;$$

2) $$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 x};$$

3) $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \quad (n \in \mathbb{N});$

4) $H_{k,m} = \int\limits_0^{1} x^k \ln^m x \, dx \quad (k, m \in \mathbb{N});$

5) $I_{p,q} = \int\limits_0^{1} (1-x)^p \cdot x^q \, dx \quad (p, q \in \mathbb{N}).$

Домашнее задание

1) Применяя формулу интегрирования по частям, найдите следующие определенные интегралы:

(1) $\int\limits_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx;$

(2) $\int\limits_0^{\pi} x \, \sin x \, dx;$

(3) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx;$

(4) $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x| \, dx;$

(5) $\int\limits_0^{1} \arccos x \, dx;$

(6) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \, \operatorname{arctg} x \, dx.$

2) С помощью формул понижения вычислите интеграл $I_n = \int\limits_0^{1} \left(1-x^2\right)^n \, dx$ $(n \in \mathbb{N}).$

3) Вычислите: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \, \cos nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

Урок 11. Формула замены переменной

1) Найдите: $\displaystyle\int\limits_0^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$.

2) Найдите: $\displaystyle\int\limits_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} \, dx$.

3) а) Докажите, что если $f \in \mathbb{C}\,[0;1]$, то $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)\, dx$.

б) Найдите: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$.

4) Можно ли в интеграле $\displaystyle\int\limits_0^{3} x\sqrt[3]{1 - x^2} \, dx$ сделать замену $x = \sin t$?

5) Можно ли в интеграле $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ сделать замену $\operatorname{tg} x = t$?

Домашнее задание

1) Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы:

(1) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{5 - 4x}}$;

(2) $\displaystyle\int\limits_0^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

(4) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx;$

2) Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = (b-a) \int\limits_0^1 f\left(a + (b-a)\, x\right)\, dx.$$

3) Докажите равенство: $\displaystyle\int\limits_0^a x^3 f\left(x^2\right)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{a^2} x\, f(x)\, dx \quad (a > 0).$

4) Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$, то

$$\int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sin x\right) dx = \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\cos x\right) dx.$$

5) При помощи замены переменной вычислите интеграл: $\displaystyle I_n = \int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right)^n\, dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Урок 12. Вычисление пределов последовательностей

Найдите пределы:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right);$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0);$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right).$

Домашнее задание

1) С помощью определенных интегралов найдите пределы следующих сумм:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\,\pi}{n}\right);$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right).$

2) Вычислите интегралы:

3) $\int\limits_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8}\, dx;$

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)\,(3+\cos x)};$

5) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, \sin 2x\, \sin 3x\, dx;$

6) $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx;$

7) $\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x\, \cos\,(n+1)\, x\, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$

Урок 14. Простейшие задачи на вычисление площадей с помощью определенных интегралов

1) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = -\dfrac{6}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = -3$, $x = -2$.

2) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 2^x$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 2$.

3) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции

$$y = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x \geqslant 1, \end{cases}$$

осью абсцисс и прямыми $x = -1$, $x = 2$.

4) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = 4 + \sin x, \quad g(x) = \sin 2x + \cos x$$

и прямыми $x = 0$, $x = \pi$.

5) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{4}{x} - 2$ и прямыми $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

6) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = \ln x$, осью ординат и прямыми $y = \ln 3$, $y = \ln 4$.

7) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \operatorname{arctg} x$, осью абсцисс и прямыми $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \sqrt{3}$.

Домашнее задание

1) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = 4$, $x = 9$.

2) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{1}{x^3}$, осью абсцисс и прямыми $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$.

3) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции

$$y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } x \geqslant -1, \end{cases}$$

осью абсцисс, осью ординат и прямой $x = -2$.

4) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = \cos 2x - 6, \quad g(x) = \sin x + \sin 2x$$

и прямыми $x = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

5) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = 4x$$

и прямыми $x = -3$, $x = -1$.

6) Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \arcsin x$, осью абсцисс и прямыми $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$.

Урок 15. Вычисление площадей с помощью определенных интегралов

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \dfrac{3}{x}$ и прямыми $y = 3$, $x = 3$.

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = 3 + x.$$

4) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{и} \quad g(x) = -\frac{1}{4x + 7}.$$

5) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 2$$

и осью ординат.

6) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = -4x - 1 \quad \text{и} \quad h(x) = 4x - 9.$$

Домашнее задание

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = e^{-x}$, осью ординат и прямой $y = e$.

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = \cos\frac{\pi x}{2}.$$

4) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$f(x) = \frac{6}{|x + 1|} \quad \text{и} \quad g(x) = 3 - |3 - x|.$$

5) Фигура ограничена параболой $y = -x^2 + 2x + 3$ и осью абсцисс. Найдите отношение площадей фигур, на которые она делится графиком функции $y = (x + 1)^2$.

6) Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x + \sqrt{6 - y} = 0, \quad y = \sqrt{4 - x} + 4 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Урок 16. Задачи с касательными. Задачи с параметрами

1°. Задачи с касательными

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = -x^2+4$, осью ординат и касательной к графику $f(x)$, параллельной прямой $y = -2x + 6$.

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = -x^3 - 2x^2 - x + 3$ и касательной к нему, проведенной в точке графика с абсциссой $x_0 = -1$.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 + 5$ и касательными к этому графику, проведенными через точку $M(0; 1)$.

2°. Задачи с параметрами

1) Для каждого положительного a найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -x^3 + ax^2$ и осью абсцисс.

2) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной линиями

$$y = \cos x, \quad y = \sin 2x - 2, \quad x = b \quad \text{и} \quad x = b + \frac{\pi}{3}.$$

Домашнее задание

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ и двумя касательными к нему, проходящими через точку на оси ординат и образующими между собой угол 90°.

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 5$ и касательной к нему, проведенной в точке графика с абсциссой $x_0 = 2$.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 1 - x^2$ и касательными к этому графику, проведенными через точку $M(0; 10)$.

4) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2 + \cos x, \quad y = \sin \frac{x}{2}, \quad x = a \quad \text{и} \quad x = a + \pi.$$

5) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = k^2x^5 - kx^2$, $k > 0$ и осью абсцисс, не зависит от k.

6) На графике функции $f(x) = \sqrt{12,5\,|x| + 3,5x}$ найдите все точки с положительными абсциссами такие, что площадь фигуры, ограниченной касательной к графику, проведенной через каждую из этих точек, и самим графиком, равна $4\,\dfrac{1}{6}$.

Урок 17. Самостоятельная работа №3: "Вычисление площадей с помощью определенных интегралов"

Домашнее задание

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x\,|y| = 2, \quad x = 1 \quad \text{и} \quad x = 3.$$

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = \left|4 - x^2\right| \quad \text{и} \quad y = 2|x| + 4.$$

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ и графиком ее первообразной, имеющим с данным графиком общую точку на оси ординат.

4) Докажите, что площади фигур, каждая из которых ограничена графиком функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ и одной из касательных к этому графику, параллельных оси абсцисс, равны.