Харьковский физико-математический лицей №27

С.А.Лифиц, А.В.Лысакевич

ГЕОМЕТРИЯ-11

Конспекты уроков по теме:

"Тела вращения-2 (сфера, комбинации тел вращения с многогранниками)"

Харьков, 2015 г.

Поурочное планирование (19 часов)

Урок 1. Шар. Сфера.

Урок 2. Части сферы и шара.

Урок 3. Комбинации шара с цилиндром, конусом и усеченным конусом.

Урок 4. Взаимное расположение двух сфер.

Урок 5. Решение задач на взаимное расположение сфер.

Урок 6. Теоремы о касательных и секущих для сферы.

Урок 7. *Самостоятельная работа* по теме: “Шар (сфера). Части сферы и шара”.

Урок 8. Многогранники, вписанные в цилиндр, конус, усеченный конус.

Урок 9. Решение задач на многогранники, вписанные в тела вращения.

Урок 10. Многогранники, описанные около цилиндра, конуса, усеченного конуса.

Урок 11. Многогранники, вписанные в сферу (шар).

Урок 12. Многогранники, описанные около сферы (шара).

Урок 13. *Самостоятельная работа* по теме: “Комбинации тел вращения с многогранниками”.

Урок 14. Нестандартные комбинации тел вращения с многогранниками.

Урок 15. Нестандартные комбинации с многогранниками. Решение задач.

Урок 16. Конические сечения

Урок 17. Обобщающее занятие по теме. Опрос по теории.

Урок 18. Контрольная работа.

Урок 19. Анализ контрольной работы.

Урок 1. Сфера, шар

1°. Определения

1) Вспомним определения сферы и шара:

Определение.

> ***Сферой*** *с центром O и радиусом $R > 0$ называется множество всех точек пространства, удаленных от точки O на расстояние R.*

Такую сферу часто обозначают $S(O, R)$ (от *sphere*).

Определение.

> ***Шаром*** *с центром O и радиусом $R > 0$ называется множество всех точек пространства, удаленных от точки O на расстояние, не превосходящее R.*

Стандартное обозначение $B(O, R)$ (от *ball*).

2) Шар можно получить вращением полукруга вокруг его диаметра, поэтому шар является телом вращения. Сфера является поверхностью вращения, т. к. может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.

2°. Касательная плоскость

1) Определим понятие плоскости касающейся сферы (шара):

Определение.

> *Плоскость называется* касательной *к сфере (шару), если она имеет с ней (с ним) ровно одну общую точку.*

Указанная точка называется *точкой касания* плоскости со сферой (шаром).

2) Как и в случае касательной к окружности на плоскости, касательная к сфере обладает характеристическим свойством:

Теорема (Характеристическое свойство касательной)**.**

Плоскость является касательной к сфере (шару) тогда и только тогда, когда она пересекает эту сферу (шар) и перпендикулярна радиусу, проведенному в их общую точку.

3°. Касательная прямая

1) Кроме касательной плоскости к сфере можно ввести понятие прямой, касающейся сферы:

Определение.

> *Прямая называется* касательной *к сфере (шару), если она имеет с ней (с ним) ровно одну общую точку.*

Снова, указанная точка называется *точкой касания* плоскости со сферой (шаром).

Замечание. *Несложно понять, что существует бесконечно много прямых, касающихся сферы (шара) в данной точке сферы.*

2) Сформулируем и докажем несколько утверждений, связанных с касательной прямой:

Утверждение 1.

Если прямая является касательной к сфере, то она лежит в касательной плоскости, проходящей через точку касания прямой и сферы.

Упражнение: Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Утверждение 2.

Прямая, касающаяся сферы, перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

4°. Сечения шара

1) Из характеристического свойства касательной плоскости следует, что если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то плоскость и сфера имеют единственную общую точку. Несложно понять, что если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то плоскость и сфера не имеют общих точек.

Осталось рассмотреть случай, когда расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса. В этом случае имеет место следующая теорема:

Теорема (О сечении шара плоскостью)**.**

Если расстояние от центра сферы (шара) до плоскости меньше радиуса сферы (шара), то пересечение сферы и плоскости (сечение шара) является окружностью (кругом).

2) Сформулируем несколько следствий из теоремы:

Следствие 1.

Сечения шара равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра шара.

Следствие 2.

Из двух неравных сечений шара больший радиус имеет то, которое ближе к центру.

Следствие 3.

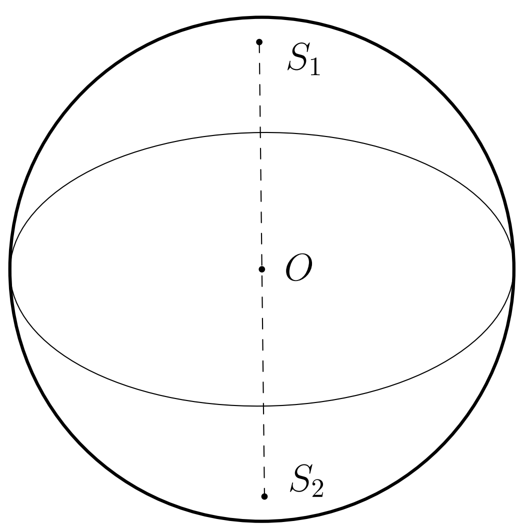
Диаметр шара, перпендикулярен плоскости сечения тогда и только тогда, когда он проходит через центр этого сечения.

Следствие 4.

Среди всех сечений шара наибольший радиус имеет сечение, проходящее через его центр.

3) Сечение, проходящее через центр шара, называется *большим кругом*, а граница этого круга – *большой окружностью сферы.*

4) Ортогональная проекция сферы на плоскость является круг того же радиуса. Поэтому изображением сферы (в указанной проекции) является круг. Чтобы подчеркнуть, что изображена именно сфера, на изображении еще рисуют изображение какой-нибудь большой окружности, которую называют *экватором.* Концы диаметра, перпендикулярного плоскости экватора, называются *полюсами.* Их тоже часто указывают на изображении сферы.



5°. Упражнения

1) Докажите, что через две точки сферы, не являющиеся концами ее диаметра, можно провести единственную большую окружность.

2) Докажите, что любые две большие окружности одной сферы при пересечении делятся пополам.

3) Докажите, что длина меньшей из двух дуг окружности большого круга, проходящие через две данные точки сферы, меньше длины любой другой кривой, лежащей на сфере и соединяющей эти точки (т. е. является т. н. *кратчайшей*).

6°. Формулы для вычисления площади поверхности и объема шара

1) Приведем формулы для вычисления площади поверхности и объема шара радиуса R:

$$S = 4\pi R^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Замечание. *Интересно, что* $S = \dfrac{dV}{dR}$.

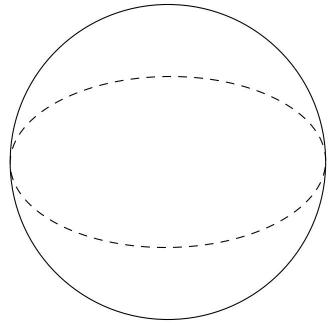
Формулу для объема шара, мы получим на следующем уроке, как частный случай формулы для объема сегмента.

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин, §10.2.

2) Сканави, №11.103, 11.184.

3) На рисунке дано изображение сферы и ее экватора. С помощью циркуля и линейки постройте изображение полюсов сферы.



4) С помощью циркуля и линейки постройте на плоскости отрезок, равный радиусу данного деревянного шара.

Урок 2. Части сферы и шара

1°. Сегмент

1) Плоскость, пересекающая шар, делит его на две части:

Определение.

> ***Шаровым сегментом*** *называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.*

2) Круг, являющийся сечением шара этой плоскостью, называется *основанием* сегмента, а отрезок диаметра шара, перпендикулярного этой плоскости, принадлежащий сегменту, – *высотой* сегмента.

   Замечание. *Понятно, что секущая плоскость делит шар на два сегмента с общим основанием.*

3) Сегмент, основанием которого является большой круг, называется *полушаром.*

   Замечание. *Шаровой сегмент является телом вращения. Он получается вращением кругового сегмента вокруг его оси симметрии.*

4) Аналогично определяется понятие сферического сегмента::

Определение.

> ***Сферическим сегментом*** *называется часть сферы, отсекаемая от нее плоскостью.*

   Основание и *высота* сферического сегмента определяются аналогично основанию и высоте шарового сегмента.

5) Рассмотрим шар радиуса R и его шаровой сегмент высоты H. Тогда площадь соответствующего сферического сегмента и объем сегмента можно вычислить так:

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi RH,$$

   Замечание. *Площадь поверхности сегмента прямо пропорциональна высоте.*

$$V_{\text{сегм}} = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3}H\right).$$

2°. Слой

1) Рассмотрим еще одно подмножество шара:

Определение.

> ***Шаровым слоем*** *называется часть шара, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями.*

2) Круги, получаемые в сечении шара этими плоскостями, называются *основаниями* слоя, а расстояние между секущими плоскостями – *высотой* слоя.

3) Аналогично вводится понятие сферического пояса:

Определение.

> ***Сферическим поясом*** *называется часть сферы, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями.*

Основания и высота сферического пояса определяются однозначно.

4) Поскольку нам уже известны площадь сферы и сегментов, то мы можем найти и площадь поверхности сферического пояса.

$$S_{\text{ш.с.}} = 2\pi RH,$$

Замечание. *Интересно, что площадь сферического пояса не зависит от его расположения, а зависит только от высоты.*

5) Выразить объем шарового слоя, зная только радиус шара и высоты слоя, к сожалению, нельзя.

3°. Сектор

1) Рассмотрим ситуацию, когда имеется коническая поверхность с вершиной в центре шара:

Определение.

> *Одна полость (прямой круговой) конической поверхности с вершиной в центре шара делит шар на две части. Каждая из этих частей называется* ***шаровым сектором****.*

2) Шаровой сектор – тело вращения. Он получается вращением кругового сектора вокруг его оси симметрии. Кроме того, шаровой сектор является объединением конуса с сегментом.

3) Объем и площадь поверхности шарового сектора могут быть найден по формуле
$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

$$S_{\text{сект}} = \pi R(\sqrt{2RH - H^2} + 2H),$$

где R – радиус шара, а H – высота соответствующего шарового сегмента.

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин, §10.3.

2) Атанасян, №716-718, 720, 721.

Урок 3. Комбинации шара с цилиндром, конусом и усеченным конусом.

1°. Описанный шар

1) Дадим определение шара, описанного около цилиндра:

Определение.

> *Шар называется **описанным около цилиндра**, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.*

Если шар описан около цилиндра, то говорят, что цилиндр *вписан* в шар.

2) Оказывается, что для любого цилиндра существует описанный вокруг него шар.

Теорема.

Около всякого цилиндра можно описать шар. Центр описанного шара находится в середине высоты цилиндра, а радиус равен радиусу круга, описанного вокруг осевого сечения цилиндра.

3) Дадим определение шара, описанного около конуса:

Определение.

> *Шар называется **описанным около конуса**, если вершина конуса и окружность его основания лежат на поверхности шара.*

Если шар описан около конуса, то говорят, что конус *вписан* в шар.

4) Сформулируем теорему о шаре, описанном вокруг конуса.

Теорема.

Около всякого конуса можно описать шар. Центр описанного шара есть центр круга, описанного около осевого сечения конуса, а радиус шара равен радиуса этого круга.

5) Дадим теперь определение шара, описанного около усеченного конуса:

Определение.

> *Шар называется **описанным около усеченного конуса**, если окружности оснований усеченного конуса лежат на поверхности шара.*

Если шар описан около усеченного конуса, то говорят, что усеченный конус *вписан* в шар.

6) Сформулируем теорему о шаре, описанном вокруг усеченного конуса.

Теорема.

Около всякого усеченного конуса можно описать шар. Центр описанного шара есть центр круга, описанного около осевого сечения усеченного конуса, а радиус шара равен радиуса этого круга.

2°. Вписанный шар

1) Определим понятие шара, вписанного в цилиндр:

Определение.

> *Шар называется **вписанным в цилиндр**, если он касается всех образующих цилиндра и его оснований.*

Если шар вписан в цилиндр, то цилиндр *описан* около шара.

2) В отличие от описанного шара, вписанный в цилиндр шар существует не всегда:

Теорема.

Для того, чтобы в цилиндр можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы высота цилиндра была равна диаметру его основания.

3) Если высота цилиндра равна диаметру его основания, то цилиндр называется *равносторонним.*

Замечание. *Центр шара, вписанного в равносторонний цилиндр, есть середина высоты цилиндра, а радиус шара равен радиусу цилиндра.*

4) Введем теперь понятие шара, вписанного в конус:

Определение.

> *Шар называется* ***вписанным в конус****, если он касается всех образующих конуса и его основания.*

При этом говорят, что конус *описан* около шара.

5) Для конуса имеет место следующая теорема:

Теорема.

Во всякий конус можно вписать шар. Центром вписанного шара является центр круга, вписанного в осевое сечение конуса, а радиус шара равен радиусу этого круга.

6) Дадим, наконец, определение шара, вписанного в усеченный конус:

Определение.

> *Шар называется* ***вписанным в усеченный конус****, если он касается всех образующих усеченного конуса и его оснований.*

В этом случае говорят, что усеченный конус *описан* около шара.

7) В усеченный конус не всегда можно вписать шар. Имеет место следующая теорема:

Теорема.

Для того, чтобы в усеченный конус можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы его образующая равнялась сумме радиусов оснований.

3°. Решение задач

1) Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанных в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.

2) В конус вписан шар. Докажите, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

3) Вычислите радиусы оснований усеченного конуса, описанного около шара радиуса R, если известно, что отношение площади полной поверхности усеченного конуса к площади поверхности шара равно m.

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин, §10.4.

2) Сканави, 11.082, 11.223.

3) В деревянном шаре термит прогрыз цилиндрический канал, причем высота соответствующего цилиндра равна h. Осью канала является диаметр шара. Найдите объем оставшейся части шара.

   Указание: *Канал состоит из цилиндра и двух сегментов.*

4) Докажите, что отношение объемов шара и описанного около него усеченного конуса равно отношению площадей их полных поверхностей.

Урок 4. Взаимное расположение двух сфер.

1°. Взаимное расположение двух сфер

Рассмотрим две сферы $S_1(O_1, R_1)$ и $S_2(O_2, R_2)$. Обозначим расстояние между их центрами d. Возможны несколько случаев расположения этих сфер:

1) Если $d > R_1 + R_2$, то сферы не пересекаются и расположены одна вне другой.

2) Если $d = R_1 + R_2$, то сферы имеют ровно одну общую точку. В этом случаем говорят, что сферы *касаются.*

3) Если $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$, то сферы пересекаются (имеют более одной общей точки).

4) Если $d = |R_1 - R_2|$, то сферы снова касаются при $R_1 \neq R_2$. В случае $R_1 = R_2$ эти две сферы просто совпадут.

5) Если $d < |R_1 - R_2|$, то сферы не пересекаются и расположены одна внутри другой. В случае, когда $d = 0$, их центры совпадают и сферы называются *концентрическими.*

2°. Касающиеся сферы

1) Мы уже отмечали, что возможны два случая касания сфер: когда $d = R_1 + R_2$ и когда $d = |R_1 - R_2|$. В первом из этих случаев говорят, что *сферы касаются внешним образом*, а во втором – *внутренним образом.*

2) Несложно понять, что в каждом из случаев касания сфер имеет место следующая теорема:

Теорема.

Линия центров сфер проходит через точку их касания.

3) Рассмотрим плоскость α, проходящую через точку касания двух сфер и перпендикулярную их линии центров. Эта плоскость будет *общей касательной* этих двух сфер.

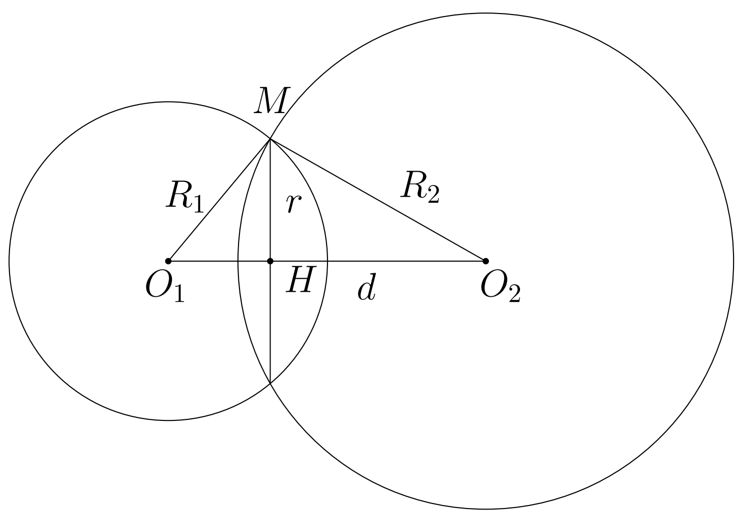
3°. Пересекающиеся сферы

1) Рассмотрим теперь случай пересекающихся сфер:

Теорема.

Пересекающиеся сферы пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна их линии центров.

2) Найдем радиус окружности, по которой пересекаются две сферы, если расстояние между их центрами равно d, а радиусы этих сфер равны R_1 и R_2 ($|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$).



Пусть M – общая точка двух сфер. Рассмотрим пересечение наших сфер с плоскостью, проходящей через точку M и центры сфер O_1 и O_2. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного на O_1O_2. Тогда $MH = r$ – радиус окружности, по которой пересекаются сферы. Заметим, что $r = \dfrac{S}{d}$, где S – площадь треугольника O_1O_2M. По формуле Герона находим площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(R_1 + R_2 + d)(R_1 + R_2 - d)(R_1 - R_2 + d)(-R_1 + R_2 + d)}.$$

Найдем теперь радиус окружности пересечения:

$$r = \frac{\sqrt{(R_1 + R_2 + d)(R_1 + R_2 - d)(R_1 - R_2 + d)(-R_1 + R_2 + d)}}{4d}.$$

4°. Решение задач

1) В сферу S радиуса R вписаны восемь одинаковых сфер меньшего радиуса, каждая из которых касается двух соседних, и все они касаются сферы S в точках большой окружности. Сфера S_1 касается всех восьми маленьких сфер и сферы S. Найдите радиус сферы S_1.

2) На плоскости лежат три равных шара радиуса R, попарно касающиеся друг друга. Четвертый шар касается плоскости и каждого из первых трех шаров. Найдите радиус четвертого шара.

3) На плоскости лежат четыре равных шара, причем три из них попарно касаются друг друга, а четвертый касается двух из этих трех. На эти шары сверху положили два равных шара меньшего радиуса, касающиеся друг друга, причем каждый из них касается трех больших шаров. Найдите отношение радиусов большого и малого шаров.

4) Три шара, радиуса r лежат на нижнем основании цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Найдите высоту цилиндра.

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин, §10.5.

2) Плоскость касается двух касающихся шаров радиусов R и r в точках A и B. Найдите длину отрезка AB.

3) Три шара попарно касаются, а плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Найдите радиусы шаров, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

4) Внутри конуса находятся четыре шара равного радиуса. Три шара касаются его основания, каждый шар касается боковой поверхности конуса, кроме того, каждый шар касается трех других. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

5) При повороте вокруг прямой k на угол 60° сфера S радиусом 5 переходит в сферу S_1, причем длина линии их пересечения равна 6π. Найдите расстояние от центра сферы S до прямой k.

Урок 5. Решение задач на взаимное расположение сфер.

1°. Решение задач

1) Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найдите отношение радиусов шаров.

2) Внутри конуса находятся две сферы радиусов R и r, касающиеся друг друга и боковой поверхности конуса. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, отсеченного от данного конуса плоскостями окружностей касания сфер с данным конусом.

3) Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Найдите радиус сферы.

4) В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

Домашнее задание

1) Радиус основания и высота конуса равны 1. Внутри конуса находятся три шара равного радиуса. Каждый шар касается двух других, основания конуса и боковой поверхности конуса. Найдите радиус каждого из этих шаров.

2) Сканави, 11.220, 11.097.

Урок 6. Теоремы о касательных и секущих для сферы.

1°. Теоремы о касательных и секущих для сферы

1) Рассмотрим взаимное расположение прямой и сферы. Несложно понять, что если расстояние от прямой до центра сферы меньше радиуса, то эта прямая имеет со сферой ровно две общие точки.

   Определение.

   > *Прямая, имеющая со сферой ровно две общие точки называется* ***секущей***.

   При этом отрезок, соединяющий две точки сферы, называется *хордой*.

2) Сформулируем несколько теорем о касательных и секущих к сфере. Все они являются аналогами планиметрических теорем.

Теорема (О квадрате касательной).

Отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны.

Теорема (О произведении отрезков хорд).

Если хорды AB и CD сферы пересекаются в точке X, то $AX \cdot XB = CX \cdot XD$.

Теорема (О квадрате касательной).

Если из точки X, лежащей вне сферы, проведена касательная, пересекающая сферу в точке A, и секущая, пересекающая сферу в точках B и C, то $XA^2 = XB \cdot XC$.

Теорема (О произведении отрезков секущих).

Если из точки X, лежащей вне сферы, проведены две секущие, пересекающие сферу в точке A, B и C, D соответственно, то $XA \cdot XB = XC \cdot XD$.

Все эти теоремы легко свести к планиметрическим, рассмотрев соответствующие плоскости.

2°. Решение задач

1) Сфера радиуса 10 см касается всех сторон ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

2) Через точку M, лежащую внутри сферы, проведены три попарно перпендикулярные хорды AA_1, BB_1 и CC_1, причем $AM = 4$, $BM = 3$, $CM = 2$, $A_1M = 6$. Найдите радиус сферы.

3) В тетраэдре $ABCD$ $AB = 2$, $CD = 4$, а остальные ребра равны 6. На отрезке MN, соединяющем середины ребер AB и CD, как на диаметре построена сфера, которая пересекает ребро BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ.

4) В шаре радиуса $\sqrt{3}$ отрезки MM_1, NN_1 KK_1 – три взаимно перпендикулярных диаметра. Найдите угол и расстояние между прямыми KM и NK_1.

Домашнее задание

1) Светящаяся точка находится вне сферы радиуса r на расстоянии a от нее. Найдите площадь освещенной поверхности сферы.

2) Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника, если стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см, а радиус шара равен 5 см.

3) На сфере радиуса 11 расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, находящейся от центра сферы на расстоянии $\sqrt{59}$. Найдите длину отрезка AA_1, если известно, что $BB_1 = 18$, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $\left(8+\sqrt{2}\right) : \left(8-\sqrt{2}\right)$.

Урок 8. Многогранники, вписанные в тела вращения.

1°. Основные определения и критерии вписанности

1) Дадим определение призмы, вписанной в цилиндр:

Определение.

> *Призма называется* ***вписанной в цилиндр****, если ее основания вписаны в основания цилиндра.*

Цилиндр в этом случае называется *описанным около призмы.*

Замечание. *Боковые ребра призмы, вписанной в цилиндр, являются образующими этого цилиндра.*

2) Сформулируем критерий вписанности призмы:

Теорема.

Для того, чтобы призму можно было вписать в цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой, и около ее основания можно было описать окружность.

3) Из критерия вписанности призмы следует, что около любой прямой треугольной призмы можно описать цилиндр, а также около любой правильной призмы можно описать цилиндр.

4) Дадим теперь определение пирамиды, вписанной в конус:

Определение.

> *Пирамида называется* ***вписанной в конус****, если вершина пирамиды является вершиной конуса, а основание пирамиды вписано в основание конуса.*

В этом случае конус называется *описанным около пирамиды.*

Замечание. *Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются его образующими.*

5) Сформулируем критерий вписанности пирамиды:

   Теорема.

   Для того, чтобы пирамиду можно было вписать в конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды были равны.

6) В частности, около любой правильной пирамиды можно описать конус.

7) Дадим наконец определение усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус:

Определение.

> *Усеченная пирамида называется* ***вписанной в усеченный конус****, если ее основания вписаны в основания усеченного конуса.*

Усеченный конус в этом случае называется описанным вокруг усеченной пирамиды.

8) **Упражнение:** Сформулируйте и докажите критерий вписанности усеченной пирамиды.

2°. Решение задач

1) Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом β при вершине. Диагональ боковой грани, содержащей основание этого треугольника, равна a и наклонена к плоскость основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

2) В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около пирамиды, если ее высота равна H.

3) Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 30°. Боковая поверхность конуса равна $3\pi\sqrt{3}$. Определите объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус.

Домашнее задание

1) Основание прямой призмы – прямоугольник со стороной a, которая образует угол α с диагональю этого прямоугольника. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол β. Определите объем цилиндра, описанного около данной призмы.

2) Сканави, №11.193.

Урок 9. Решение задач на многогранники, вписанные в тела вращения.

1°. Решение задач

1) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Через противоположный катет нижнего основания и вершину угла α верхнего основания проведено сечение, которое образует с плоскостью основания угол φ. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла α нижнего основания к плоскости сечения, равен a. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

2) В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, большая сторона основания которого равна a. Диагональ параллелепипеда образует с его большей боковой гранью угол β, а с плоскостью основания – угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3) Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Все боковые ребра пирамиды равны. Боковая грань пирамиды, которая содержит основание равнобедренного треугольника, образует с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного вокруг этой пирамиды, если ее высота равна H.

4) Площадь полной поверхности конуса равна S. Его образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислите объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в этот конус.

Домашнее задание

1) В правильной треугольной призме через диагонали, которые принадлежат боковым граням и пересекаются в плоскости верхнего основания, проведено сечение. Из вершины нижнего основания, которая не принадлежит сечению, опущен перпендикуляр длиной b на плоскость этого сечения. Он образует с боковым ребром, проходящим через эту вершину, угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

2) Основание прямой призмы – прямоугольник с углом φ между диагоналями. Диагонали одной из боковых граней образует с основанием угол β, а диагональ смежной с ней боковой грани равна m. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

3) В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна l, а плоский угол при вершине – α. Найдите объем конуса, описанного около этой пирамиды.

Урок 10. Многогранники, описанные около тел вращения.

1°. Понятие описанной призмы

1) Для того, чтобы обсуждать призмы, описанные около цилиндров, нам понадобится следующее понятие:

Определение.

> *Плоскость называется* ***касательной к цилиндру****, если она проходит через его образующую и не имеет с цилиндром других общих точек.*

2) Сформулируем критерий того, что плоскость касается цилиндра:

Теорема.

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра, является касательной к нему тогда и только тогда, когда она перпендикулярна осевому сечению цилиндра, проведенному через эту образующую.

3) Теперь дадим определение описанной призмы:

Определение.

> *Призма называется* ***описанной около цилиндра****, если ее основания описаны около оснований цилиндра.*

Цилиндр, в этом случае, называется *вписанным в призму.*

Замечание. *Плоскости боковых граней призмы, описанной около цилиндра, касаются цилиндра.*

4) Сформулируем критерий описанности призмы:

Теорема.

Для того, чтобы призму можно было описать около цилиндра, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой, а в ее основание можно было вписать окружность.

5) Из приведенного критерия описанности следует, что в любую треугольную, а также в любую правильную призму можно вписать цилиндр.

2°. Понятие описанной пирамиды

1) Дадим теперь определение плоскости, касающейся конуса:

Определение.

> *Плоскость называется **касательной к конусу**, если она проходит через его образующую и не имеет с конусом других общих точек.*

2) Сформулируем критерий того, что плоскость касается конуса:

Теорема.

Плоскость, проходящая через образующую конуса, является касательной к нему тогда и только тогда, когда она перпендикулярна осевому сечению конуса, проведенному через эту образующую.

3) Перейдем теперь к понятию описанной пирамиды:

Определение.

> *Пирамида называется **описанной около конуса**, если вершина пирамиды является вершиной конуса, а основание пирамиды описаны около основания конуса.*

Конус, в таком случае, называется вписанным в пирамиду.

Замечание. *Плоскости боковых граней пирамиды, описанной около конуса, являются касательными к конусу.*

4) Приведем теперь критерий описанности пирамиды:

Теорема.

Для того, чтобы пирамиду можно было описать около конуса, необходимо и достаточно, чтобы двугранные углы при основании пирамиды были равны.

5) **Упражнение:** Дайте определение усеченной пирамиды, описанной около усеченного конуса. Сформулируйте и докажите критерий описанности усеченной пирамиды.

3°. Решение задач

1) В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведено сечение. Из вершины нижнего основания, не принадлежащей этой стороне, на плоскость сечения опущен перпендикуляр, длина которого равна a и который образует с плоскостью основания угол φ. Найдите объем цилиндра, вписанного в данную призму.

2) В основании прямой призмы лежит треугольник с углами α и β. Диагональ грани, содержащей прилежащую к данным углам сторону, равна b и образует с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

3) Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ. Около этого конуса описана пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Найдите объем и площадь боковой поверхности пирамиды.

Домашнее задание

1) В правильной треугольной призме через две пересекающиеся диагонали двух боковых граней проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол β. Площадь сечения равна Q. Найдите объем цилиндра, вписанного в данную призму.

2) В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом β при основании. Диагональ грани, содержащей боковую сторону этого треугольника, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если радиус вписанного в нее цилиндра равен r.

3) В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен β. Найдите площадь полной поверхности конуса, вписанного в пирамиду, если ее высота равна h.

4) Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с углом β при основании. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Боковое ребро, проходящее через вершину данного равнобедренного треугольника, наклонено к плоскости основания пирамиды под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду, если ее высота равна h.

Урок 11. Многогранники, вписанные в сферу.

1°. Вписанные многогранники

1) Дадим вначале общее определение вписанного многогранника:

Определение.

> *Многогранник называется* ***вписанным в сферу (шар)****, если все его вершины лежат на этой сфере (на поверхности шара).*

В этом случае говорят, что сфера *описана около многогранника.*

2) Из данного определения следует, что если многогранник можно вписать в сферу, то центр этой сферы равноудален от всех вершин многогранника. Обратно, если существует точка равноудаленная от всех вершин многогранника, то около этого многогранника можно описать сферу с центром в этой точке.

   Замечание. *Если около многогранника можно описать сферу, то такая сфера единственна.*

3) Обсудим теперь несколько критериев вписанности многогранников:

   Теорема.

   Для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в основании пирамиды лежал вписанный многоугольник.

4) Из приведенной теоремы следует, что около любого тетраэдра можно описать единственную сферу. Это же утверждение можно сформулировать так:

   Утверждение.

   Через любые четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу, и притом только одну.

   Также, около любой правильной пирамиды можно описать сферу.

5) Приведем критерий вписанности призмы:

   Теорема.

   Для того, чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой, а в ее основании лежал вписанный многоугольник.

6) Из этой теоремы следует, что около любой треугольной призмы, а также около любой правильной призмы можно описать сферу. Также сферу можно описать около любого прямоугольного параллелепипеда, в частности, куба.

   Упражнение: Докажите, что центром сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, является точка пересечения его диагоналей.

7) Обсудим, наконец, критерий вписанности усеченной пирамиды:

   Теорема.

   Для того, чтобы около усеченной пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы ее основаниями были вписанные многоугольники, а прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около оснований, была перпендикулярна плоскостям оснований.

   Замечание. *Основания усеченной пирамиды подобны, поэтому если одно из них является вписанным многоугольником, то и второе будет вписанным многоугольником.*

2°. Решение задач

1) В правильной n-угольной пирамиде сторона основания равна a, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

2) Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды равны a и b. Угол наклона бокового ребра к плоскости большего основания равен α. Найдите радиус сферы, описанной около усеченной пирамиды.

3) В сферу радиуса R вписана призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с острым углом β. Диагональ боковой грани, содержащей катет, лежащий напротив данного угла, образует с основанием угол α. Найдите объем призмы.

Домашнее задание

1) Сканави №11.176, 11.171.

2) В сферу радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат со стороной a. Найдите объем параллелепипеда.

3) В сферу радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с меньшей боковой гранью угол α. Диагональ основания параллелепипеда образует с большей стороной основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Урок 12. Многогранники, описанные около сферы.

1°. Описанные многогранники

1) Дадим вначале общее определение описанного многогранника:

Определение.

> *Многогранник называется* ***описанным около сферы (шара)****, если эта сфера (шар) касается всех граней многогранника.*

В этом случае говорят, что сфера *вписана в многогранник.*

Замечание. *Нужно обратить внимание, что вписанная сфера должна касаться именно граней, а не плоскостей, их содержащих.*

2) Из данного определения следует, что если в многогранник можно вписать сферу, то центр этой сферы равноудален от всех граней многогранника. Обратно, если существует точка, равноудаленная от всех граней многогранника, то в него можно вписать сферу с центром в этой точке.

3) Сформулируем общий критерий вписанности многогранника:

Теорема.

В многогранник можно вписать сферу тогда и только тогда, когда биссекторы всех его двугранных углов пересекаются в одной точке.

4) Из данного критерия можно получить следующее следствие:

Следствие.

Во всякий тетраэдр можно вписать сферу, и при том только одну.

Также, около любой правильной пирамиды можно описать сферу.

2°. Описанная пирамида

1) В случае, когда многогранник является пирамидой, критерий описанности можно несколько упростить:

Теорема.

Для того, чтобы в пирамиду можно было вписать сферу необходимо и достаточно, чтобы биссекторы всех двугранных углов при ее боковых ребрах пересекались по одной прямой.

Также имеет место и такой критерий:

Теорема.

Для того, чтобы в пирамиду можно было вписать сферу необходимо и достаточно, чтобы биссекторы всех двугранных углов при основании пересекались в одной точке.

2) Приведем теперь достаточное условие описанности пирамиды:

Теорема.

Если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то в нее можно вписать сферу.

Замечание. *Приведенное достаточное условие описанности пирамиды не является необходимым. Достаточно рассмотреть тетраэдр, двугранные углы которого не равны.*

3) Из доказанной теоремы следует, что во всякую правильную пирамиду можно вписать сферу.

3°. Описанная призма

1) Сформулируем теперь критерий описанности призмы:

Теорема.

Для того, чтобы в призму можно было вписать сферу необходимо и достаточно, чтобы в ее ***перпендикулярное сечение*** *(сечение перпендикулярное боковым ребрам) можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.*

2) В частности получаем такое следствие:

Следствие.

В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание.

3) Критерий вписанности правильной усеченной пирамиды:

Теорема.

Для того, чтобы в правильную усеченную пирамиду можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы ее апофема была равна сумме радиусов вписанных окружностей оснований.

Замечание. *В заключение отметим, что у всех правильных многогранников существуют описанные и вписанные сферы, центры которых находятся в центрах этих многогранников.*

4°. Решение задач

1) Сторона основания правильной пирамиды $SA_1A_2\dots A_n$ равна a, а двугранный угол при основании пирамиды равен β. Найдите радиус вписанной в эту пирамиду сферы.

Домашнее задание

1) В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если радиус сферы, вписанной в нее равен r.

2) В правильной треугольной пирамиде расстояние от центра вписанной в нее сферы до стороны основания равно d. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом φ.

3) Призма с площадью основания S описана около сферы. Найдите площадь ее полной поверхности.

4) В правильную усеченную четырехугольную пирамиду с апофемой a вписана сфера. Найдите площадь ее боковой поверхности.

Урок 14. Нестандартные комбинации тел вращения с многогранниками.

1°. Внеписанная сфера

1) В пространстве существует аналог вневписанной окружности многоугольника:

Определение.

> *Сфера называется* ***вневписанной в многогранник****, если она касается одной из его граней и продолжений всех остальных граней.*

Замечание. *В некоторых случаях рассматривают сферы, касающиеся плоскостей всех граней многогранника. Такая сфера может оказаться вписанной, вневписанной или не быть ни той, ни другой.*

2) Отметим следующий интересный факт:

Утверждение.

Для любого тетраэдра существует не менее пяти и не более восьми шаров, касающихся плоскостей его граней. В частности, для любого тетраэдра существует ровно четыре вневписанных шара.

3) **Упражнение:** Найдите радиус сферы, вневписанной в правильный тетраэдр.

2°. Полувписанная сфера

1) Кроме вписанных сфер, рассматривают т. н. полувписанные сферы:

Определение.

> *Сфера называется **полувписанной в многогранник (реберновписанной)**, если она касается всех ребер этого многогранника.*

2) В задачая чаще всего речь идет о сферах, полувписанных в пирамиды, обычно треугольные. В связи с этим обсудим следующее утверждение:

Теорема.

Для того, чтобы существовала сфера, полувписанная в тетраэдр, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его скрещивающихся ребер были равны.

3) **Упражнение:** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковое ребро равно b. Найдите радиус полувписанной сферы этой пирамиды.

Домашнее задание

1) Ребра AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ попарно перпендикулярны, а их длины равны a, b и c. Найдите радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

2) Пусть V – объем, а S – площадь полной поверхности многогранника, описанного около сферы радиуса r. Докажите, что

$$r = \frac{3V}{S}.$$

3) Найдите радиус сферы, полувписанной в правильную пирамиду, стороны основания которой равны a, а боковые ребра равны b.

4) В основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей H – основание высоты данной пирамиды. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

Урок 15. Нестандартные комбинации с многогранниками. Решение задач.

1°. Решение задач

1) Пусть дан многогранник, объем которого равен V, а площадь полной поверхности – S. Пусть S_0 – площадь одной из его граней, а r_0 – радиус сферы, вневписанной в этот многогранник, которая касается рассмотренной грани. Докажите, что
$$r_0 = \frac{3V}{S - 2S_0}.$$

2) Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр, если радиусы его вневписанных сфер равны r_1, r_2, r_3, r_4.

3) Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. В конус вписана сфера, а в сферу – параллелепипед с отношением ребер $1 : 2 : 2$. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если радиус сферы, описанной около конуса, равен $1 + \sqrt{2}$.

4) Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является центром сферы, а вершина D_1 лежит на этой сфере. Найдите длину линии пересечения сферы и поверхности куба, если ребро куба равно a.

5) Сфера касается четырех ребер куба, принадлежащих одной грани, и плоскости противоположной грани. Найдите отношение радиуса этой сферы к длине ребра куба.

6) В усеченный конус вписана сфера, а в эту сферу вписан конус так, что окружность его основания – это окружность по которой касаются усеченный конус и вписанная в него сфера. Вершина конуса совпадает с центром большего основания усеченного конуса. Найдите отношение объема усеченного конуса к объему конуса, если образующая усеченного конуса наклонена к плоскости основания под углом $60°$.

Домашнее задание

1) Высота правильного тетраэдра равна h и является диаметром сферы. Найдите длину общей линии сферы и поверхности тетраэдра.

2) Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани. Найдите отношение объемов шара, ограниченного этой сферой, и куба.

3) Высота конуса равна диаметру его основания. В конус вписан куб так, что его четыре вершины расположены на основании, а оставшиеся четыре – на боковой поверхности конуса. Найдите отношение объемов куба и конуса.

4) Две противоположные вершины куба являются центрами оснований цилиндра, а остальные вершины лежат на его боковой поверхности. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

Урок 16. Конические сечения

1°. Определения эллипса, гиперболы, параболы (повторение)

Ранее мы уже знакомились с кривыми второго порядка на плоскости. Вспомним их определения.

1) Дадим вначале определение эллипса:

Определение.

> ***Эллипсом*** *называется геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости постоянна (т. е. $MF_1 + MF_2 = 2a$, где $a = const$, $a > 0$).*

Точки F_1 и F_2 при этом называются *фокусами* эллипса.

2) Вспомним теперь определение гиперболы:

Определение.

> ***Гиперболой*** *называется геометрическое место точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости постоянен (т. е. $|MF_1 - MF_2| = 2a$, где $a = const$, $a > 0$).*

Точки F_1 и F_2 при этом называются *фокусами* гиперболы.

3) Наконец, вспомним определение параболы:

Определение.

> *Параболой* называется геометрическое место точек M плоскости, расстояния от которых до данной точки F и до данной прямой d, лежащих в этой плоскости равны (т. е. $MF = \rho(M, d)$.

Точка F при этом называется *фокусом* параболы, а прямая d – *директрисой* параболы.

2°. Конические сечения

Теперь мы готовы к тому, чтобы исследовать вопрос о форме сечений конической поверхности плоскостью. Все будет зависеть от расположения плоскости. В дальнейшем мы будем все время предполагать, что рассматривается прямая круговая коническая поверхность.

1) Рассмотрим сначала случай, соответствующий эллипсу:

   Теорема (Эллипс)**.**

   Если плоскость пересекает все образующие конической поверхности и не проходит через ее вершину, то линия пересечения плоскости с этой конической поверхностью является эллипсом.

   Замечание. *В случае, если плоскость α перпендикулярна оси конической поверхности, то точки F_1 и F_2 – это одна и та же точка. Поэтому в этом случае сечение является окружностью.*

2) Рассмотрим теперь случай, соответствующий гиперболе:

   Теорема (Гипербола)**.**

   Если плоскость параллельна двум образующим конической поверхности, то линия пересечения плоскости с этой конической поверхностью является гиперболой.

3) Рассмотрим наконец случай, соответствующий параболе:

   Теорема (Парабола)**.**

   Если плоскость параллельна ровно одной образующей конической поверхности, то линия пересечения плоскости с этой конической поверхностью является параболой.

3°. Вырожденные случаи сечений

В случаях, когда секущая плоскость α проходит через вершину конической поверхности, мы получаем вырожденные случаи фигур.

1) Если плоскость не содержит точек поверхности, кроме вершины, то их пересечением будет являться единственная точка. Этот случай соответствует вырожденному эллипсу

2) Если плоскость проходит через вершину и ровно одну из образующих конической поверхности, то пересечением является одна прямая (объединение двух лучей). Этот случай соответствует вырожденной параболе.

3) Если же плоскость проходит через вершину поверхности и две ее образующие, то пересечением плоскости и поверхности является объединение двух пересекающихся прямых. Этот случай соответствует вырожденной гиперболе.

Домашнее задание

1) Теория: Калинин, Терешин §10.10.

2) Докажите, что сечение прямой круговой цилиндрической поверхности плоскостью, не параллельной ее образующим, является эллипсом.

3) Калинин, Терешин задачи 10.60, 10.61, 10.62.