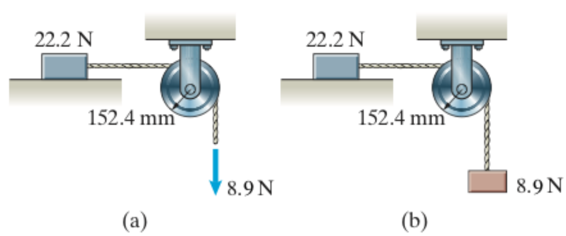
BF18.17

April 1, 2020

1 Mekanik II, problem 18.17

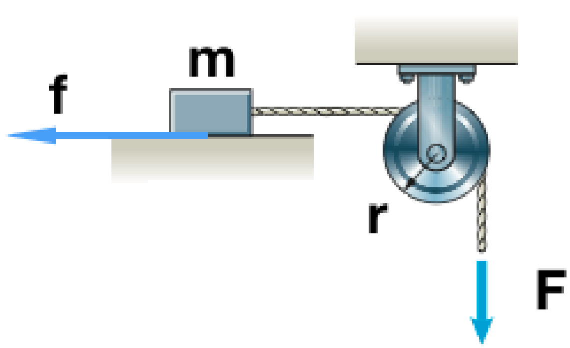
The moment of inertia of the pulley is 0.54 kgm^2. The coefficient of kinetic friction between the 22.2 N weight and the horizontal surface is $\mu_k = 0.2$. Determine the magnitude of the acceleration of the 22.2 N weight in each case.



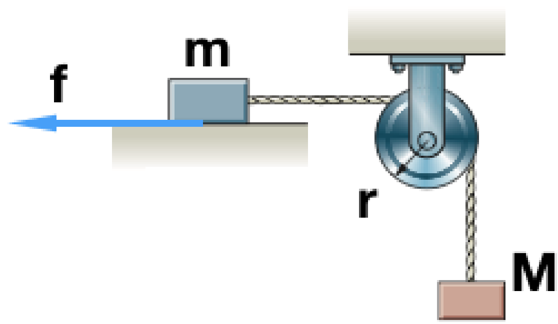
2 Lösning:

2.1 Friläggning och krafter

För att lösa de två fallen behöver vi frilägga systemen. Först inför vi följande beteckningar för (a)-uppgiften

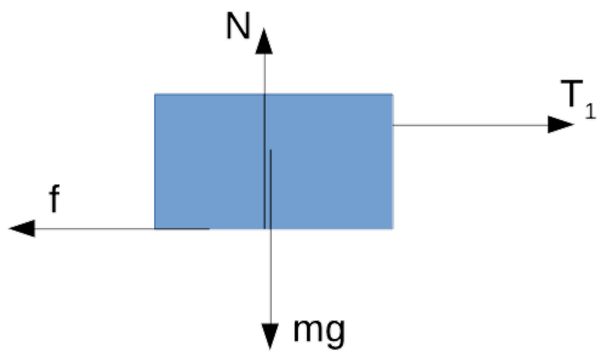


samt för (b)-uppgiften.



Därefter kan vi frilägga de individuella delsystemen enligt nedan.

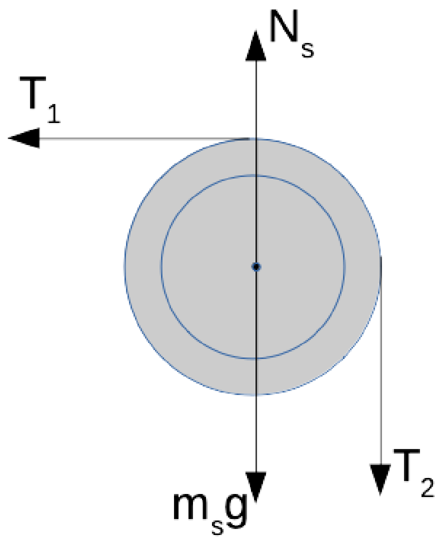
Den glidande massan m



där

$$\mathbf{f} = -f\hat{x} = \mu_k N\hat{x} \tag{1}$$
$$\mathbf{T}_1 = T_1\hat{x} \tag{2}$$
$$\mathbf{N} = N\hat{y} \tag{3}$$
$$m\mathbf{g} = -mg\hat{y} \tag{4}$$

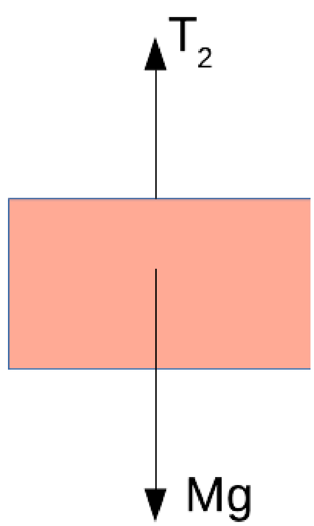
Den roterande trissan s



där

$$\mathbf{T}_1 = -T_1\hat{x} \tag{5}$$
$$\mathbf{N}_s = N_s\hat{y} \tag{6}$$
$$m_s\mathbf{g} = -m_s g\hat{y} \tag{7}$$
$$\mathbf{T}_2 = T_2\hat{y} \tag{8}$$

Den fallande massan M



där

$$\mathbf{T}_2 = T_2\hat{y} \tag{9}$$
$$M\mathbf{g} = -Mg\hat{y} \tag{10}$$

I samtliga figurer ansätter vi ett koordinatsystem med x-axeln åt höger och y uppåt.

2.2 Fysikaliska samband

Med alla delsystem frilagda kan vi ställa upp Euler I och Euler II där det är relevant. Här kan antas att massan m rör sig i x-led men inte roterar och trissan s roterar men att dess masscentrum inte accelererar. I uppgift (b) kan massan M röra sig i y-led.

Kopplingen mellan rörelsekvationerna för de individuella systemen görs sedan genom snörkrafterna där det för ett masslöst snöre gäller att snörkraften är lika stor i båda riktningar. Därför använder vi T_1 i friläggningarna för både massan m och trissan.

Utöver Euler I och Euler II har vi även kinematiska tvångsvillkor där $a_m = a_M$ och $a_m = -\alpha r$ eftersom snöret inte är töjbart. Minustecknet i rullvillkoret kommer från att vi ansätter $\mathbf{a}_m = a_m\hat{x}$ och $\alpha = \alpha\hat{z}$.

2.3 Kraft- och momentanalys: Euler I och II

Massan m Euler I för massan m: $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{T}_1 + m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

Komposantuppdelning i $\hat{x}$- och $\hat{y}$-led av verkande krafter gör att vi kan formulera Euler I i vardera riktning.

$\hat{x}$: $T_1 - f = T_1 - \mu N = ma_m$ **(I)**

$\hat{y}$: $N - mg = 0$ **(II)**

Trissan Euler II för trissan: $\sum_i \mathbf{M}_i^P = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = I\alpha$. Ett bra val av momentpunkt är här trissans upphängningspunkt för då ger inte $\mathbf{N}_s$ och $m_s\mathbf{g}$ upphov till några kraftmoment. Då kan vi skriva

$\sum_i \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{T}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{T}_2$

Vektorerna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ kan från figurerna ovan bestämmas till

$\mathbf{r}_1 = r\hat{y}$
$\mathbf{r}_2 = r\hat{x}$

så att alla kraftmoment ligger i z-riktningen:

$\sum_i \mathbf{M} = r\hat{y} \times (-T_1\hat{x}) + r\hat{x} \times (-T_2\hat{y}) = T_1 r - T_2 r = I\alpha$ **(III)**

Massan M Euler I för massan M: $\sum\_i\mathbf{F}\_i = \mathbf{T}\_2 + M\mathbf{g}$

Komposantuppdelning i $\hat{x}$- och $\hat{y}$-led av verkande krafter gör att vi kan formulera Euler I i vardera riktning.

$\hat{y}$: $T_2 - Mg = Ma_M$ **(IV)**

2.4 Ekvationslösning för uppgift (a)

Från **(II)** fås att $N = mg$ vilket ger att $f = \mu_k N = \mu_k mg$ vilket insatt i **(I)** ger

$T_1 - \mu_k mg = ma_m$

Här kan T_1 lösas ut. För uppgift (a) är $T_2 = F$ vilket gör att vi kan skriva **(III)** som

$I\alpha = (ma_m + \mu_k mg)r - Fr$ **(V)** där vi sedan kan sätta in rullvillkoret $-m_a = r\alpha$ så att

$$
\begin{aligned}
-I\frac{a_m}{r} &= (ma_m + \mu_k mg)r - Fr && (11)\\
-I\frac{a_m}{r} &= (ma_m + \mu_k mg)r - Fr && (12)\\
-I\frac{a_m}{r^2} &= ma_m + \mu_k mg - F && (13)\\
ma_m + I\frac{a_m}{r^2} &= F - \mu_k mg && (14)\\
a_m(m + \frac{I}{r^2}) &= F - \mu_k mg && (15)\\
a_m &= \frac{F - \mu_k mg}{m + \frac{I}{r^2}} && (16)
\end{aligned}
$$

vilket ger svaret i (a).

2.5 Ekvationslösning för uppgift (b)

Uppgift (b) kan lösas på ett liknande sätt förutom att här är snörkraften T_2 inte F som i uppgift (a), utan T_2 måste beräknas från Euler I för massan M.

Från **(IV)** fås att $T_2 = Mg - Ma_M$ vilket kan sättas in istället för F i **(V)** så att

$I\alpha = (ma_m + \mu_k mg)r - (Mg - Ma_M)r$ **(VI)**

där vi sedan kan sätta in rullvillkoret $-m_a = r\alpha$ och dessutom införa $a = a_m = a_M$ så att

$$
\begin{aligned}
-I\frac{a}{r} &= (ma + \mu_k mg)r - (Mg - Ma)r && (17)\\
-I\frac{a}{r} &= (ma + \mu_k mg)r - (Mg - Ma)r && (18)\\
-I\frac{a}{r^2} &= ma + \mu_k mg - (Mg - Ma) && (19)\\
ma + Ma + I\frac{a_m}{r^2} &= Mg - \mu_k mg && (20)\\
a(m + M + \frac{I}{r^2}) &= Mg - \mu_k mg && (21)\\
a &= \frac{Mg - \mu_k mg}{m + M + \frac{I}{r^2}} && (22)
\end{aligned}
$$

vilket ger svaret i (b).

2.6 Svar

Med insatta värden blir $a_m = a = 0.157\ m/s^2$ för uppgift (a) och $a_m = a = 0.152\ m/s^2$ för uppgift (b).

2.7 Analys

Trots att uppgifterna ser snarlika ut blir accelerationen i (b) lägre. Det beror på att den ändliga massan M i (b) gör att snörkraften T_2 blir mindre än i (a). Det kan ses som att utöver att få trissan att snurra så behöver kraften på 8.9 N accelerera både M och m i (b) men bara m i (a).

Notera också att $T_1 \neq T_2$ här. Det kan vara ovant från tidigare kurser där snörkraften typiskt är konstant över hela snörets längd. Men det beror ju på att snöret då anses masslöst. Här, och i liknande trissa-uppgifter har vi dock en ändlig tröghetstensor I för trissan så även om snöret är fortsatt masslöst visar Euler II att snörkrafterna är olika stora.