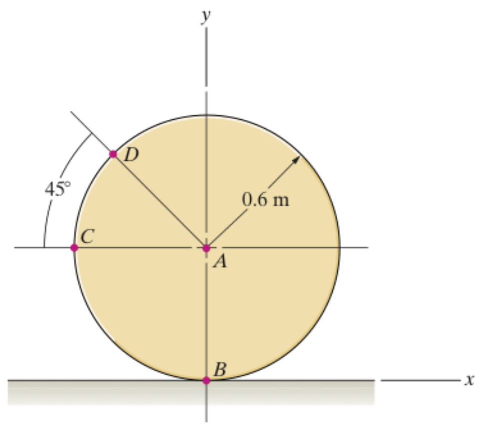
BF17.27

March 26, 2020

1 Mekanik II, problem 17.27

Point A of the rolling disk is moving toward the right. The magnitude of the velocity of point C is 5 m/s. determine the velocities of points B and D.



2 Lösning:

2.1 Resonemang

Det som söks är hastigheterna $\mathbf{v}_B$ för punkten B och $\mathbf{v}_D$ för punkten D.

Ett användbart samband här är det generella uttrycket för relativ rörelse $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ vilket för punkter A och B på samma stela kropp ger $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$ där ω är vinkelhastigheten för den stela kroppen.

I uppgiften är $\mathbf{v}_C$ given så vi kan ställa upp följande samband för relativa rörelser:

$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B}$ **(I)**

$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \omega \times \mathbf{r}_{C/D}$ **(II)**

$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{D/B}$ **(III)**

Då det är givet att skivan rullar, vet vi från rullvillkoret att vid kontaktpunkten mellan skivan och marken är hastigheten noll. Det vill säga här är $\mathbf{v}_B = 0$ så den hastigheten behöver vi inte räkna ut på annat sätt.

Trots att $\mathbf{v}_B$ nu redan är bestämd är både ω och $\mathbf{v}_D$ obekanta så vi behöver fortfarande använda två av ekvationerna ovan.

2.2 Vektorer och vinkelhastigheter

Från figuren kan vi bestämma

$\mathbf{r}_{C/B} = r\hat{x} + r\hat{y}$

$\mathbf{r}_{C/D} = (r\cos 45 - r)\hat{x} - r\sin 45\hat{y}$

$\mathbf{r}_{D/B} = -r\cos 45\hat{x} + (r + r\sin 45)\hat{y}$

och vinkelhastigheten kan skrivas $\omega = \omega\hat{z}$ även om storleken på ω fortfarande är obekant.

För vektorerna gäller även $\mathbf{r}_{C/B} = -\mathbf{r}_{B/C}$ och $\mathbf{r}_{C/D} = -\mathbf{r}_{D/C}$.

2.3 Beräkning av ω

Det finns flera möjliga sätt att lösa ut $\mathbf{v}_D$ och ω, vi väljer här att först använda ekvation **(I)** och den givna uppgiften att $v_C = 5$ för att bestämma ω.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B} = 0 + (\omega\hat{z}) \times (r\hat{x} + r\hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & r & 0 \end{vmatrix} = -r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y}$$

vilket ger att beloppet på v_C blir

$v_c = \sqrt{(\mathbf{v}_C)^2} = \sqrt{(-r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y}) \cdot (-r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y})} = \sqrt{(r\omega)^2 + (r\omega)^2} = \pm\sqrt{2}r\omega.$

Notera att ω kan vara antingen större eller mindre än noll. I uppgiften är det givet att skivan rör sig åt höger. Det betyder att $\omega = -\sqrt{2}r\omega$ här.

Sätter vi in det kända värdet på $v_C = 5$ kan vi lösa ut ω.

$v_c = |\pm\sqrt{2}r\omega| = 5$ (m/s)

vilket ger

$|\omega| = \frac{5}{\sqrt{2}r}$ (1/s)

2.4 Beräkning av $\mathbf{v}_D$

Nu kan vi sätta in ω i utrycket för $\mathbf{v}_D$ från ekvation **(III)**.

$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{D/B}$

$$\mathbf{v}_D = 0 + (-\tfrac{5}{\sqrt{2}r}\hat{z}) \times (-r\cos 45\hat{x} + (r + r\sin 45)\hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}r} \\ -r\cos 45 & (r + r\sin 45) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \tfrac{5}{\sqrt{2}r}(r + r\cos 45)\hat{x} + \tfrac{5}{\sqrt{2}r}r\sin 45\hat{y} = \tfrac{5}{\sqrt{2}}(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}})\hat{x} + \tfrac{5}{2}\hat{y} = 6.0\hat{x} + 2.5\hat{y}$$

2.5 Svar

Enligt rullvillkoret är $v_B = 0$ (m/s) och $\mathbf{v}_D = 6.0\hat{x} + 2.5\hat{y}$ (m/s)