

1. Ядро атому дейтерію (ізоотопу водню) складається з протона та нейтрона. В моделі, побудованій на основі механіки Ньютона та електростатики, це ядро розглядають як систему з двох частинок маси m_1 та m_2 , які з'єднані між собою еластичним шнуром змінної довжини. Вважається, що частинка маси m_1 має електричний заряд $q>0$, а частинка маси m_2 електронейтральна і що в деякий момент часу в такій системі вмикається електростатичне поле, потенціал якого $\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\lambda x}$. Під дією цього поля заряджена частинка починає рухатися з прискоренням. При цьому на неї починає також діяти сила опору з боку шнура, яку можна моделювати за допомогою співвідношення $F_{\text{оп}} = -\gamma(t)v_1(t)$, де $v_1(t)$ – швидкість частинки, $\gamma(t) = A\sqrt{E(t)}$, $E(t)$ – повна енергія зарядженої частинки після включення електричного поля. 1) Знайдіть розмірність констант λ і A . 2) На основі законів Ньютона та електростатики обґрунтуйте і запишіть рівняння руху зарядженої і незарядженої частинок. 3) Знайдіть, як будуть залежати від часу координати $x_1(t)$ та $x_2(t)$ частинок після включення електричного поля (вважати, що до включення електричного поля система рухається прямолінійно з постійною швидкістю v_0 , направленою вздовж шнура у додатному напрямку осі Ox , а довжина шнура є сталою і дорівнює l_0 , а також що завжди справедливо $0 < m_1 \lambda^2 / 2A^2 < 1$). 4) Знайдіть момент часу t_0 , коли в системі вмикається електричне поле. 5) При перевиконанні довжини $2l_0$ або при скороченні її до 0 шнур розривається і частинки рухаються незалежно (ядро дейтерію розпалося). З'ясуйте, чи реалізується якась із цих ситуацій і якщо так, то доведіть це. *Підказка: залежність від часу координати зарядженої частинки шукайте у вигляді $x_1(t) = \ln[Bt^\beta]/\lambda$, де B і β – невідомі параметри.*

2. Визначте, якою мінімально може бути температура T у циліндрі поршневого двигуна водного скутера із водометом, к.к.д. якого η , якщо скутер рухається зі сталою швидкістю, вода втікає у водомет зі швидкістю руху скутера, а температура вихлопних газів T_0 . Площа перерізу вхідного отвору труби водомету - S_1 , а вихідного - S_2 .

3. На шляху променів від віддаленого джерела світла поставили увігнуто-опуклу лінзу. У променях, відбитих від увігнутої поверхні лінзи, отримали дійсне зображення джерела на відстані $a=5$ см. Знайдіть радіус кривини увігнутої поверхні лінзи. Перевернувши лінзу, у відбитих променях, на подив, також отримали дійсне зображення джерела, але на відстані $b=6$ см. Знайдіть оптичну силу лінзи. Приймаючи коефіцієнт заломлення речовини лінзи $n=1.5$, визначіть радіус опуклої поверхні лінзи.

4. У лісі, оточеному непроникним парканом, живе N_1 зайців та N_2 лисиць. Зайці їдять траву, її кількість вважається достатньою для годівлі всіх зайців. За відсутності лисиць швидкість зростання кількості зайців $dN_1/dt = K_1 N_1$, $K_1 > 0$. Лисиці харчуються тільки зайцями. За відсутності зайців кількість лисиць спадає у відповідності до рівняння $dN_2/dt = -K_2 N_2$, $K_2 > 0$. Зустрічі лисиць і зайців мають наслідком зменшення кількості зайців і збільшення кількості лисиць. Вважати, що ймовірність зустрічі зайця й лисиці пропорційна добутку $N_1 \cdot N_2$ (відповідні коефіцієнти пропорційності введіть самостійно). 1) Знайдіть рівноважні кількості зайців N_{10} та лисиць N_{20} . 2) Вважаючи, що $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ та $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, причому $|n_{1,2}(t)| \ll N_{10,20}$, знайдіть частоту коливань величин n_1 та n_2 . 3) Який зсув фаз між коливаннями кількості зайців та лисиць та яке відношення амплітуд цих коливань?

5. Довгий плазмовий циліндр із концентрацією електронів n і температурою T вміщений у поздовжнє магнітне поле з індукцією B . 1) Знайдіть густину поверхневого струму циліндра й поясніть механізм його виникнення. 2) Знайдіть тиск, зумовлений силою Ампера, що виникає при взаємодії цього струму із зовнішнім магнітним полем. 3) Наскільки зменшиться індукція магнітного поля всередині плазмового циліндра? Іони плазми вважати нерухомими. Вважати, що в плазмі $\mu = 1$.

Задачі запропонували С.Й.Вільчинський (1), В.П.Сохацький (2-3), І.О.Анісімов (4-5).

1. Ядро атома дейтерия (изотопа водорода) состоит из протона и нейтрона. В модели, построенной на основе механики Ньютона и электростатики, это ядро рассматривают как систему из двух частиц массой m_1 и m_2 , соединенных эластичным шнуром переменной длины. Считается, что частица массы m_1 имеет электрический заряд $q>0$, а частица массы m_2 электронейтральна и что в некоторый момент времени в такой системе включается электростатическое поле, потенциал которого $\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\lambda x}$. Под действием этого поля заряженная частица начинает двигаться с ускорением. При этом на нее начинает также действовать сила сопротивления со стороны шнура, которую можно смоделировать с помощью соотношения $F_{\text{оп}} = -\gamma(t)v_1(t)$, где $v_1(t)$ – скорость частицы, $\gamma(t) = A\sqrt{E(t)}$, $E(t)$ – полная энергия заряженной частицы после включения электрического поля. 1) Найдите размерность констант λ и A . 2) На основе законов Ньютона и электростатики обоснуйте и запишите уравнение движения заряженной и незаряженной частиц. 3) Найдите, как будут зависеть от времени координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ частиц после включения электрического поля (считать, что до включения электрического поля система движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0 , направленной вдоль шнура в положительном направлении оси Ox , а длина шнура постоянна и равна l_0 , а также что всегда справедливо $0 < m_1 \lambda^2 / 2A^2 < 1$). 4) Найдите момент времени t_0 , когда в системе включается электрическое поле.

5) При превышении длины $2l_0$ или при сокращении ее до 0 шнур разрывается и частицы движутся независимо (ядро дейтерия распалось). Выясните, реализуется ли какая-нибудь из этих ситуаций и если да, то докажете это. *Подсказка: зависимость времени координаты заряженной частицы ищите в виде $x_1(t) = \ln[Bt^\beta]/\lambda$, где B и β – неизвестные параметры.*

2. Определите, какой минимально может быть температура T в цилиндре поршневого двигателя водного скутера с водометом, к.п.д. которого η , если скутер движется с постоянной скоростью, вода втекает в водомет со скоростью движения скутера, а температура выхлопных газов T_0 . Площадь сечения входного отверстия водозаборной трубы - S_1 , а выходного - S_2 .

3. На пути лучей от удаленного источника света поставили вогнуто-выпуклую линзу. В лучах, отраженных от вогнутой поверхности линзы, получили действительное изображение источника на расстоянии $a=5$ см. Найдите радиус кривизны вогнутой поверхности линзы. Перевернув линзу, в отраженных лучах, на удивление, тоже получили действительное изображение источника, но на расстоянии $b=6$ см. Найдите оптическую силу линзы. Принимая коэффициент преломления вещества линзы $n=1.5$, определите радиус выпуклой поверхности линзы.

4. В лесу, окруженному непроницаемым забором, живет N_1 зайцев и N_2 лисиц. Зайцы едят траву, ее количество считается достаточным для питания всех зайцев. При отсутствии лисиц скорость возрастания количества зайцев $dN_1/dt = K_1 N_1$, $K_1 > 0$. Лисицы питаются только зайцами. При отсутствии зайцев количество лисиц падает в соответствии с уравнением $dN_2/dt = -K_2 N_2$, $K_2 > 0$. Встречи лисиц и зайцев имеют следствием уменьшение количества зайцев и увеличение количества лисиц. Считать вероятность встречи зайца и лисицы пропорциональной произведению $N_1 \cdot N_2$ (соответствующие коэффициенты пропорциональности введите самостоятельно). 1) Найдите равновесное количество зайцев N_{10} и лисиц N_{20} . 2) Считая, что $N_1(t) = N_{10} + n_1(t)$ и $N_2(t) = N_{20} + n_2(t)$, причём $|n_{1,2}(t)| \ll N_{10,20}$, найдите частоту колебаний величин n_1 и n_2 . 3) Каков сдвиг фаз между колебаниями количества зайцев и лисиц и каково отношение амплитуд этих колебаний?

5. Длинный плазменный цилиндр с концентрацией электронов n и температурой T помещен в продольное магнитное поле с индукцией B . 1) Найдите плотность поверхностного тока цилиндра и объясните механизм его возникновения. 2) Найдите давление, обусловленное силой Ампера, которая возникает при взаимодействии этого тока с внешним магнитным полем. 3) Насколько уменьшится индукция магнитного поля внутри плазменного цилиндра? Ионы плазмы считать неподвижными. Считать, что в плазме $\mu = 1$.

Задачи предложили С.И.Вильчинский (1), В.П.Сохацкий (2-3), И.А.Анисимов (4-5).