Capítulo 1

Conjuntos

En este capítulo se presentarán las definiciones básicas y la notación de la teoría de conjuntos. A fines del siglo XIX, Georg Cantor fue el primero en darse cuenta de la imporancia de investigar propiedades de los conjuntos en general, a diferencia de las propiedades de los elementos que lo componen.

La teoría de conjuntos es considerada como el fundamento del pensamiento lógico-matemático. Todos los objetos matemáticos (inclusive los números) pueden definirse en términos de conjuntos y el lenguaje de la teoría de conjuntos se utiliza en todas las áreas de la Matemática y de la Informática, por ejemplo en bases de datos o lenguajes de programación.

1.1. Conjuntos por extensión y comprensión

Intuitivamente, cualquier colección de objetos o individuos diferentes se denomina **conjunto**. Los objetos que integran un conjunto se llaman **elementos** de ese conjunto. A los conjuntos les daremos un nombre; se acostumbra asignarle una letra mayúscula, para definirlos usaremos "llaves..." por ejemplo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Para definir un conjunto podemos hacerlo de dos formas:

1. **Por comprensión:** dando una o más propiedades que satisfacen todos los elementos del conjunto dado.

2. **Por extensión:** listando todos y cada uno de los elementos que conforman el conjunto.

Ejemplo 1.1.1. *Denominamos con la letra A al conjunto de letras vocales de nuestro alfabeto. Es decir que la propiedad o característica que cumplen los elementos de A es que sea una letra del alfabeto. Escribimos el conjunto A por;*

$$\begin{array}{ll} \textit{Comprensión:} & A = \{x \mid x \textit{ es una vocal del alfabeto}\} \\ \textit{Extensión:} & A = \{a, e, i, o, u\} \end{array}$$

Notación 1.1.1. *En la notación por comprensión, el símbolo $\mid$ se lee "tal que...", luego de este símbolo escribimos las propiedades que cumplirán los elementos del conjunto. En la notación por extensión no necesitamos este símbolo*

Ejemplo 1.1.2. *Denominaremos B al conjunto de los números naturales divisores de 20. Escribimos B por;*

$$\begin{array}{ll} \textit{Comprensión:} & B = \{x \mid x \textit{ es un natural divisor de 20}\} \\ \textit{Extensión:} & B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \end{array}$$

Definición 1.1.1. *Se define como* ***cardinal*** *de un conjunto X a la cantidad de elementos que tiene X. Se denota este valor con $|X|$.*

Ejemplo 1.1.3. *Dado $A = \{a, e, i, o, u\}$, tenemos que $|A| = 5$;*

Dado $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, tenemos que $|A| = 6$.

Los Conjuntos Numéricos

Existen conjuntos que tienen una cantidad finita de elementos, como en los ejemplos anteriores, sin embargo existen otros con una cantidad infinita de elementos, en estos casos no es posible listar todos los elementos, es decir, no es posible escribirlos por extensión, sin embargoo en algunos casos, pueden nombrarse los suficientes y usar los puntos suspensivos "$\cdots$" para sugerir los elementos faltantes. A manera de repaso veamos como se definen los distintos conjuntos numéricos con los que trabajaremos frecuentemente.

Los diferentes tipos de números fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio litro" y los números irracionales para representar ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

$\mathbb{R}$ **- Los Números Reales.**

Es el conjunto de todos los números con los que trabajamos en este curso. En él se definen otros conjuntos que a continuación mencionaremos.

$\mathbb{N}$ **- Los Números Naturales.**

Es el conjunto de números que sirven para contar u ordenar, son los primeros números que aparecieron en nuestra historia. Se utiliza el símbolo $\mathbb{N}$ para denotarlos. Este conjunto no es posible expresarlo por extensión, sin embargo una forma común de representarlo es:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

Observamos que el cero no pertenece al conjunto de los números naturales, sin embargo, en Informática muchas veces es necesario que el cero esté incluido como primer elemento. Denotaremos a este conjunto de la siguiente manera:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

$\mathbb{Z}$ **- Los Números Enteros.**

El conjunto de los números naturales, sus opuestos negativos y el cero constituyen el conjunto de los números Enteros.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Ahora podemos referirnos a los naturales como el conjunto de los enteros positivos. En este sentido, tenemos también el conjunto de los enteros negativos. Estos son:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$$

$\mathbb{Q}$ **- Los Números Racionales.**

Este conjunto está compuesto de todos aquellos números reales que pueden expresarse como cocientes de dos enteros, siempre que el denominador no sea cero, es decir, son todos aquellos que pueden expresarse como una fracción.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ y } q \text{ son enteros y } q \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{I}$ - **Los Números Irracionales**

Los números irracionales, al contrario de los racionales, es el conjunto de números reales que no pueden expresarse como cociente de dos enteros, en este sentido su expresión decimal no es finita ni periódica.

1.1.1. Relaciones de Pertenencia y Contención

En general, usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Es importante reconocer qué relaciones se establecen entre estos objetos, si bien estas relaciones intuitivamente ya las hemos presentado, intentaremos dar una idea formal.

Notación 1.1.2. *Si a **es un elemento** de un conjunto A se escribe*

$$a \in A$$

y se lee "a pertenece a A" o "a es un elemento de A".

Si a no es un elemento del conjunto A se escribe

$$a \notin A$$

y se lee "a no pertenece a A" o "a no es elemento de A".

Definición 1.1.2. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es **subconjunto** de B, o que A **está contenido** (o **incluido**) en B; si todo elemento de A es también un elemento de B.*

*De manera que para negar la contención, decimos que A **no está contenido en** B, si existe al menos un elemento de A que no está en B.*

Ejemplo 1.1.4. *Dado $A = \{a, e, i, o, u\}$, tenemos que:*

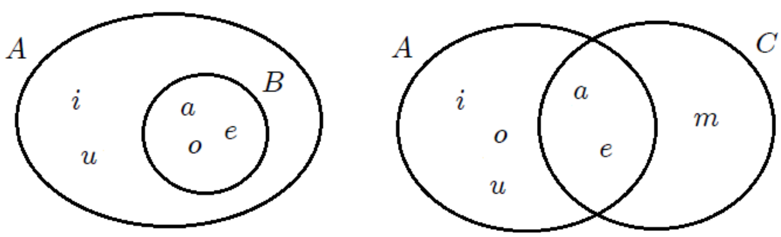
1) u es un elemento del conjunto A, por lo que escribimos $u \in A$.

2) b no es un elemento del conjunto A, por lo que escribimos $b \notin A$.

3) El conjunto $B = \{a, e, o\}$ es un subconjunto de A, pues todos los elementos de B son elementos de A, escribimos entonces $B \subset A$.

4) El conjunto $C = \{a, e, m\}$ no es subconjunto de A, pues no todos los elementos de C son elementos de A ; dado que $m \notin A$, escribimos entonces $C \not\subset A$.

Veamos esto usando diagramas de Venn;



Los diagramas de Venn son representaciones gráficas muy útiles para mostrar la relación entre los elementos de los conjuntos. Por lo general cada conjunto se representa por medio de un círculo, óvalo o rectángulo, y la forma en que se entrelazan las figuras que representan a los conjuntos muestra la relación que existe entre los elementos de los respectivos conjuntos.

Observación 1.1.1. *Un* ***subconjunto propio*** *de un conjunto es un subconjunto que no es igual al conjunto que lo contiene. Es decir, A es un subconjunto propio de B si:*

1) $A \subset B$ y

2) existe al menos un elemento en B que no está en A.

Ejemplo 1.1.5. *Definimos por comprensión el conjunto $M = \{x \mid x \text{ es un natural impar}\}$*

De nuevo, no es posible expresar al conjunto M por extensión, sin embargo, como ya vimos anteriormente una forma común de representarlo es:

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$$

M es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ pues:

1) $M \subset \mathbb{N}$ y

2) existe al menos un elemento en $\mathbb{N}$ que no está en M; basta tomar cualquier número par.

Ejemplo 1.1.6. *Un número natural recibe el nombre de* ***número primo*** *si es mayor que 1 y no tiene más divisores que 1 y el mismo. Un número natural que tenga un divisor distinto de si mismo y de 1, se llama* ***número compuesto****.*

Sean $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es compuesto}\}$ y $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo}\}$. C y P son subconjuntos propios de $\mathbb{N}$.

El Conjunto Universal y el Conjunto Vacío

La mayoría de los planteos y análisis que haremos en este curso se realizan dentro de algún contexto, y en consecuencia necesitamos de un conjunto en donde estén definidos todos los objetos que necesitaremos.

Definición 1.1.3. *El conjunto formado por todos los elementos que son objetos de estudio en un contexto dado se denomuna* ***Conjunto Universal*** *(también es llamado Universo de Discurso). En general, se lo denota con el símbolo $\mathcal{U}$.*

Definición 1.1.4. *El* ***Conjunto Vacío*** *es aquel que no posee elemento alguno. En general, se lo denota con el símbolo $\emptyset$ o $\{\}$ (pero no ambos a la vez).*

Propiedades de la contención de conjuntos

Proposición 1.1.1. *Dado el conjunto universal $\mathcal{U}$, y cualquier conjunto A definido con elementos de $\mathcal{U}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $A \subset \mathcal{U}$; (cualquier conjunto está contenido en el conjunto universal).

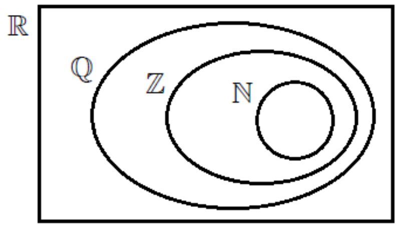
2) $\emptyset \subset A$; (el vacío está contenido en cualquier conjunto).

3) $A \subset A$; (todo conjunto está contenido en si mismo. Esta propiedad se conoce como reflexividad).

4) Dados los conjuntos A, B, y C contenidos en $\mathcal{U}$, se cumple que si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces se cumple que $A \subset C$. (Esta propiedad se conoce como transitividad).

Ejemplo 1.1.7. *Se cumple que* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ *y que* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$*, entonces por transitividad* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

La relación entre todos los conjutos numéricos es $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$



Ejercicio 1.1.1. *Considera el conjunto de los números naturales menores que 20 como el conjunto universal, es decir* $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 20\}$*, y los conjuntos:*

$A = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ es par}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

$B = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ es impar}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$C = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ es múltiplo de cuatro}\} = \{4, 8, 12, 16\}$

$P = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ es primo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

Determina si: *a)* $C \subset A$
b) $P \subset B$

Cada número entero puede ser *par o impar*. Decimos que $n \in \mathbb{Z}$ es **par** si puede escribirse de la forma $n = 2k$, para algún entero k. Es decir n es par si es múltiplo de 2, de manera similar decimos que $n \in \mathbb{Z}$ es **impar** si puede escribirse de la forma $n = 2k + 1$, para algún entero k. Esta notación puede extenderse a los casos que necesitemos hablar de alguna multiplicidad. Así por ejemplo:

- $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de los naturales pares.
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1, \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de los naturales impares.
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 4k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\ \}$ es el conjunto de los naturales múltiplos de cuatro.

Igualdad de Conjuntos

Definición 1.1.5. *Dados dos conjuntos A y B, decimos que A es* ***igual*** *a B, y se escribe* $A = B$*, si cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A. Es decir, se cumplen ambas contenciones.*

$$A = B \text{ si ocurre que } A \subset B \text{ y } B \subset A$$

Observación 1.1.2. *Hemos mencionado que los "objetos" que integran un conjunto se llaman* ***elementos*** *de ese conjunto, pero no hemos definido que son estos objetos, de hecho no existe ninguna definición, dandonos la libertad de pensar que estos objetos pueden ser incluso conjuntos. En estos casos debemos tener mucho cuidado con interpretar correctamente si existe una relación de pertenencia o de contención. Veamos el siguiente ejemplo;*

Ejemplo 1.1.8. *Dado el conjunto* $C = \{\emptyset, 1, \{2\}, \{1, 2\}\}$*, veamos en cada caso la verdad o falsedad de relación; para la pertenencia, el objeto debe aparecer en la lista de C, mientras para la contención, primero debe ser un conjunto y segundo sus elementos deben aparecer en la lista de C.*

i)	$1 \in C$	*VERDADERO*	*pues* 1 *aparece en la lista de* C.
ii)	$1 \subset C$	*FALSO*	*pues* 1 *no es un conjunto contenido en* C.
iii)	$\{1\} \in C$	*FALSO*	*pues* $\{1\}$ *no aparece en la lista de* C.
iv)	$\{1\} \subset C$	*VERDADERO*	*pues* 1 *aparece en la lista de* C.
v)	$\{\{1\}\} \subset C$	*FALSO*	*pues* $\{1\}$ *no aparece en la lista de* C.

vi)	$2 \in C$	*FALSO*	*pues 2 no aparece en la lista de C.*
vii)	$2 \subset C$	*FALSO*	*pues 2 no es un conjunto contenido en C.*
viii)	$\{2\} \in C$	*VERDADERO*	*pues $\{2\}$ aparece en la lista de C.*
ix)	$\{2\} \subset C$	*FALSO*	*pues 2 no aparece en la lista de C.*
x)	$\{1, \{2\}\} \subset C$	*VERDADERO*	*pues 1 y $\{2\}$ aparecen en la lista de C.*

Un caso interesante en C se dá con el elemento $\emptyset$, que entendemos denota al conjunto vacío;

i)	$\emptyset \in C$	*VERDADERO*	*pues $\emptyset$ aparece en la lista de C.*
ii)	$\emptyset \subset C$	*VERDADERO*	*pues $\emptyset$ está contenido en cualquier conjunto.*
iii)	$\{\emptyset\} \in C$	*FALSO*	*pues $\{\emptyset\}$ no aparece en la lista de C.*
iv)	$\{\emptyset\} \subset C$	*VERDADERO*	*pues $\emptyset$ aparece en la lista de C.*

Ejercicio 1.1.2. *Para el conjunto $C = \{\emptyset, 1, \{2\}, \{1, 2\}\}$, Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.*

i)	$1, 2 \in C$	*v)*	$\emptyset, 1 \in C$
ii)	$\{1, 2\} \subset C$	*vi)*	$\{\emptyset, 1\} \subset C$
iii)	$\{\{1, 2\}\} \in C$	*vii)*	$\{\{\emptyset, 1\}\} \subset C$
iv)	$\{\{1, 2\}\} \subset C$	*viii)*	$\{\emptyset, \{1, 2\}\} \subset C$

1.2. Operaciones entre conjuntos

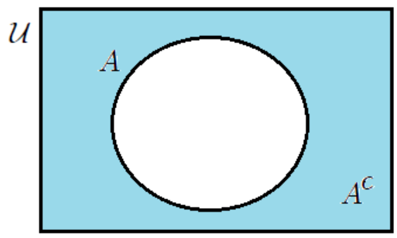
Definiremos las siguientes operaciones elementales entre conjuntos:

Complemento de un Conjunto

Definición 1.2.1. *Dado un conjunto universal $\mathcal{U}$. El **complemento** de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A y se denota por A^c . En símbolos:*

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un sombreado.



Ejemplo 1.2.1. *Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y A es el conjunto de los números pares, entonces A^c es el conjunto de los números naturales impares.*

Ejemplo 1.2.2. $\mathbb{Q} = \mathbb{I}^c$ *y* $\mathbb{Q}^c = \mathbb{I}$

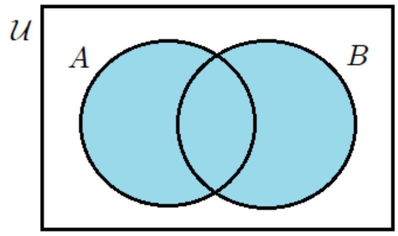
Unión

Definición 1.2.2. *Sean A y B dos conjuntos. La unión $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos son elementos de A o son elementos de B.*

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Notación 1.2.1. *El símbolo $\vee$ se lee "o", se lo conoce como el símbolo de la disyunción.*

En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos.



Ejemplo 1.2.3. *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto universal, y sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$, la unión resulta:*

$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

Ejemplo 1.2.4. *En los conjuntos numéricos se verifica las siguientes igualdades;*

$$\begin{array}{lrcl} i) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} \\ ii) & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N} \\ iii) & \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} & = & \mathbb{R} \end{array}$$

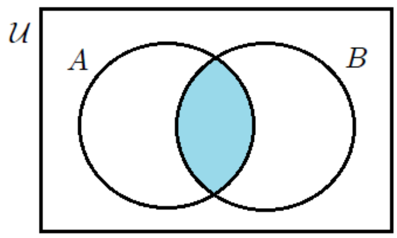
Intersección

Definición 1.2.3. *Sean A y B dos conjuntos. La **intersección** $A \cap B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y también a B. En símbolos:*

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Notación 1.2.2. *El símbolo $\wedge$ se lee "y", se lo conoce como el símbolo de la conjunción.*

En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa sombrando la región que tienen en común ambos conjuntos. Observese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y solo si no hay elementos comunes entre ellos.



Definición 1.2.4. *Dos conjuntos se dicen **disjuntos** si su intersección es vacía, es decir, no tienen elementos en común.*

Ejemplo 1.2.5. *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto universal, y sean los conjuntos:*

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar y } n \leq 15\} = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$ *y*

$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es primo}\}$

entonces;

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1,3,5,7,9\} \\ A \cap P &= \{2,3,5,7\} \\ B \cap P &= \{3,5,7,11,13\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.6. *En los conjuntos numéricos se verifica las siguientes igualdades;*

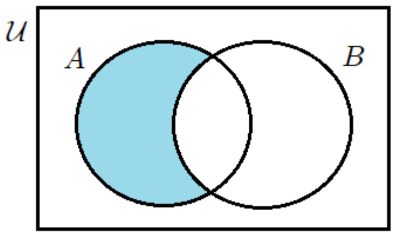
$$\begin{array}{ll} i) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \\ ii) & \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset \end{array}$$

Diferencia

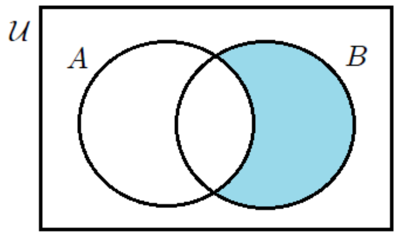
Definición 1.2.5. *Sean A y B dos conjuntos. La **diferencia** o complemento relativo $A - B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.*

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B, sombreando la región que es interior a A y exterior a B. Notar además que $A - B \neq B - A$



$A - B$



$B - A$

Ejemplo 1.2.7. *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto universal, y sean los conjuntos $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,3,5\}$, la diferencia resulta:*

$$\{1,3,5\} - \{2,3,5\} = \{1\} \qquad \{2,3,5\} - \{1,3,5\} = \{2\}$$

Ejemplo 1.2.8. *En los conjuntos numéricos se verifica las siguientes igualdades;*

$$\begin{array}{llcl} i) & \mathbb{Z} - \mathbb{N} & = & \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \\ ii). & \mathbb{Z} - \mathbb{Q} & = & \emptyset \\ iii) & \mathbb{R} - \mathbb{Q} & = & \mathbb{I} \\ iv) & \mathbb{Q} - \mathbb{I} & = & \mathbb{Q} \end{array}$$

Diferencia Simétrica

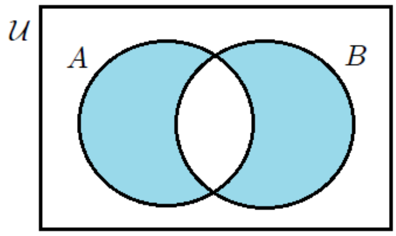
Definición 1.2.6. *Sean A y B dos conjuntos. La **diferencia simétrica** $A \triangle B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B, pero no a ambos a la vez. Es decir, se cumple que:*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

o de manera equivalente:

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

En un diagrama de Venn representamos la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B de la siguiente manera.

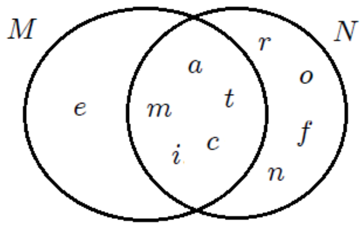


Ejemplo 1.2.9. *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto universal, y sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$, la diferencia simétrica resulta:*

$$A \triangle B = \{1, 2\}$$

Ejemplo 1.2.10. *Sean M el conjunto de las letras de la palabra matemática y N el conjunto de las letras de la palabra informática, determinemos la diferencia simétrica entre M y N.*

$M = \{m, a, t, e, i, c\}, \qquad N = \{i, n, f, o, r, m, a, t, c\}$



$$\begin{aligned} M \triangle N &= (M - N) \cup (N - M) \\ &= \{e\} \cup \{n, f, o, r\} \\ &= \{e, n, f, o, r\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.11. *En los conjuntos numéricos se verifica las siguientes igualdades;*

$$\begin{aligned} i).\quad \mathbb{Z} \triangle \mathbb{N} &= (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} - \mathbb{Z}) \\ &= (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cup \emptyset \\ &= \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\quad \mathbb{Q} \triangle \mathbb{I} &= (\mathbb{Q} - \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} - \mathbb{Q}) \\ &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.2.1. Álgebra de Conjuntos

Proposición 1.2.1. *En el álgebra de conjuntos se verifican las siguientes propiedades:*

1) Leyes idempotentes $\quad A \cup A = A$
$\qquad A \cap A = A$

2) Leyes conmutativas $\quad A \cup B = B \cup A$
$\qquad A \cap B = B \cap A$

3) Leyes asociativas $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$\qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) Leyes de absorción $A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A \cap B) = A$

5) Leyes distributivas $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Observemos que no es complicado verificar las leyes distributivas con diagramas de Venn, sin embargo esto sólo nos da un indicio de la veracidad de estas leyes pero de ninguna manera puede considerarse una demostración.

Veamos ahora la prueba de la primera ley distributiva en 5)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Demostración: Recordemos que una igualdad de dos conjuntos significa que deben verificarse ambas contenciones, y para probar cada contención utilizaremos la definició n, es decir, mostraremos que cualquier elemento del primer conjunto es también un elemento del segundo.
$\subset$) Ahora bién, sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Se cumple entonces que x es elemento de A y que x es elemento de B o de C. Es decir, o $x \in A$ y $x \in B$ o bien $x \in A$ y $x \in C$. Pero esto es lo mismo que decir que $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$, luego $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Acabamos de mostrar que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (1)
$\supset$) Recíprocamente, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces x está en $A \cap B$ o bien x está en $A \cap C$. Luego x es elemento de A y de B o x es elemento de A y de C, o lo que es lo mismo, x es elemento de A y también es elemento de B o de C. Pero esto es equivalente a decir que $x \in A \cap (B \cup C)$.
Acabamos entonces de mostrar que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ (2)
Luego de (1) y (2) se demuestra que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

Ejercicio 1.2.1. *Demostrar la segunda ley distributiva en 5)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Proposición 1.2.2. *Ley de involución*

$$(A^c)^c = A$$

Proposición 1.2.3. *Leyes de De Morgan*

$$\text{1) } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$\text{2) } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demostración: Tal como en el caso anterior, las leyes de De Morgan son fáciles de visualizar usando diagramas de Venn, pero debemos hacer una demostración formal, es decir, mostraremos en ambas igualdades que se verifican las dos inclusiones.
$\subset$) Sea $x \in (A \cup B)^c$, esto es x no está en la unión de A y B, entonces x no pertenece a A y x no pertenece a B, luego x está en A^c y en B^c , es decir que $x \in A^c \cap B^c$. Recíprocamente, si $x \in A^c \cap B^c$, entonces x no está en A ni en B, por lo que x no está en la unión de A con B, es decir que $x \in (A \cup B)^c$. Luego $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
$\supset$) De manera análoga sea $x \in (A \cap B)^c$, esto es x no pertenece a $A \cap B$, x no está en la intersección de A con B,entonces x no pertenece a A o x no pertenece a B. Esto quiere decir que x está en A^c o x está en B^c . Por lo tanto $x \in A^c \cup B^c$. Recíprocamente, si $x \in A^c \cup B^c$, entonces x no está en A o bien x no está en B por lo que x no puede estar en $A \cap B$, por lo tanto $x \in (A \cap B)^c$.
Luego $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

Proposición 1.2.4. *Leyes de identidad*

1) $A \cup \emptyset = A$
2) $A \cap \mathcal{U} = A$
3) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
4) $A \cap \emptyset = \emptyset$

Proposición 1.2.5. *Leyes de complemento*

$$\begin{array}{ll} 1) & A \cup A^c = \mathcal{U} \\ 2) & A \cap A^c = \emptyset \\ 3) & A^c = \mathcal{U} - A \\ 4) & \emptyset^c = \mathcal{U} \\ 5) & \mathcal{U}^c = \emptyset \end{array}$$

Ejercicio 1.2.2. *Sean $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es compuesto}\}$ y $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo}\}$. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:*

a) $C \cap P = \emptyset$

b) $C \cup P = \mathbb{N}$

Ejercicio 1.2.3. *Sean $P = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$ y $Q = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\}$. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:*

a) $P \cap Q = \emptyset$

b) $P \cup Q = \mathbb{Z}$.

c) $P^c = Q$

1.2.2. Conjunto Partes

Existen situaciones en que es útil considerar al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

Definición 1.2.7. *Dado un conjunto A, el* ***conjunto partes*** *o* ***conjunto potencia*** *de A, que se denota con $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$$

Ejemplo 1.2.12. *Determinemos el conjunto partes del conjunto $\{a, b\}$. Es decir, $\mathcal{P}(\{a, b\})$.*

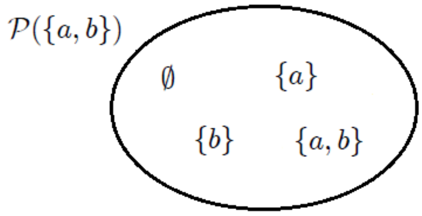
$\mathcal{P}(\{a, b\})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{a, b\}$. Debemos siempre recordar dos propiedades ya enunciadas, estas son:

1) El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto.

2) Cualquier conjunto está contenido en si mismo.

Es decir que $\emptyset \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ y $\{a, b\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$, además $\{a\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ y $\{b\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$. Luego; $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

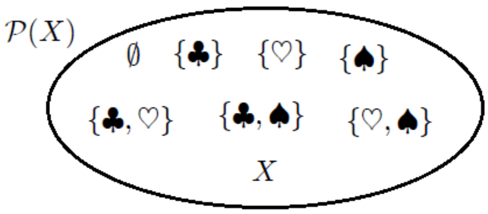
Graficamente:



Ejemplo 1.2.13. *Para el conjunto $X = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ el conjunto partes resulta;*

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, X\}$$

Graficamente:



De acuerdo a los ejemplos anteriores, podemos ver que el cardinal de un conjunto partes crece de acuerdo al cardinal del conjunto dado. Así, dado un conjunto A;

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Ejemplo 1.2.14. *El cardinal del conjunto partes de los conjuntos dados en los ejemplos anteriores:*

1) Dado que $|\{a, b\}| = 2$*, se tiene que* $|\mathcal{P}(\{a, b\})| = 2^2 = 4$.

2) Para $X = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ *vemos que* $|X| = 3$*, luego* $|\mathcal{P}(X)| = 2^3 = 8$.

Ejercicio 1.2.4. *Para el conjunto* $Y = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$ *, determina el conjunto partes* $\mathcal{P}(Y)$.