

## Histoire de $\lambda$ -calcul

Qu'est-ce que c'est un  $\lambda$ -calcul ? Les codeurs sont familiers avec une notion de  $\lambda$ -fonction - une fonction anonyme qui est utilisée dans les morceaux du code qui ne méritent pas d'avoir une méthode nommée : clé de trie, les petits transformations dans les requêtes à la sql etc. Cependant, la notion de  $\lambda$ -fonction a été prise d'un système de calcul aussi puissant que la machine de Turing (est inventé dans les mêmes années 30s). Dans cet article on va discuter l'histoire de son invention pour mieux comprendre le concept.

### Plan

1. Crise des fondements
2. Axiomes de Peano
3. 1ere version de Lambda calculs
4. Theoreme de Goedel
5. Machine de Turing et calculabilité
6. Thèse de Church-Turing
7. Impact et applications

### Crise des fondements

Disons qu'un ensemble est **simple** s'il n'appartient pas à lui-même. Par exemple, l'ensemble des tout les gens est simple, car cet ensemble n'est pas une personne. Ainsi, l'ensemble des tout les ensemble n'est pas simple par son définition. *L'ensemble de Russel* est un ensemble qui contient tout les ensembles simples et rien d'autre. Est-ce qu'un ensemble de Russel est simple ? Si c'est le cas, par construction il contient lui-même. Donc il n'est pas simple. Mais s'il n'est pas simple il doit contenir lui-même, ce que signifie qu'il est simple. *Contradiction*.

Ce paradoxe a été indépendamment trouvé par Russel et Zermelo au début de XX siècle. Ce paradoxe a beaucoup d'autre formulations plutôt didactiques : *paradoxe du menteur*, *paradoxe du barbier*, etc. Cependant dans une version de Russel ce paradoxe n'utilise que les constructions formelles de mathématique. Cela signifie que telles constructions sont contradictoires elles-mêmes : si nous avons prouvé qu'une formule propositionnelle est à la fois vrai et fausse, le même peut avoir lieu pour n'importe quel théorème. Si on ajoute qu'au début de XXème siècle paradoxe de Russel n'a pas été le seul

paradoxe connu, on voit bien qu'est-ce que c'était le *crise de fondements* en mathématique.

Ce crise a été reflété sous le numéro 2 dans une liste des 23 fameux problèmes de Hilbert déterminants le développement du mathématique en XXème siècle.

**Problème** (2ème problème de Hilbert). *Déterminer la consistance de l'arithmétique.*

Même si l'énoncé est simple, on peut dire que pour résoudre ce problème, il faut passer par les étapes suivants.

- Formuler les axiomes de l'arithmétique - i.e., trouver les proposition "minimales" telles que on peut en déduire tout ce que l'on connaît jusqu'au présent.
- Prouver que en partant de ces axiomes, il n'existe pas d'une proposition  $X$ , tel que les axiome implique  $X$  ainsi que "non  $X$ ".

### Axiomes de Peano

L'arithmétique est un domain de mathématique qui étudie les nombres et relations entre eux. Elle est appliquée partout de premiers années de l'école jusqu'à les concepts modernes d'astrophysique. Cependant, pour construire les bases de l'arithmétique, il est presque suffisant de bien déterminer les nombres naturels ainsi que les action qu'on peut faire avec. (Les nombres entiers est une extension pour que opération  $x - y$  renvoie toujours un nombre valide, les nombres rationnels apparaissent si on étudie la division. Finalement, les nombres algébrique sont responsable pour résoudre les équations polynomiales et le reste - pour "fermer des trous"). Classiquement, les nombres naturels peuvent être définis de même façon qu'on fait quand les petits enfants apprennent à compter: ce résultat est connus depuis la fin de XIXème siècle comme les axiomes de Péano:

1. 1 est naturel;
2. le nombre suivant d'un nombre naturel est naturel;
3. rien ne suivi de 1;
4. si  $a$  suit  $b$  et  $a$  suit  $c$ , alors  $b = c$ ;
5. axiome de recurrence (i.e., si un prédicat  $A(x)$  est vrai pour  $x = 1$  ainsi que  $A(n)$  implique  $A(n + 1)$ , alors  $A(x)$  est vrai pour tout  $n$  naturel).

Heureusement, la preuve d'une consistance des axiomes de Péano est un problème beaucoup plus sophistiqué que l'invention de ses axiomes, et l'histoire n'est donc que commencée.

## 1ère version de Lambda calcul

En 1932 Church a proposé une autre construction qui est connue comme  **$\lambda$ -calcul non-typé**. Malheureusement, son étudiant, Kleene a prouvé que cette construction n'a pas été consistante.

$\lambda$ -calcul a formalisé une application d'une fonction. L'écriture envisage la compréhension d'une fonction comme une "règle". Et l'écriture classique  $f(x)$  pointe plutôt sur le résultat de ce règle.

Rappelons brièvement, qu'est ce que c'est. (Sinon, wiki et les autres articles ou "Eggs and crocodiles") Le briques principal est une fonction. Au lieu de  $f(x)$  on écrit  $\lambda x.f$ . Si on parle de la valeur de  $f(x)$  quand  $x = a$ , on écrit  $\lambda x.f a$ . Naturellement, on peut définir une composition... Pour transformer des propositions on a une règle de  $\beta$ -reduction.

Malgré sa simplicité et abstraité, cette construction permet néanmoins rédefinir tout les opérations arithmétiques, la logique Booléen etc. Est-ce que  $\lambda$ -calcul non-typé est un bon candidat pour le rôle de fondement de mathématique ? La réponse est **non**: à cause de Paradoxe de Kleene-Rosser proposé en 1935 par J. B. Rosser et Stephen Kleene qui a été un étudiant de Church. Bien que la propre énoncé de ce paradoxe est trop compliqué pour cet article, nous pouvons décrire la raison d'un problème. Commençons par une phrase "si cette phrase est vrai, alors  $X$ ", où  $X$  est un énoncé qui est évidemment faux, e.g., "Allemand et Chine ont une frontière commune". Après, par une analyse logique (**todo**), on peut déduire que n'importe quel énoncé  $X$  est vrai. C'est une version non-formel de paradoxe basée sur l'auto-référence. Il peut être formulé en termes de  $\lambda$ -calculs.

Considérons une fonction  $r$  définie comme  $r = \lambda x.((xx) \rightarrow y)$ .  $(rr)$   $\beta$ -se réduit en  $(rr) \rightarrow y$ . Si  $(rr)$  est faux, alors  $(rr) \rightarrow y$  est vrai par le principe d'explosion, mais cela est contradictoire avec la  $\beta$ -réduction. Donc  $(rr)$  est vrai. On en déduit que  $y$  est aussi vrai. Comme  $y$  peut être arbitraire, on a prouvé que n'importe quel proposition est vrai. Contradiction.

## Théorème de Gödel

Les deux paradoxes discutés ci-dessus, sont basés sur le même idée de l'autoréférence : une proposition ou n'importe quel objet qui référence lui-même (e.g., ensemble des tout les ensembles). Faut-il interdire l'autoréférence dans les constructions mathématiques ? L'idée n'est pas séduisant si on comprend vite que avec les paradoxes, nous avons jeté dans la poubelle tout les constructions récursives.

Néanmoins, les réflexions de mathématiciens de même époque nous amené à un résultat le plus connu prouvé par Kurt Gödel en 1930. Une des

interprétations prétend que la consistance d'un système d'axiomes ne peut pas être prouvée en n'utilisant que ces axiomes (voici l'autoréférence !). En particulier, pour prouver la consistance d'arithmétique il faut ajouter les axiomes supplémentaires (qui a été vite fait, en 1936). Le seul problème est que maintenant il faut prouver une autre système... Les idées de l'autoréférence sont vraiment fondamentales. Si quelqu'un veut creuser ce sujet plus profondément, nous pouvons conseiller un livre "Gödel, Escher, Bach : Les Brins d'une Guirlande Éternelle" de Douglas Hofstadter.

Pour résumer le sujet de l'arithmétique, disons que lambda-calcul a été l'un des modèles qui pourrait formaliser les axiomes de l'arithmétique. Son version actuel a été prouvée consistante et publiée en 1936. Cette construction devait rester un sujet purement théorique qui a intéressé les rares génies de mathématique qui a étudié ses fondements (on rappelle que beaucoup des personnages de cet article se sont finis mal...).

## **Machine de Turing et calculabilité**

Cependant, comme il est souvent en science, il faudrait étudier le même domaine de point de vue un peu différent. Cela a été fait sur l'autre continent par un jeune étudiant Alan Turing. Il a cherché une solution pour un problème de la décision posé en 1928 par Hilbert et Ackermann : "trouver un algorithme qui détermine dans un temps fini, s'il un énoncé est vrai ou faux". La formalisation d'un terme algorithme a conduit au concept de machine de Turing connu par tout le monde. Entre autre, le théorème de Gödel a été reformuler en termes d'une machine de Turing. Le résultat a été aussi négative, connu comme un théorème de Turing-Church: "il existe les énoncés pour lesquels on ne peut pas déterminer" (vérifier l'énoncé et le nom d'un théorème).

## **Thèse de Church-Turing**

Le résultat positif. S'il existe les fonctions, qu'il peuvent pas être décidées, on se pose la question, qu'est-ce que ce sont les fonction simple, i.e. les fonctions que l'on peut effectivement calculer. Intuitivement, c'est dont la valeur peut être calculée avec un crayon si on a suffisamment de papier et du temps. Mais vous comprenez déjà que les mathématiciens n'acceptent pas les solutions intuitives... Le problème de décision est lié avec un problème de calculabilité. Qu'est-ce que signifie qu'une fonction peut être calculée ? Souvent on se réfère sur "des méthodes d'un crayon et de papier". Indépendement, chaque des deux a proposé que toute fonction calculable en termes de crayon et papier peut être calculé par son méthode (lambda-calcul ou la machine de Turing).

Les deux propositions - ne sont pas les théorèmes, peuvent pas être prouvées car on ne peut pas formaliser autrement calculabilité. (On doit remarquer ici qu'il y avait le troisième mécanisme de déterminer la calculabilité - les fonction récursive primitive). Relativement vite il a été prouvé que tout les 3 mécanismes sont équivalent. Donc, n'importe lequel peut être utilisé comme une définition de fonction effectivement calculable.

### **Impacts de $\lambda$ -calculs**

1. Formalisation d'une notion de calculabilité.
2. Preuves de calculabilité.
3. Preuves formelles.
4. Programmation fonctionnelle.