Решения задач 10 класс 2014 год.

Задача 1.

На автомобильных соревнованиях *24 Heures du Le Mans* автомобиль *AUDI R18 e-tron quattro* двигается по прямой *Mulsanne straight* со скоростью 360 км/ч. Идёт дождь, ветра нет. Ежесекундно на 1 см^2 поверхности машины попадает две капли дождя (a = 2). Масса дождевой капли m = 0,1 г. Площадь поверхности автомобиля, смачиваемой дождем, S = 5 м^2. Какова должна быть минимальная сила трения между колесами и дорогой, чтобы автомобиль мог двигаться с указанной скоростью?

Решение.

Сила, тормозящая движение автомобиля, равна изменению импульса дождевых капель за одну секунду в горизонтальном направлении. Эта сила преодолевается силой трения. Отсюда $F_{тр}=mvSa=10^{-4}\ кг\cdot 100\ м/с\cdot 5\cdot 10^{4}\ см^{2}\cdot 2\ см^{-2}=1000\ Н$.

Задача 2.

Открытая цистерна с водой стоит на рельсах и может двигаться без трения. Масса цистерны M, масса воды m. Сверху в цистерну, на расстоянии L от её центра, падает тело массой μ и не тонет. В какую сторону и насколько сдвинется цистерна к тому времени, когда движенние воды успокоится?

Решение.

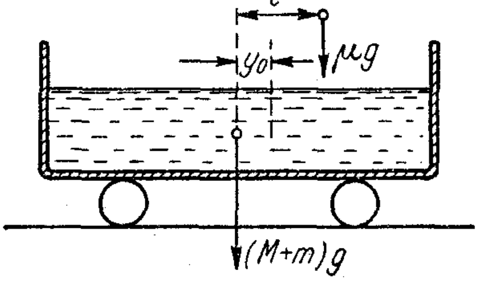

Рис. 1.

Центр масс системы цистерна — вода — груз по горизонтали сдвинуться не может, так как силы в этом направлении не действуют. Вначале, пока груз не погрузился в воду, положение центра масс относительно центра цистерны y_0 (рис. 190) определим из условия

$$(M+m)\,y_0=\mu\,(l-y_0),\qquad y_0=\frac{\mu l}{M+m+\mu}.$$

Когда груз плавает в воде, вытесненная им вода, вес которой как раз равен весу груза, равномерно распределится по всей поверхности и центр масс всей системы будет совпадать с центром цистерны. Следовательно, цистерна должна сдвинуться на расстояние y_0 в сторону груза.

Задача 3.

Молодой удав длины L выполняет гимнастические упражнения на идеально гладкой, тонкой перекладине. В начальный момент он висит на перекладине, находясь в равновесии, как показано на Рис. 2. Потом удав начинает соскальзывать с перекладины. Найдите скорость удава в тот момент, когда он перестанет касаться перекладины.

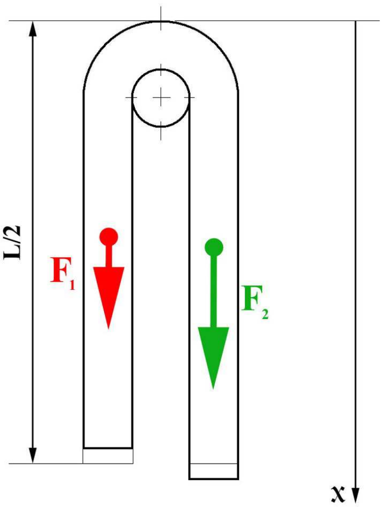

Рис. 2.

Решение.

В начальный момент времени центр тяжести удава находился на расстоянии $\frac{L}{4}$ от оси перекладины, а в конечный – на расстоянии $\frac{L}{2}$.

Таким образом, изменение потенциальной энергии удава ΔUравно:

$$\Delta U=\frac{1}{2}MgL-\frac{1}{4}MgL=\frac{1}{4}MgL$$

Изменение кинетической энергии удава ΔK с учетом того, что вначале он покоился, равно

$$\Delta K-\frac{M\cdot V^2}{2}$$

Из закона сохранения энергии имеем $\Delta U=\Delta K$, откуда

$$\frac{1}{4}MgL=\frac{MV^2}{2}$$

$$V=\sqrt{\frac{gL}{2}}$$

Задача 4

Грузовик загружен одинаковыми гладкими трубами. Он заехал в кювет и стоит, накренившись на один борт, причем дно кузова образует с горизонталью угол θ. Крена в продольном направлении нет. Заканчивается разгрузка кузова. Если удалить трубу, показанную на Рис. 3 пунктиром, то последние три трубы раскатятся при малейшем уменьшении угла θ. Найти угол θ.

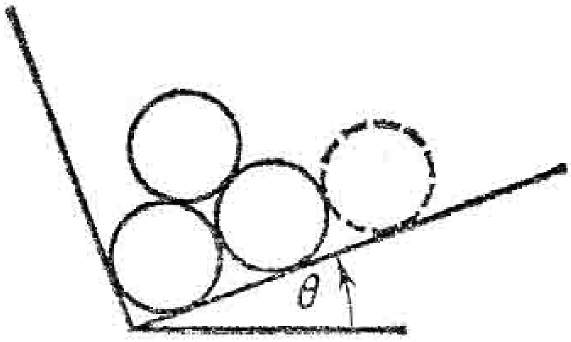

Рис. 3.

Решение.

Пронумеруем трубы, как показано на Рис. 4. Пусть труба 2 при небольшом уменьшении угла θ начнет двигаться вниз, выталкивая трубу 3 вверх по кузову. Ясно, что в конце движения труба 2 займет положение трубы 3, а труба 3 – положение, показанное на Рис. 4 пунктиром. Так как при первоначальном расположении трубы находились в равновесии, изменение потенциальной энергии труб при рассмотренных перемещениях должно равняться нулю. Это возможно только в том случае, если центр трубы 2 в первом случае и центр трубы 3 во втором случае находятся на одной и той же высоте. Обозначим указанные высоты через y_1 и y_2 соответственно. Вычисление y_2 не вызывает никаких затруднений. Непосредственно из рисунка видно, что $y_2 = R\cos\theta + 5R\sin\theta$, где R – радиус трубы.

Для вычисления y_1 замечаем, что $y_1 = O_2A + O_1B$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2A находим

$$O_2A = 2R\sin(60^\circ + \theta),$$

так как $O_1O_2O_3$ равносторонний треугольник со стороной $2R$, а $\angle O_3O_1A = \theta$. Из треугольника OO_1B следует

$$O_1B = \sqrt{2}R\sin(45^\circ + \theta),$$

так как $OO_1 = \sqrt{2}R$ есть не что иное, как гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника OCO_1, длина катета которого равна R. Таким образом,

$$y_1 = 2R\sin(60^\circ + \theta) + \sqrt{2}R\sin(45^\circ + \theta) =$$
$$= 2R\sin\theta + (\sqrt{3} + 1)R\cos\theta.$$

Наконец, приравнивая y_1 и y_2, получаем

$$R\cos\theta + 5R\sin\theta = 2R\sin\theta + (\sqrt{3}+1)R\cos\theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \theta = 30^\circ.$$

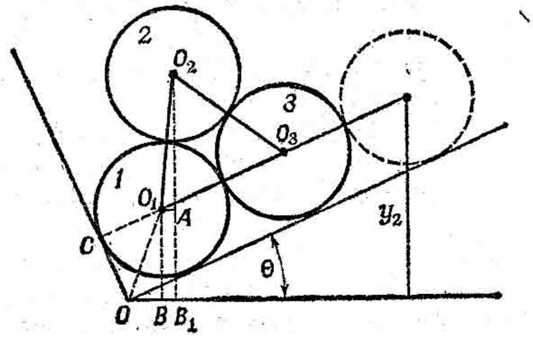

Рис. 4.

Задача 5

На Рис. 4 точками представлены положения двух кораблей. Стрелками показаны векторы скоростей этих кораблей. Определить минимальное расстояние, на котором пройдут корабли друг от друга.

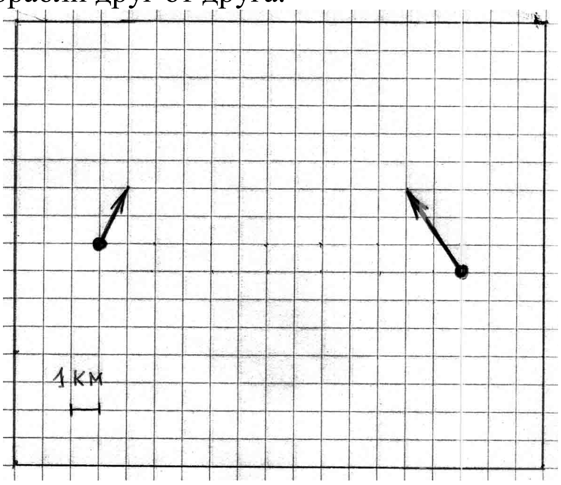

Рис. 5.

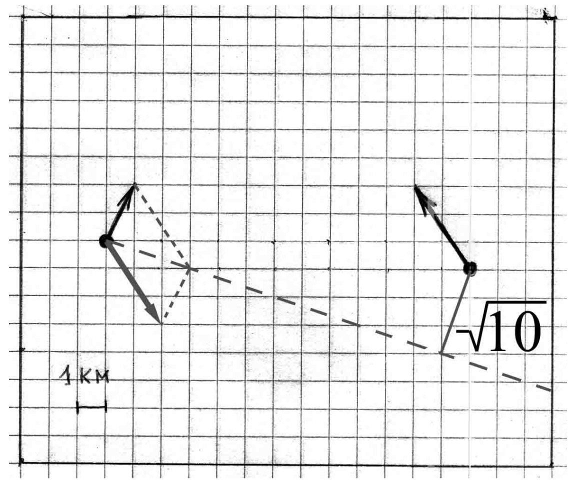

Рис. 6.

На Рис. 5 крапками зображено положення двох човнів. Стрілками показано вектори швидкостей цих човнів. Визначити найменшу відстань, на якій пройдуть човни один від одного.

Решение графическое, представлено на Рис. 6. Минимальное расстояние равно $\sqrt{10}$ км.