LOMBREA ANCA RALUCA
OPREA FELICIA
PASCALAU RAZVAN CRISTIAN

36/12

PROIECT IDENTIFICAREA SISTEMELOR

ARX neliniar

1. Introducere

2. Structura metodei ARX neliniare

3. Algoritm

4. Rezultate de reglare

5. Concluzie

1. Introducere – ARX neliniar

- Model autoregresiv cu intrare exogenă
- Model parametric de tip polinomial
- Ieșirea y(k) la pasul curent este o combinație neliniară cu ponderi a și b între ieșirile și intrările anterioare ale sistemului.
- Un model de grad m conține produse între variabilele întârziate al căror grad este maxim m și este liniar în parametrii.

2. NARX polinomial

- y(k) = g(y(k-1), y(k-2), … ,y(k-na), u(k-1), u(k-2), …,u(k-nb); θ) + e(k)
- $\mathbf{y(k) = g(d(k); \theta) + e(k)}$
- $\theta \in \mathbb{R}^{na+nb}$: parametrii aleși potrivit pentru identificarea unui sistem dinamic neliniar
- $\theta = [a_1 \ \dots \ a_{na} \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T$
- g este un polinom de grad m ale cărui variabile sunt ieșirile și intrările precedente, iar coeficienții sunt parametrii θ
- $d(k) = [y(k-1) \ \dots \ y(k-na) \ \ u(k-1) \ \dots \ u(k-nb)]^T = \varphi(k)$, vector de regresori

Exemplu NARX polinomial

- **na = nb = 1, m = 1**

  $y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + c_1 + e(k)$

- **na = nb = 2, m = 2**

  $$\begin{aligned} y(k) = {} & a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-1)^2 + a_4 y(k-2)^2 + \\ & + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_3 u(k-1)^2 + b_4 u(k-2)^2 + \\ & + c_1 y(k-1)\, u(k-1) + c_2 y(k-1)\, u(k-2) + c_3 y(k-2)\, u(k-1) + \\ & + c_4 y(k-2)\, u(k-2) + d + e(k) \end{aligned}$$

Predicție și simulare

- Predicție cu un pas înainte

$x(k) = [y(k-1)\ \ y(k-2)\ \ \ldots\ \ y(k-n_a)\ \ u(k-1)\ u(k-2)\ \ \ldots\ \ u(k-n_b)]^T$

$$\hat{y}_{pred}(k) = g(d(k); \theta)$$

- Simulare

$\hat{x}(k) = [\hat{y}(k-1)\ \hat{y}(k-2)\ \ \ldots\ \hat{y}(k-n_a)\ \ u(k-1)\ u(k-2)\ \ \ldots\ \ u(k-n_b)]^T$

$$\hat{y}_{sim}(k) = g(\hat{d}(k); \theta)$$

- Ieșirile simulate la momente negative sau 0 sunt egale cu 0!

3. Algoritm

- $X(k) = [y(k-1)\ \ y(k-2)\ \ \dots\ \ y(k-n_a)\ \ u(k-1)\ u(k-2)\ \ \dots\ \ u(k-n_b)],\ k \in \mathbb{R}^n$
  $X(k) = [\ x_1(k)\ x_2(k)\ x_3(k)\ \dots\ x_n(k)],\quad n = na+nb$

- $\varphi(k) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{pi}(k),\quad p \in (0,1\ \ \dots m)$
  $\varphi(k) = x_1^{p1}(k)\ x_2^{p2}(k)\ x_3^{p3}(k)\ \dots\ X_n^{pn}(k),\qquad \sum_{i=0}^{n} p_i \leq m$

- Se calculează X(k) și φ(k) atât pentru datele de identificare, cât și pentru cele de validare

Exemplu

Pentru na = nb = 1, m = 2

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} x_1^0(1)\, x_2^0(1) & x_1^0(1)\, x_2^1(1) & x_1^1(1)\, x_2^0(1) & x_1^1(1)\, x_2^1(1) & x_1^2(1)\, x_2^0(1) & x_1^0(1)\, x_2^2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^0(n)\, x_2^0(n) & x_1^0(n)\, x_2^1(n) & x_1^1(n)\, x_2^0(n) & x_1^1(n)\, x_2^1(n) & x_1^2(n)\, x_2^0(n) & x_1^0(n)\, x_2^2(n) \end{bmatrix}$$

Formare matrice regresori:

$\varphi(k) = \prod_{i=1}^{na+nb} x_i^{p(l,\, i)}(k,i)$

l = numărul de linii unde $\sum_{i=0}^{n} p_i \leq 2$

Se vor alege primele 6 linii din matricea P pentru care suma elementelor de pe fiecare coloană este $\leq m$.

- Aflarea regresorilor și a parametrilor

  ϕ_{id} folosind datele de identificare

  ϕ_{val} folosind datele de validare

  $\theta = \phi_{id} \setminus y_{identificare}$

- Aflarea predicției

  $\hat{y}_{pred} = \phi * \theta$

- Aflarea simulării

  $\hat{y}_{sim}(1) = [-\hat{y}_{sim}(0) \dots -\hat{y}_{sim}(1\text{-}na) \;\; u(0) \dots u(1\text{-}nb)]$

  $\hat{y}_{sim}(2) = [-\hat{y}_{sim}(1) \dots -\hat{y}_{sim}(2\text{-}na) \;\; u(1) \dots u(2\text{-}nb)]$

  …

  $\hat{y}_{sim}(n) = [-\hat{y}_{sim}(n) \dots -\hat{y}_{sim}(n\text{-}na) \;\; u(n) \dots u(n\text{-}nb)]$

Rezultate de reglare

Eroarea medie pătratică pe datele de **identificare** pentru $y_{predicție}$

	m=1	m=2	m=3	m=4
na=nb=1	0.512	0.0344	0.0334	0.0334
na=nb=2	0.326	1.53e-04	8.38e-06	7.20e-06
na=nb=3	0.232	5.32e-06	4.32e-06	3.75e-06

Eroarea medie pătratică pe datele de **identificare** pentru $y_{simulare}$

	m=1	m=2	m=3	m=4
na=nb=1	0.676	0.431	0.430	0.425
na=nb=2	0.402	5.20e-03	5.29e-04	5.05e-04
na=nb=3	0.285	NaN	NaN	NaN

Rezultate de reglare

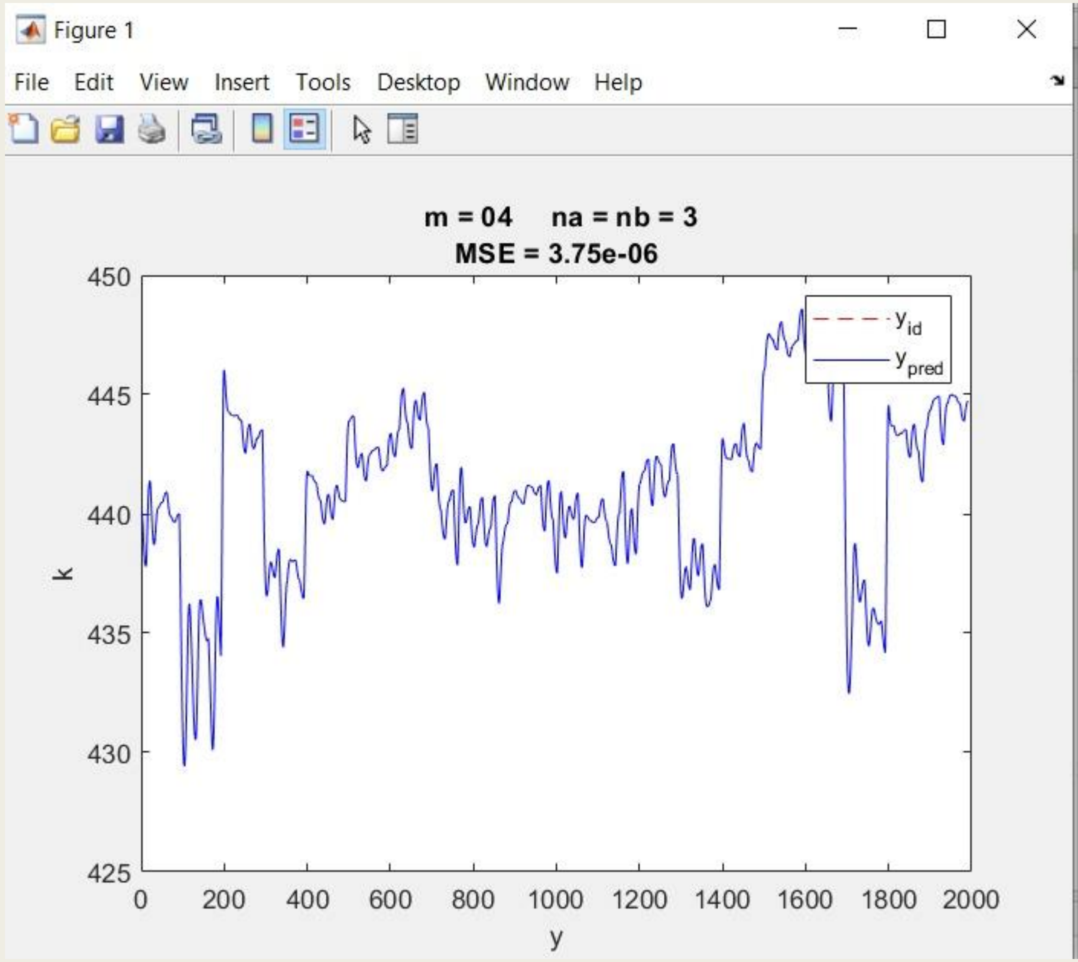
Eroarea medie pătratică pe datele de **validare** pentru $y_{predicție}$

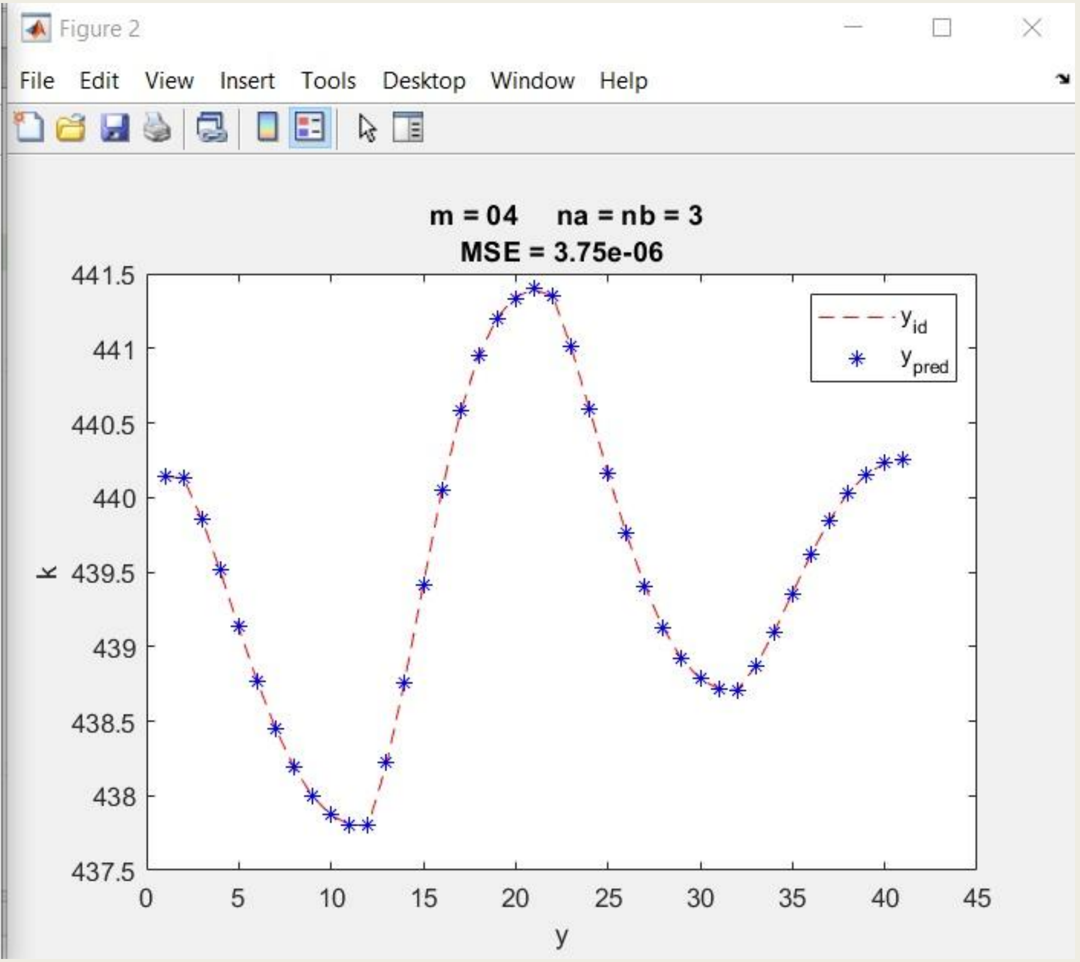
	m=1	m=2	m=3	m=4
na=nb=1	0.291	0.016	0.0157	0.0157
na=nb=2	0.164	4.97e-05	6.45e-06	7.66e-06
na=nb=3	0.0994	4.41e-06	5.40e-06	6.06e-06

Eroarea medie pătratică pe datele de **validare** pentru $y_{simulare}$

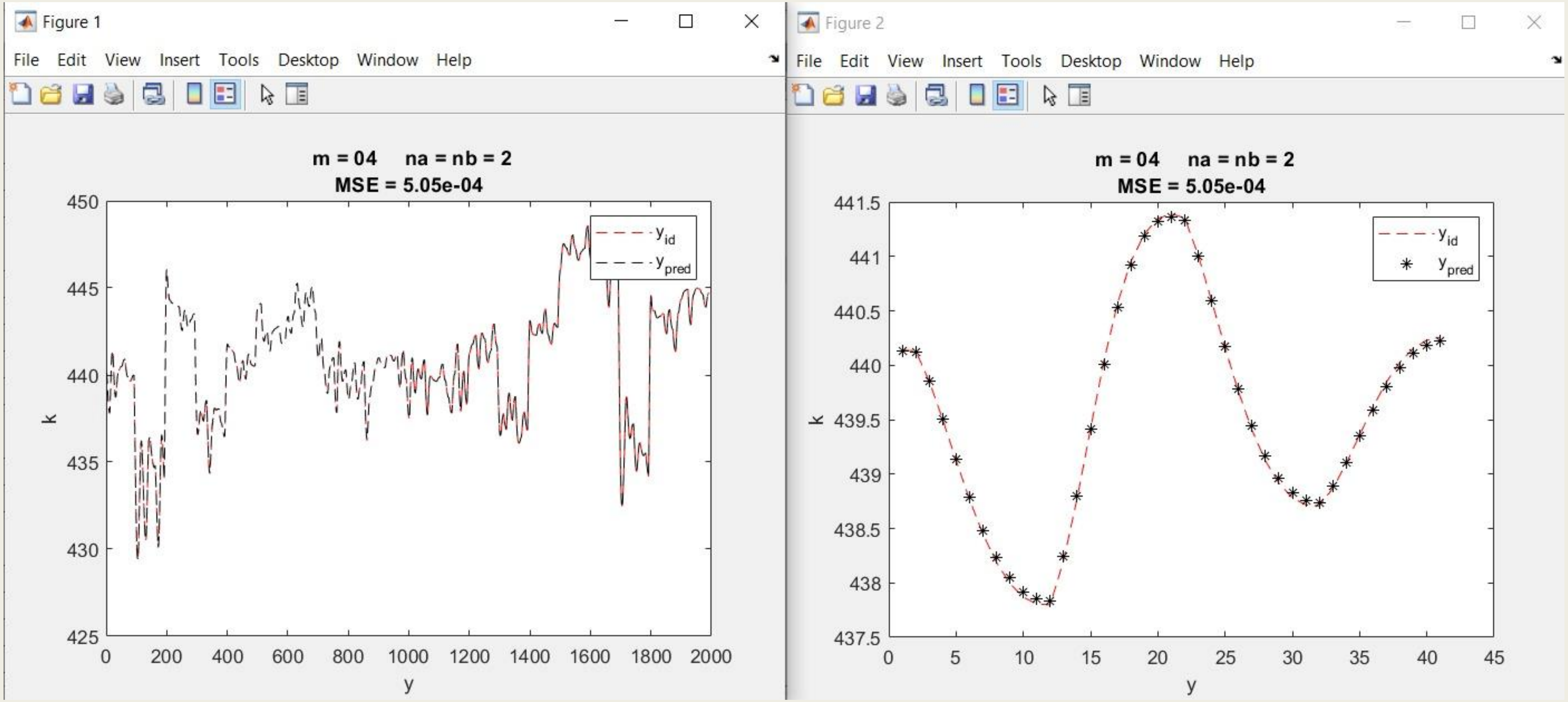
	m=1	m=2	m=3	m=4
na=nb=1	0.380	0.217	0.188	0.183
na=nb=2	0.196	NaN	NaN	NaN
na=nb=3	0.117	NaN	NaN	NaN

■ Cel mai bun caz de **predicție** pentru datele de **identificare**

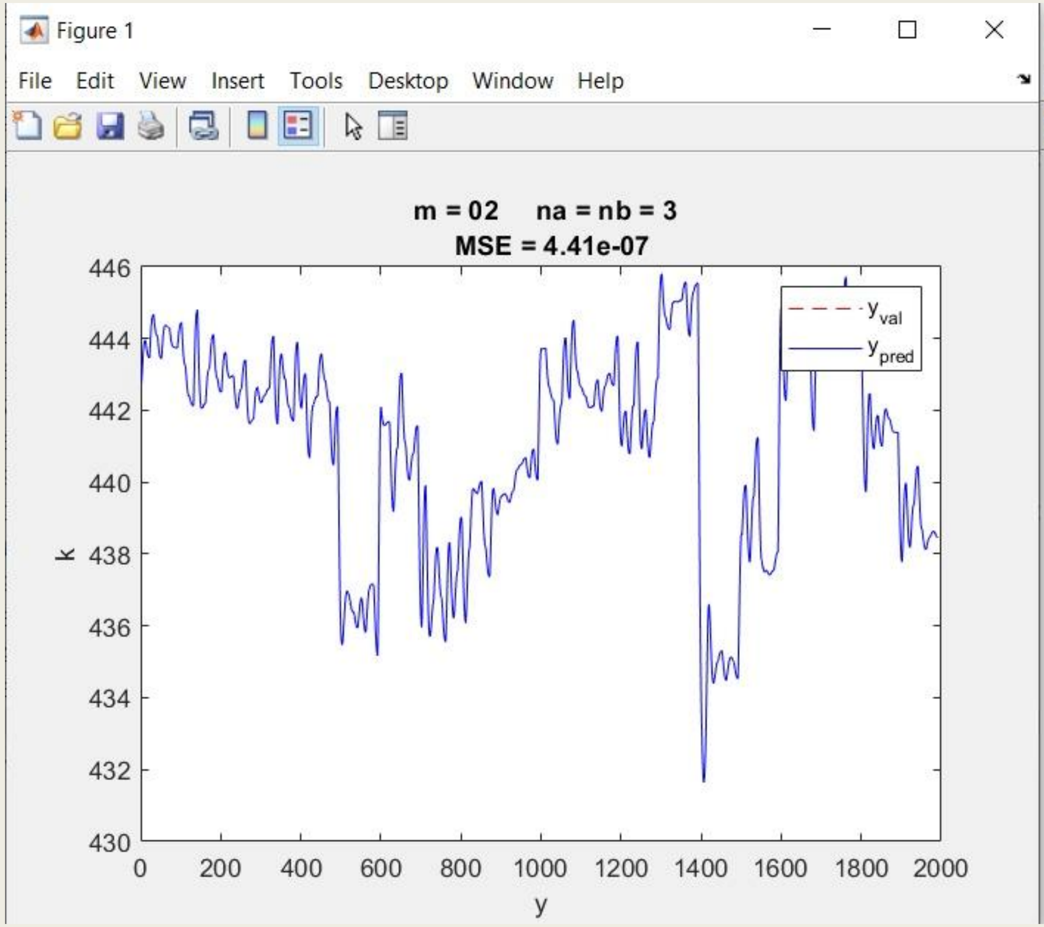


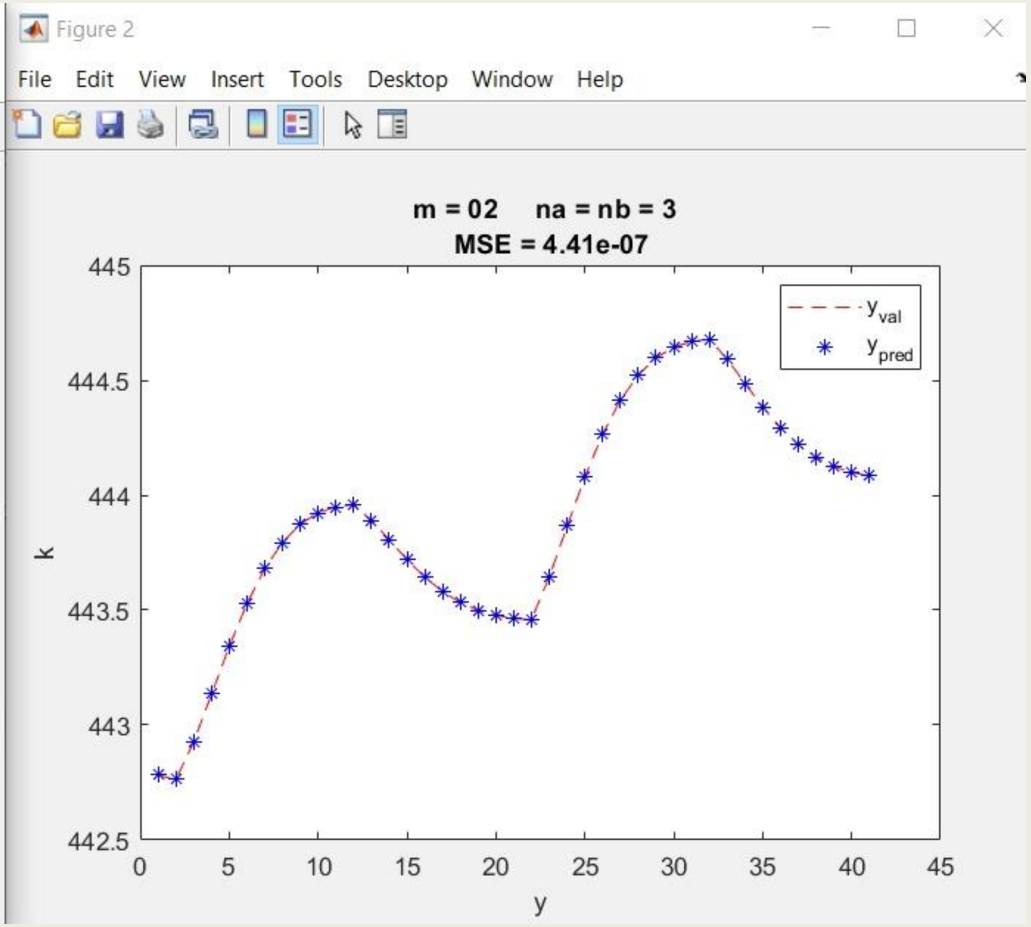


Cel mai bun caz de **simulare** pentru datele de **identificare**

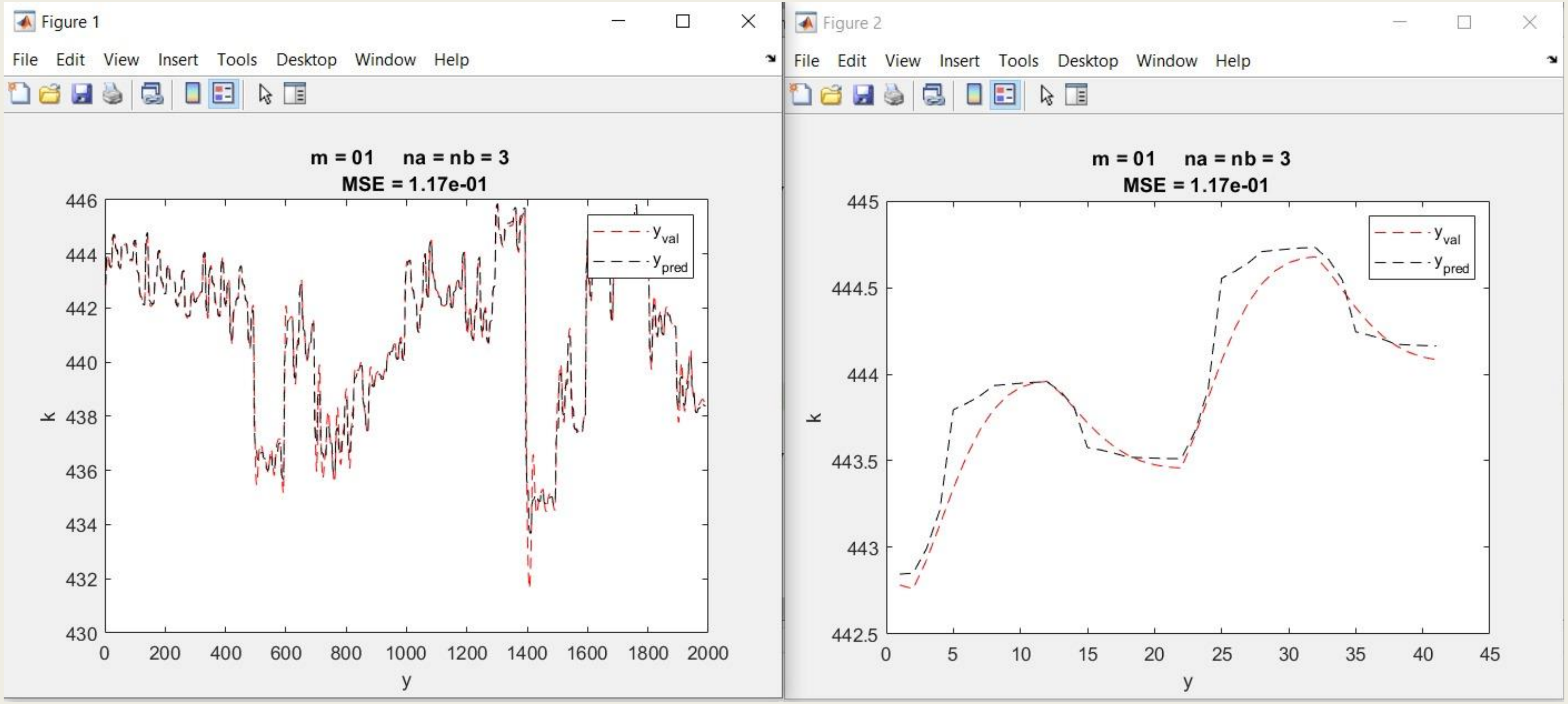


- Cel mai bun caz de **predicție** pentru datele de **validare**





■ Cel mai bun caz de **simulare** pentru datele de **validare**



5. Concluzie

- Pentru predicție, MSE scade odată cu creșterea gradului sau cu a ordinelor na și nb, iar cele mai bune rezultate se obțin pentru gradul m=4 și ordinul na=nb=3.
- Pentru simulare pe datele de identificare MSE_{sim} scade asemănător cu MSE_{pred}, dar odată cu depășirea gradului 2 pentru ordin ≥ 3 nu se mai obțin rezultate datorită instabilității sistemului.
- Simularea pe datele de validare produce rezultate valide pentru o gamă mai restrânsă de combinații între m și na=nb.