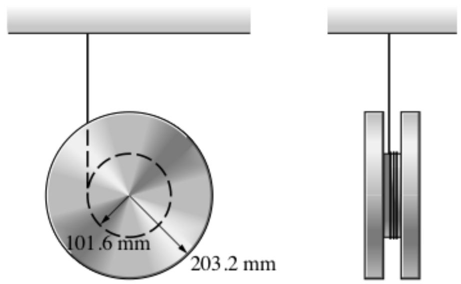
BF18.35

April 2, 2020

0.1 Mekanik II, problem 18.35

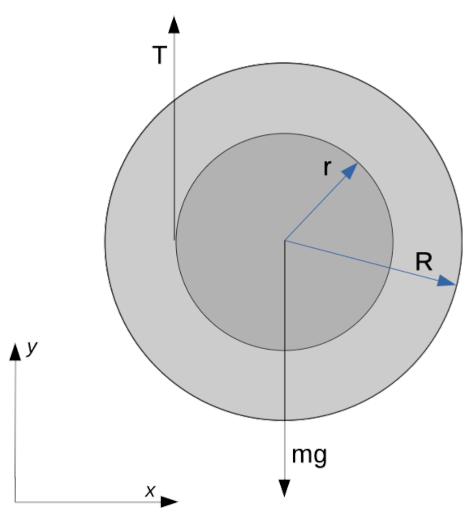
The stepped disk weighs 1788 N and its moment of inertia is I = 0.27 kg-m . If the disk is released from rest, how long does it take its center to fall 0.91 m? (Assume that the string remains vertical.)



1 Lösning:

1.1 Friläggning och beteckningar

Vi börjar med att frilägga systemet och införa relevanta beteckningar.



De krafter som verkar är här $\mathbf{T} = T\hat{y}$ och $m\mathbf{g} = -mg\hat{y}$. Skivans inre radie är r och yttre radien är R. Vektorn från masscentrum till där snörkraften angriper är inte utritad men kan skrivas som $\mathbf{r}_T = -r\hat{x}$.

1.2 Fysikaliska samband

Stången kommer falla nedåt när den släpps. Krafterna verkar bara i y-led så det kan inte uppkomma någon acceleration i x-led. Vi kan därför betrakta skivans rotation kring masscentrum för att bestämma vinkelaccelerationen α från Euler II och dess acceleration $\mathbf{a}$ från Euler I. Det kinematiska sambandet mellan α och $\mathbf{a}$ fås via rullvillkoret kring den inre radien r.

För att bestämma rörelsen som efterfrågas (falltid) måste vi veta a. I problemet är snörkraften T och vinkelaccelerationen α okända och behöver lösas ut för att kunna beräkna a.

1.3 Kraft- och momentanalys: Euler I och II

Euler I Euler I för systemet:

$\sum \mathbf{F} = T\hat{y} - mg\hat{y} = m\mathbf{a} = ma\hat{y}$ **(I)**

Euler II Euler II för skivan kring masscentrum:

$\mathbf{M} = \mathbf{r}_T \times \mathbf{T} = -r\hat{x} \times T\hat{y} = -rT\hat{z} = I\alpha\hat{z}$ **(II)**

Rullvillkor I ekvationerna ovan har vi satt a positivt i y-led och α positivt i z-led. Det innebär att rullvillkoret här blir $a = r\alpha$ **(III)**. Det kan motiveras eftersom för en positiv acceleration i y-led måste skivan snurra "upp" tråden d.v.s rotera moturs, vilket är i postiv z-led.

1.4 Beräkning

Bestämning av a Från **(II)** och **(III)** kan vi lösa ut T som

$T = -\frac{I\alpha}{r} = -\frac{Ia}{r^2}$.

Insatt i **(I)** ger det

$$ma = T - mg = -\frac{Ia}{r^2} - mg \tag{1}$$

$$a(m + \frac{I}{r^2}) = -mg \tag{2}$$

$$a = -\frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}} \tag{3}$$

så att accelerationen kan skrivas som $\mathbf{a} = -\frac{g}{1+\frac{I}{mr^2}}\hat{y}$.

Integrering av rörelseekvationen Accelerationen a från beräkningen ovan är konstant så hastigheten kan integreras fram som

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} && (4)\\
adt &= dv && (5)\\
-\frac{g}{1+\frac{I}{mr^2}}dt &= dv && (6)\\
-\int_0^t \frac{g}{1+\frac{I}{mr^2}}dt &= \int_0^v dv = v && (7)\\
v &= -\frac{gt}{1+\frac{I}{mr^2}} && (8)
\end{aligned}
$$

På liknande sätt kan sambandet mellan falltiden t och fallsträckan s fås

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} && (9)\\
vdt &= ds && (10)\\
-\frac{gt}{1+\frac{I}{mr^2}}dt &= ds && (11)\\
-\int_0^t \frac{gt}{1+\frac{I}{mr^2}}dt &= \int_0^s ds = s && (12)\\
s &= -\frac{1}{2}\frac{gt^2}{1+\frac{I}{mr^2}} && (13)\\
t &= \sqrt{-\frac{2s}{g}(1+\frac{I}{mr^2})} && (14)
\end{aligned}
$$

Notera att sträckan s här kommer vara negativ eftersom trissan fallit nedåt, d.v.s. i negativ y-riktning.

1.4.1 Svar

Med insatta värden (med $s = -0.91$) blir $t = 0.67$ s.

Beräkning med insatta värden:

[1]:
```
from ipywidgets import interact, interactive
from ipywidgets import FloatSlider
import numpy as np
from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
HTML('''<script>
code_show=true;
function code_toggle() {
 if (code_show){
 $('div.input').hide();
```

```
 } else {
 $('div.input').show();
 }
 code_show = !code_show
}
$( document ).ready(code_toggle);
</script>
<form action="javascript:code_toggle()"><input type="submit" value="Tryck här␣
↪för att dölja/visa koden."></form>''')
```

[2]: <IPython.core.display.HTML object>

[3]:
```
# Set parameters according to exercise description

g = 9.81  # acceleration due to gravity, in m/s^2
l = 0.91
mg=178
r=0.1016
I=0.27
```

[6]:
```
def e_18_35(g,l,mg,r,I):

    m=mg/g
    t=np.sqrt(2*l/g*(1+I/(m*r*r)))

    print("Falltiden t = ",'{:5.3f}'.format(t),"s")

    return t
```

[8]:
```
s_18_35=interactive(e_18_35,
              g=FloatSlider(min=9.0,max=10.0,value=9.81),
              l=FloatSlider(min=0.0,max=3,value=0.91),
              mg=FloatSlider(min=0.0,max=300,value=178),
              r=FloatSlider(min=0.0000,max=0.3000,value=0.1016,step=0.0001),
              I=FloatSlider(min=0.0,max=1,value=0.27,step=0.01))
display(s_18_35)
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=9.81, description='g', max=10.0, min=9.0), FloatSlider(v
```