Exercice 2.3 :
Énoncez et démontrez la propriété d'associativité du barycentre.

Démonstration : Sans perte de généralité, on démontre la propriété dans le cas de 3 points du plan affine. Soient a, b, c trois réels, tels que $a+b \neq 0,\ a+b+c \neq 0$; A, B, C, trois points de l'espace. On consdière le système pondéré $\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\}$. On appelle alors G le barycentre de A, B, C ; A′, celui de A et B dans ce système, tous deux bien définis d'après ce qui précède.

On veut démontrer que

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathrm{bar}\,\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c)\} \iff \mathrm{G} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{A}', b+c)\right\}}$$

par définition de A′, on a :

$$a\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} + b\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}} = \vec{0}$$

par définition de G, on a :

$$a\,\overrightarrow{\mathrm{GA}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{GB}} + c\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

On cherche à introduire A′. D'après Chasles, on a :

$$a\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}'} + \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}}\right) + b\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}'} + \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}}\right) + c\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

soit, après factorisation :

$$(a+b)\overrightarrow{\mathrm{GA}'} + \underbrace{a\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} + b\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}}}_{=\vec{0}\text{ par définition de A}'} + c\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

On a donc obtenu :

$$\boxed{(a+b)\overrightarrow{\mathrm{GA}'} + c\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}}$$

Et G est le barycentre de $\left\{(\mathrm{A}, a), (\mathrm{A}', a+b)\right\}$. C.Q.F.D