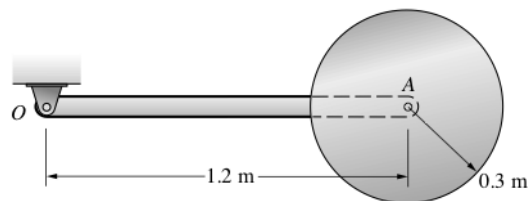


BF19.30

April 20, 2020

1 Mekanik II, problem 19.30

The masses of the bar and disk are 14 kg and 9 kg, respectively. The system is released from rest with the bar horizontal. Determine the angular velocity of the bar when it is vertical if the bar and disk are welded together at A.



2 Lösning:

2.1 Fysikaliska samband

Skivan och stängen kommer accelereras nedåt av tyngdkraften. Här sitter skivan fastsvetsad med stängen. För att bestämma stängens vinkelhastighet ω som söks kan man använda kraft- och momentanalys tillsammans med Euler I och II.

Även om det finns en normalkraft i upphängningspunkten O samt interna kontaktkrafter mellan skivan och stängen, ser vi att den enda kraft som utför ett arbete här är mg . Därför är ett praktiskt tillvägagångssätt här att använda arbete-energisamband i stället för Eulers lagar.

Stängens masscentrum sitter på avståndet $d_M = l/2$ från upphängningspunkten och skivas masscentrum på $d_m = l$.

Eftersom skivan sitter helt fast i stängen kommer skivan rotera med samma vinkelhastighet ω som stängen.

2.2 Arbete och energi

Sambandet för arbete och energi kan skrivas som

$$T_1 + V_1 + U_{12} = T_2 + V_2 \quad (\text{I})$$

där T betyder rörelseenergi, V potentiell energi och U det arbete av icke-konservativa krafter som utför ett arbete på kroppen. Här tittar vi på det sammansatta systemet stång+skiva. Vi behöver dock införa de olika kropparnas massor. Här är m skivans massa och M stängens massa.

För läge 1, där systemet startar, har vi

$$T_1 = 0 \text{ (stång och skiva släpps från vila)}$$

$$V_1 = 0 \text{ (Sätter nollnivån för gravitationsenergin här)}$$

och för läge två, när stången (och skivan) roterat med en vinkel θ får vi då

$$T_2 = \frac{Mv_M^2}{2} + \frac{I^M\omega^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{I^m\omega^2}{2}$$

$$V_2 = -Mgd_M \sin \theta - mgd_m \sin \theta = -\left(\frac{M}{2} + m\right)gl \sin \theta$$

Inget yttre arbete utförs här så $U_{12} = 0$.

Alternativt kan vi skriva stångens rörelseenergi som en ren rotationsrörelse kring punkten O , eftersom den roterar kring en fix punkt. Då får vi

$$T_2 = \frac{I_0^M\omega^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{I^m\omega^2}{2}$$

Tröghetsmomenten för skivan och stången fås från lämplig tabell $I_m^0 = \frac{mR^2}{2}$ och $I_M = \frac{ml^2}{3}$.

2.3 Beräkning

Sätter vi in alla energibidrag i (I) vilket ger

$$0 = \frac{I_0^M\omega^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{I^m\omega^2}{2} - \left(\frac{M}{2} + m\right)gl \sin \theta \text{ (II)}$$

för att lösa ut den okända hastigheten för skivans masscentrum v från ekvationen ovan använder vi rullvillkoret $v_m^2 = l^2\omega^2$. Med rullvillkor och tröghetsmoment insatta i ekvation (II) ovan får vi då

$$0 = \frac{Ml^2}{3} \frac{\omega^2}{2} + \frac{ml^2\omega^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \frac{\omega^2}{2} - \left(\frac{M}{2} + m\right)gl \sin \theta \quad (1)$$

$$\omega^2 \left(\frac{Ml^2}{6} + \frac{ml^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \right) = \left(\frac{M}{2} + m \right)gl \sin \theta \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{M}{2} + m\right)gl \sin \theta}{\frac{Ml^2}{6} + \frac{ml^2}{2} + \frac{mr^2}{2}}} \quad (3)$$

2.4 Svar

Med insatta värden för $\theta = 90^\circ$ blir $\omega = 4.33 \text{ rad/s}$.

OBS! Tänk på att vinkeln alltid måste anges i radianer vid alla rotationsrörelser (momentarbete, rullvillkor osv).