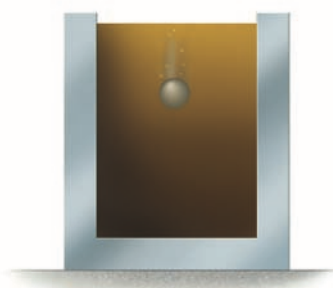


BF13.44

November 13, 2020

1 Mekanik baskurs, problem 13.44

A steel ball is released from rest in a container of oil. Its downward acceleration is $a = 2.4 - 0.64v \text{ cm/s}^2$, where v is the ball's velocity in cm/s . What is the ball's downward velocity 2 s after it is released?



2 Lösning:

2.1 Resonemang

Det som söks i uppgiften är hastigheten vid en given tidpunkt. Eftersom vi har accelerationen given i uppgiften kan vi integrera accelerationen för att få den sökta hastigheten.

Rörelsen sker rätlinjigt i en dimension så vi behöver inte använda någon vektoranalys här.

2.2 Uträkning

Accelerationen ges av

$$a = 2.4 - 0.6v \text{ (m/s)}$$

vilket vi använder med sambandet mellan hastighet och acceleration enligt nedan.

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1}$$

$$2.4 - 0.6v = \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

$$(2.4 - 0.6v)dt = dv \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

För att kunna integrera differentialerna dv och dt behöver vi samla ihop alla explicit t -beroende termerna på samma sida som dt och alla explicit v -beroende termerna på samma sida som dv . Från ovan får vi då

$$(2.4 - 0.6v)dt = dv \quad (5)$$

$$dt = \frac{dv}{2.4 - 0.6v} \quad (6)$$

$$(7)$$

Nu kan integrationen utföras i både höger och vänsterled

$$dt = \frac{dv}{2.4 - 0.6v} \quad (8)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{2.4 - 0.6v} \quad (9)$$

$$[t]_{t_0}^{t_1} = -\frac{1}{0.6} [\log(2.4 - 0.6v)]_{v_0}^{v_1} \quad (10)$$

$$(11)$$

där vi använde att $\int \frac{dv}{A-Bv} = \frac{\log(A-Bv)}{B}$.

Med insatta randvärden $v_0 = 0$, $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $v_1 = v$ fås

$$[t]_0^t = -\frac{1}{0.6} [\log(2.4 - 0.6v)]_0^v \quad (12)$$

$$t = -\frac{\log(2.4 - 0.6v)}{0.6} - \frac{\log(2.4)}{0.6} \quad (13)$$

$$t = -\frac{1}{0.6} \log\left(\frac{2.4 - 0.6v}{2.4}\right) \quad (14)$$

$$(15)$$

Eftersom det är hastigheten som söks löser vi ut den som

$$t = -\frac{1}{0.6} \log\left(\frac{2.4 - 0.6v}{2.4}\right) \quad (16)$$

$$-0.6t = \log\left(\frac{2.4 - 0.6v}{2.4}\right) \quad (17)$$

$$e^{-0.6t} = \frac{2.4 - 0.6v}{2.4} \quad (18)$$

$$2.4e^{-0.6t} = 2.4 - 0.6v \quad (19)$$

$$v = \frac{2.4 - 2.4e^{-0.6t}}{0.6} = 4(1 - e^{-0.6t}) \quad (20)$$

$$(21)$$

2.3 Svar

För den givna accelerationen får vi $v(t) = 4(1 - e^{-0.6t})$ cm/s.

Med insatt $t = 2s$ får vi $v(t = 2s) = 2.79cm/s$.