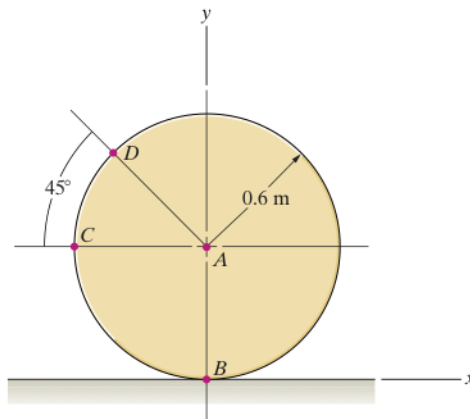


# BF17.27

March 25, 2021

## 1 Mekanik II, problem 17.27

Point A of the rolling disk is moving toward the right. The magnitude of the velocity of point C is 5 m/s. determine the velocities of points B and D.



## 2 Lösning:

### 2.1 Resonemang

Det som söks är hastigheterna  $\mathbf{v}_B$  för punkten B och  $\mathbf{v}_D$  för punkten D.

Ett användbart samband här är det generella uttrycket för relativ rörelse  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$  vilket för punkter A och B på samma stela kropp ger  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$  där  $\omega$  är vinkelhastigheten för den stela kroppen.

I uppgiften är  $\mathbf{v}_C$  given så vi kan ställa upp följande samband för relativa rörelser:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B} \quad \text{(I)}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \omega \times \mathbf{r}_{C/D} \quad \text{(II)}$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{D/B} \quad \text{(III)}$$

Då det är givet att skivan rullar, vet vi från rullvillkoret att vid kontaktpunkten mellan skivan och marken är hastigheten noll. Det vill säga här är  $\mathbf{v}_B = 0$  så den hastigheten behöver vi inte räkna ut på annat sätt.

Trots att  $\mathbf{v}_B$  nu redan är bestämd är både  $\omega$  och  $\mathbf{v}_D$  obekanta så vi behöver fortfarande använda två av ekvationerna ovan.

## 2.2 Vektorer och vinkelhastigheter

Från figuren kan vi bestämma

$$\mathbf{r}_{C/B} = -r\hat{x} + r\hat{y}$$

$$\mathbf{r}_{C/D} = (r \cos 45 - r)\hat{x} - r \sin 45\hat{y}$$

$$\mathbf{r}_{D/B} = -r \cos 45\hat{x} + (r + r \sin 45)\hat{y}$$

och vinkelhastigheten kan skrivas  $\omega = \omega\hat{z}$  även om storleken på  $\omega$  fortfarande är obekant.

För vektorerna gäller även  $\mathbf{r}_{C/B} = -\mathbf{r}_{B/C}$  och  $\mathbf{r}_{C/D} = -\mathbf{r}_{D/C}$ .

## 2.3 Beräkning av $\omega$

Det finns flera möjliga sätt att lösa ut  $\mathbf{v}_D$  och  $\omega$ , vi väljer här att först använda ekvation (I) och den givna uppgiften att  $v_C = 5$  för att bestämma  $\omega$ .

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B} = 0 + (\omega\hat{z}) \times (-r\hat{x} + r\hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -r & r & 0 \end{vmatrix} = -r\omega\hat{x} - r\omega\hat{y}$$

vilket ger att beloppet på  $v_C$  blir

$$v_C = \sqrt{(\mathbf{v}_C)^2} = \sqrt{(-r\omega\hat{x} - r\omega\hat{y}) \cdot (-r\omega\hat{x} - r\omega\hat{y})} = \sqrt{(r\omega)^2 + (r\omega)^2} = \pm\sqrt{2}r\omega.$$

Notera att  $\omega$  kan vara antingen större eller mindre än noll. I uppgiften är det givet att skivan rör sig åt höger. Det betyder att  $\omega = -\sqrt{2}r\omega$  här.

Sätter vi in det kända värdet på  $v_C = 5$  kan vi lösa ut  $\omega$ .

$$v_C = |\pm\sqrt{2}r\omega| = 5 \text{ (m/s)}$$

vilket ger

$$|\omega| = \frac{5}{\sqrt{2}r} \text{ (1/s)}$$

## 2.4 Beräkning av $\mathbf{v}_D$

Nu kan vi sätta in  $\omega$  i uttrycket för  $\mathbf{v}_D$  från ekvation (III).

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{D/B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= 0 + \left(-\frac{5}{\sqrt{2}r}\hat{z}\right) \times (-r \cos 45\hat{x} + (r + r \sin 45)\hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}r} \\ -r \cos 45 & (r + r \sin 45) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}r}(r + r \cos 45)\hat{x} + \frac{5}{\sqrt{2}r}r \sin 45\hat{y} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x} + \frac{5}{2}\hat{y} = 6.0\hat{x} + 2.5\hat{y} \end{aligned}$$

## 2.5 Svar

Enligt rullvillkoret är  $v_B = 0$  (m/s) och  $\mathbf{v}_D = 6.0\hat{x} + 2.5\hat{y}$  (m/s)