Делимость-10. Сравнения по модулю и их свойства

Определение.

*Будем говорить, что **числа a и b сравнимы по модулю m** и писать $a \equiv b \pmod{m}$ (или $a \underset{m}{\equiv} b$), если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m.*

Замечание. *Очевидно, что если число a дает при делении на m остаток r, то $a \equiv r \pmod{m}$.*

1. Верно ли, что $-17 \equiv 11 \pmod{7}$?

2. Какой остаток при делении на 10 дает число a, если $a \equiv -8 \pmod{10}$?

Теорема (характеристическое свойство)**.**

Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность $a - b$ делится на m.

Свойства сравнений по модулю

Теорема (рефлексивность)**.**

Для любых a и m $a \equiv a \pmod{m}$.

Теорема (симметричность)**.**

Если $a \equiv b \pmod{m}$, то и $b \equiv a \pmod{m}$.

Теорема (транзитивность)**.**

Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

Замечание. *Если какое-либо отношение является одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным, то его называют **отношением эквивалентности**. Отношения эквивалентности играют важную роль в математике. Мы доказали, что сравнимость по модулю является отношением эквивалентности.*

Теорема (алгебраическое сложение)**.**

Сравнения по одному модулю можно складывать и вычитать, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.

Теорема (умножение)**.**

Сравнения по одному модулю можно перемножать, т.е. если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Теорема (возведение в степень).

Сравнения можно возводить в натуральную степень, т. е. если $a \equiv b \pmod m$ *и* n *– натуральное число, то* $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Теорема (сокращение на число, взаимно простое с модулем).

Сравнения можно сокращать на число, взаимно простое с модулем, т. е. если m *и* k *– взаимно простые числа и* $ka \equiv kb \pmod m$, *то* $a \equiv b \pmod m$.

3. Решите сравнение $2n \equiv 6 \pmod{63}$.

Теорема (сокращение на общий множитель).

Пусть $ka \equiv kb \pmod{km}$. *Тогда* $a \equiv b \pmod m$.

4. Решите сравнение $3n \equiv 21 \pmod{45}$.

Делимость-11. Применение сравнений по модулю

1. Найдите остаток от деления $2234 \cdot 2236 \cdot 2238 - 415 \cdot 411$ на 11.

2. Найдите остаток от деления 14^{500} на 13.

3. Найдите остаток от деления 64^{2013} на 9.

4. Найдите остаток от деления 6^{100} на 7.

5. Найдите остаток от деления 6^{101} на 7.

6. Найдите остаток от деления $7^{1000} - 5^{2013}$ на 3.

7. Найдите последнюю цифру числа $9^{15} \cdot 11^{27}$.

8. Найдите две последние цифры числа 1999^{2013}.

9. Найдите остаток от деления 3^{2001} на 7.

10. Найдите последнюю цифру числа 3^{999}.

11. Найдите последнюю цифру числа $77^{77^{77}}$.

12. Найдите две последние цифры числа 16^{2000}.

13. Найдите остаток от деления $100^{1000} - 30^{100}$ на 7.

14. Докажите, что $11^{100} - 1$ делится на 100.

15. Докажите, что $23^{43} + 43^{23}$ делится на 66.

16. Докажите, что если $a \neq b$, то $a^n - b^n$ делится на $a - b$ при любом натуральном n.

17. Докажите, что при любом натуральном n число $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

18. Докажите, что при нечетных n и m число $S = 1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n$ делится на m.

19. Докажите, что

а) $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133 при любом натуральном n;

б) $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$ при любых натуральных a и n.

Задачи для самостоятельного решения

20. Найдите остаток от деления $1999 \cdot 2000 \cdot 2001 + 2001^3$ на 7.

21. Найдите остаток от деления 73^{100} на 8.

22. Найдите остаток от деления 64^{2003} на 13.

23. Найдите остаток от деления 5^{42} на 8.

24. Найдите остаток от деления 4^{100} на 7.

25. Найдите остаток от деления 2^{27} на 17.

26. Найдите последнюю цифру числа 7^{250}.

27. Найдите остаток от деления $4^{2003} + 19^{2004}$ на 5.

28. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

29. Докажите, что

а) если n – нечетное число и $a + b \neq 0$, то $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

б) Докажите, что $48^{101} + 28^{101}$ делится на 76.

30. Докажите, что $27^{111} + 25^{193}$ делится на 52.