Серия 4. Безымянная

1. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более
а) 198 перелетов; б) 196 перелетов.

2. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка E, что $\angle BEA = \angle CED$. Найдите отношение длин $AE : DE$.

3. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют в зале одинаковое количество знакомых. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

4. Сумма чисел x, y, z отлична от 0. Докажите, что $\dfrac{x(y-z)}{y+z} + \dfrac{y(z-x)}{z+x} + \dfrac{z(x-y)}{x+y} = 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы два из чисел x, y, z равны.

5. Докажите, что число $n!$ является суммой двух натуральных степеней двойки лишь для конечного количества значений n.

6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABO, пересекает сторону AD в точке E. Окружность, описанная вокруг треугольника DOE, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что $\angle BCA = \angle FCD$.

7. Докажите, что не существует многочлена степени больше нуля с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

Серия 4. Безымянная

1. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более
а) 198 перелетов; б) 196 перелетов.

2. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка E, что $\angle BEA = \angle CED$. Найдите отношение длин $AE : DE$.

3. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют в зале одинаковое количество знакомых. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

4. Сумма чисел x, y, z отлична от 0. Докажите, что $\dfrac{x(y-z)}{y+z} + \dfrac{y(z-x)}{z+x} + \dfrac{z(x-y)}{x+y} = 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы два из чисел x, y, z равны.

5. Докажите, что число $n!$ является суммой двух натуральных степеней двойки лишь для конечного количества значений n.

6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABO, пересекает сторону AD в точке E. Окружность, описанная вокруг треугольника DOE, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что $\angle BCA = \angle FCD$.

7. Докажите, что не существует многочлена степени больше нуля с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.