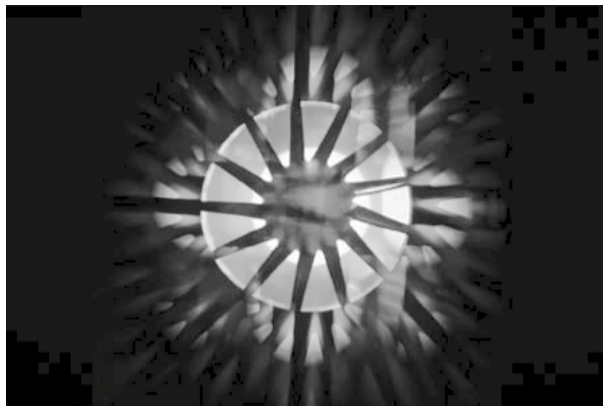


BF18.14

April 3, 2020

1 Mekanik II, problem 18.14

The moment of inertia of the wind- tunnel fan is $225 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. The fan starts from rest. The torque exerted on it by the engine is given as a function of the angular velocity of the fan by $T = 140 - 0.02\omega^2 \text{ Nm}$.



- (a) When the fan has turned 620 revolutions, what is its angular velocity in rpm (revolutions per minute)?
- (b) What maximum angular velocity in rpm does the fan attain?

Strategy: By writing the equation of angular motion, determine the angular acceleration of the fan in terms of its angular velocity. Then use the chain rule:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

2 Lösning:

2.1 Fysikaliska samband

Tröghetsmomentet I och vridmomentet T är givna i uppgiften. Då kan vi använda Euler II för att bestämma tidsutvecklingen av θ och ω .

$$\sum M = T = I\alpha$$

2.2 Momentanalys: Euler II

I uppgift (a) vill vi bestämma $\omega(\theta)$ där θ ska motsvara 620 varv dvs $\theta = 2\pi * 620$.

Vi använder den givna kedjeregeln för att kunna bestämma $\omega = \omega(\theta)$

$$\text{Euler II : } \sum M = T = a - b\omega^2 = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

där vi använder en generell form $T = a - b\omega^2$.

2.3 Ekvationslösning

Genom variabelseparation kan vi lösa ekvationen ovan som:

$$\frac{d\omega}{d\theta} \omega = \frac{a - b\omega^2}{I} \quad (1)$$

$$\frac{I\omega}{a - b\omega^2} d\omega = d\theta \quad (2)$$

$$I \int_0^\omega \frac{\omega}{a - b\omega^2} d\omega = \int_0^\theta d\theta \quad (3)$$

$$I \left[-\frac{1}{2b} \ln(a - b\omega^2) \right]_0^\omega = [\theta]_0^\theta \quad (4)$$

$$-I \frac{1}{2b} \ln\left(\frac{a - b\omega^2}{a}\right) = \theta \quad (5)$$

$$\frac{a - b\omega^2}{a} = e^{-\frac{2b\theta}{I}} \quad (6)$$

$$\omega^2 = \frac{a}{b} (1 - e^{-\frac{2b\theta}{I}}) \quad (7)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{b} (1 - e^{-\frac{2b\theta}{I}})} \quad (8)$$

2.4 Beräkning (a)

Med insatta värden $a = 140Nm$, $b = 0.02Nms^2$ och $\theta = 2\pi * 620rad$. fås $\omega = 59.14rad/s = 564.7rpm$ vilket är svaret för uppgift (a).

2.5 Beräkning (b)

För uppgift (b) efterfrågas maximal vinkelhastighet. Den kan bestämmas genom att bestämma extrempunkter för ω d.v.s. när $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Och eftersom vi från Euler II vet att

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{M}{I} = \frac{a - b\omega^2}{I}$$

kan vi lösa ut att $\alpha = 0$ ger att $\omega_{max}^2 = \frac{a}{b}$ vilket med insatta värden blir

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{140}{0.02}} \approx 83.6 rad/s = 799 rpm$$