

# Modelagem Geométrica

André Tavares da Silva

[andre.silva@udesc.br](mailto:andre.silva@udesc.br)

Capítulo 7 do “Foley”

Capítulo 4 de Azevedo e Conci

Mortenson (Geometric Modeling)

# Modelagem Sólida

## Métodos de Criação de Objetos

- Instanciação
- Parametrização
- Varredura (*Sweeping*)
- Modelagem Topológica Poliédrica

# Instanciação

## Instanciamento (A&C, 2003: 4.5.1)

# Instanciação

- Produz uma cópia modificada de objetos padronizados e previamente programados
- São variações de **Tamanho, Posição e Orientação** (**somente**) obtidas por transformações lineares de escala, translação e rotação, respectivamente (**TGLR**).
- São bastante compactos
- São muito limitados

# Instanciação

- É uma operação que altera a **geometria** mas não a **topologia** de uma **primitiva gráfica**
- Geometria
- Topologia
- Primitiva Gráfica

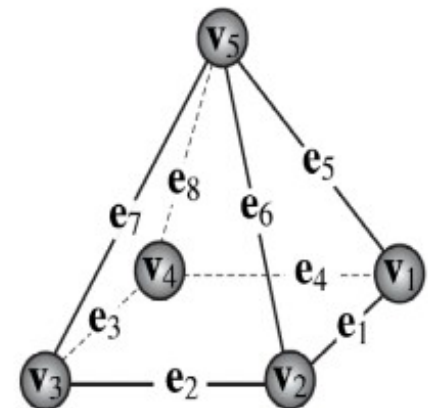
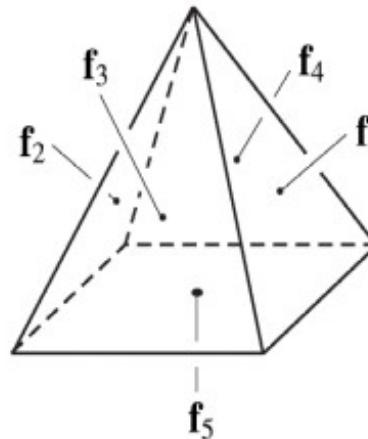
# Elementos de um Poliedro

## Geometria

Ponto, reta, círculo, plano, ...

## Topologia

- **V**értices (índice, organização)
- Arestas (**E**edges) e
- **F**aces



# Topologia

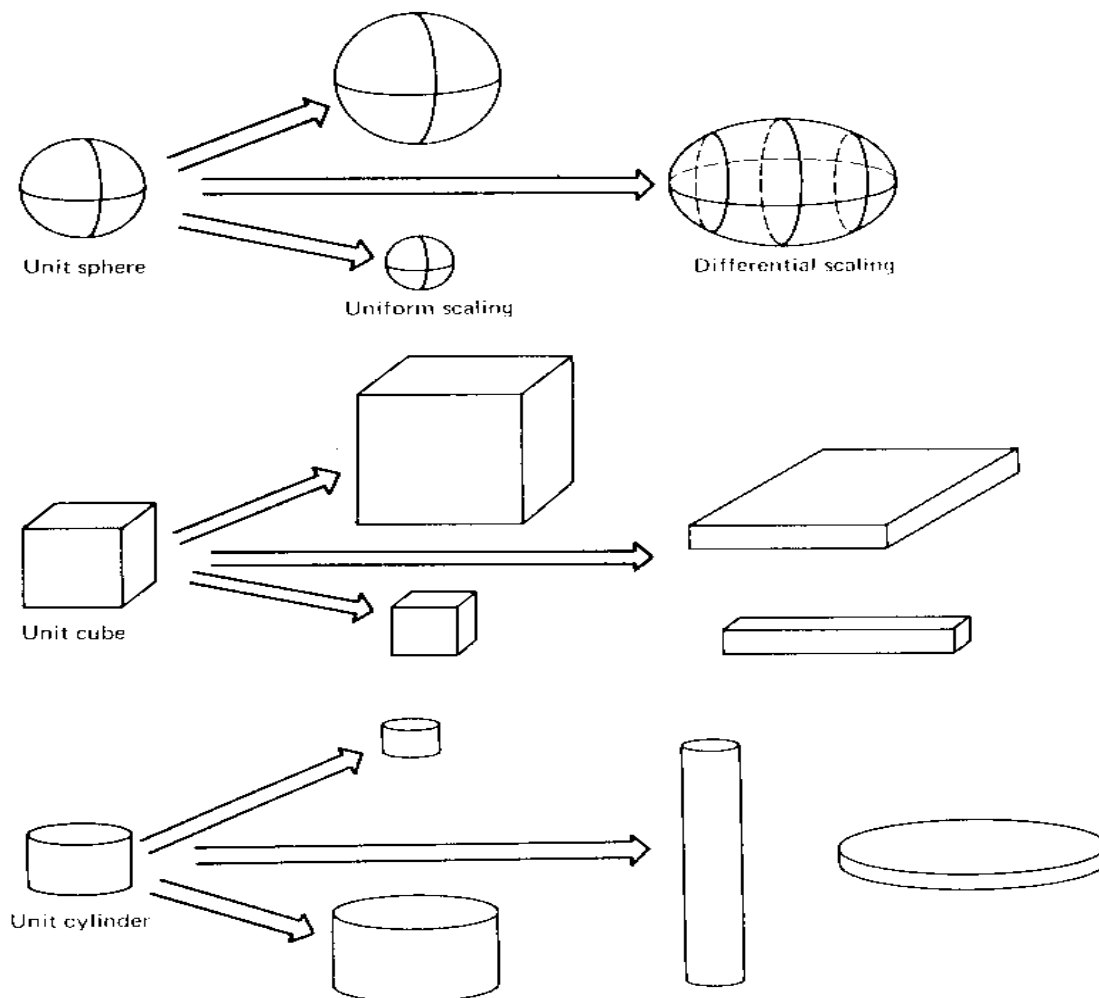
(Mortenson 2006:333)

✦ São propriedades não métricas (não relacionadas com o espaço Euclidiano) que se relacionam com questões da estrutura do objeto (sua **conectividade, vizinhança e continuidade** dimensional)

✦ em Curvas e Superfície (Abertas ou fechada, Superfícies de um ou dois lados)

✦ Propriedades que são **invariante às TGLRs** torcer, comprimir, ..., **sem rasgar, furar nem induzir auto-intersecção**

# Instanciação Primitivas Gráficas

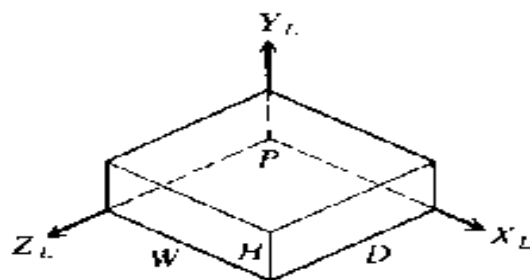




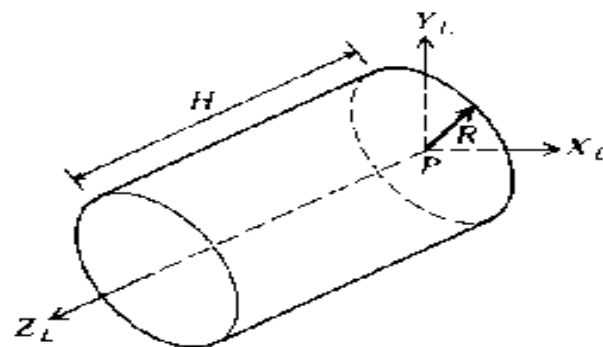
# Principais Primitivas

- **Cubo**
  - Superfície plana
- **Cilindro**
  - Curvatura cilíndrica
- **Esfera**
  - Curvatura esférica
- **Toróide**
  - Curvatura complexa, toroidal (com furo).
- **Cone (\*)**
  - Curvatura cônica; *tapered cylinder*
- **Wedge/Calço/Cunha (\*)**
  - *Tapered cube*

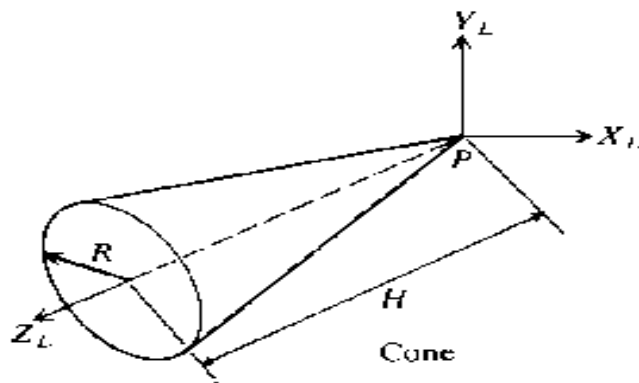
# Primitivas Mais Comuns (Zeid:342)



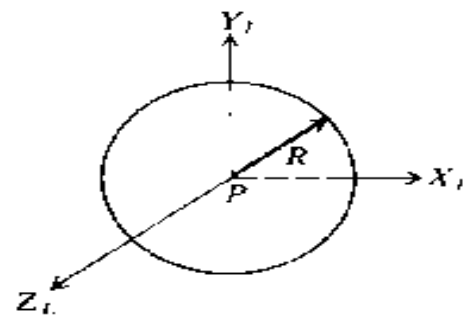
Block



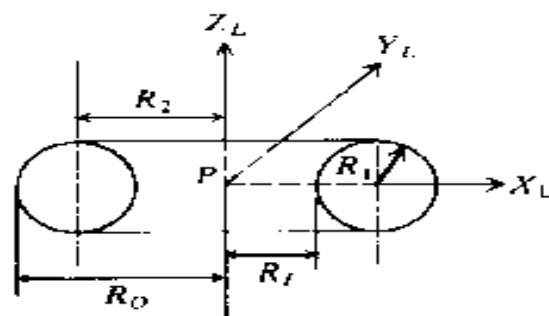
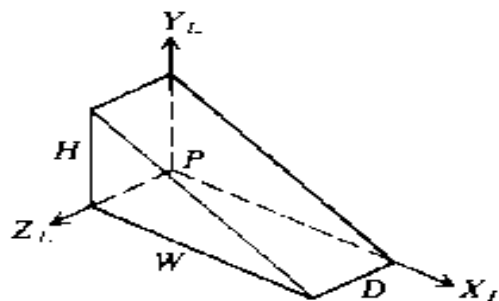
Cylinder



Cone



Sphere



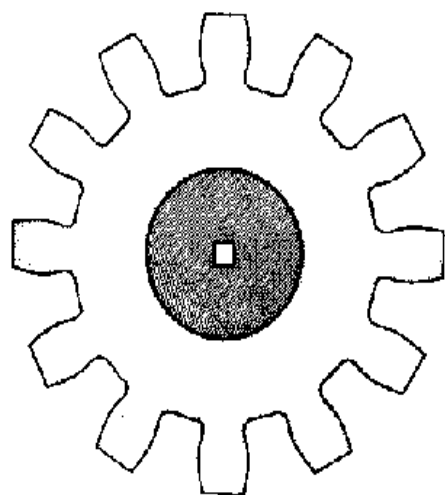
# Parametrização

# Parametrização

- São uma generalização da instanciação
  - Não está limitado às TGLR
  - Podem gerar objetos com **variações de topologias**
- É usado geralmente para objetos relativamente complexos, que são tediosos para serem definidos usando outras operações de modelagem e que sejam facilmente caracterizados por um conjunto de parâmetros de “alto-nível” (Foley96:539)

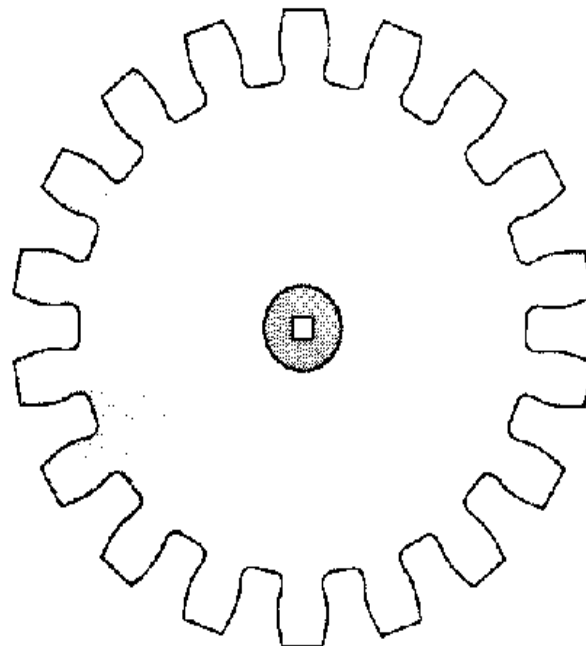
# Parametrização

(Foley96:559)



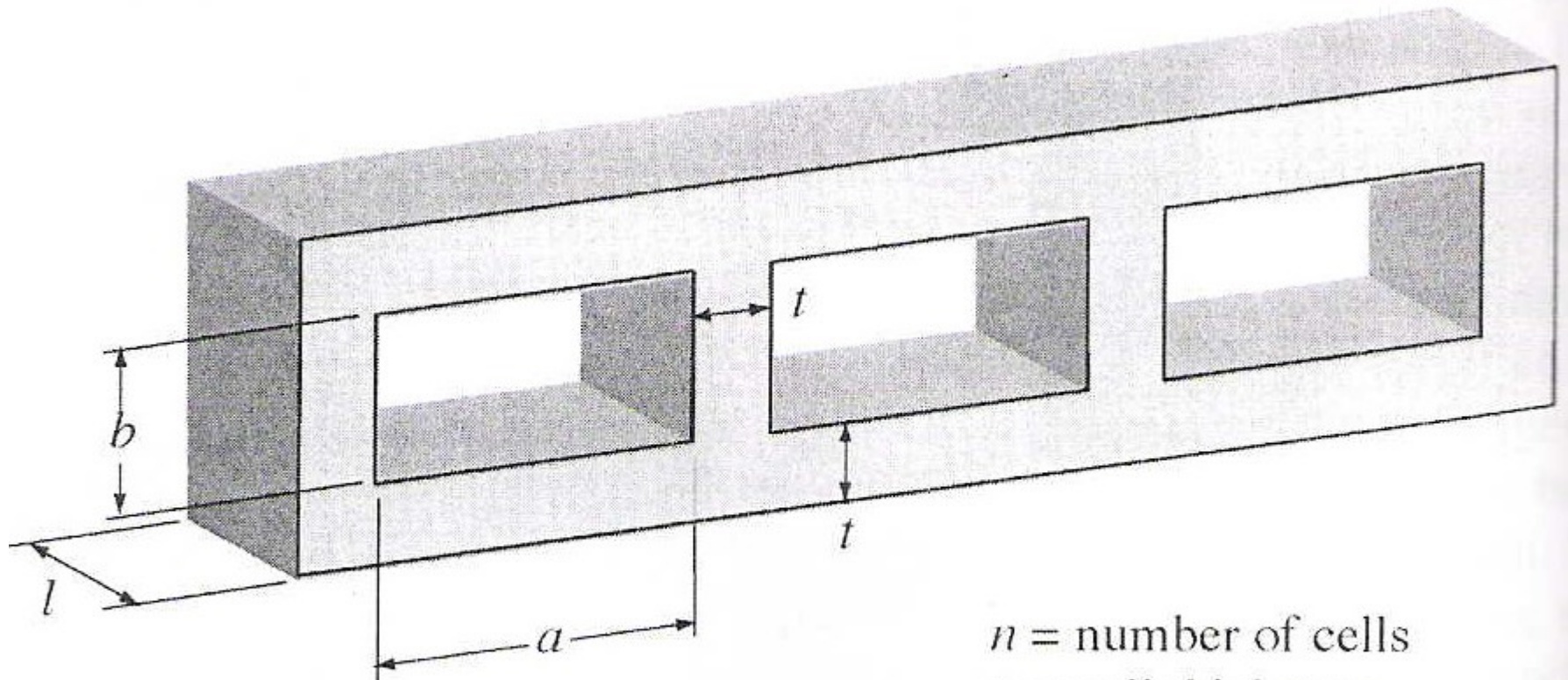
(a)

diam = 4.3  
hub = 2.0  
thickness = 0.5  
teeth = 12  
hole = 0.3

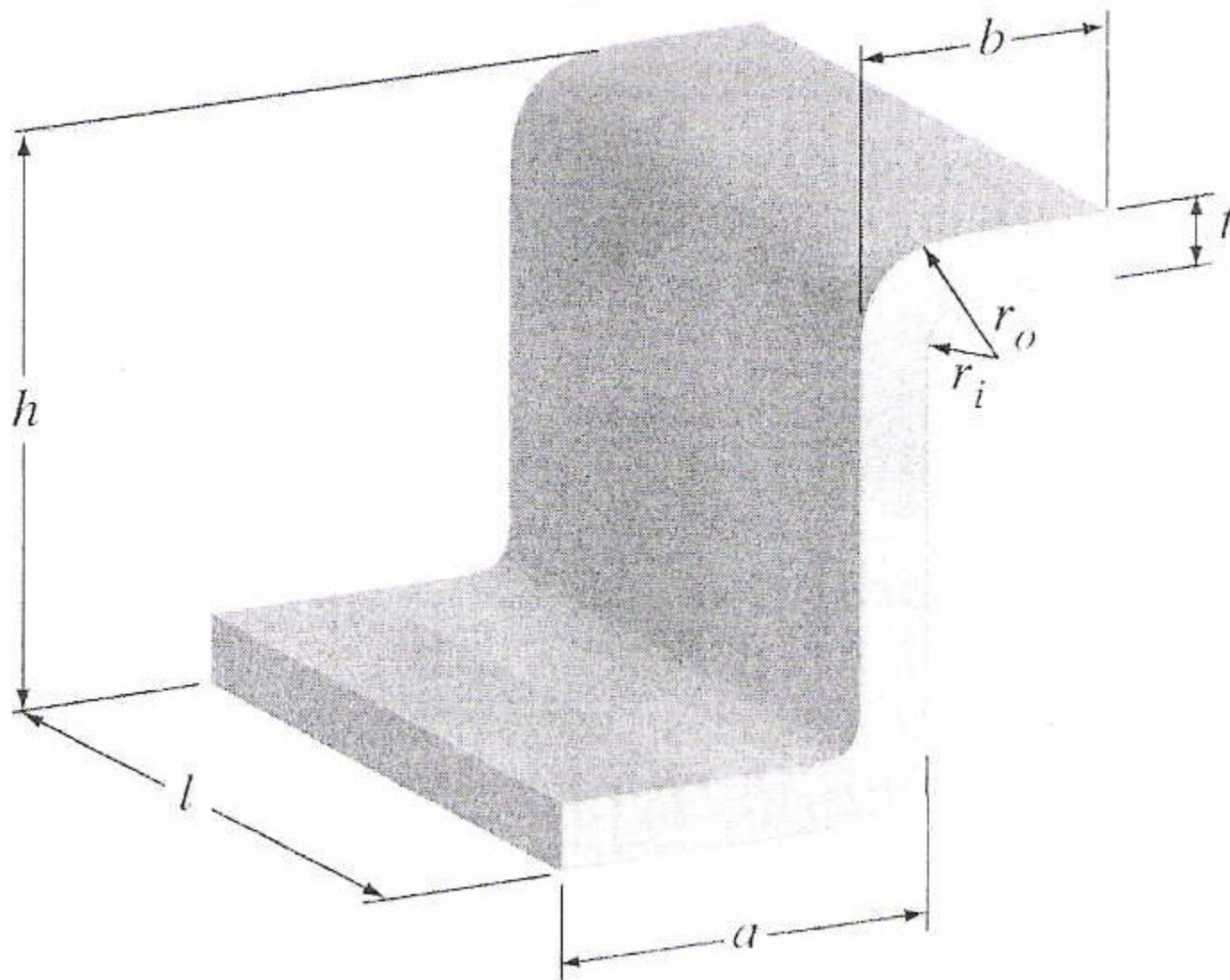


(b)

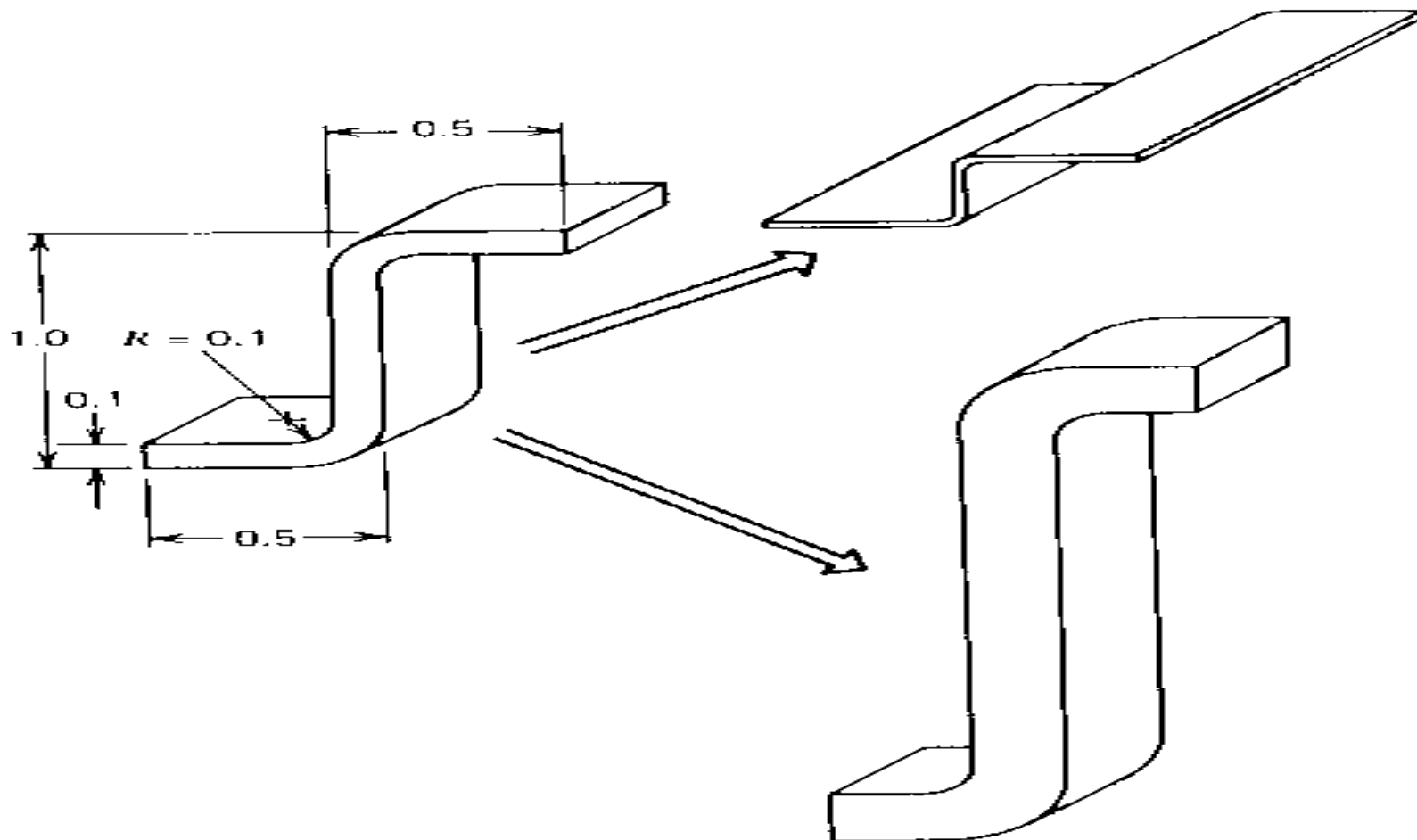
diam = 6.0  
hub = 1.0  
thickness = 0.4  
teeth = 18  
hole = 0.3



$n$  = number of cells  
 $t$  = wall thickness  
 $a, b$  = cell dimensions  
 $l$  = length



# Parametrização





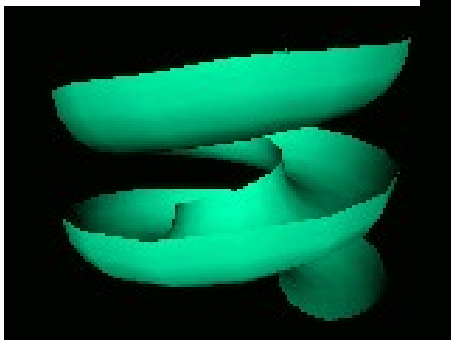
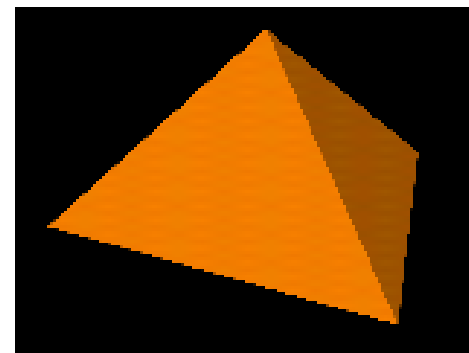
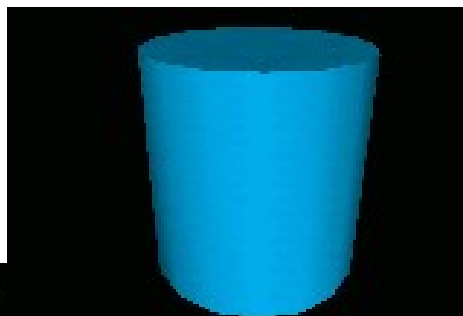
# *Sweeping / Varredura*

Extrusão/Translacional

Revolução/Rotacional

Cônica/Generalizada

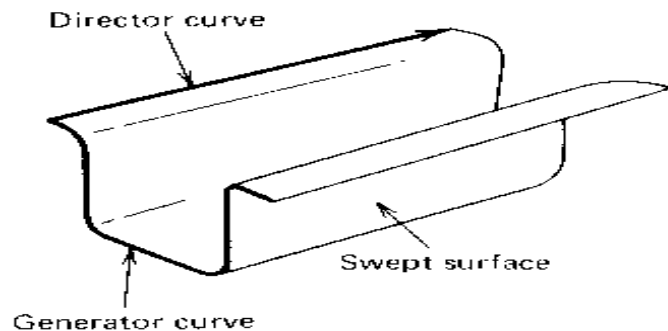
# Exemplos de Objetos Extrudados ou Rotacionados



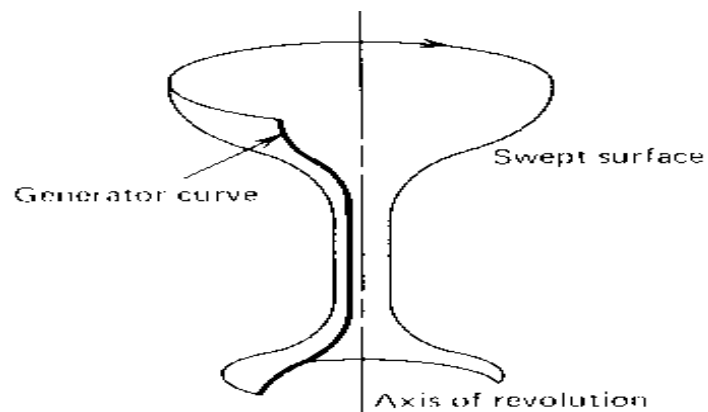
# *Sweeping*

- Arrastar/Varrer um objeto através de uma trajetória no espaço define um novo objeto.
- Exemplos
  - Varrer um ponto  $\rightarrow$  reta(curva)
  - Varrer uma reta(curva)  $\rightarrow$  superfície (área)
  - Varrer uma face (área)  $\rightarrow$  sólido
  - Varrer um sólido  $\rightarrow$  sólido

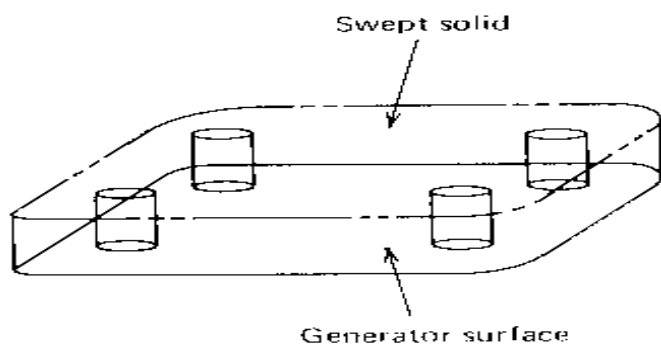
# Modelagem *Sweeping*



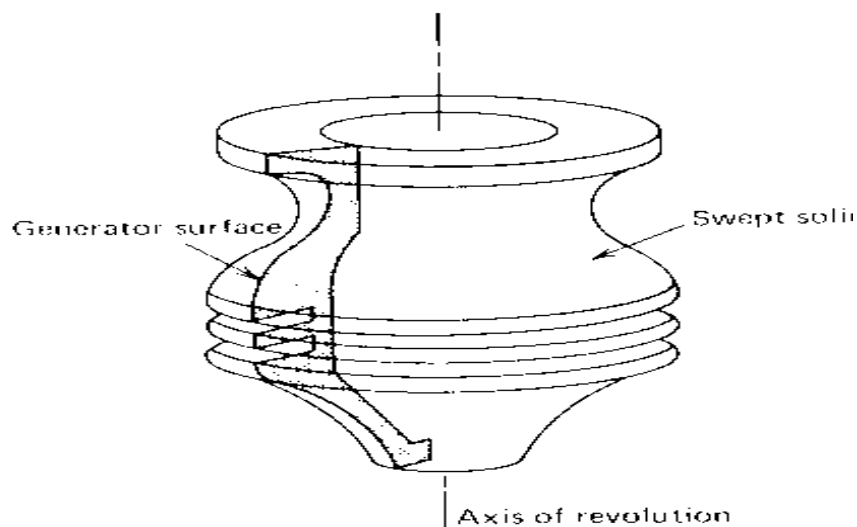
(a)



(b)



(c)

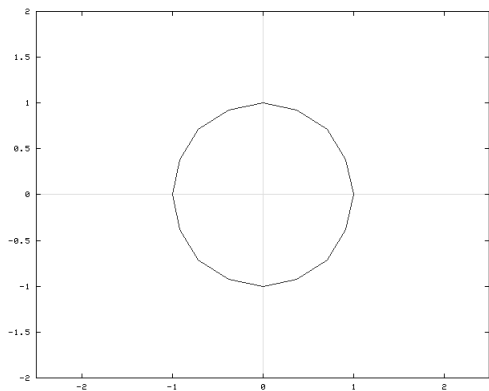


(d)

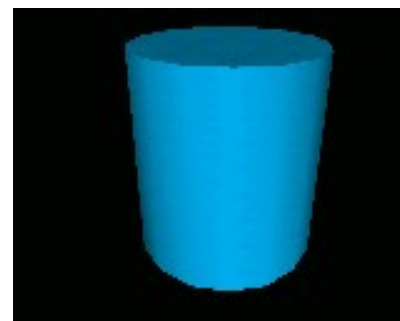
# *Sweeping*

*Sweeping* é governado pelos elementos **Gerador** (dá a forma) e **Diretor** (dá a dimensão)

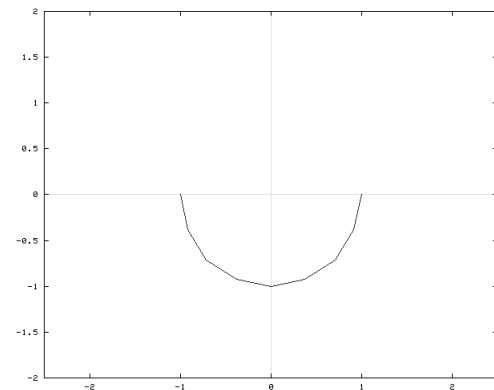
# Varredura (*sweep*)



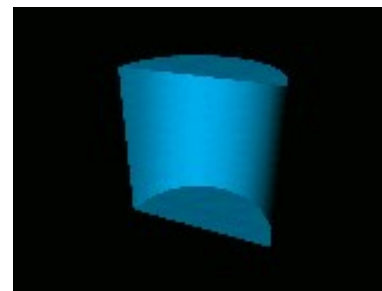
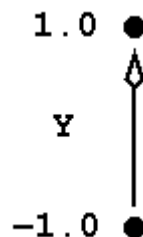
Área



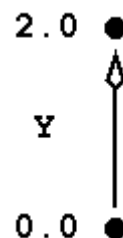
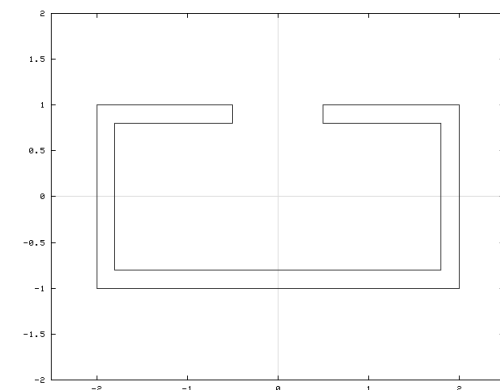
Volume



Curva

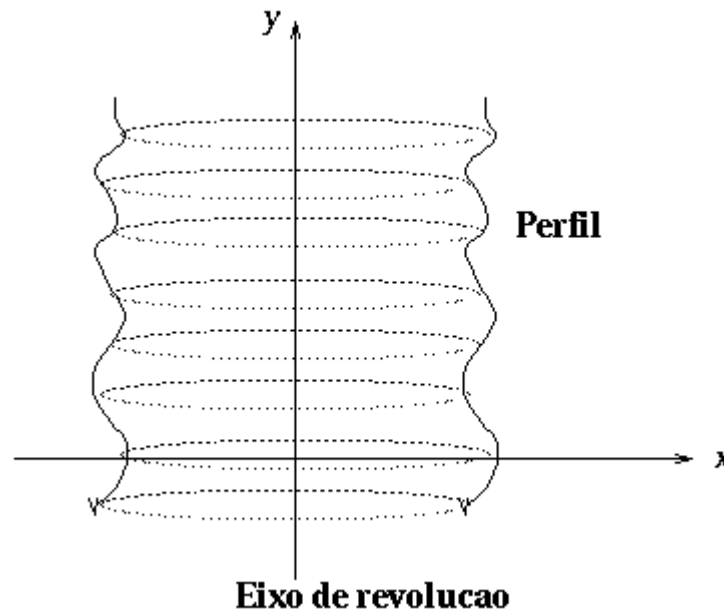


Casca

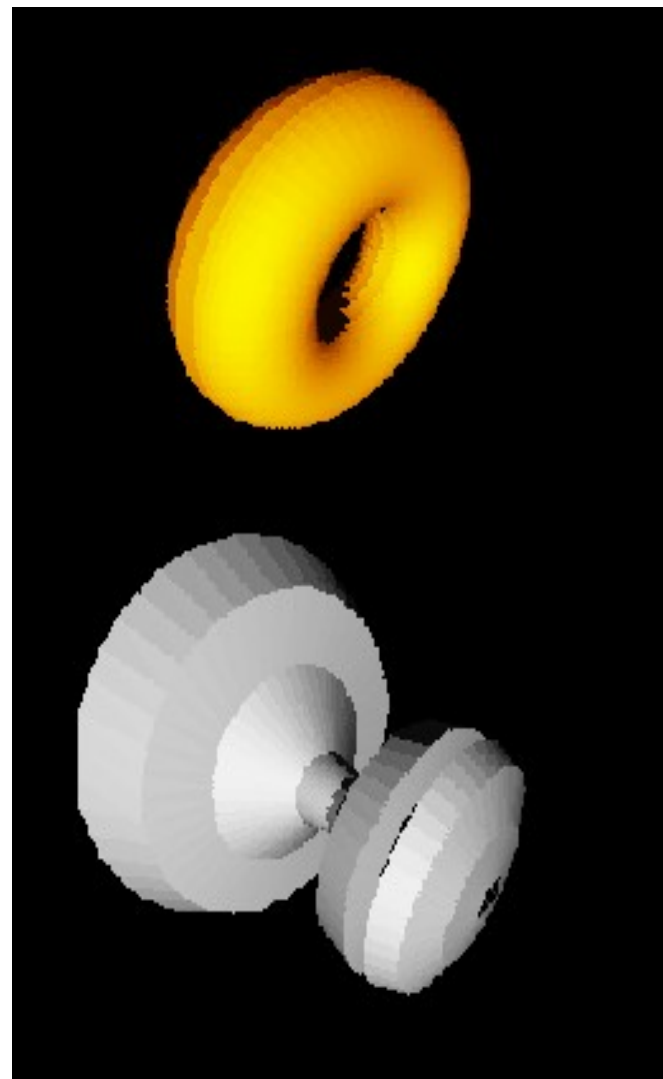
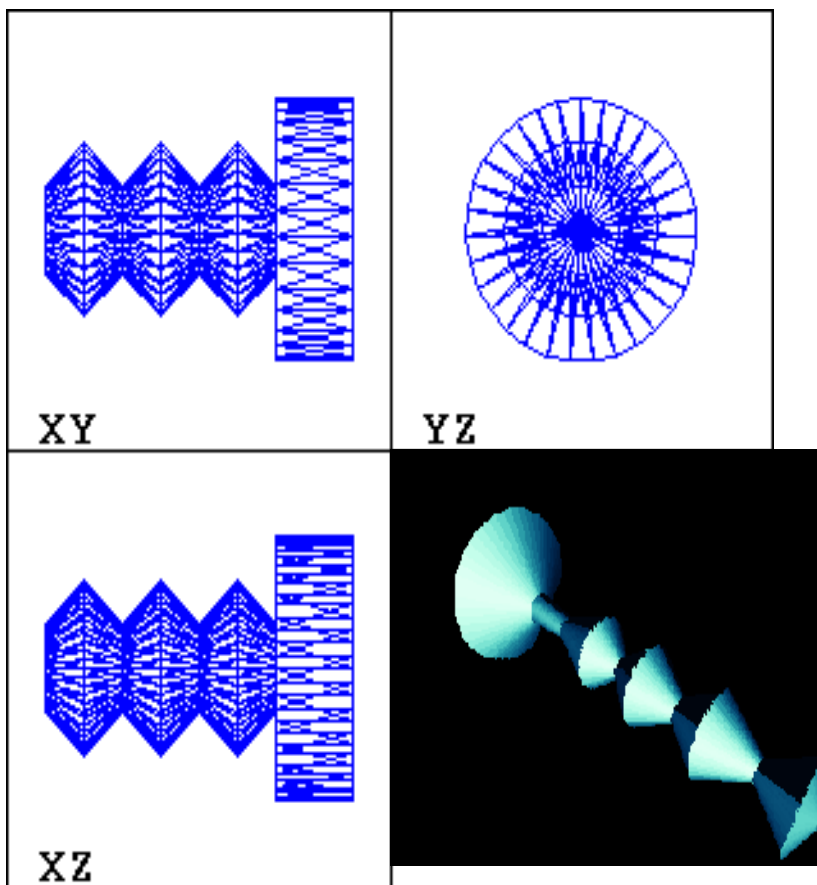


# Superfícies de Revolução

Criada a partir de uma curva plana, chamada perfil, que é rotacionada em torno de um eixo de revolução.



# *Sweeping* Rotacional Objetos de Revolução





# Superfícies de Revolução

O usuário tem a possibilidade de determinar os seguintes parâmetros do toro:

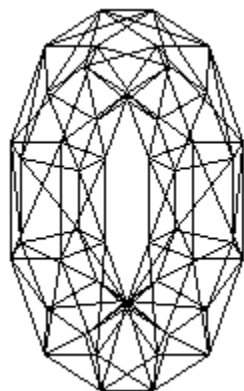
Raio de Revolução.

Raio do Perfil.

Densidade de poligonalização do perfil.

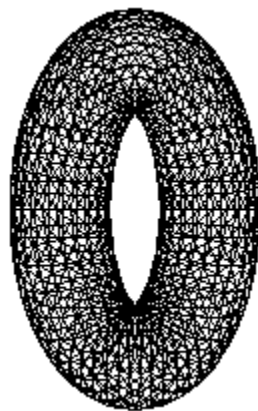
Densidade de poligonalização da revolução.

# Superfícies de Revolução



Densidade do perfil = 5

Densidade de rev. = 10



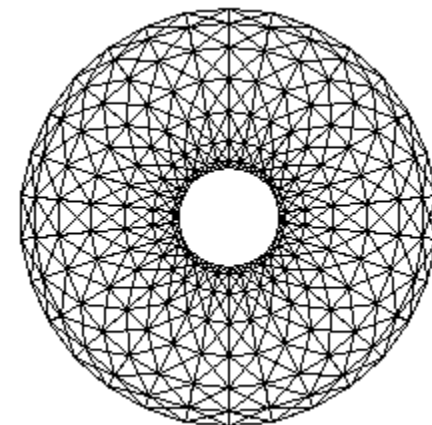
Densidade do perfil = 22

Densidade de rev. = 44



Raio do perfil = 75

Raio de rev. = 15



Raio do perfil = 40

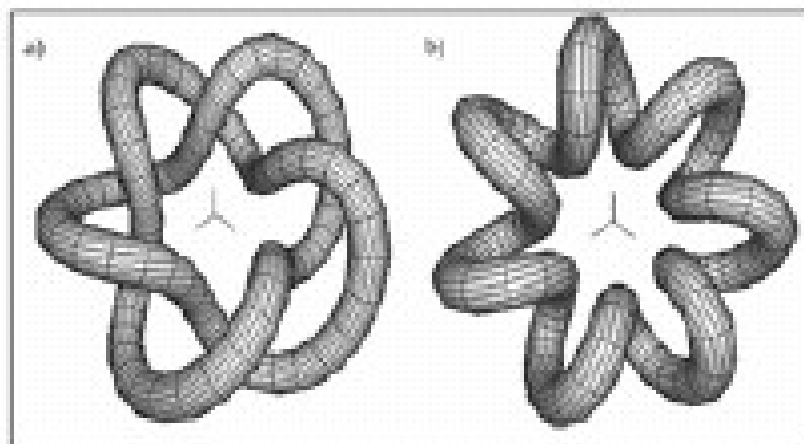
Raio de rev. = 65

# Generalizando o Sweeping

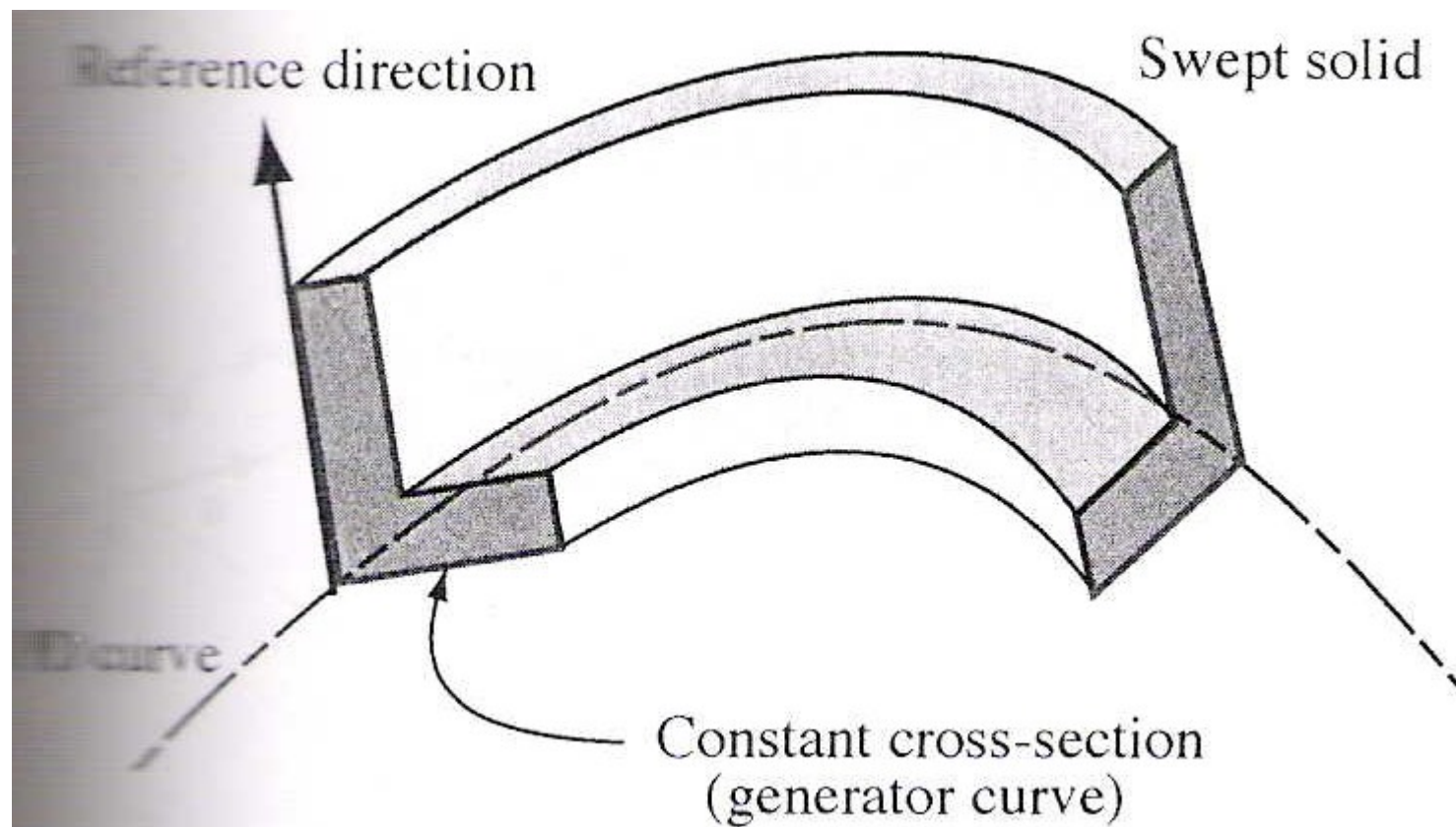
- Alterações na **Diretriz**
  - Linear (Rotação e Escala)
  - Curva Qualquer (Explícita ou Implícita)
- Alterações na **Geratriz**
  - Linear (Rotação e Escala)
  - Forma Livre (não linear)
    - *Lofting* e Reconstrução Planar 3D

# Diretriz Analítica

- $C(t) = ((a + b \cos(qt)) \cos(pt), (a + b \cos(qt)) \sin(pt), c \sin(qt))$ ,  
onde  $a$ ,  $b$ ,  $p$  e  $q$  são constantes escolhidas
- (a)  $p = 2$  e  $q = 5$
- (b)  $p = 1$  e  $q = 7$



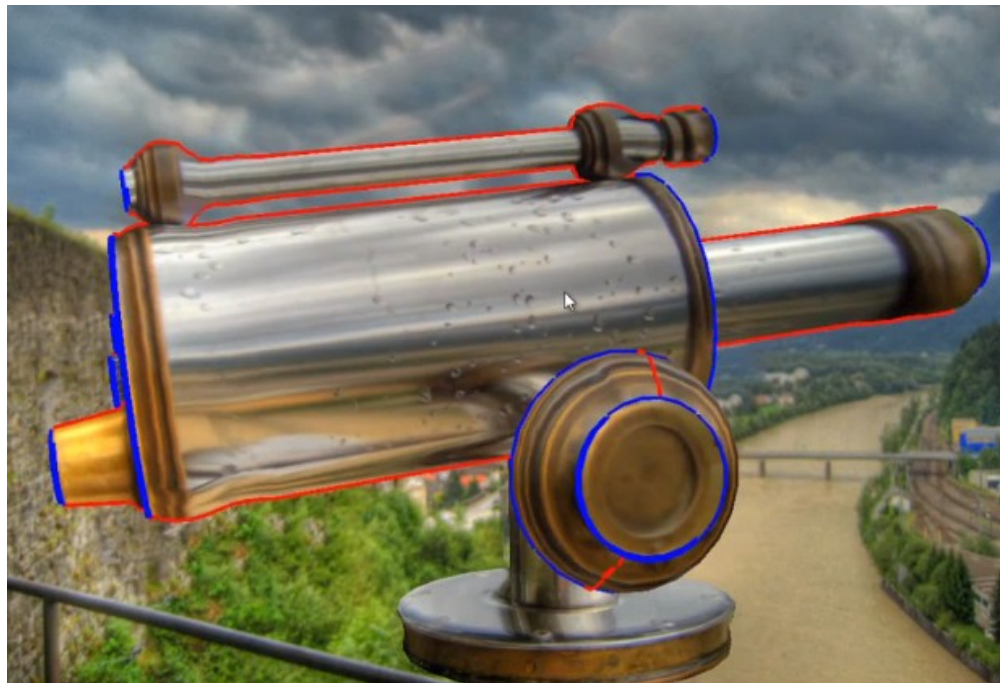
# Diretriz com rotação ao longo da curva



# Super Sweeping

SIGGRAPH 2013

<http://petapixel.com/2013/09/09/type-3d-manipulation-software-future-photo-manipulation/>



<https://cacm.acm.org/magazines/2016/12/210374-extracting-3d-objects-from-photographs-using-3-sweep/fulltext>

# Generalizando o *Sweeping*

- Alteração da **forma** da geratriz ao longo da diretriz (**não linear**)
  - *Interpolação de Curvas/Formas*
  - *Lofting (no eixo)*
  - *Tiling*

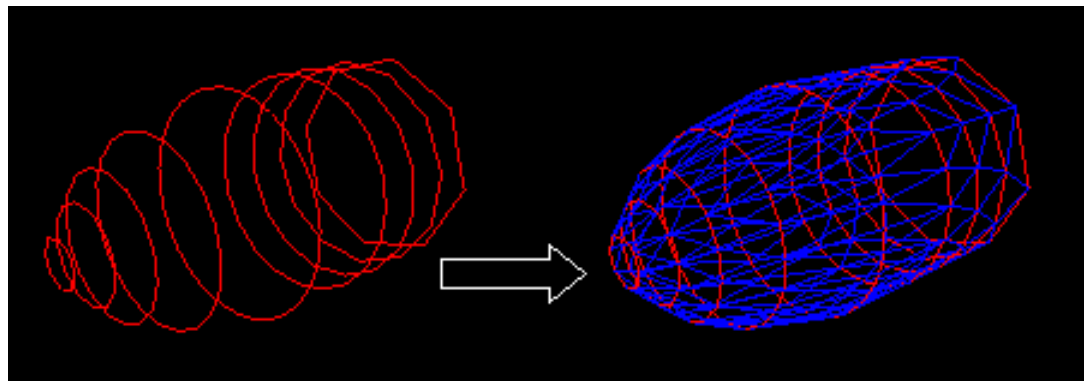
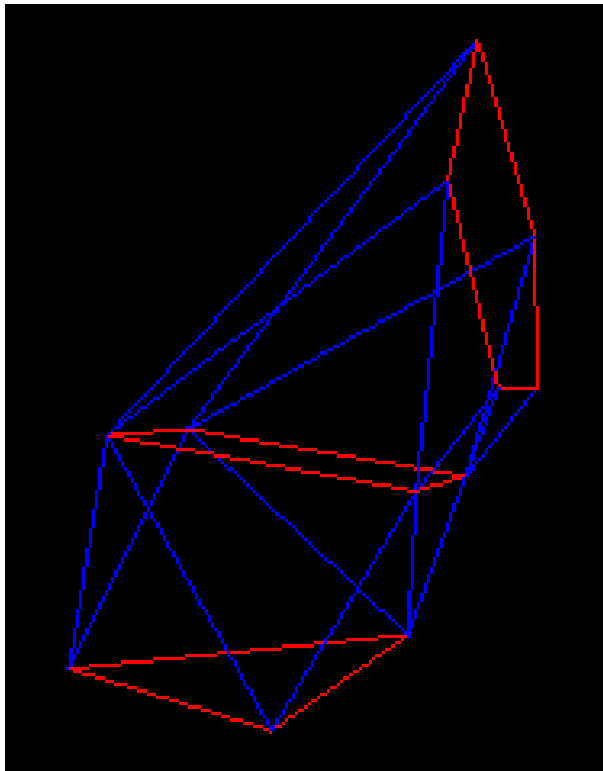
# *Lofting/Reconstrução 3D*



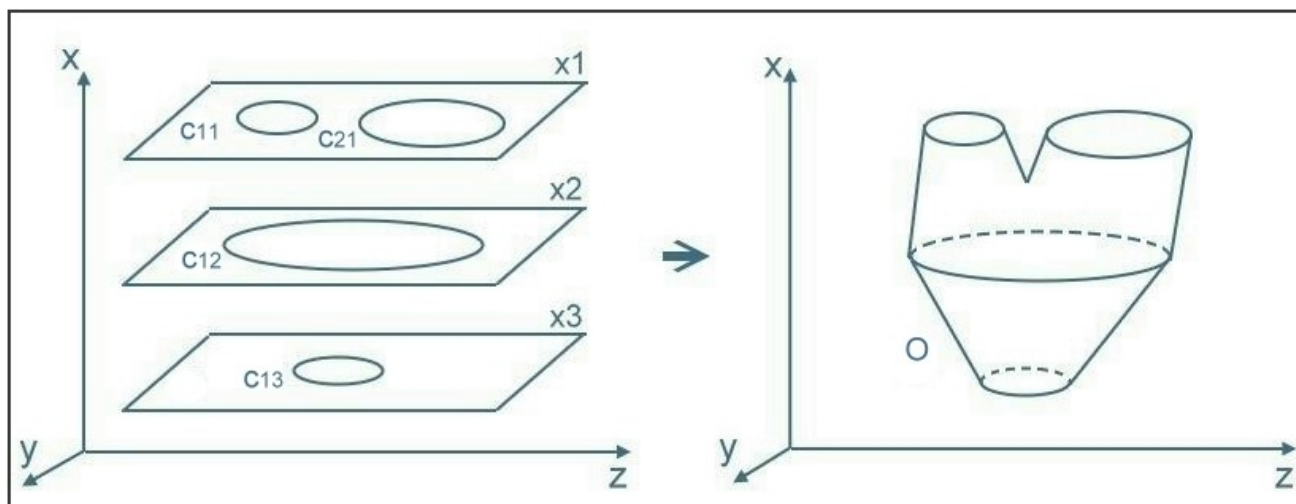
# *Lofting* (Gomes e Velho, 1990:145)

“Constrói a superfície interpolando suas seções transversais de qualquer formato, ao longo de um eixo”

<http://www.raudins.com/glenn/Projects/Lofting/default.htm>

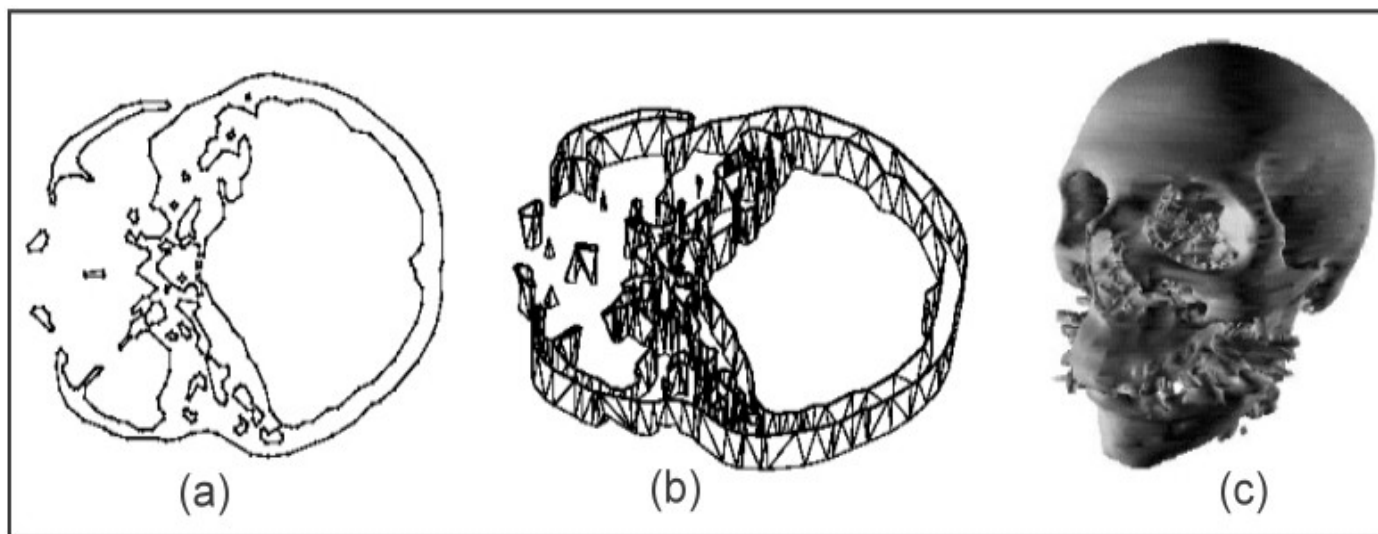


# Reconstrução 3D (Lofting Progressivo)



*Dado um conjunto de curvas  $c_{ij}$  onde  $i=1, 2, \dots, n$  e  $n$  é um número diferente de curvas no plano  $x_j$ , criar um objeto  $O$  sendo que as curvas  $c_{ij}$  sejam a interseção de  $O$  com os planos  $x_j$ .*

# Reconstrução 3D: Aplicações: Crânio

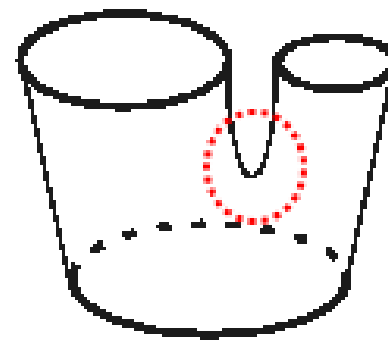
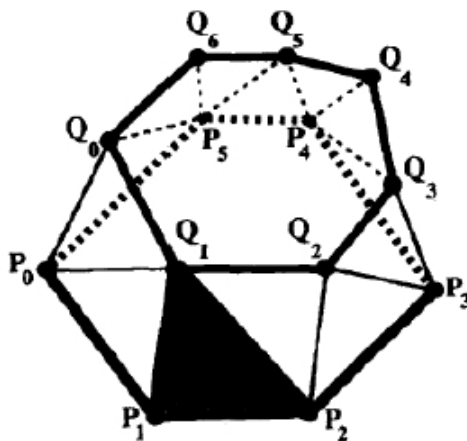
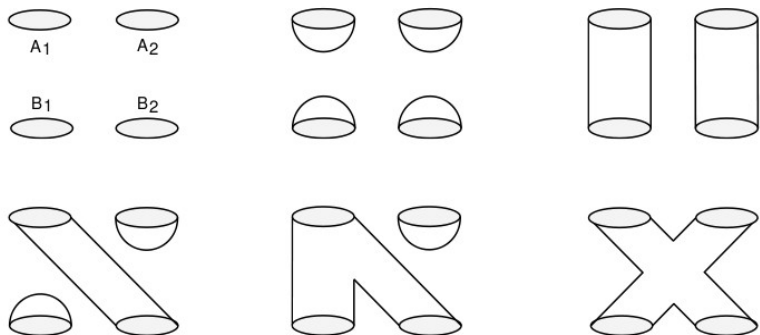


# Reconstrução 3D

Etapas de Reconstrução 3D por Seções Planares:

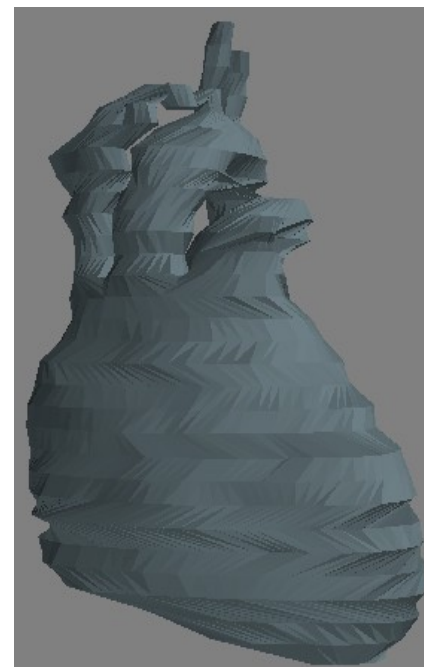
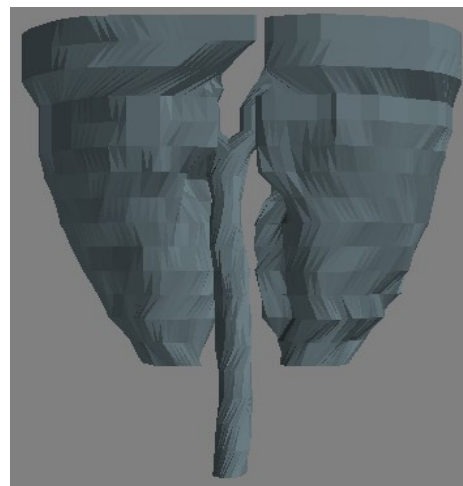
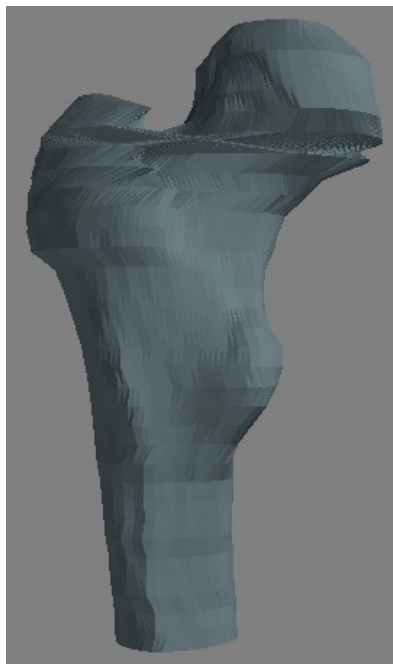
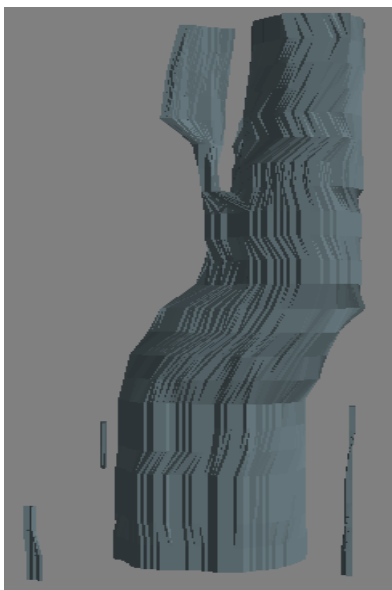
- Correspondência (*Corresponcence*)
- Interpolação/Geração de Malha (*Tiling/Lofting*)
- Bifurcação (*Branching*)

# Etapas da Reconstrução 3D



# Reconstrução com o Delta+

(Anzollin 2006, Bittencourt 2009)



# Modelagem Topológica Poliédrica

# Conteúdo

1. O que é um Poliedro
2. O que é Geometria e Topologia
3. Noções de Topologia
4. Validação de um Poliedro
5. Operadores de Euler
6. Comentários



O que é um Poliedro ?

# Definindo um **Poliedro**

(Mortenson 2006:319)

- É um **sólido** que é composto por **polígonos** planares cujas arestas pertencem a outro polígono
- É um arranjo de polígonos de forma que dois e somente **dois** polígonos se encontram em uma aresta
- É possível visitar toda a **superfície** do poliedro passando pelas arestas e visitando todos os polígonos

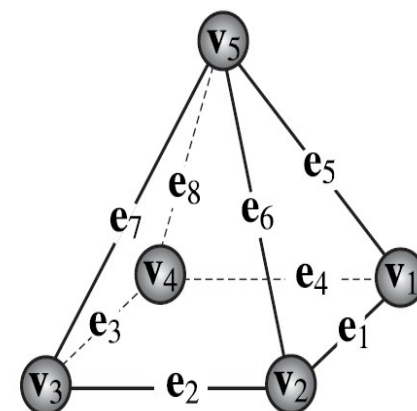
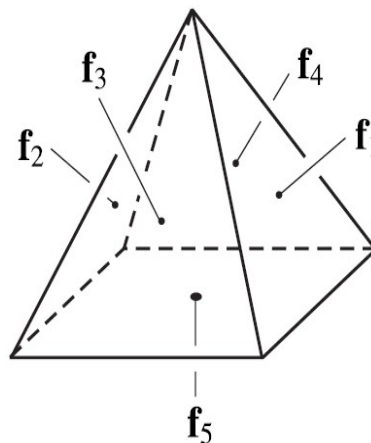
# Elementos de um Poliedro

## Geometria

Ponto, reta, círculo, plano, ...

## Topologia

- **V**értices (índice, organização)
- Arestas (**E**dges) e
- **F**aces



O que é topologia ?

# Topologia

(Mortenson 2006:333)

- São propriedades não métricas (não relacionadas com o espaço Euclidiano) que se relacionam com questões da estrutura do objeto (sua **conectividade**, **vizinhança** e **continuidade** dimensional) em Curvas e Superfície (Abertas ou fechada, Superfícies de um ou dois lados)
- Propriedades que são **invariante às TGLRs** torcer, comprimir, ..., **sem rasgar, furar nem induzir auto-intersecção**

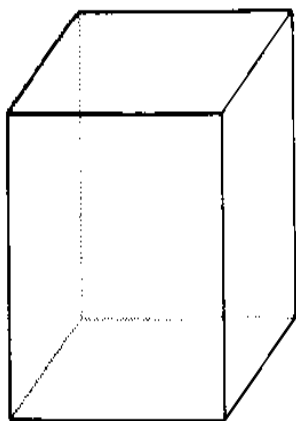
# Fórmula de Euler

(A&C, 2003: Cap 4.4.3.1)

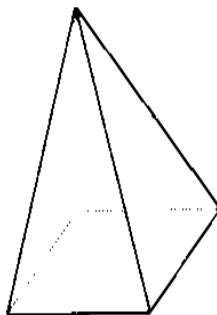
- Objetos poliédricos **simples** seguem a **Fórmula de Euler**
  - (Teorema da Topologia de Poliedros no  $R^3$ )
  - A Fórmula de Euler funciona mesmo para arestas curvas e faces não planas !
  - Pode-se então “validar” topologicamente um poliedro simples verificando se:

$$V - E + F = 2$$

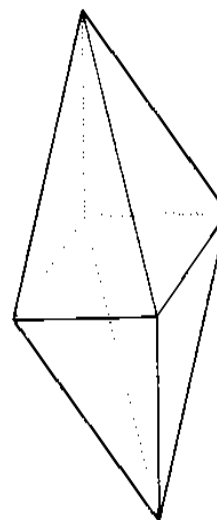
# Fórmula de Euler: $V - E + F = 2$



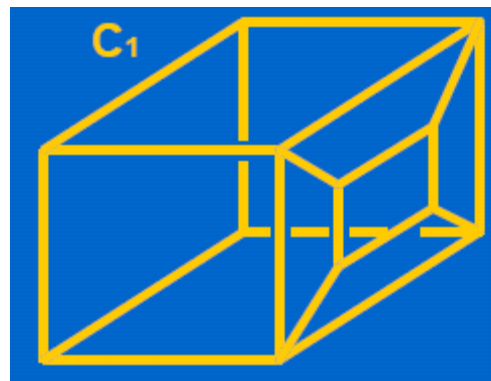
$$\begin{aligned} V &= 8 \\ E &= 12 \\ F &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 5 \\ E &= 8 \\ F &= 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 6 \\ E &= 12 \\ F &= 8 \end{aligned}$$

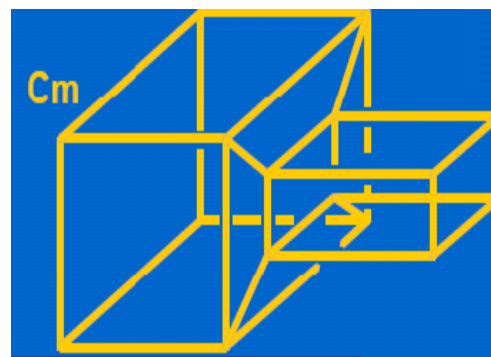


$V = ?$

$E = ?$

$F = ?$

$$V - E + F = 2$$

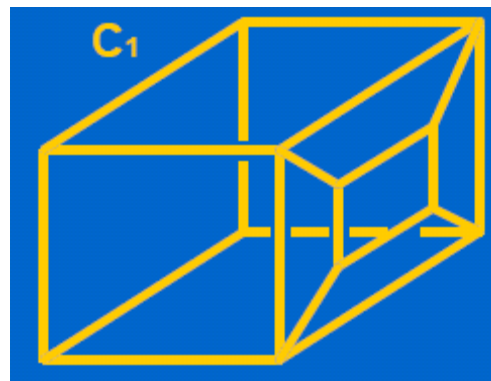


$V = ?$

$E = ?$

$F = ?$



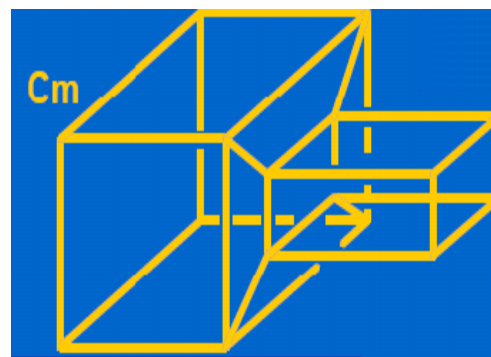


$$V = 12$$

$$E = 20$$

$$F = 10$$

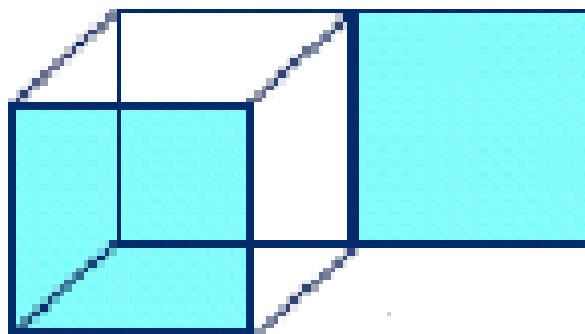
$$V - E + F = 2$$



$$V = 16$$

$$E = 28$$

$$F = 14$$



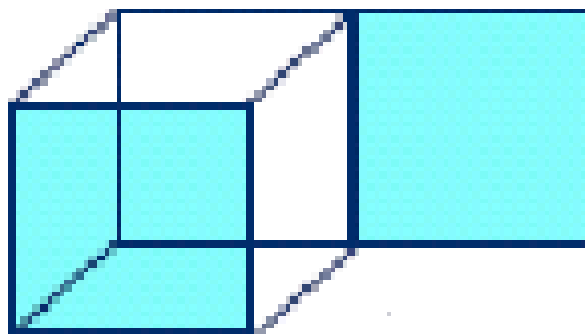
$$V = ?$$

$$E = ?$$

$$F = ?$$

$$V - E + F = ???$$

# Só a Fórmula de Euler valida ?



$$V = 10$$

$$E = 15$$

$$F = 7$$

$$V - E + F = 10 - 15 + 7 = 2 \text{ !!!!!}$$

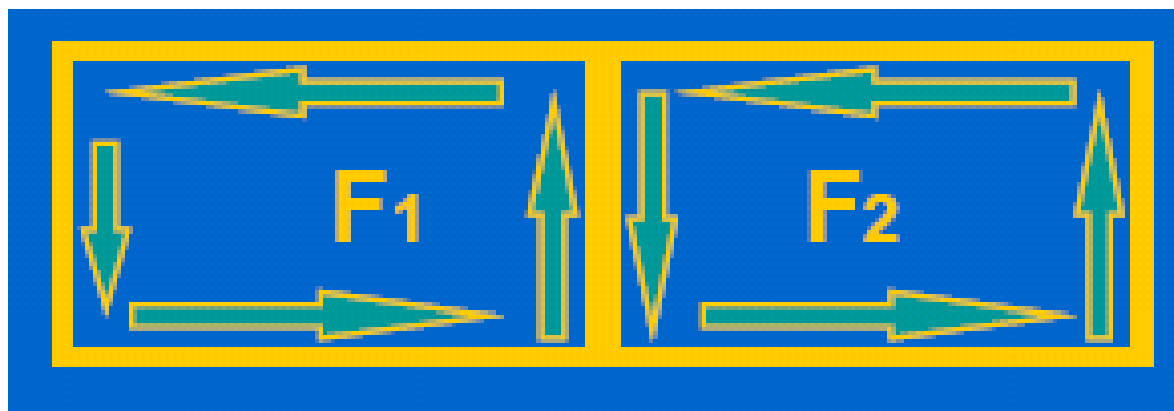
- Não....
- A Fórmula de Euler é necessária mas não suficiente para validar um poliedro simples

# Restrições de um Poliedro

- Suas arestas são, cada uma, membros de um número par de polígonos (exatamente **2** no caso de Variedades-2 = ***2-manifolds***)

# Propriedade de um Poliedro

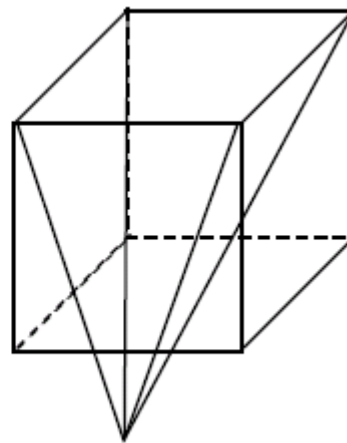
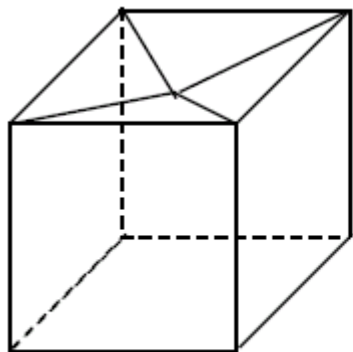
- O Poliedro é **orientável** se é possível orientar todas as suas faces de modo que arestas comuns a duas faces tenham orientações opostas.
- Olhando de “fora” do objeto, todas as faces são constituídas de arestas (anti) horárias



# Validando Poliedros Simples

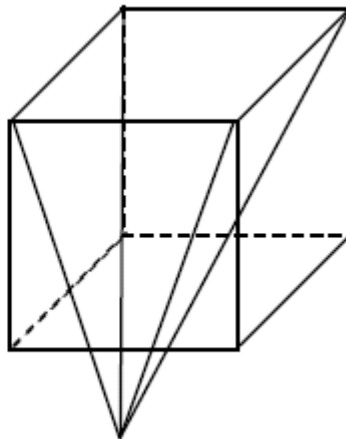
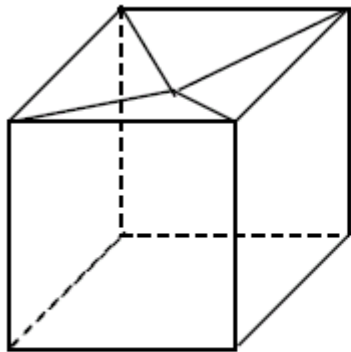
- Além da Fórmula de Euler, um **sólido** poliédrico simples tem que satisfazer restrições **topológicas**:
  - Cada aresta conecta 2 vértices
  - Cada aresta deve ser compartilhada por 2 faces
  - Pelo menos 3 arestas devem se encontrar em um vértice
  - Faces não podem se interpenetrar

# Estes objetos atendem as restrições topológicas ?





# Não só a parte topológica tem que ser avaliada ...



$$V = 9$$

$$E = 16$$

$$F = 9$$

$$9 - 16 + 9 = 2 !!$$

## Mas a validação geométrica também ...

# Validação Geométrica

- Todos os vértices são distintos entre si ?
  - Todos os vértices de uma face (*patch*) satisfazem a equação daquele plano (superfície) ?
  - Todas as arestas do objeto não interceptam nenhuma face ?
  - ...
- 
- Mas... a validação geométrica é **MUITO** cara

# Validação de Poliedros

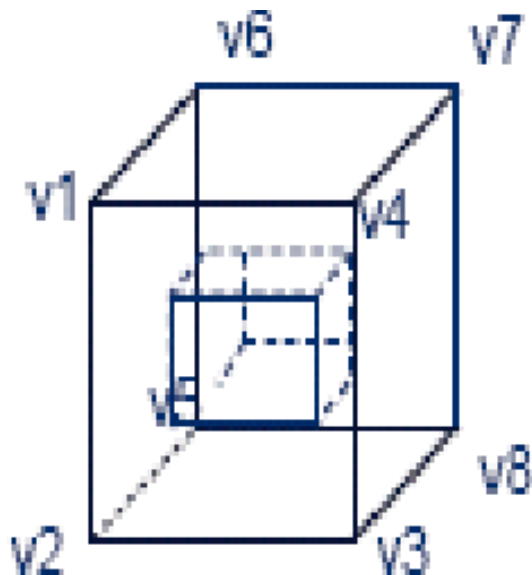
A Validação Completa deve ser feita em três partes:

- Teste da Fórmula de Euler
  - Teste das Restrições Topológicas
  - Testes das Restrições Geométricas
- 
- Assim se garante que o poliedro é íntegro e portanto, um **sólido**!

E para poliedros quaisquer ????

# Objetos com *furos na face* ....

Obs: o furo não atravessa o objeto (*pocket*)



$$V = ?$$

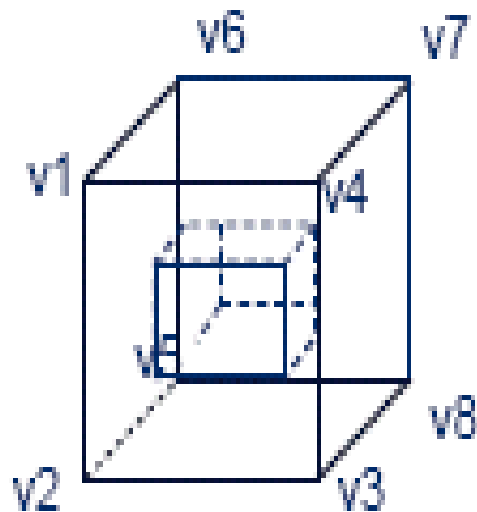
$$E = ?$$

$$F = ?$$

$$V - E + F = ?$$

# Objetos com *furos na face* ....

**Não satisfazem a Fórmula de Euler**



$$V = 16$$

$$E = 24$$

$$F = 11$$

$$V + F - E = 16 + 11 - 24 = 3$$

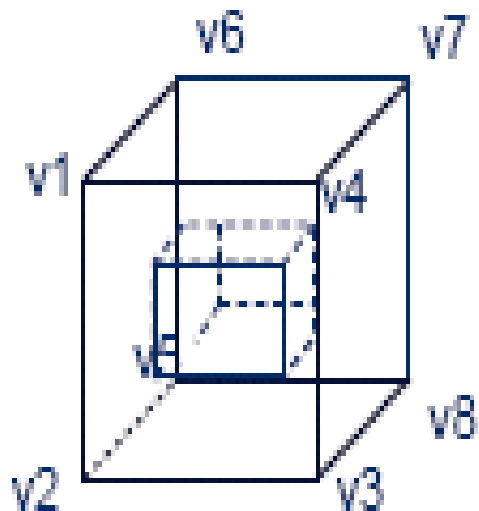
*~ mas, é um sólido!!*

# Fórmula de Euler-Poincaré

$$V - E + F - H = 2 (C - G)$$

- H = buracos nas faces (*Hole*)
- G = buracos que perpassam todo o objeto de face a face (*Genus*)
- C = número de *C*onjuntos disjuntos do objeto, *C*ascas, *shells*
- Aplica-se a poliedros quaisquer (não só os simples)
- Como antes, há necessidade de se validar o objeto com as outras restrições geométricas e topológicas

# Buracos em Faces (*Holes*)



$$V = 16$$

$$E = 24$$

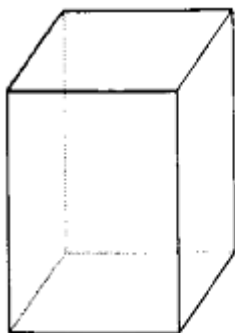
$$F = 11$$

$$V - E + F - H = 2 (C - G)$$

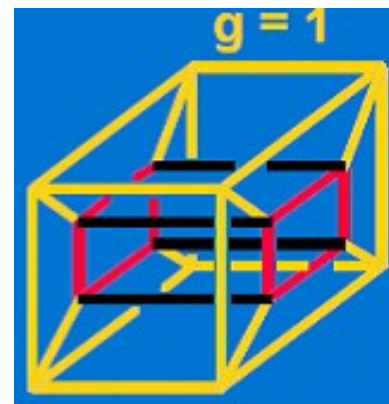
$$16 - 24 + 11 - 1 = 2 (1 - 0)$$



# Buracos no Objeto (*Genus*)



$$\begin{aligned} V &= 8 \\ E &= 12 \\ F &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V - E + F - H &= 2 (C - G) \\ 8 - 12 + 6 - 0 &= 2(1-0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V - E + F - H &= 2 (C - G) \\ 16 - 32 + 16 - 0 &= 2(1-1) \end{aligned}$$

# Buracos no Objeto (*Genus*)

