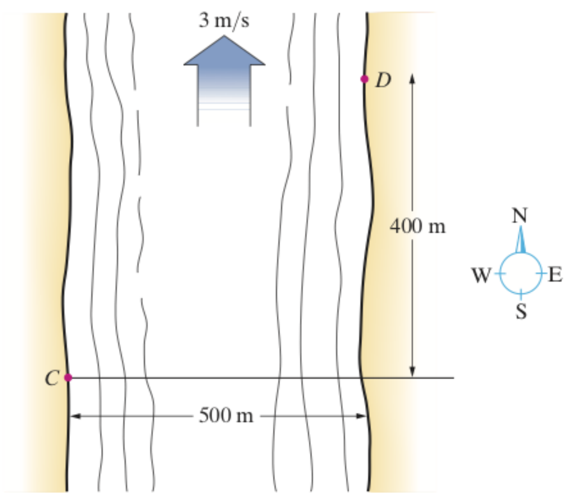
BF13.169

November 20, 2020

1 Mekanik baskurs, problem 13.169

The river flows north at 3 m/s. (Assume that the current is uniform.) If you want to travel in a straight line from point C to point D in a boat that moves at a constant speed of 10 m/s relative to the water, in what direction should you point the boat? How long does it take to make the crossing?

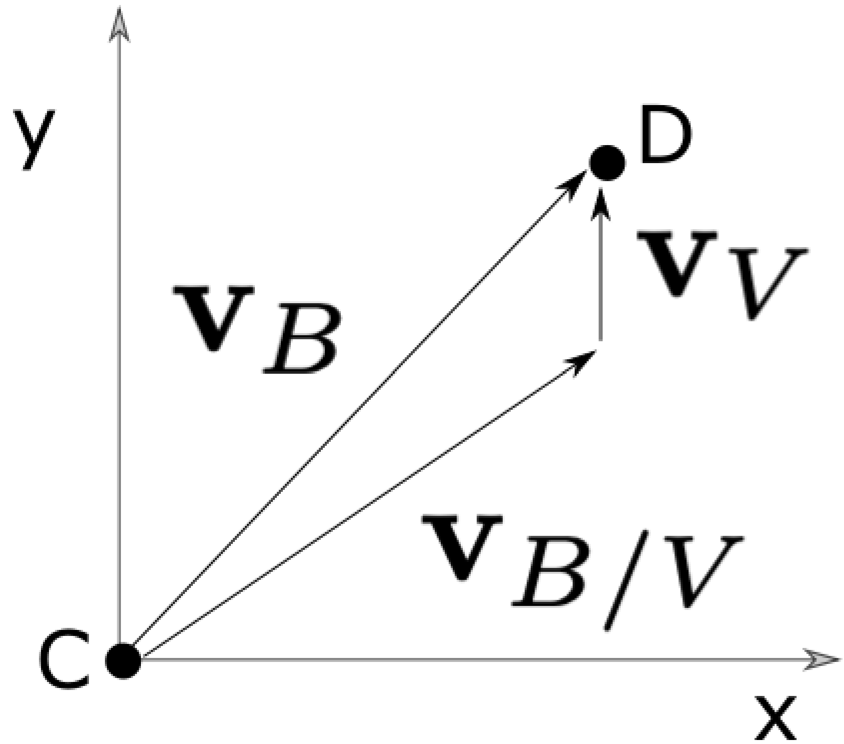


2 Lösning:

2.1 Resonemang

Vi behöver alltså veta vilken riktning vi ska styra ut båten i, så att den med vattnets hjälp kan åka från C till D. Det kan analyseras genom att använda konceptet relativ rörelse.

Vi inför vattnets hastighet som $\mathbf{v}_V$ och båtens hastighet relativt vattnet som $\mathbf{v}_{B/V}$. Då kan vi skriva sambandet för båtens hastighet $\mathbf{v}_B$ i ett fixt koordinatsystem som $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_V + \mathbf{v}_{B/V}$.



Från uppgiften vet vi riktningen på $\mathbf{v}_B$ och storleken $v_{B/V}$ men vi behöver lösa ut storleken v_B och ritningen på $\mathbf{v}_{B/V}$.

2.2 Lösning

Vi börjar med att införa vinkeln β mellan $\mathbf{v}_B$ och x-axeln samt vinkeln α mellan $\mathbf{v}_{B/V}$ och x-axeln. Vinkeln α är okänd och behöver lösas ut men ett samband för β kan fås direkt från geometrin i uppgiften som

$$\tan\beta = \frac{400}{500} \tag{1}$$

vilket ger $\beta \approx 38.7°$. De olika hastigheterna kan nu skrivas som

$$\begin{align} \mathbf{v}_B &= v_B \cos\beta\hat{x} + v_B \sin\beta\hat{y} \tag{2}\\ \mathbf{v}_V &= 3\hat{y} \tag{3}\\ \mathbf{v}_{B/V} &= 10\cos\alpha\hat{x} + 10\sin\alpha\hat{y} \tag{4}\\ & \tag{5} \end{align}$$

vilket ger oss två obekanta, v_B och α som behöver räknas ut. Det gör vi genom att använda sambandet för relativ rörelse

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_V + \mathbf{v}_{B/V} \tag{6}$$

och löser den på komponentform, dvs för $\hat{x}$ och $\hat{y}$.

x-led (I):

$$v_B \cos\beta = 10\cos\alpha \tag{7}$$

y-led (II):

$$v_B \sin\beta = 3 + 10\sin\alpha \tag{8}$$

Dividerar vi (II) med (I) får vi

$$\tan\beta = \frac{3 + 10\sin\alpha}{10\cos\alpha} \tag{9}$$

vilket kan användas för att beräkna α. Det är en ekvation som ser relativt krånglig ut men kan förenklas genom sambandet $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ vilket gör att vi kan skriva om ekvationen ovan med $\sin\alpha = x$ som

$$\begin{align}
\tan\beta = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} &= \frac{3+10x}{10\sqrt{1-x^2}} \tag{10}\\
\frac{4}{5}10\sqrt{1-x^2} &= 3+10x \tag{11}\\
\sqrt{1-x^2} &= \frac{3}{8} + \frac{5}{4}x \tag{12}\\
1-x^2 &= (\frac{3}{8}+\frac{5}{4}x)^2 = \frac{9}{64} + \frac{30}{32}x + \frac{25}{16}x^2 \tag{13}\\
0 &= (1+\frac{25}{16})x^2 + \frac{30}{32}x + \frac{9}{64} - 1 \tag{14}\\
0 &= (\frac{41}{16})x^2 + \frac{30}{32}x - \frac{55}{64} \tag{15}\\
0 &= 41x^2 + \frac{30}{2}x - \frac{55}{4} \tag{16}
\end{align}$$

vilket ger lösningen $x = -\frac{15}{82} \pm \frac{2\sqrt{155}}{41} = \sin\alpha$ dvs $\alpha \approx 25.1°$.

Insatt i (I) kan sedan v_B beräknas som

$$v_B = 10\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \approx 11.6\ m/s \tag{17}$$

2.3 Svar

Vi får alltså följande hastigheter

$$\begin{align}
\mathbf{v}_B &= 11.6\cos 38.7°\hat{x} + 11.6\sin 38.7°\hat{y} \tag{18}\\
\mathbf{v}_{B/V} &= 10\cos 25.1°\hat{x} + 10\sin 25.1°\hat{y} \tag{19}\\
& \tag{20}
\end{align}$$

Där det som söktes först i uppgiften var riktningen på båten relativt vattnet, dvs riktningen för $\mathbf{v}_{B/V}$.

Dessutom frågas hur lång tid färden tar. Vi vet att båtens hastighet i det fixa koordinatsystemet är 11.6 m/s (konstant!) och vi kan räkna ut sträckan som båten behöver åka som $s = \sqrt{400^2 + 500^2} = 640.1$ m. Konstant hastighet och rätlinjig rörelse gör att vi kan räkna ut tiden t som $t = \frac{s}{v} \approx 55.2$ s.

2.4 Diskussion

För att kontrollera rimligheten i våra svar kan vi konstatera att vinkeln som behövs relativt vattnet är mindre än den "riktiga" vinkeln mellan C och D, vilket är rimligt eftersom vattnet kommer bidra till att båten rör sig "uppåt" under överfarten.

Gör vi en snabb dimensionsanalys ser vi att (I) och (II) har enheterna m/s i både höger- och vänsterled vilket gör att kvoten (II)/(I) blir dimensionslös. Det stämmer med att vänsterledet då blir tangens för en vinkel vilket ska vara dimensionslöst. Även enheten för v_B stämmer då kvoten mellan två cosinusfunktionern blir dimensionslöst och faktorn 10 här är en hastighet med enheten m/s.