

Secventa Kolakoski

Anca Bizon

12 MARTIE 2025

1 Cine a descoperit-o? De ce se numeste asa?

Secventa Kolakoski este numita dupa matematicianul William Kolakoski (1944-1997) care a descris-o in anul 1965.Insa prima data a fost discutata de matematicianul Rufus Oldenburger in anul 1939.Cu toate acestea, pentru a nu se crea confuzie, este recunoscuta in Enciclopedia electronica a sirurilor de numere intregi (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS) ca "Secventa Kolakoski" ("Kolakoski Sequence").

2 Ce proprietati are aceasta secventa?

Secvența Kolakoski este o succesiune autoreferențială formată doar din 1 și 2, în care fiecare termen indică lungimea unui grup de termeni consecutivi. Cu alte cuvinte, structura sa este determinată de ea însăși. Se crede că apar aproximativ de două ori fiecare termen lung, adică distribuția numerelor 1 și 2 pare să fie echilibrată, însă nu s-a demonstrat încă. Deși regula de formare este una simplă, această secvență este foarte complicată și nu are o formulă directă pentru a afla al n -lea termen, ci trebuie să se construiască până în acel punct.

Sunt doar 6 tipuri de triplete care apar in aceasta secventa: 112, 121, 122, 211, 212 și 221, iar prin argumentul precedent, doar 18 grupuri de cate 6 cifre: cele 6 triple duble (112112 etc.); 112122, 112212, 121122, 121221, 211212 și 211221; și cele obținute prin inversarea ordinii triplelor (122112 etc.). Secventa Kolakoski nu contine cuvinte de forma "ababa", deoarece acest lucru ar insemna ca apare subsecventa "111", ceea ce ar fi imposibil.

O conjectura legata de aceasta secventa aduce in evidenta faptul ca, daca luam secventa in lungimi de cuvinte 10(de exemplu,lotul 1-10, 11-20 etc.) atunci pot fi doar 4,5 sau 6 de 1 in fiecare lot.

3 Cum se construiește?

Secvența începe astfel:

$$1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, \dots$$

$$1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, \dots$$

Fiecare număr din secvență indică lungimea unui grup de termeni consecutivi, alternând între 1 și 2:

The first term is 1, and the first group contains a single „1”.

Al doilea termen este 2, deci următorul grup conține două „2”.

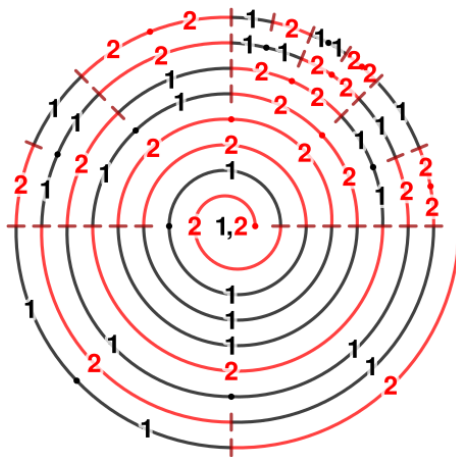
Al treilea termen este 2, deci următorul grup conține două „1”.

Al patrulea termen este 1, deci următorul grup conține un „2”.

Și așa mai departe.

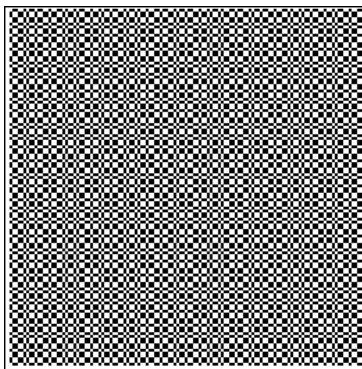
Secvența se auto-construiește fără a urma o formulă explicită.

4 Reprezentare vizuala.



Vizualizarea termenilor de la 3 la 50 ai secvenței Kolakoski ca o spirală. Termenii încep la punctul din mijlocul spiralei. În figura anterioară, fiecare arc se repetă dacă termenul este 1 sau se împarte în două jumătăți egale dacă este 2. Primii doi termeni nu pot fi afișați deoarece sunt autoreferențiali.

Un alt grafic de recurență al secvenței Kolakoski este ilustrat mai jos:



5 Care este problema nerezolvata majora?

Problema de nerezolvat la Secventa Kolakoski este determinarea exacta a densitatii numerelor 1 si 2. Mai precis, se conjecturează că densitatea lui 1 este de $1/2$, adică pe termen lung, aproximativ jumătate dintre elementele secvenței sunt 1. Alti matematicieni au incercat sa demonstreze acest lucru, prin metode combinatorice si probabilistice. Printre acestia se numara Václav Chvátal care a aratat ca densitatea lui 1 este mai mica decat 0.50084, iar Nilsson a folosit aceeași metoda si a obtinut limita 0.500080. cu toate acestea, nu s-a ajuns la o demonstrare exacta a limitei.

6 Ce inseamna, de fapt, densitatea unui numar?

Densitatea unui numar dintr-o secventa se defineste ca: Desi exista o formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{numărul de apariții ale lui } k \text{ în primii } n \text{ termeni din } S}{n}$$

clara pentru a calcula densitatea unui numar, este imposibil de calculat densitatea numerelor 1 si 2 din secventa Kolakoski din mai multe motive. Unul dintre ele este faptul ca aceasta secventa nu are o formula directa pentru al n-lea termen, adica nu are o formula explicita si trebuie generata pas cu pas. Alt motiv care impiedica rezolvarea acestei probleme este comportamentul haotic pe care il are aceasta secventa. Deși regulile de formare sunt simple, secvența nu prezintă un tipar clar care să permită o analiză ușoară a frecvenței lui 1 și 2.

7 Cum se poate aplica Secventa Kolakoski?

Secvența Kolakoski poate fi utilizată în mai multe domenii, datorită proprietăților sale autoreferențiale și aparent haotice. Cateva aplicatii interesante sunt urmatoarele:

1. Generarea de structuri autoreferentiale: poate fi folosită pentru a construi modele de date în care un element descrie structura întregului sistem (ex. gramatici formale sau coduri Huffman adaptive).

2. Criptografie si generarea de secvente pseudoaleatoare: se poate folosi ca bază pentru generarea de chei criptografice sau măști de confidențialitate în algoritmi care cer structuri imprevizibile.

3. Inteligența artificială si învățare automată: Se poate folosi în rețele neuronale recursive (RNNs) pentru a testa capacitatea acestora de a recunoaște și genera structuri autoreferențiale.

4. Modelarea matematică si fizică: Poate fi utilizată pentru a modela sisteme de particule în care o proprietate locală afectează structura globală.

8 Referinte.

https://en.wikipedia.org/wiki/Kolakoski_sequence

<https://oeis.org/A000002>

<https://mathworld.wolfram.com/KolakoskiSequence.html>