

Задание: Рассмотрите вариант алгоритма большинства для случая, когда существует эксперт, про которого известно, что он делает не более k ошибок. Получите оценку числа ошибок такого алгоритма большинства.

Решение:

3) Для оценки числа ошибок алгоритма большинства с учетом знания о максимальном числе ошибок k , которое может сделать эксперт, можно использовать неравенство Чернова.

Вероятность того, что количество ошибок, допущенных алгоритмом большинства, превысит определенный порог x , можно оценить следующим образом:

$$P(X > x) \leq \exp(-2n\epsilon^2)$$

где $\epsilon = \frac{(x-np)}{(np(1-p))^{1/2}}$ - параметр, который учитывает отклонение среднего значения от идеального значения np , а также вероятность ошибки p .

Таким образом, для алгоритма большинства с учетом максимального числа ошибок k можно использовать данную формулу, заменив значение p на вероятность того, что эксперт допустит не более k ошибок.

Для конкретного эксперта i вероятность того, что он допустит не более k ошибок, может быть вычислена с помощью биномиального распределения:

$$P_i = \sum_{j=0}^k C_{n-1}^j p^j (1-p)^{n-1-j}$$

где P_i - вероятность того, что i -й эксперт допустит не более k ошибок, C_j^{n-1} - число сочетаний из $n-1$ по j (так как i -й эксперт не учитывается в подсчете), p - вероятность ошибки эксперта, $(1-p)$ - вероятность правильного ответа эксперта

Далее, значение ϵ_i для конкретного эксперта можно вычислить по формуле:

$$\epsilon_i = \frac{x - np_i}{(np_i(1 - p_i))^{1/2}}$$

где x - пороговое значение числа ошибок, n - общее число экспертов, p_i - вероятность того, что i -й эксперт допустит не более k ошибок.

Таким образом, для оценки числа ошибок алгоритма большинства с учетом максимального числа ошибок k необходимо вычислить значение ϵ_i .