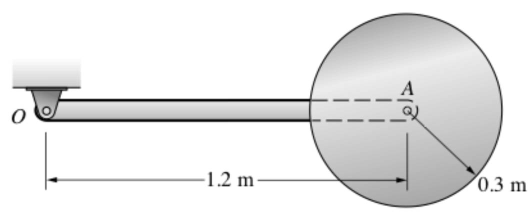
BF19.31

April 20, 2020

1 Mekanik II, problem 19.31

The masses of the bar and disk are 14 kg and 9 kg, respectively. The system is released from rest with the bar horizontal. Determine the angular velocity of the bar when it is vertical if the bar and disk are connected by a smooth pin at A.



(Similar to 19.30 but with a different connection between the bar and the disc.)

2 Lösning:

2.1 Fysikaliska samband

Skivan och stången kommer accelereras nedåt av tyngdkraften. För att bestämma stångens vinkelhastigheten ω som söks kan man använda kraft- och momentanalys tillsammans med Euler I och II.

Även om det finns en normalkraft i upphängningspunkten O samt interna kontaktkrafter mellan skivan och stången, ser vi att den enda kraft som utför ett arbete här är $m\mathbf{g}$. Därför är ett praktiskt tillvägagångssätt här att använda arbete-energisamband i stället för Eulers lagar.

Stångens masscentrum sitter på avståndet $d_M = l/2$ från upphängningsunkten och skivas masscentrum på $d_m = l$.

Skivan sitter fastsatt med en "smooth pin" vilket betyder helt friktionsfri pinne. Det betyder att inga friktionskrafter mellan stången och skivan verkar, utan endast kontaktkrafter i masscentrum för skivan. Den enda andra kraft som verkar på skivan är tyngdkraften, vilken också verkar i skivans masscentrum. Eftersom alla krafter på skivan verkar just i masscentrum betyder det att *inget* kraftmoment påverkar skivan med avseende på masscentrum och dess vinkelacceleration/vinkelhastighet är därför noll.

2.2 Arbete och energi

Sambandet för arbete och energi kan skrivas som

$T_1 + V_1 + U_{12} = T_2 + V_2$ **(I)**

där T betyder rörelseenergi, V potentiell energi och U det arbete av icke-konservativa krafter som utför ett arbete på kroppen. Här tittar vi på det sammansatta systemet stång+skiva. Vi behöver dock införa de olika kroppornas massor. Här är m skivans massa och M stångens massa.

För läge 1, där systemet startar, har vi

$T_1 = 0$ (stång och skiva släpps från vila)

$V_1 = 0$ (Sätter nollnivån för gravitationsenergin här)

och för läge två, när stången (och skivan) roterat med en vinkel θ får vi då

$T_2 = \frac{Mv_M^2}{2} + \frac{I^M\omega^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2}$

$V_2 = -Mgd_M \sin\theta - mgd_m \sin\theta = -(\frac{M}{2} + m)gl \sin\theta$

Inget yttre arbete utförs här så $U_{12} = 0$.

Alternativt kan vi skriva stångens rörelseenergi som en ren rotationsrörelse kring punkten O, eftersom den roterar kring en fix punkt. Då får vi

$T_2 = \frac{I_0^M\omega^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2}$

Tröghetsmomenten för stången fås från lämplig tabell $I_M = \frac{ml^2}{3}$. Eftersom skivan inte roterar kring sitt masscentrum behöver vi inte ta med något bidrag till rörelseenergin från den rotationen utan för skivan är det bara translationen av masscentrum som bidrar.

2.3 Beräkning

Sätter vi in alla energibidrag i **(I)** vilket ger

$0 = \frac{I_0^M\omega^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} - (\frac{M}{2} + m)gl \sin\theta$ **(II)**

för att lösa ut den okända hastigheten för skivans masscentrum v från ekvationen ovan använder vi rullvillkoret $v_m^2 = l^2\omega^2$. Med rullvillkor och tröghetsmoment insatta i ekvation **(II)** ovan får vi då

$$0 = \frac{Ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2} + \frac{ml^2\omega^2}{2} - (\frac{M}{2} + m)gl \sin\theta \tag{1}$$

$$\omega^2(\frac{Ml^2}{6} + \frac{ml^2}{2}) = (\frac{M}{2} + m)gl \sin\theta \tag{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(\frac{M}{2} + m)gl \sin\theta}{\frac{Ml^2}{6} + \frac{ml^2}{2}}} \tag{3}$$

2.4 Svar

Med insatta värden för $\theta = 90^\circ$ blir $\omega = 4.38$ rad/s.

OBS! Tänk på att vinkeln alltid måste anges i radianer vid alla rotationsrörelser (momentarbete, rullvillkor osv).

2.5 Kommentar

Jämfört med uppgift 19.30 blir här vinkelhastigheten för stången högre då skivans tröghet inte spelar någon roll. Skillnaden är dock liten vilket visar att det största bidraget till systemets rotationströghet i uppgift 19.30 kom från de termer som beror på stångens längd. Det är rimligt eftersom $l >> r$.