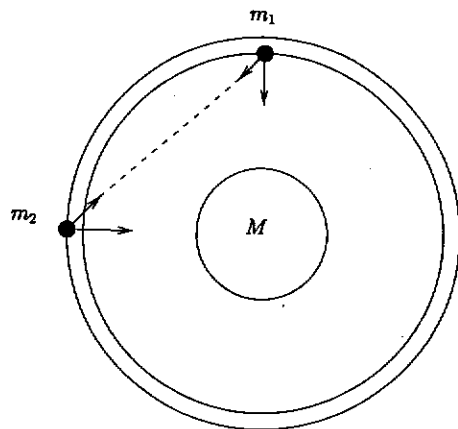


## 10 Saturns dobbeltmåner

Saturn har et væld af måner at stærkt varierende størrelse. Voyager 1 og 2 rumsonderne afslørede, at en af disse i virkeligheden er to måner, hvis baner ligger så tæt, at man fra Jorden ikke har kunnet skelne dem fra hinanden. Faktisk ligger banerne så tæt, at når den inderste måne indhenter den yderste, skulle en kollision være mulig. Dette sker imidlertid ikke. Derimod har sonderne afsløret, at månerne "bytter plads", således at den, der før var inderst og hurtigst, bliver yderst og langsomst. Denne opgave går ud på at simulere dette fænomen og illustrere, hvad der sker under dette intime møde.

Vi gør den simplificerende antagelse, at månerne kun mærker tyngdekraften fra Saturn og hinanden, samt at Saturn står stille i rummet. Vi vælger Saturns centrum som begyndelsespunkt for et sædvanligt koordinatsystem og indfører følgende notation:

$(x_i, y_i)$	positionskoordinater for måne $i$ , $i = 1, 2$
$m_i$	månernes masser
$M$	Saturns masse
$g$	gravitationskonstanten
$r_i$	$(x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ : måne $i$ 's afstand fra Saturn
$r_{12}$	$((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2}$ : månernes indbyrdes afstand.



Månernes bevægelse er bestemt af Newton's anden lov:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= -\frac{m_1 M g}{r_1^3} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \frac{m_1 m_2 g}{r_{12}^3} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= -\frac{m_2 M g}{r_2^3} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \frac{m_1 m_2 g}{r_{12}^3} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Data: (enhederne er kg, km og jorddøgn)

$$m_1 = m_2 = 9.20 \times 10^{18} \text{ kg}, \quad M = 5.68 \times 10^{26} \text{ kg}, \quad g = 4.98 \times 10^{-10} \text{ km}^3/(\text{kg} \cdot \text{døgn}).$$

For fuldstændighedens skyld oplyses det, at saturns radius er ca. 60100 km, medens månernes radier er ca. 130 km.

Begyndelseshastigheden tilpasses cirkelbevægelse:  $v_i^2 = Mg/r_i$ . Herved fås begyndelsesbetingelserne

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 152870 \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1360278.1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -153130 \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1359122.8 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Problemet ønskes løst i så lang tid, at de to måner har "byttet plads" to gange.

Der ønskes for hver metode en dokumenteret nøjagtighed i positionen på ca. 10 km i hele det relevante tidsinterval.

Af hensyn til overskueligheden er det ønskeligt at udskrive månernes positioner i polære koordinater  $(r_i, \varphi_i)$  samt eventuelt vinkelforskellen  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Angiv på et plot månernes afstand til Saturn og vinkelforskellen som funktioner af tiden.