Olympiades d'Informatique

http://uclouvain.acm-sc.be/olympiades

Introduction à l'algorithmique

Ce document propose une introduction à l'algorithmique et la résolution de problème. La première partie décrit pas-à-pas les concepts de base de la programmation, tout en introduisant un pseudo-code, une notation pour les différentes structures de programmation étudiées. Tout ceci mènera à la seconde partie où il sera question d'algorithmique et résolution de problèmes. Le document est rédigé dans un style pédagogique, les concepts étant introduit graduellement et à chaque fois sur base d'exemples concrets.

1 Introduction

Commençons avec un problème très simple dont voici l'énoncé :

> Je désire carreler une pièce rectangulaire qui mesure 2,5 m de large sur 4,9 m de long. Quelle est la surface, en m^2, que je vais devoir carreler ?

La première chose à faire est bien entendu de lire attentivement l'énoncé du problème à résoudre. Pendant cette lecture, il faut tout d'abord identifier deux choses : les *entrées*, c'est-à-dire les données qui sont fournies et les *sorties*, c'est-à-dire les résultats qu'il faut calculer. Pour le problème en cours de résolution, on peut identifier deux données : une largeur de 2,5 m et une longueur de 4,9 m. Le résultat qu'il faut calculer est la surface de la pièce de largeur et longueur fournis en données.

Une fois les entrées et sorties identifiées, il faut décrire comment le résultat désiré est calculé à partir de ceux-ci. Il s'agit de proposer une *méthode de résolution systématique* du problème. Dans notre cas, on doit calculer une surface d'un rectangle connaissant sa largeur et longueur, il suffit dès lors de multiplier ces deux valeurs pour obtenir le résultat voulu : $2{,}5\,\mathrm{m} \times 4{,}9\,\mathrm{m} = 12{,}25\,\mathrm{m}^2$.

Le problème qu'on vient d'analyser est très *spécifique*, c'est-à-dire qu'il correspond exactement à une seule situation précise qui est de carreler une pièce rectangulaire mesurant 2,5 m sur 4,9 m. On ne s'intéresse que très rarement à ce genre de problème, mais plutôt à des problèmes plus *génériques*, c'est-à-dire plus généraux et qui peuvent correspondre à plusieurs situations concrètes.

Voyons une version plus générique du problème de carrelage :

> Je désire carreler une pièce rectangulaire d'une certaine largeur de l et d'une certaine longueur de L, toutes deux données en mètres. Quelle est la surface, en m^2, que je vais devoir carreler ?

On voit que cette fois-ci, il n'y a plus des valeurs précises pour les données du programme. Il s'agit en fait de *variables* pouvant correspondre à n'importe quelle valeur. Il y a deux variables l et L. Le résultat du problème se calcule simplement en multipliant ces deux valeurs : $l \times L$. On va pouvoir écrire la solution à ce problème un peu plus systématiquement grâce à un *algorithme*.

Algorithme 1 : Calcul de la surface de carrelage d'une pièce rectangulaire.

Input : l et L, largeur et longueur de la pièce en m
Output : Surface de la pièce rectangulaire

return $l \times L$

On peut voir l'utilisation de trois mots en gras dans l'algorithme. Chacun de ces mots permet de définir différents éléments de l'algorithme. Le tableau ci-dessous reprend ces différents mots avec l'élément qu'ils définissent.

Mot	définit
Input	les entrées
Output	les sorties
return	le résultat

Ce problème générique peut être utilisé pour résoudre le premier problème qu'on a vu. Il suffit pour cela de donner la valeur 2,5 à l et la valeur 4,9 à L. En faisant ça, on a *instancié* le problème générique pour en obtenir un spécifique en donnant des valeurs concrètes aux variables d'entrée. Le résultat calculé par l'algorithme sera dans ce cas également une valeur concrète, résultat du problème spécifique concret.

1.1 Exercices

1. Partez du problème spécifique suivant et donnez le problème générique lui correspondant. Enfin, écrivez l'algorithme complet qui permet de résoudre le problème.

   > On m'a appris un nouveau jeu de cartes dans lequel chaque joueur reçoit initialement une main de quatre cartes. Pour ce jeu, on utilise un jeu classique de 52 cartes. Combien de mains différentes pourrais-je recevoir initialement ?

2. L'algorithme suivant permet de calculer le volume d'un cylindre. Complétez-le.

   Algorithme 2 : Calcul du volume d'un cylindre.

   Input : R et H, rayon et hauteur du cylindre en m
   Output : Volume du cylindre

   ```
   // À compléter ...
   ```

2 Variable

Maintenant qu'on a vu les concepts de base de la résolution d'un problème grâce à un algorithme, on va pouvoir découvrir petit à petit différentes constructions qui vont nous permettre de résoudre des problèmes plus intéressants. Lorsqu'on fait des calculs, on a parfois besoin d'effectuer des calculs intermédiaires. Par exemple, si on doit calculer les racines d'une équation du second degré $P \equiv ax^2 + bx + c$, en supposant qu'on soit dans le cas où l'équation admet deux racines réelles distinctes, on fait le calcul en deux étapes. On commence par calculer le déterminant

$$\rho = b^2 - 4ac$$

et on calcule ensuite les deux racines

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\rho}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\rho}}{2a}.$$

Voici l'algorithme qui permet de résoudre ce problème. Remarquez que l'algorithme produit deux résultats, ce qu'on a écrit en écrivant les deux valeurs séparées par une virgule et écrites entre des crochets. On va revenir sur ce concept rapidement.

Algorithme 3 : Calcul des racines d'un polynôme du second degré.

Input : a, b et c, paramètres du polynôme $P \equiv ax^2 + bx + c$
Output : Les deux racines réelles distinctes du polynôme

$\rho \leftarrow b^2 - 4ac$

$x_1 \leftarrow \dfrac{-b + \sqrt{\rho}}{2a}$

$x_2 \leftarrow \dfrac{-b - \sqrt{\rho}}{2a}$

return $[x_1, x_2]$

L'algorithme nécessite trois entrées qui sont les variables a, b et c. Comme vous avez pu le lire dans l'algorithme, on les appelle *paramètres*, pour les distinguer des autres variables qu'on va pouvoir utiliser dans l'algorithme. On en a utilisées trois : ρ, x_1 et x_2. Les *variables* possèdent un *nom* et une *valeur* et on les utilise notamment pour effectuer des calculs intermédiaires. On peut les utiliser dans un calcul et on peut modifier leur valeur. On note $x \leftarrow v$ pour changer la valeur de la variable x en v. C'est donc bien ce qu'on fait dans l'algorithme ci-dessus. On calcule le déterminant $(b^2 - 4ac)$ et on stocke ce résultat dans la variable ρ. Ensuite, on va pouvoir utiliser ce résultat intermédiaire pour calculer les deux racines et les stocker dans les variables x_1 et x_2. Enfin, on termine en renvoyant le résultat qui est composé des valeurs de ces variables ($[x_1, x_2]$).

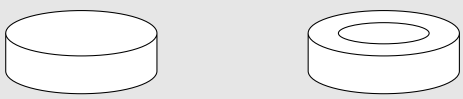
2.1 Expression

Lorsqu'on écrit un calcul, on écrit en fait une *expression*. Il s'agit donc d'un calcul qui utilise des nombres, des variables et des opérateurs et qui possède une certaine valeur, le résultat du calcul. On a déjà vu un type d'expression, à savoir les *expressions arithmétiques* dont la valeur est toujours un nombre. On a par exemple : $l \times L$, b^2, $\sqrt{x+1}$, ... On va donc combiner des nombres, des variables et des opérateurs pour construire ces expressions. On peut par exemple écrire : $x + y$, $x - y$, $x \times y$, x/y, $\sqrt{x}$, x^n, ...

Il y a également un second type d'expression, à savoir les *expressions booléennes*. Ces dernières peuvent prendre deux valeur différentes : elles peuvent être vraies (noté **true**) ou fausse (noté **false**). On obtient de telles valeurs en utilisant les opérateurs $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$ et $\geq$ qui vont permettre de comparer deux valeurs. On peut par exemple écrire : $x \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $x \neq y$, ...

Voyons un nouveau problème qui va nous permettre d'utiliser ces nouveaux concepts :

> J'ai deux types de pièces cylindriques de même hauteur H à ma disposition. Les cylindres de premier type sont pleins tandis que ceux du deuxième type sont creux comme vous pouvez le voir sur le dessin ci-dessous. Un cylindre de type I de rayon R est-il plus volumineux qu'un cylindre de type II de rayon extérieur R_O et de rayon intérieur R_I ?



Voyons maintenant comment résoudre ce problème. Il y a quatre entrées : H la hauteur des cylindres, R le rayon du cylindre de type I et R_O et R_I les rayons extérieur et intérieur du cylindre de type II. Le résultat à produire est booléen, c'est oui (**true**) ou non (**false**). Vous avez dû retrouver la formule permettant d'obtenir le volume d'un cylindre à l'exercice 1.2. Il s'agit en effet de $V = \pi R^2 H$. L'algorithme va donc être assez simple, on calcule de volume des deux cylindres et on les compare. Pour le second cylindre, il faudra calculer le volume du cylindre extérieur et lui soustraire celui du cylindre intérieur. Voici un algorithme qui va résoudre ce problème :

Algorithme 4 : Comparaison du volume de cylindres de différents types.

Input : H, hauteur des cylindres, R rayon du cylindre de type I, R_O, R_I rayons extérieur et intérieur du cylindre de type II
Output : **true** si le cylindre de type I est plus volumineux que celui de type II et **false** sinon

// Volume du premier cylindre
$V_1 \leftarrow \pi R^2 H$
// Volume du second cylindre
$V_O \leftarrow \pi R_O^2 H$
$V_I \leftarrow \pi R_I^2 H$
$V_2 \leftarrow V_O - V_I$
return $V_1 \geq V_2$

On a donc calculé les volumes des deux cylindres dans les variables V_1 et V_2. Pour le second cylindre, on a fait le calcul en plusieurs étapes en stockant des résultats intermédiaires dans les variables V_O et V_I. Enfin, le résultat est un booléen qui est $V_1 \geq V_2$ (le volume du premier cylindre est-il plus grand que celui du second).

3 Condition

Dans un algorithme, on est parfois amené à faire des choix. On va voir une structure qui permet de faire de tels choix, ceux-ci étant fait sur base d'une *condition* qui est une expression booléenne. Pour comprendre cela, écrivons un algorithme qui permet de calculer la valeur absolue d'un nombre n :

Algorithme 5 : Calcul de la valeur absolue d'un nombre.

Input : n, un nombre
Output : La valeur absolue du nombre

1 **if** $n < 0$ **then**
2 $\quad n \leftarrow (-1) \times n$
3 **return** n

Pour calculer la valeur absolue d'un nombre n, si celui-ci est négatif, il faut le multiplier par -1 pour avoir sa valeur absolue. C'est précisément ce qu'on fait des lignes 1 à 2. par contre, dans l'autre cas (le nombre est positif), il n'y a rien à faire. Pour exprimer une condition, on utilise donc le mot **if** suivi d'un condition et du mot **then**. Vient ensuite tout ce qu'il faut faire si la condition est satisfaite.