

Introducción a la característica Euler

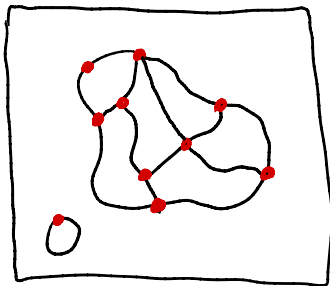
Ana Wright

3 Febrero, 2021

La característica Euler

Ejemplo:

- Dibuja un mapa de una isla o continente en una hoja de papel plano.



+1 -1

$$8 - 12 + 6 = 2$$

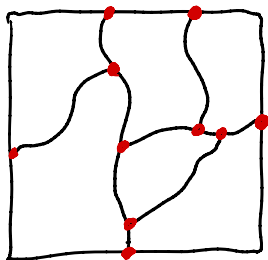
- $V - A + C = 2$

donde V es el número de vértices, A es el número de aristas, y C es el número de caras.

La característica Euler

Ejemplo:

- Dibuja un mapa en una hoja de papel plano donde el borde también es un borde.



$$10 - 15 + 6$$

- $V - A + C = 1$

donde V es el número de vértices, A es el número de aristas, y C es el número de caras.

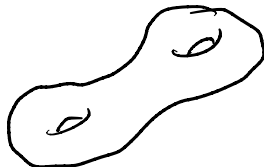
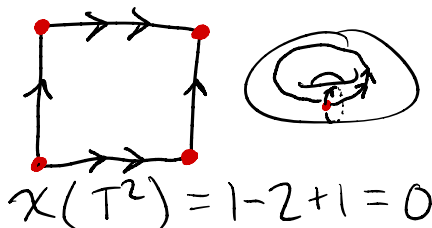
La característica Euler

Definición:

- En un CW-complejo M , la característica Euler
 $\chi(M) = k_0 - k_1 + k_2 - \dots$
donde k_i es el número de células de dimensión i .

La característica Euler es un invariante topológico.

Ejemplos:



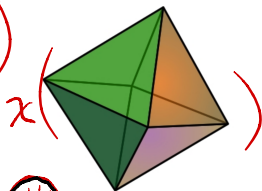
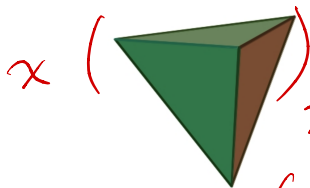
Sólidos platónicos

Los sólidos platónicos son poliedros convexos donde cada cara tiene p aristas y cada vértice tiene q caras.

Ejemplos:

$$p = 3, q = 3$$

$$p = 3, q = 4$$



$$\chi(\bigoplus) = \chi\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right) = 1 - 1 + 2 = 2$$

¿Cuántos sólidos platónicos existen?

Sabemos que

$$pC = 2A = qV$$

caras
aristas
vertices

y

$$V - A + C = 2$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} &= 2 & \frac{1}{q} + \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \\ 2A \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \right) &= 2 & \frac{1}{q} + \frac{1}{p} &> \frac{1}{2} \\ \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

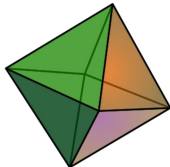
Sólidos platónicos

Asique solo tenemos 5 opciones:

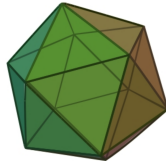
$$p = 3, q = 3$$



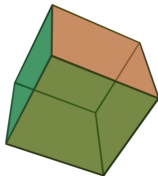
$$p = 3, q = 4$$



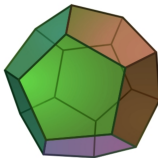
$$p = 3, q = 5$$



$$p = 4, q = 3$$



$$p = 5, q = 3$$



$$p=3, q=6$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$