9 класс

1. Рассмотрим неподвижную жидкость массы Δm в объеме, равном объему пробки. В обычных земных условиях на него действует сила тяжести $\Delta m g$, направленная вниз. Она уравновешивается силами давления, действующими на этот объем со стороны соседних слоев жидкости. Равнодействующая сил давления представляет собой выталкивающую Архимедову силу, направленную в сторону уменьшения давления в жидкости, то есть вверх. Она, очевидно, равна $F_1 = \Delta m g$.

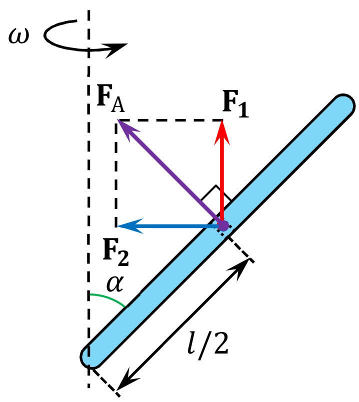


рис. 1

Пусть теперь рассматриваемый элементарный объем жидкости находится во вращающейся трубке. Так как он движется по окружности, то на него, кроме силы тяжести и силы $\boldsymbol{F_1}$, должна действовать сила, направленная к оси вращения и обеспечивающая ему центростремительное ускорение. Такой силой может быть только равнодействующая сил давления, возникающих внутри жидкости. По величине она равна $F_2 = \Delta m \omega^2 r$, где r – расстояние от выделенного элемента жидкости до оси вращения. Эта сила, подобно силе $\boldsymbol{F_1}$, пропорциональна массе элементарного объема и направлена в сторону уменьшения давления, то есть к оси, вокруг которой вращается трубка. Силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, складываясь геометрически, дают силу Архимеда $\boldsymbol{F}_{\text{А}}$, действующую на вращающийся выделенный объем жидкости. Отметим, что Архимедова сила в данном случае направлена под углом к вертикали.

Так как в условии сказано, что пробка легкая (что означает, что ее масса много меньше массы Δm вытесненной ею жидкости), то действующую на пробку силу тяжести можно не учитывать, и принимать во внимание только силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$. Для того, чтобы пробка покоилась, сумма этих сил не должна иметь составляющей, направленной вдоль трубки, то есть должна быть перпендикулярна трубке.

Из рисунка 1 видно, что для этого должно выполняться соотношение:

$$F_2 \sin\alpha = F_1 \cos\alpha$$

или

$$\Delta m \omega^2 \frac{l}{2} \sin^2\alpha = \Delta m g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{l}}.$$

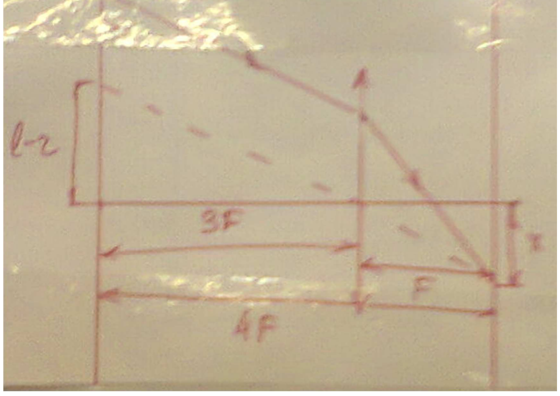
Отметим, что положение пробки при данной частоте вращения будет устойчивым. Действительно, при неизменной составляющей силы Архимеда $\boldsymbol{F_1}$, обусловленной силой тяжести, перемещение пробки вверх приводит к увеличению ее расстояния до оси вращения, в результате чего увеличивается составляющая силы Архимеда $\boldsymbol{F_2}$. В результате появляется составляющая силы, направленная вдоль трубки вниз, которая возвращает пробку в исходное положение. При смещении пробки вниз картина обратная.

2. Тепловая мощность спирали $P = I^2R = I^2R_0\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$. Мощность же потерь $N = \kappa(T - T_0)$. Для равновесной температуры T получаем:
$$I^2R_0\left(1 + \alpha(T - T_0)\right) = \kappa(T - T_0),$$
откуда
$$T = T_0 + \frac{I^2R_0}{\kappa - I^2R_0\alpha}.$$
Очевидно, при $\kappa \leq I^2R_0\alpha$ тепловая мощность спирали больше мощности потерь при любой температуре. Тогда температура спирали будет неограниченно возрастать. При $\kappa > I^2R_0\alpha$ ответ приведен.
Примечание. В сборнике задач Савченко это задача 8.3.48.

3. Давление в точке А выражается известной формулой $p = \rho g H$, где H – высота уровни жидкости в трубе. Пусть M – масса жидкости в трубе. Выразим ее через H. $M = \rho(V_1 + V_2)$, где $V_1 = \pi d^2 H/4\cos\varphi$ – объем в тонком колене, $V_2 = \pi d^2 H/\sin\varphi$ – объем в толстом колене. Выражая высоту уровня жидкости H через массу M, получаем следующее выражение для давления в точке А:
$$p = \frac{Mg}{\pi d^2} \cdot \frac{2\sin 2\varphi}{\sin\varphi + 4\cos\varphi}.$$
Исследовав эту функцию, получаем, что максимальное давление в точке А получается при $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{4}\right)$.

4. Во время нагрева первого литра воды часть энергии, пропорциональная разности времен $t_1 - t_2$, идет на разогрев конфорки. Так как через время t_1 вода закипает, то это означает, что к этому моменту времени конфорка полностью разогрелась, и далее все выделяемое ею тепло будет идти только на нагрев второго литра воды. Поэтому мощность конфорки
$$N = \frac{C\rho V\Delta T}{t_2},$$
а запасенная в ней тепловая энергия
$$Q = N(t_1 - t_2) = C\rho V\Delta T \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_2}.$$
Здесь $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, $\Delta T = 100$°C. После выключения конфорки вся запасенная в ней энергия пойдет на испарение воды массой
$$\Delta m = \frac{Q}{L} = \frac{C\rho V\Delta T}{L} \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_2} \approx 91 \text{ г.}$$

5. Построим изображение тени, учитывая, что пленка в фотоаппарате расположена в фокальной плоскости. Из построения (см. рисунок) следует, что $x = (l - r)/3$. Можно найти область тени и другим способом, предварительно отыскав положение изображения линейки.



10 класс

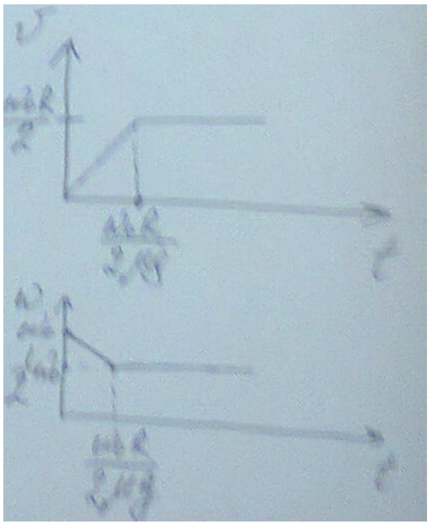
1. Рассмотрим движение кольца от начала до конца проскальзывания. На кольцо действует только сила трения $F_{тр} = \mu mg$, сонаправленная скорости кольца. Тогда ускорение $a = F_{тр}/m = \mu g$. Проинтегрировав это уравнение по времени, получим зависимость скорости кольца от времени:

$$v = \mu g t.$$

Аналогично найдем угловое ускорение кольца:

$$\varepsilon = -\frac{F_{тр}R}{mR^2} = -\frac{\mu g}{R}.$$

Отсюда получаем зависимость угловой скорости от времени:



$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu g t}{R}.$$

В тот момент, когда прекратилось проскальзывание, скорость точки B (см. рисунок) стала равна нулю. Тогда в этот момент $v = \omega R$. Подставив выражения для v и ω, получим:

$$t = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}.$$

Рассчитаем конечную линейную и угловую скорости:

$$\omega_к = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\cdot\frac{\omega_0 R}{2\mu g} = \frac{\omega_0}{2};$$

$$v_к = \mu g \cdot \frac{\omega_0 R}{2\mu g} = \frac{\omega_0 R}{2}.$$

Начальная энергия кольца $W_0 = m\omega_0^2R^2/2$, конечная энергия $W = m\omega_к^2R^2/2 + {}$ ${}+ mv_к^2/2 = m\omega_0^2R^2/4$. Тогда выделилась теплота $Q = W_0 - W = m\omega_0^2R^2/4$, и в теплоту ушло $x = Q/W_0 = 0{,}5$ начальной энергии. Зависимости линейной и угловой скорости кольца от времени приведены на графиках.

Примечание. В сборнике задач Савченко это задача 2.7.21.

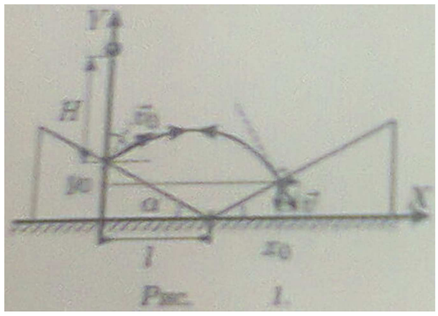
2. См. задачу 2 для 9 класса.

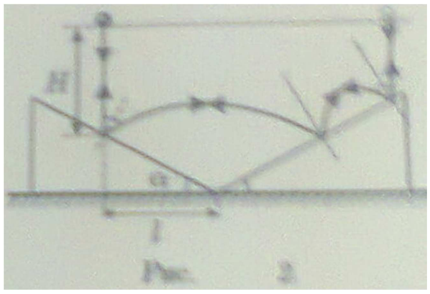
3. См. задачу 5 для 9 класса.

4. Кладем линейку на карандаш, лежащий горизонтально, и уравновешиваем линейку. Далее начинаем крутить карандаш так, чтобы угол между линейкой и вертикалью увеличивался. Когда тангенс угла станет равен коэффициенту трения, линейка сорвется. Аккуратно вращаем карандаш и через маленькие промежутки времени измеряем высоту и длину той части линейки, которая находится выше (или ниже) карандаша. Отсюда получаем оценку коэффициента трения.

11 класс

1. Возможны два вида траекторий:
   1) С возвратом в начальную точку удара о первый клин после отражения от второго клина (см. рис. 1).
   2) С подъемом на ту же высоту, но над другим клином (см. рис. 2).





В первом случае расчет проще, чем во втором. Проведем его. Расположим оси координат как на рисунке 1. Скорость шарика после первого удара равна по модулю $v_0 = \sqrt{2gH}$. Законы движения шарика вдоль осей координат между первым и вторым ударами имеют вид:

$$x = v_0 t \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = v_0 t \sin 2\alpha\,;$$

$$y = l\, tg\, \alpha + v_0 t \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \frac{gt^2}{2}\,;$$

где время t отсчитывается от первого удара. Пусть шарик ударился о вторую плоскость в точке с координатами (x_0, y_0). Они связаны между собой соотношением $y_0 = (x_0 - l) tg\, \alpha$. Так как после второго удара шарик возвращается к первому клину по участку своей прежней траектории, то перед ударом вектор скорости направлен по нормали к плоскости второго клина. Значит, для составляющих скорости шарика в этот момент справедливо соотношение:

$$\frac{v_y}{v_x} = -ctg\, \alpha.$$

Знак “минус” появляется из-за того, что при выбранных направлениях осей координат соответствующая скорость v_y перед ударом отрицательна. Составляющие v_x и v_y между первым и вторым ударами выражаются формулами:

$$v_x = v_0 \sin 2\alpha\,; \quad v_y = v_0 \cos 2\alpha - gt.$$

Время t_0, через которое шарик ударится о второй клин, находим из зависимости $x(t)$:

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0 \sin 2\alpha}.$$

Подставляя значение t_0 и сравнивая уравнения для v_x и v_y, находим x_0:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 2\alpha\, (ctg\, 2\alpha + ctg\, \alpha).$$

Далее, с учетом выражения для t_0, получаем:

$$y_0 = (x_0 - l)\, tg\, \alpha = l\, tg\, \alpha + x_0\, ctg\, 2\alpha - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \sin^2 2\alpha}.$$

Подставляя в последнее соотношение найденное x_0 и учитывая, что $v_0^2/g = 2H$, имеем:

$$H = \frac{l\, tg\, \alpha}{\sin^2 2\alpha\,(ctg\, 2\alpha + ctg\, \alpha)(ctg\, \alpha + 2\, tg\, \alpha - ctg\, 2\alpha)} = \frac{2l\, tg\, \alpha\,(1 + tg^2\, \alpha)^2}{(3 - tg^2\, \alpha)(1 + 5\, tg^2\, \alpha)}.$$

Из полученной формулы следует, что данное решение существует при $tg\, \alpha < \sqrt{3}$, то есть при $\alpha < \pi/3$.

2. До того, как поршень покинул баллон, систему можно считать замкнутой. По законам сохранения импульса и энергии:

$$(M + nM_0)v_1 - mu = 0; \quad (1)$$

$$(M + nM_0)v_1^2/2 + mu^2/2 = \Delta U; \quad (2)$$

где v_1 – скорость баллона при выходе поршня; u – скорость поршня в этот же момент; ΔU – изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа:

$$\Delta U = 3nR\Delta T/2 = 3nR\left(T - T_f\right)/2; \quad (3)$$

здесь T_f – температура газа при выходе поршня из баллона, которую можно определить из условия адиабатичности процесса:

$$pV^\gamma = const.$$

Используя уравнение состояния идеального газа $pV = nRT$, по-другому получится $TV^{\gamma-1} = const, TV^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$.

Известно, что $V_f = 2V$ и показатель адиабаты равен $\gamma = 5/3$, получим конечную формулу для температуры:

$$T_f = T\left(V/V_f\right)^{\gamma-1} = T/2^{2/3} = 2^{-2/3}T. \quad (4)$$

Решая уравнения (1) – (4), получим:

$$v_1 = \sqrt{3\left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right)\frac{mnRT}{(M+nM_0)(m+nM_0+M)}}. \quad (5)$$

Если масса газа nM_0 намного меньше массы баллона M и поршня m, тогда уравнение (5) упрощается:

$$v_1 = \sqrt{3\left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right)\frac{mnRT}{M(m+M)}}. \quad (6)$$

После вылета поршня скорость баллона дополнительно возрастает на значение v_2 за счет ударов молекул о дно сосуда. Каждый атом передает импульс:

$$p_0 = 2m_{\text{а}}\Delta\bar{v}_x,$$

где $m_{\text{а}}$ – масса атома; $m_{\text{а}} = M_0/N_A$; а скорость $\bar{v}_x$ можно определить через среднеквадратичную скорость атомов:

$$\bar{v}_x = \sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}}.$$

При упругих соударениях баллон получает усредненный импульс:

$$p = \frac{2M_0}{N_A}\sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}};$$

Все вычисления сделаны в предположении о том, что скорость баллона много меньше скорости хаотического движения атомов. Помним, что только половина атомов соударяется с дном, тогда полный импульс, полученный баллоном

$$p_g = \frac{1}{2}nN_A p = nM_0\sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}}.$$

и дополнительный рост скорости баллона

$$v_2 = \frac{p_g}{M} = n\frac{M_0}{M}\sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}}.$$

Используя формулу для среднеквадратичной скорости

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT_f}{M_0}},$$

подставляя выражение для конечной температуры, получим конечное выражение для скорости:

$$v_2 = 2^{-\frac{1}{3}}\frac{n\sqrt{M_0RT}}{M}.$$

В итоге конечная скорость равна:

$$v = v_1 + v_2 = 3\left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right)\frac{mnRT}{(M + nM_0)(m + nM_0 + M)} + 2^{-\frac{1}{3}}\frac{n\sqrt{M_0RT}}{M} \approx$$

$$\approx \sqrt{3\left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right)\frac{mnRT}{M(m + M)}} + 2^{-\frac{1}{3}}\frac{n\sqrt{M_0RT}}{M}.$$

3. Поскольку магнитное поле работы не совершает, перед соударением в точке В обе частицы имеют одинаковые по модулю скорости $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$. Так как после соударения первая частица летит по горизонтали, то для ее скорости v_1' в этот момент выполняется условие баланса силы тяжести и силы Лоренца:

$$Mg = QBv_1' \Rightarrow v_1' = \frac{Mg}{QB}.$$

Из закона сохранения импульса частиц при соударении в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, получаем:

$$Mv_1 = Mv_1' + Mu_x;$$
$$mv_2 = mu_y;$$

где u_x и u_y – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости второй частицы после удара. Из этих уравнений находим, что $u_y = v_2$ и $m = M(v_1 - v_1')/u_x$. Вторая частица движется в однородном поле силы тяжести, поэтому для полного времени ее движения от С до Е имеем: $t_{\text{CE}} = t_{\text{CB}} + t_{\text{BE}}$. Отсюда для времени движения от В до Е получаем $t_{\text{BE}} = t_{\text{CE}} - t_{\text{CB}}$, где $l = u_x t_{\text{BE}}$; $t_{\text{CE}} = \sqrt{2H/g}$; $t_{\text{CB}} = \sqrt{2h/g}$. Следовательно, $u_x = l\sqrt{g}/\left(\sqrt{2H} - \sqrt{2h}\right)$ и для массы второй частицы получаем следующее выражение:

$$m = M\frac{\left(\sqrt{2gh} - \frac{Mg}{QB}\right)\left(\sqrt{2H} - \sqrt{2h}\right)}{l\sqrt{g}}.$$

4. Отклоним шарик на небольшое расстояние x_1, далее отпустим и измерим, на какое расстояние x_2 он отклонится после полного колебания. Логарифм их отношения равен αt. Далее, после некоторых преобразований, находим добротность.