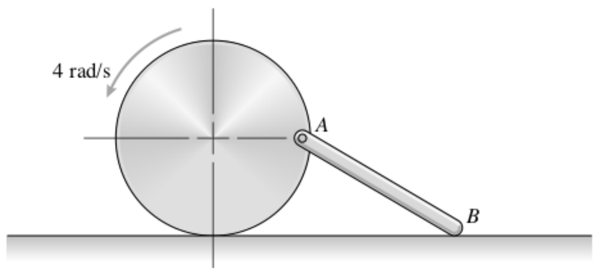
BF17.44

March 26, 2020

1 Mekanik II, problem 17.44

The diameter of the disk is 1 m, and the length of the bar AB is 1 m. The disk is rolling, and point B slides on the plane surface. Determine the angular velocity of the bar AB and the velocity of point B.



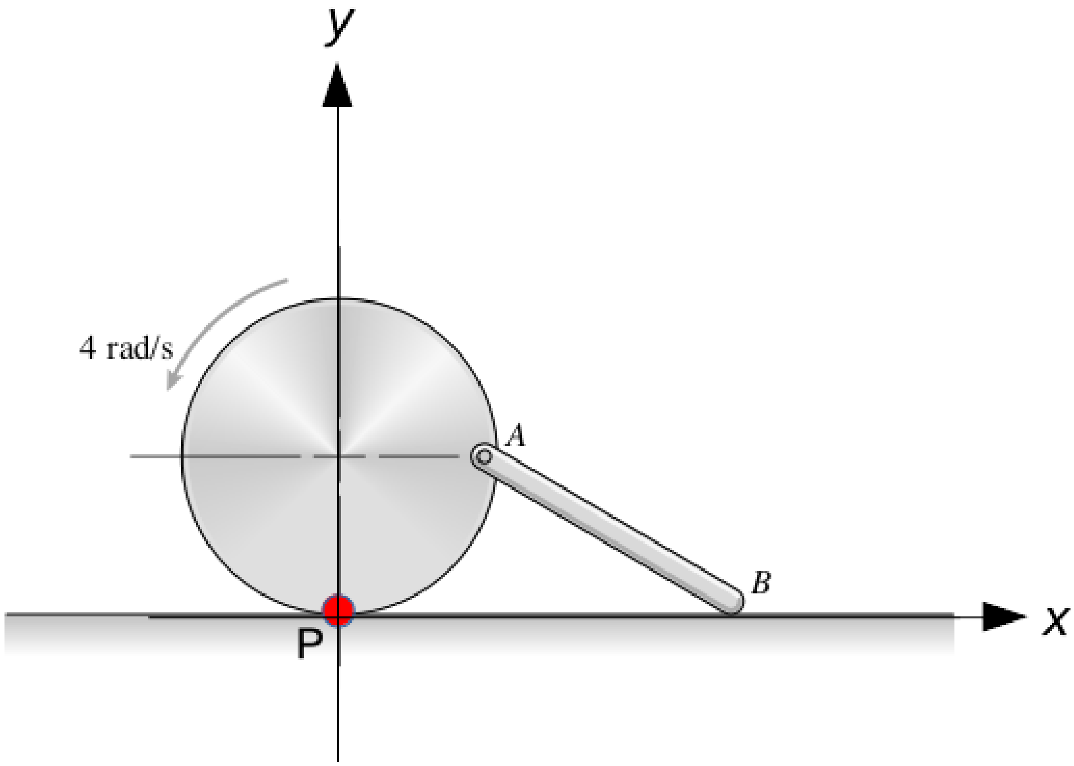
2 Lösning:

2.1 Resonemang

För att bestämma hastigheten $\mathbf{v}_B$ för punkten B och vinkelhastigheten ω_{AB} kan vi använda oss av sambandet för relativ rörelse för stela kroppar.

För stången gäller $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$

Eftersom både ω_{AB} och $\mathbf{r}_{A/B}$ är obekanta behöver vi ett samband till. Vi inför punkten P vid kontakten mellan skivan och marken, enligt figuren nedan där vi även infört vårt koordinatsystem.



Vi vet från rullvillkoret att $\mathbf{v}_P = 0$ och vi kan använda det för att ge ett annat uttryck för $\mathbf{v}_A$ som

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}_{A/P}$

Notera att ω är vinkelhastigheten för skivan och ω_{AB} är vinkelhastigheten för stången. Skivans vinkelhastighet är given: $\omega = 4\hat{z}$ (rad/s).

2.2 Vektorer och vinkelhastigheter

Från uppgiftsbeskrivningen vet vi att diametern på skivan $d = 1$ m och stavens längd $l = 1$ m. Vi kan även införa radien $r = d/2$ för enkel notation.

Vi kan då skriva relevanta vektorer som

$\mathbf{r}_{A/B} = -\sqrt{l^2 - r^2}\hat{x} + r\hat{y}$

$\mathbf{r}_{A/P} = r\hat{x} + r\hat{y}$

och ansätta stavens vinkelhastighet $\omega_{AB} = \omega_{AB}\hat{z}$.

2.3 Beräkning

Genom att kombinera de två uttrycken för $\mathbf{v}_A$

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$ **(I)**

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}_{A/P}$ **(II)**

kan vi beräkna ω_{AB} och $\mathbf{v}_B$. Från **(II)** fås

$$\mathbf{v}_A = 0 + (\omega\hat{z}) \times (r\hat{x} + r\hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & r & 0 \end{vmatrix} = -r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y}$$

Från **(I)** får vi

$$\mathbf{v}_A = -r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y} = \mathbf{v}_B + (\omega_{AB}\hat{z}) \times (-\sqrt{l^2 - r^2}\hat{x} + r\hat{y}) = \mathbf{v}_B + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ -\sqrt{l^2 - r^2} & r & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{v}_B - r\omega_{AB}\hat{x} - \sqrt{l^2 - r^2}\omega_{AB}\hat{y}$$

De två olika uttrycken för $\mathbf{v}_A$ måste stämma överens vilket ger att

$-r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y} = \mathbf{v}_B - r\omega_{AB}\hat{x} - \sqrt{l^2 - r^2}\omega_{AB}\hat{y}$ **(III)**

För att kunna lösa ekvationen ovan behöver riktningen för $\mathbf{v}_B$ vara känd. Eftersom vi vet från uppgiften att B släpar i marken vet vi också att $\mathbf{v}_B$ måste ligga enbart i x-led, d.v.s. $\mathbf{v}_B = v_B\hat{x}$. Insatt i **(III)** har vi då

$-r\omega\hat{x} + r\omega\hat{y} = v_B\hat{x} - r\omega_{AB}\hat{x} - \sqrt{l^2 - r^2}\omega_{AB}\hat{y}$

Delar vi upp ekvationen ovan i x- och y-led får vi

$\hat{x} : -r\omega = v_B - r\omega_{AB}$

$\hat{y} : r\omega = -\sqrt{l^2 - r^2}\omega_{AB}$

Vilket ger

$\omega_{AB} = -\frac{r\omega}{\sqrt{l^2 - r^2}}$ (rad/s)

$v_B = r\omega_{AB} - r\omega = -r\frac{r\omega}{\sqrt{l^2 - r^2}} - r\omega = -r(\frac{\omega}{\sqrt{l^2 - r^2}} + \omega)$ (m/s)

2.4 Svar

Med insatta värden blir $\omega_{AB} = -2.31$ (rad/s) och $\mathbf{v}_B = -3.15\hat{x}$ (m/s)