Задача № 2

Условие: Шар массой $2m$ бросают вертикально вверх со скоростью v_0. К шару привязана легкая абсолютно жесткая нить длиной[1] $l < v_0^2/2g$, к другому концу которой привязан шар массой m. Через какое время t и на какой высоте h шары столкнутся?

Решение: Рассмотрим движение шаров до столкновения. Вначале первый (тяжелый) шар движется вверх равнозамедленно, а второй (легкий) покоится. Когда тяжелый шар достигнет высоты l, нить натянется, и произойдет "удар" через нить (то, что он достигнет этой высоты, следует из неравенства в условии). Непосредственно перед этим его скорость $u_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$. Дальнейшее сильно зависит от свойств нити и шаров, например от жесткости и упругости нити и модуля Юнга вещества шаров. Разберем два крайних случая: абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара.

1. *Абсолютно упругий удар.* В этом случае в результате удара сохраняются и импульс, и механическая энергия. Скорости u_1 и u_2 шаров (см. рис. 2.1) непосредственно после него определяются соответствующими законами сохранения:

$$\begin{cases} 2mu_0 = 2mu_1 + mu_2, \\ mu_0^2 = mu_1^2 + \dfrac{mu_2^2}{2}. \end{cases}$$

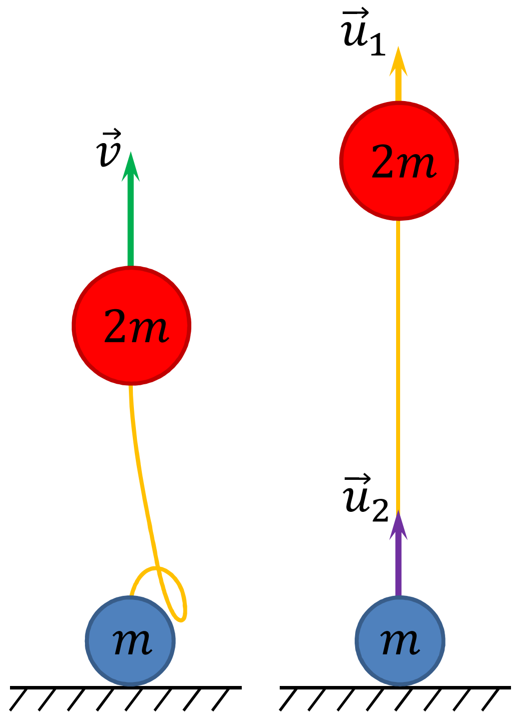

Рис. 2.1. Слева изображен момент до "удара". Справа — момент непосредственно после него.

Эти уравнения легко привести к виду:

$$2u_0 = 2u_1 + u_2, \tag{1}$$
$$2u_0^2 = 2u_1^2 + u_2^2. \tag{2}$$

Выразим u_2 из (1)

$$u_2 = 2(u_0 - u_1)$$

и подставим в (2):

$$2u_0^2 = 2u_1^2 + 4(u_0 - u_1)^2 \Leftrightarrow 3u_1^2 - 4u_0u_1 + u_0^2 = 0.$$

Решения этого квадратного уравнения

$$u_1 = \frac{2u_0 \pm \sqrt{4u_0^2 - 3u_0^2}}{3}; \qquad u_1 = u_0, \quad u_1 = \frac{u_0}{3}.$$

Первый корень не подходит, он соответствует скорости до столкновения. Тогда $u_1 = u_0/3$ и $u_2 = 2(u_0 - u_1) = 4u_0/3$.

После такого перераспределения скоростей оба шара будут двигаться с ускорением g, направленным вниз. Перейдем в систему отсчета, связанную с легким шаром. В этой системе отсчета тяжелый шар движется равномерно со скоростью $u_2' = u_1 - u_2 = -u_0$ (вниз). Так как начальное расстояние между шарами l, то время между моментом максимального расстояния между шарами и моментом столкновения $t_2 = l/u_0$.

[1]В исходном условии в формуле было $l < v_0/2g$, что, очевидно, неверно из соображений размерности, что какбе символизирует

Найдем время t_1 между началом движения и моментом максимального расстояния между шарами. По формуле равноускоренного движения

$$v_0 - u_0 = gt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 - u_0}{g}. \tag{3}$$

Заметим, что эта формула верна и во втором случае (абсолютно неупругого удара через нить). Искомое время

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 - u_0}{g} + \frac{l}{u_0} = \frac{v_0 - u_0}{g} + \frac{v_0^2 - u_0^2}{2gu_0} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{-3p^2 + 2p + 1}{2p}, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{u_0}{v_0} = \sqrt{1 - \frac{2gl}{v_0^2}}, \quad 0 < p < 1.$$

Найдем высоту, на которой произошло столкновение, при помощи уравнения движения легкого шара. Этот шар двигался вверх равнозамедленно с ускорением g и начальной скоростью $u_2 = 4u_0/3$ в течение времени t_2. По формуле равноускоренного движения

$$h = u_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{4l}{3} - \frac{gl^2}{2u_0^2} = l\left(\frac{4}{3} - \frac{v_0^2 - u_0^2}{4u_0^2}\right) = l\left(\frac{4}{3} - \frac{1 - p^2}{4p^2}\right) = l \cdot \frac{19p^2 - 3}{12p^2}. \tag{5}$$

Выражение, определяемое формулой (5), в принципе может быть меньше нуля. Это соответствует случаю, когда легкий шар столкнется с опорой перед столкновением с тяжелым шаром. Далее шар отразится от опоры, потом снова упадет и отразится от опоры и т.д. Таких столкновений в принципе может быть сколь угодно много. Найдем время и место столкновения шаров в общем случае, считая столкновения легкого шара с опорой абсолютно упругими. Так как при соударении с опорой шар изменяет свою скорость на $2u_2$ в направлении другого шара, то в выбранной нами СО это выглядит, как будто тяжелый шар мгновенно увеличивает скорость на те же $2u_2$. Такие увеличения повторяются через промежуток времени $\Delta t = 2u_2/g = 8u_0/3g$.

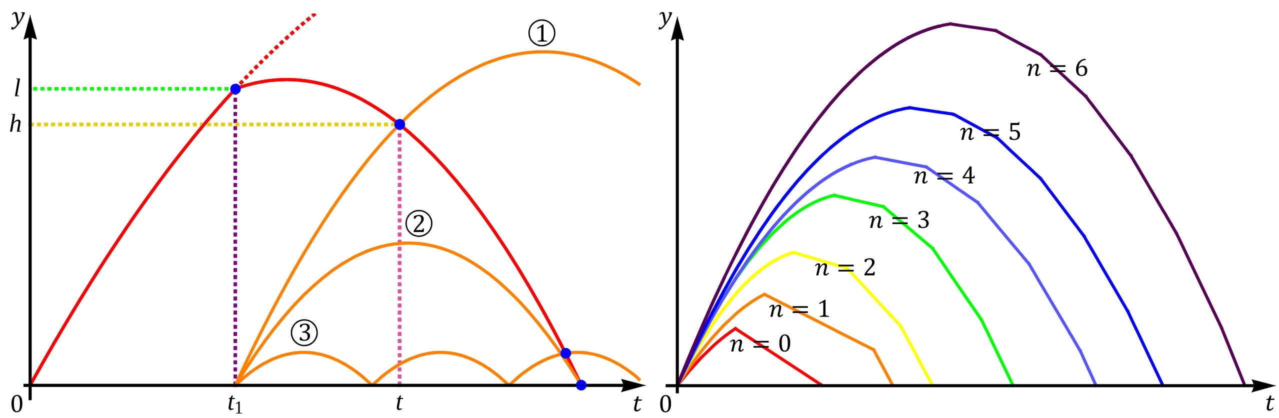

Рис. 2.2. Слева изображен график зависимости вертикальной координаты $y(t)$ шаров от времени для случая абсолютно упругого столкновения, справа — зависимость расстояния между шарами от времени, т.е. координата в системе отсчета, связанной с легким шаром.

Этот случай наглядно иллюстрирует рис. 2.2. Слева изображен схематический график зависимости вертикальной координаты, отсчитанной от опоры, от времени. Для тяжелого шара (изображен красным) представляет собой две ветки параболы, переходящие одна в другую через излом, что связано с резким скачком скорости. Для легкого шара (изображен оранжевым) представляет собой параболу или набор парабол, переходящих одна в другую на оси Ot (соответствуют столкновениям с опорой). На рисунке показаны кривые, соответствующие трем сценариям: в первом из них легкий шар столкнулся с тяжелым перед столкновением с опорой, во втором легкий столкнулся с опорой и с тяжелым одновременно, в третьем он успел столкнуться с опорой $n = 2$ раза перед столкновением с тяжелым шаром. Справа изображен график зависимости расстояния между шарами от времени. Он представляет собой параболу, переходящую затем в ломаную линию: вначале тяжелый шар движется свободно вверх, а легкий покоится; затем после удара через нить шары движутся равномерно относительно друг друга. Изломы вызваны ударами легкого шара об опору.

Найдем количество n таких полных промежутков до столкновения (оно равно количеству столкновений легкого шара с опорой). Путь, пройденный (тяжелым) шаром в течение первого промежутка времени $l_1 = u_0 \Delta t$, в течение 2-го промежутка $l_2 = (u_0 + 2u_2)\,\Delta t$, …, в течение n-го промежутка $l_n = (u_0 + 2\,(n-1)\,u_2)\,\Delta t$. Полный путь за это время

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = nu_0\Delta t + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2u_2\Delta t = \frac{32n^2u_0^2}{9g} - \frac{8nu_0^2}{9g} = \frac{8u_0^2}{9g}\left(4n^2 - n\right). \tag{6}$$

Необходимо найти такое n, что $L_n \leqslant l$, но $L_{n+1} > l$. Для этого решим уравнение $L_n = l$ относительно n:

$$l = \frac{8u_0^2}{9g}\left(4n^2 - n\right) \Leftrightarrow 4n^2 - n - \frac{9gl}{8u_0^2} = 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1}{8}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{18gl}{u_0^2}}\right). \tag{7}$$

Если положительный корень n_1 этого уравнения (с плюсом перед радикалом) целый, то он и есть искомым числом. Действительно, $L_{n_1} = l$ по уравнению, а также, очевидно, $L_{n_1+1} > L_{n_1} = l$. Если же он нецелый, то искомое число — целая часть n_1 (обозначим ее $\lfloor n_1 \rfloor$). Это легко видеть из следующих соображений: так как функция $f(x) = \dfrac{8u_0^2}{9g}\left(4x^2 - x\right)$ возрастает при положительных аргументах, больших 1, и $\lfloor n_1 \rfloor \leqslant n_1 < \lfloor n_1 \rfloor + 1$, то $f\left(\lfloor n_1 \rfloor\right) \leqslant f(n_1) < f\left(\lfloor n_1 \rfloor + 1\right)$. Учитывая уравнения (6) и (7), получим $L_n \leqslant l < L_{n+1}$.

Найденную величину можно записать в безразмерном виде через коэффициент p:

$$n = \left\lfloor \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\left(v_0^2 - u_0^2\right)}{u_0^2}}\right)\right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\left(1 - p^2\right)}{p^2}}\right)\right\rfloor.$$

В течение времени $n\Delta t$ шар пройдет расстояние L_n, определяемое формулой (6). Оставшееся расстояние

$$\Delta l = l - L_n = l - \frac{8u_0^2}{9g}\left(4n^2 - n\right)$$

шар пройдет со скоростью $u_0 + 2nu_2$. Потраченное на это время

$$t_2 = \frac{\Delta l}{u_0 + 2nu_2} = l \cdot \frac{1 - \dfrac{8u_0^2}{9gl}\left(4n^2 - n\right)}{u_0\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)} = \frac{v_0}{g}\cdot\frac{1 - p^2\left(1 + \dfrac{16}{9}n(4n-1)\right)}{2p\left(\dfrac{8n}{3} + 1\right)}. \tag{8}$$

Полное время с учетом формул (3) и (8)

$$t = t_1 + n\Delta t + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \left(\frac{8n}{3} - 1\right)p + \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9}n(4n-1)\right)}{2p\left(\frac{8n}{3}+1\right)}\right). \tag{9}$$

Из формулы равноускоренного движения с учетом формулы (8) находим высоту, на которой произошло столкновение:

$$h = u_2 t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = l \cdot \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9}n(4n-1)\right)}{(1-p^2)\left(\frac{8n}{3}+1\right)}\left(\frac{4}{3} - \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9}n(4n-1)\right)}{4p^2\left(\frac{8n}{3}+1\right)}\right). \tag{10}$$

Можно убедиться, что при $n = 0$ формулы (9) и (10) переходят в (4) и (5) соответственно. На рис. 2.3 изображен график зависимости обезразмеренного времени полета от характерного параметра k. График имеет изломы, так как функция содержит в себе целую часть числа (разрывов быть не может, так как они означали бы резкое изменение промежутка времени при малом изменении начальной скорости или длины нити). При $k \to \infty$ время τ стремится к нулю.

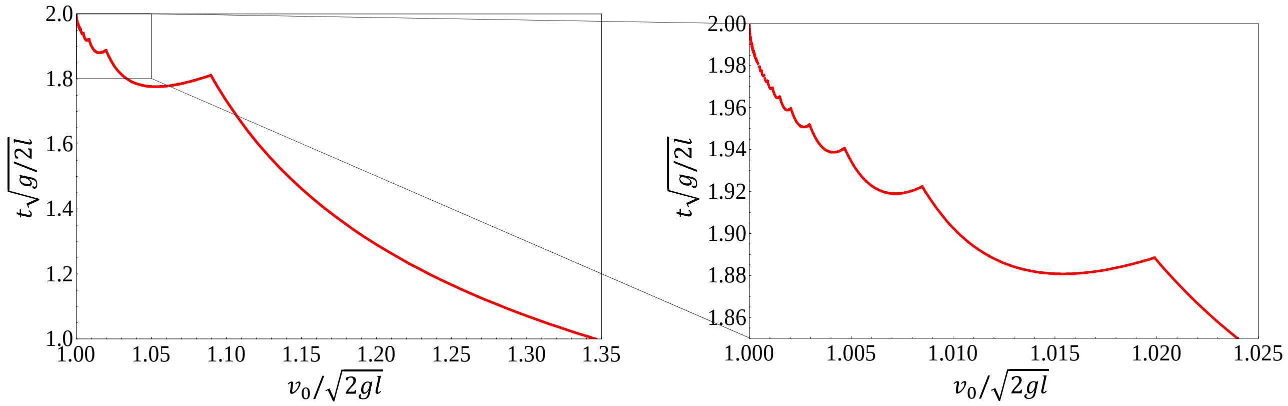

Рис. 2.3. Зависимость безразмерного времени $\tau = t\sqrt{g/2l}$ от характерной величины $k = \left(1 - p^2\right)^{-1/2} = v_0/\sqrt{2gl}$.

2. *Абсолютно неупругий удар.* В этом случае сохраняется импульс, но не механическая энергия. Скорости же шаров уравниваются: $u_1 = u_2$ (обозначения прежние). С учетом уравнения (1) получим $u_1 = u_2 = 2u_0/3$.

Проанализируем далее движение шаров, как в предыдущем случае. Единственное отличие от него в том, что легкий шар неизбежно столкнется с опорой перед столкновением с тяжелым шаром (соответственно, $n \geqslant 1$). Перейдем, как и в первом случае, в систему отсчета, связанную с легким шаром. В ней непосредственно после "удара" через нить (тяжелый) шар неподвижен. Движение начинается после удара легкого шара об опору. Такие удары будут повторяться вплоть до столкновения шаров с периодом $\Delta t = 2u_2/g = 4u_0/3g$, причем в результате каждого удара скорость шара будет увеличиваться на $2u_2$.

Найдем количество n полных промежутков времени, как в предыдущем случае. Путь, пройденный шаром за первый промежуток времени $l_1 = 0$, в течение 2-го промежутка $t_2 = 2u_2\Delta t$, …, в течение n-го промежутка $l_n = 2(n-1)u_2\Delta t$. Полный путь

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = n(n-1)u_2\Delta t = \frac{8u_0^2}{9g}n(n-1). \tag{11}$$

Решим уравнение $L_n = l$ относительно n:

$$l = \frac{8u_0^2}{9g} n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - n - \frac{9gl}{8u_0^2} = 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{9gl}{2u_0^2}}\right).$$

Искомая величина $n = \lfloor n_1 \rfloor$ (доказательство см. в первом случае). В безразмерном виде это выглядит как

$$n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9\left(1-p^2\right)}{4p^2}}\right) \right\rfloor.$$

В течение времени $n\Delta t$ шар пройдет расстояние L_n, определяемое формулой (11). Оставшееся расстояние

$$\Delta l = l - L_n = l - \frac{8u_0^2}{9g} n(n-1)$$

шар пройдет со скоростью $2nu_2$. Потраченное на это время

$$t_2 = \frac{\Delta l}{2nu_2} = l \cdot \frac{1 - \frac{8u_0^2}{9gl} n(n-1)}{\frac{4n}{3} u_0} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(n-1)\right)\right)}{8pn}. \tag{12}$$

Полное время с учетом формул (3) и (12)

$$t = t_1 + n\Delta t + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \left(\frac{4n}{3} - 1\right)p + \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(n-1)\right)\right)}{8pn}\right). \tag{13}$$

Из формулы равноускоренного движения с учетом формулы (12) находим высоту, на которой произошло столкновение:

$$h = u_2 t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = l \cdot \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(n-1)\right)\right)}{4n\left(1-p^2\right)}\left(\frac{2}{3} - \frac{3\left(1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(n-1)\right)\right)}{16p^2 n}\right). \tag{14}$$

Этот результат похож на полученный в первом случае: сравните формулы (13), (14) и (9), (10). На рис. 2.4 изображен график зависимости обезразмеренного времени полета от характерного параметра k, как на рис. 2.3. При $k \to \infty$ время τ стремится к бесконечности.

В наиболее простом случае при $n = 1$ получим:

$$t = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{-p^2 + 24p + 9}{24p}, \qquad h = l \cdot \frac{41p^2 - 9}{64p^2}.$$

<u>**Ответ:**</u> 1. При абсолютно упругом ударе $t = \frac{v_0}{g}\left(1 + \left(\frac{8n}{3} - 1\right)p + \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(4n-1)\right)}{2p\left(\frac{8n}{3} + 1\right)}\right)$ и

$h = l \cdot \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(4n-1)\right)}{\left(1-p^2\right)\left(\frac{8n}{3} + 1\right)}\left(\frac{4}{3} - \frac{1 - p^2\left(1 + \frac{16}{9} n(4n-1)\right)}{4p^2\left(\frac{8n}{3} + 1\right)}\right)$, где

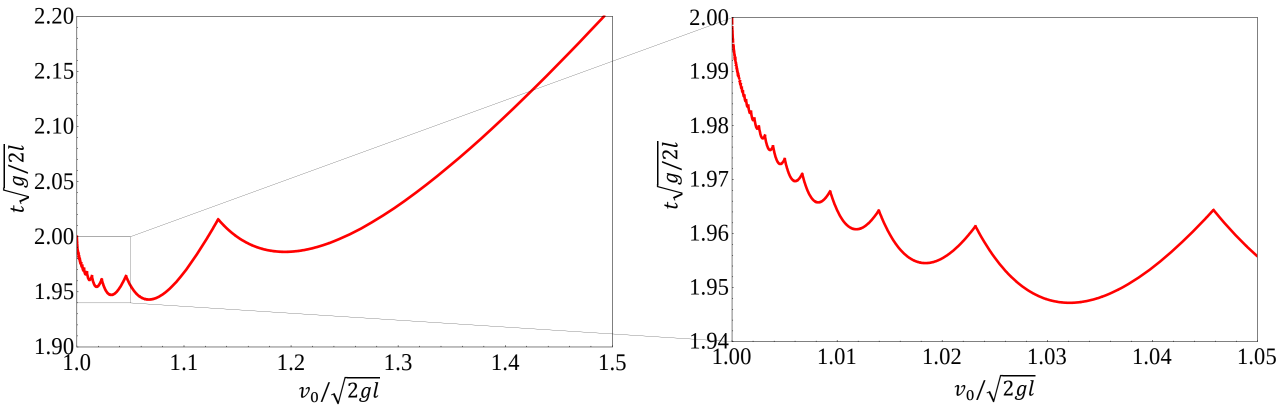

Рис. 2.4. Зависимость безразмерного времени τ от характерной величины k (сравните с рис. 2.3).

$n = \left\lfloor \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{9\left(1-p^2\right)}{p^2}}\right)\right\rfloor$ и $p = \sqrt{1-\frac{2gl}{v_0^2}}$. Если не учесть столкновения легкого шара с опорой, то $n=0$ и формулы приобретают вид $t = \frac{v_0}{g}\cdot\frac{-3p^2+2p+1}{2p}$ и $h = l\cdot\frac{19p^2-3}{12p^2}$.

2. При абсолютно неупругом ударе $t = \frac{v_0}{g}\left(1+\left(\frac{4n}{3}-1\right)p+\frac{3\left(1-p^2\left(1+\frac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{8pn}\right)$ и

$h = l\cdot\frac{3\left(1-p^2\left(1+\frac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{4n\left(1-p^2\right)}\left(\frac{2}{3}-\frac{3\left(1-p^2\left(1+\frac{16}{9}n(n-1)\right)\right)}{16p^2n}\right)$, где

$n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{9\left(1-p^2\right)}{4p^2}}\right)\right\rfloor$. В наиболее простом случае при $n=1$ получим

$t = \frac{v_0}{g}\cdot\frac{-p^2+24p+9}{24p}$ и $h = l\cdot\frac{41p^2-9}{64p^2}$.