Bài 5
Giới thiệu thống kê Bayes và Markov chain Monte Carlo

Thống kê máy tính và ứng dụng
(Computational Statistics and Applications)

Vũ Quốc Hoàng (vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)

FIT - HCMUS

2025

Nội dung

1. Công thức Bayes
2. Suy diễn Bayes
3. Mô hình nhị thức
4. “Tính” phân phối hậu nghiệm
5. Markov chain Monte Carlo

Nội dung

Công thức Bayes

Trên không gian mẫu Ω, các biến cố $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ được gọi là một họ đầy đủ nếu

- $E_i \cap E_j = \varnothing$ khi $i \neq j$ (mutually exclusive, loại trừ, "không trùng"),
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (exhaust all possibilities, đầy đủ, "không sót").

Công thức Bayes (Bayes' rule)

$$\underbrace{P(E_i|D)}_{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(D|E_i)}^{\text{likelihood}}\overbrace{P(E_i)}^{\text{prior}}}{\underbrace{P(D)}_{\text{evidence}}} = \frac{P(D|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(D|E_j)P(E_j)} \propto P(D|E_i)P(E_i).$$

Công thức Bayes hướng dẫn cách "cập nhật xác suất" hay "phân bổ lại niềm tin" (reallocation of **credibility**).

Công thức Bayes - Ví dụ

Giả sử bạn đi xét nghiệm một bệnh nan y và được kết quả là *dương tính* (positive). Biết rằng

- *Độ nhạy* (sensitive) của xét nghiệm là 90%: trong 100 người bị bệnh thì khoảng 90 người dương tính.
- *Độ đặc hiệu* (specificity) của xét nghiệm là 95%: trong 100 người không bệnh thì khoảng 95 người âm tính.
- *Độ phổ biến* (prevalence) của bệnh là 1/10000: trong 10000 người thì có khoảng 1 người bị bệnh.

1. Bạn nên chuẩn bị "hậu sự" không?
2. Giả sử, để chắc ăn, bạn xét nghiệm một lần nữa và vẫn ra dương tính! Bạn nên chuẩn bị hậu sự chưa?
3. Ta có nên xét nghiệm không? Ý nghĩa "thật sự" của việc xét nghiệm là gì?

Trả lời: xem Jupyter Notebook đi kèm.

Nội dung

Suy diễn Bayes

Dữ liệu (data) được sinh ra từ **mô hình xác suất** (probabilistic model). Mô hình được xác định bởi các **tham số** (parameter). Từ các dữ liệu quan sát, **suy diễn** (inference) về mô hình qua tham số. **Suy diễn Bayes** (Bayesian inference)

1. Xác định dữ liệu, mô hình và hàm hợp lý của tham số,
2. "Chọn" phân phối tiên nghiệm phù hợp cho tham số,
3. "Tính" phân phối hậu nghiệm của tham số theo công thức Bayes

$$\underbrace{p(\theta|D)}_{\text{posterior}} = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)} = \frac{\overbrace{L(\theta|D)}^{\text{likelihood}}\ \overbrace{p(\theta)}^{\text{prior}}}{\underbrace{p(D)}_{\text{evidence}}} \propto L(\theta|D)p(\theta),$$

4. Kiểm tra phân phối hậu nghiệm có sinh dữ liệu phù hợp ("posterior predictive check"). Nếu không, thử mô hình và/hoặc dữ liệu khác,
5. "Dùng" phân phối hậu nghiệm để đưa ra các kết luận.

Suy diễn Bayes - Ví dụ

Bài toán. Một nhà máy sản xuất bóng với 4 loại kích thước 1, 2, 3, 4. Đặt 3 quả bóng loại kích thước 2. Nhận được 3 quả bóng với các kích thước: 1.77, 2.23, 2.70. Hỏi nhà máy có sản xuất đúng loại đã đặt?

Suy diễn. Ta mô hình kích thước bóng là biến ngẫu nhiên $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với tham số μ có thể nhận một trong 4 giá trị

$$\begin{cases} E_1 : \mu = \mu_1 = 1.0, \\ E_2 : \mu = \mu_2 = 2.0, \\ E_3 : \mu = \mu_3 = 3.0, \\ E_4 : \mu = \mu_4 = 4.0. \end{cases}$$

Ta có

$$p(X = x|E_i) = f_{\mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_i)^2}{2\sigma^2}}, i = 1, ..., 4.$$

Suy diễn Bayes - Ví dụ (tt)

Ta nhận được X_1, X_2, X_3 độc lập và cùng phân phối với X. Cụ thể, ta có dữ liệu

$$D = (X_1 = 1.77) \cap (X_2 = 2.23) \cap (X_3 = 2.70).$$

Hàm hợp lý của tham số μ trên dữ liệu D theo mô hình đã chọn là

$$\begin{aligned}
L(\mu_i|D) &= p(D|E_i) = p\left((X_1 = 1.77) \cap (X_2 = 2.23) \cap (X_3 = 2.70)|E_i\right) \\
&= p(X_1 = 1.77|E_i)p(X_2 = 2.23|E_i)p(X_3 = 2.70|E_i) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{\frac{-\left((1.77-\mu_i)^2+(2.23-\mu_i)^2+(2.70-\mu_i)^2\right)}{2\sigma^2}} \\
&\propto e^{\frac{-\left((1.77-\mu_i)^2+(2.23-\mu_i)^2+(2.70-\mu_i)^2\right)}{2\sigma^2}}, i = 1, ..., 4.
\end{aligned}$$

"Giả sử" phân phối tiên nghiệm là

$$p(E_i) = \frac{1}{4} \propto 1, i = 1, ..., 4.$$

Suy diễn Bayes - Ví dụ (tt)

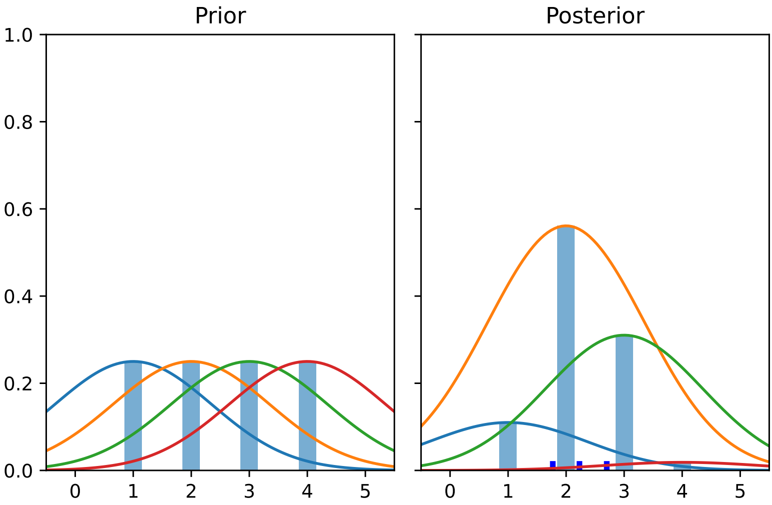
Ta tính phân phối hậu nghiệm theo công thức Bayes

$$p(E_i|D) = \frac{p(D|E_i)p(E_i)}{\sum_{j=1}^{4} p(E_j|D)p(E_j)} = \frac{e^{\frac{-\left((1.77-\mu_i)^2+(2.23-\mu_i)^2+(2.70-\mu_i)^2\right)}{2\sigma^2}}}{\sum_{j=1}^{4} e^{\frac{-\left((1.77-\mu_j)^2+(2.23-\mu_j)^2+(2.70-\mu_j)^2\right)}{2\sigma^2}}}.$$

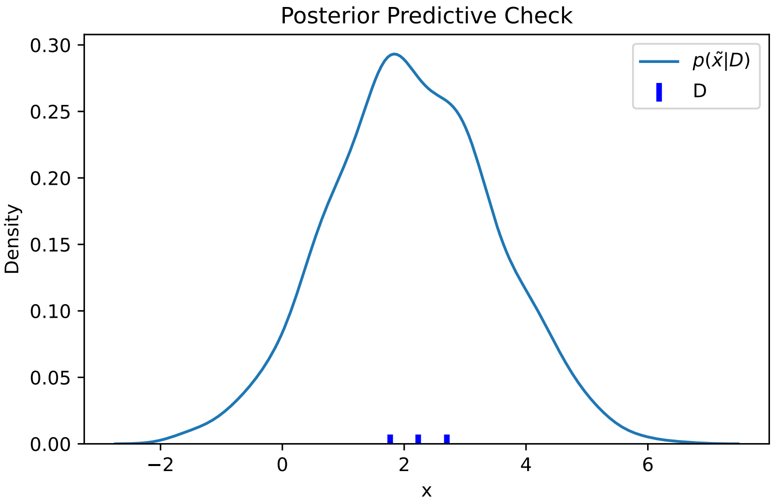
Với một số giá trị của σ^2, tính toán ta có

	$\sigma^2 = 1$	$\sigma^2 = 1.35$	$\sigma^2 = 2$
$P(\mu = 1\|D)$	7%	11%	16%
$P(\mu = 2\|D)$	64%	56%	47%
$P(\mu = 3\|D)$	29%	31%	32%
$P(\mu = 4\|D)$	1%	2%	5%

Suy diễn Bayes - Ví dụ (tt)



Suy diễn Bayes - Ví dụ (tt)



Nội dung

Mô hình nhị thức

Biến ngẫu nhiên rời rạc Y được gọi là kết quả của một **phép thử Bernoulli** (Bernoulli trial) hay có **phân phối Bernoulli** (Bernoulli distribution) với tham số p $(0 \leq p \leq 1)$, kí hiệu $Y \sim \text{Bernoulli}(p)$, nếu

$$\begin{cases} P(Y = 1) = p, \\ P(Y = 0) = 1 - p. \end{cases}$$

$(Y = 1)$ thường được gọi là **"thành công"** (success), $(Y = 0)$ là **"thất bại"** (failure), p là xác suất thành công.

Dãy biến ngẫu nhiên $Y_1, Y_2, \ldots$ được gọi là một dãy phép thử Bernoulli hay một **quá trình Bernoulli** (Bernoulli process) nếu $Y_1, Y_2, \ldots$ độc lập và cùng phân phối $\text{Bernoulli}(p)$.

Mô hình nhị thức (tt)

Bài toán. Cho dữ liệu của dãy phép thử Bernoulli $D = \{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, ..., Y_n = y_n\}$, "tìm" p.

Suy diễn. Xem tham số $\theta = p$ là biến ngẫu nhiên liên tục, nhận giá trị trong $[0, 1]$. Với $Y \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ có giá trị quan sát $y \in \{0, 1\}$, hàm hợp lý của θ theo y là

$$p(y|\theta) = \theta^y(1-\theta)^{1-y} = \begin{cases} \theta & y = 1, \\ 1-\theta & y = 0. \end{cases}$$

Do đó, với dữ liệu $D = \{y_i\}_{i=1}^n$, hàm hợp lý của θ theo D là

$$p(D|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{y_i}(1-\theta)^{1-y_i} = \theta^{\sum_{i=1}^n y_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n (1-y_i)} = \theta^z(1-\theta)^{n-z},$$

với $z = \sum_{i=1}^n y_i$ (số lần thành công trong n lần quan sát của D).

Mô hình nhị thức (tt)

"Chọn" phân phối tiên nghiệm cho θ là **phân phối Beta** (Beta distribution) với tham số a, b $(a > 0, b > 0), \theta \sim \text{Beta}(a, b)$, ta có

$$p(\theta; a, b) \propto \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}, 0 \leq \theta \leq 1.$$

Từ công thức Bayes, θ có phân phối hậu nghiệm sau khi quan sát dữ liệu D là

$$\begin{aligned} p(\theta|D) &\propto p(D|\theta)p(\theta; a, b) \\ &\propto \theta^{z}(1-\theta)^{n-z}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \propto \theta^{z+a-1}(1-\theta)^{n-z+b-1}. \end{aligned}$$

Nhận xét, $(\theta|D) \sim \text{Beta}(a + z, b + n - z)$.

Phân phối Beta được gọi là **phân phối tiên nghiệm liên hợp** (conjugate prior distribution) của phân phối Bernoulli.

Mô hình nhị thức (tt)

Lưu ý, các **"siêu tham số"** (hyperparameter) a, b của phân phối tiên nghiệm và $\kappa = a + b$ thường được gọi là **pseudo-count** vì

- Trước khi quan sát dữ liệu D, $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$, ta tin vào xác suất thành công θ như thể ta đã thấy a lần thành công và b lần thất bại (trong tổng số $\kappa = a + b$ lần),
- Dữ liệu D cho thấy z lần thành công và $n - z$ lần thất bại (trong tổng số n lần),
- Sau khi quan sát dữ liệu D, $(\theta | D) \sim \text{Beta}(a + z, b + n - z)$, ta tin vào xác suất thành công như thể ta đã thấy $a + z$ lần thành công và $b + n - z$ lần thất bại (trong tổng số $\kappa + n$ lần).

Mô hình nhị thức (tt)

Như vậy, có thể nói phân phối hậu nghiệm là "tổng hợp" hay "thỏa hiệp" giữa phân phối tiên nghiệm và hàm hợp lý trên dữ liệu. Chẳng hạn

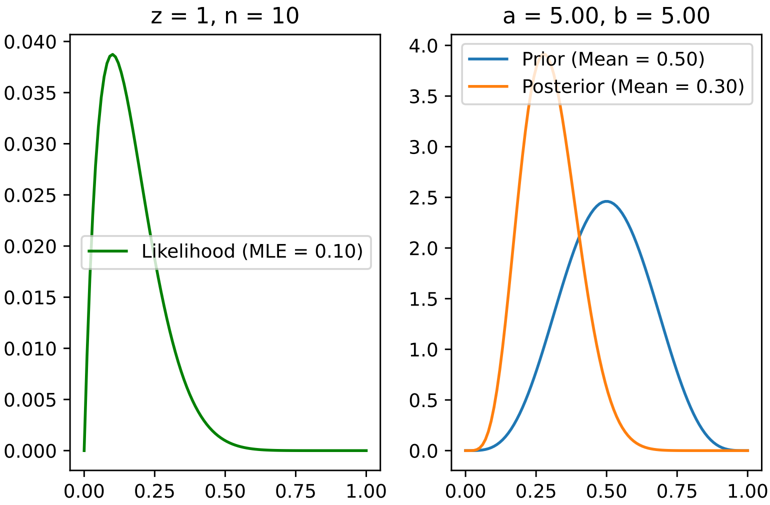
- Phân phối tiên nghiệm $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$ có kỳ vọng
$$E(\theta) = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{\kappa},$$
- Hàm hợp lý từ dữ liệu $L(\theta|D) = p(D|\theta) = \theta^z(1-\theta)^{n-z}$ đạt cực đại tại
$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \frac{z}{n},$$
- Phân phối hậu nghiệm $(\theta|D) \sim \text{Beta}(a+z, b+n-z)$ có kỳ vọng

$$\begin{aligned} E(\theta|D) &= \frac{a+z}{a+z+b+n-z} = \frac{a+z}{\kappa+n} = \frac{\kappa}{\kappa+n}\frac{a}{\kappa} + \frac{n}{\kappa+n}\frac{z}{n} \\ &= \frac{\kappa}{\kappa+n}E(\theta) + \frac{n}{\kappa+n}\hat{\theta}_{\text{MLE}}. \end{aligned}$$

Mô hình nhị thức - Ví dụ

- Dữ liệu: $z = 1, n = 10$ (quan sát thấy 1 lần thành công trong 10 lần), hàm hợp lý
$$p(D|\theta) = \theta^z (1-\theta)^{n-z} = \theta^1 (1-\theta)^9$$
đạt cực đại tại $\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \frac{z}{n} = \frac{1}{10} = 0.1$
- Phân phối tiên nghiệm: $a = 5, b = 5, \kappa = a + b = 10$ (như thể quan sát thấy 5 lần thành công trong 10 lần),
$\theta \sim \text{Beta}(a, b) = \text{Beta}(5, 5)$ có $E(\theta) = \frac{a}{\kappa} = \frac{5}{10} = 0.5$.
- Phân phối hậu nghiệm: $a + z = 6, \kappa + n = 20$ (như thể quan sát thấy 6 lần thành công trong 20 lần),
$(\theta|D) \sim \text{Beta}(a + z, b + n - z) = \text{Beta}(6, 14)$ có
$$\begin{aligned} E(\theta|D) &= \frac{a+z}{\kappa+n} = \frac{6}{20} = 0.3 \\ &= \frac{\kappa}{\kappa+n} E(\theta) + \frac{n}{\kappa+n} \hat{\theta}_{\text{MLE}} = 0.5E(\theta) + 0.5\hat{\theta}_{\text{MLE}}. \end{aligned}$$

Mô hình nhị thức - Ví dụ (tt)



Nội dung

“Tính” phân phối hậu nghiệm

Các cách “tính” phân phối hậu nghiệm

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)}.$$

- Chọn $p(\theta)$ là phân phối **tiên nghiệm liên hợp** (conjugate prior) cho hàm hợp lý $p(D|\theta)$ để phân phối hậu nghiệm $p(\theta|D)$ có dạng như phân phối tiên nghiệm.
- “Rời rạc hóa” hay **“xấp xỉ lưới”** (grid approximation) θ

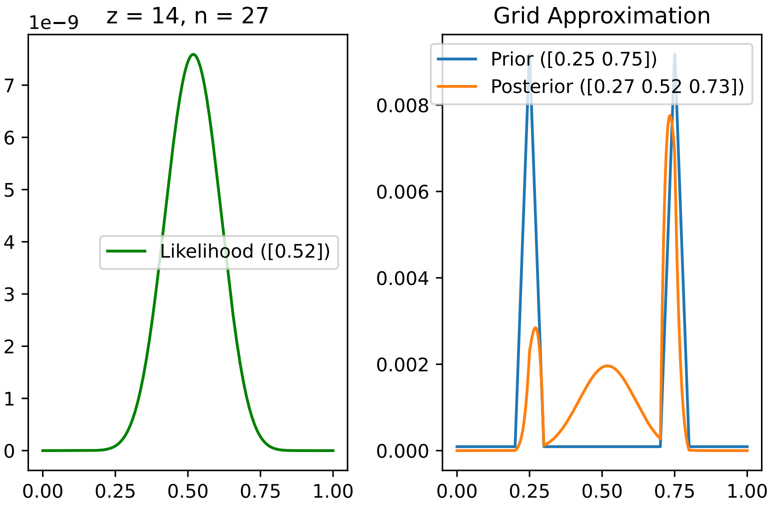
$$p(D) = \sum_{\theta*} p(D|\theta^*)p(\theta^*).$$

- Dùng các phương pháp **lấy mẫu ngẫu nhiên** (randomly sampling), tức là các phương pháp sinh số ngẫu nhiên, đặc biệt là các phương pháp **Markov chain Monte Carlo** (MCMC) để sinh các giá trị θ từ phân phối $p(\theta|D)$ với số lượng đủ nhiều.
- (và các cách khác)

Phân phối tiên nghiệm liên hợp

- `https://en.wikipedia.org/wiki/Conjugate_prior`.
- *Ví dụ:* trong mô hình nhị thức, khi hàm hợp lý dùng phân phối Bernoulli (hay phân phối nhị thức, nhị thức âm), phân phối tiên nghiệm cho tham số $\theta = p$ (xác suất thành công) được chọn là phân phối Beta để phân phối hậu nghiệm cũng là phân phối Beta.

"Xấp xỉ lưới" - Ví dụ



Lấy mẫu loại bỏ - Ví dụ

Xét bài toán suy diễn Bayes sau: cho $X \sim \text{Exp}(1)$, dùng quan sát y từ $Y \sim \mathcal{N}(0, X)$, tìm phân phối hậu nghiệm $(X|Y = y)$.

Trước hết, phân phối tiên nghiệm của X, $X \sim \text{Exp}(1)$, có hàm mật độ

$$p(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x).$$

Hàm hợp lý của X khi biết $Y \sim \mathcal{N}(0, X)$ nhận giá trị y là

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-y^2/(2x)}.$$

Từ đó, dùng công thức Bayes, phân phối hậu nghiệm $(X|Y = y)$ có hàm mật độ

$$p(x|y) \propto p(y|x)p(x)$$

Lấy mẫu loại bỏ - Ví dụ (tt)

Đặt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-y^2/(2x) - x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \propto p(y|x)p(x) \propto p(x|y),$$

ta có thể dùng phương pháp lấy mẫu loại bỏ để sinh mẫu từ phân phối hậu nghiệm $(X|Y = y)$. Lưu ý, phương pháp lấy mẫu loại bỏ không cần f phải được chuẩn hóa.

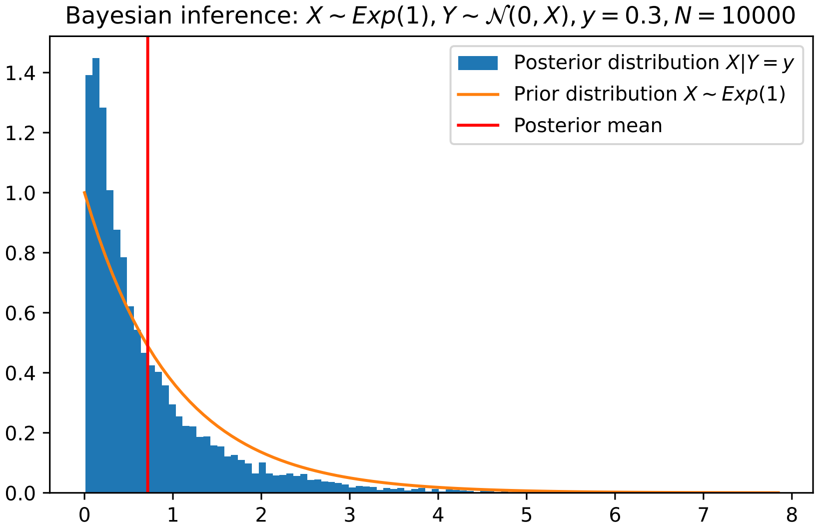
Cụ thể, dùng thuật toán lấy mẫu loại bỏ theo khuôn với phân phối đề cử là Exp(1) và hằng số

$$c = \frac{1}{|y|} e^{-1/2},$$

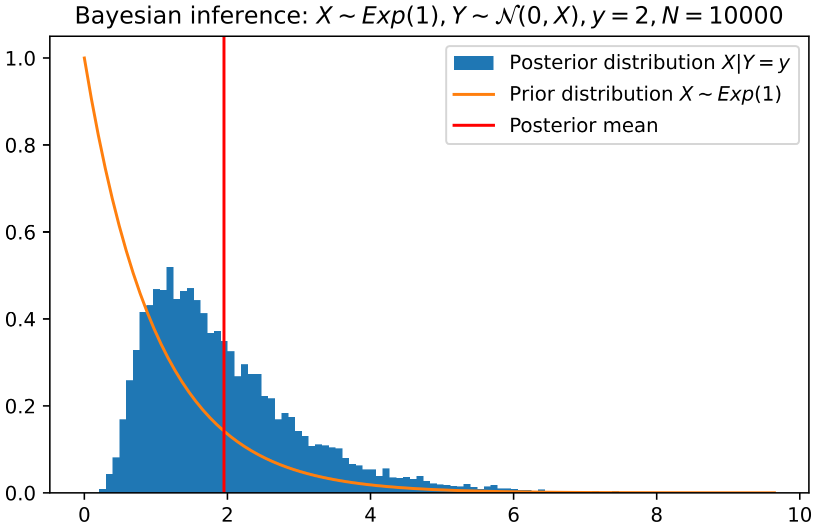
ta sinh mẫu $X_1, ..., X_N$ iid theo phân phối hậu nghiệm $(X|Y = y)$, vẽ histogram và tính

$$E(X|Y = y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j = \bar{X}, \quad Var(X|Y = y) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} \left(X_j - \bar{X}\right)^2.$$

Lấy mẫu loại bỏ - Ví dụ (tt)



Lấy mẫu loại bỏ - Ví dụ (tt)



Nội dung

Markov chain Monte Carlo

- Giả sử ta tính được phân phối tiên nghiệm $p(\theta)$ và hàm hợp lý $p(D|\theta)$ "đến một hệ số", tức là tính được

$$f(\theta) \propto p(\theta)p(D|\theta) \propto p(\theta|D).$$

  Ta có thể dùng các phương pháp lấy mẫu ngẫu nhiên để sinh các giá trị đại diện cho phân phối hậu nghiệm $p(\theta|D)$.
- Các phương pháp sinh số ngẫu nhiên đã học (như lấy mẫu loại bỏ) sinh dãy $\theta_1, \theta_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \frac{1}{Z_f} f(\theta)$ với Z_f là hằng số chuẩn hóa. Trong nhiều trường hợp (như khi $\theta \in \mathbb{R}^d$ với d lớn), các phương pháp này thường kém hiệu quả.
- Các phương pháp **Markov Chain Monte Carlo** (MCMC) sinh **xích Markov** (Markov chain) $\theta_1, \theta_2, \ldots$ có **phân phối dừng** (stationary distribution) là $\frac{1}{Z_f} f(\theta)$, thường đơn giản và hiệu quả hơn.

Thuật toán Metropolis-Hastings

Thuật toán MH. (Metropolis-Hastings method)
Input:

- hàm f với giá trị trong khoảng $[0, \infty)$ (non-normalised target density),
- hàm mật độ xác suất chuyển $g(x'|x)$ (proposal density),
- X_0 với $f(X_0) > 0$.

Output: xích Markov $X_1, X_2, \ldots$ có phân phối dừng là $\frac{1}{Z_f} f(x)$. Đặt

$$\alpha(x'|x) = \min\left(1, \frac{f(x')g(x|x')}{f(x)g(x'|x)}\right).$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
    sinh $X' \sim g(.|X_{n-1})$ #sinh đề cử
    if $\mathcal{U}(0,1) \le \alpha(X'|X_{n-1})$ **then**
        $X_n \leftarrow X'$ #X' được chấp nhận với xác suất $\alpha(X'|X_{n-1})$
    else
        $X_n \leftarrow X_{n-1}$
end

Metropolis-Hastings - Ví dụ

Giả sử ta cần lấy mẫu cho hàm mật độ chưa chuẩn hóa $f(x) = 2^{-|x|}\mathbb{I}_{\mathbb{Z}}(x)$. Lưu ý, $Z_f = \sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x) = (1 + 2\sum_{x=1}^{\infty} 2^{-x}) = 3$, nhưng ta không cần tính Z_f.

Sử dụng thuật toán MH, ta dễ dàng sinh xích Markov có phân phối dừng là $\frac{1}{Z_f} f(x)$. Chẳng hạn, dùng hàm xác suất đề cử

$$g(X' = x+1|X = x) = g(X' = x-1|X = x) = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{Z},$$

ta có hàm xác suất chấp nhận là

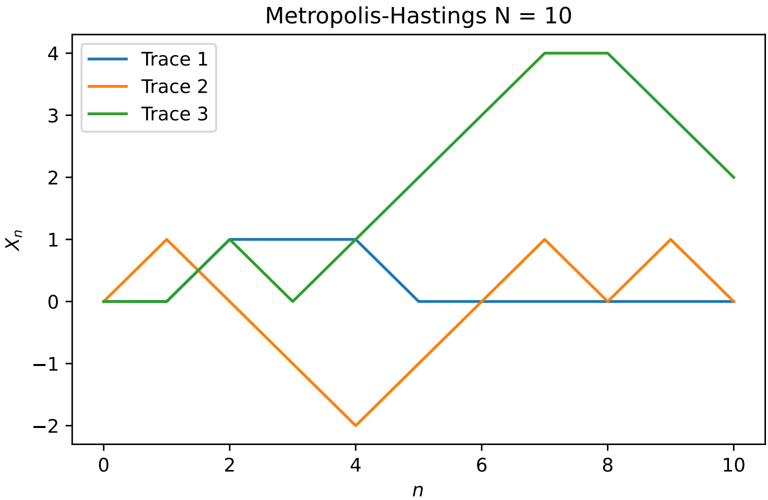
$$\alpha(x'|x) = \min\left(1, \frac{f(x')g(x|x')}{f(x)g(x'|x)}\right) = \min\left(1, \frac{2^{-|x'|}g(x|x')}{2^{-|x|}g(x'|x)}\right)$$
$$= \begin{cases} 2^{|x|-|x'|} & |x'| > |x| \\ 1 & \text{khác} \end{cases}.$$

Metropolis-Hastings - Ví dụ (tt)

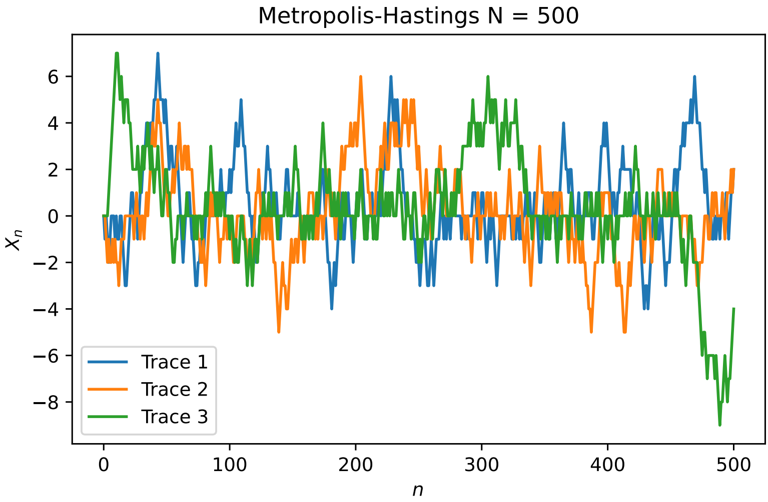
Dùng hàm xác suất đề cử ở trên, chọn $X_0 = 0$, ta có thuật toán MH sinh xích Markov có phân phối dừng là hàm mật độ chưa chuẩn hóa $f(x) = 2^{-|x|}\mathbb{I}_{\mathbb{Z}}(x)$.

1: **for** $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
2: sinh $\epsilon \sim \mathcal{U}\{-1, 1\}$
3: $X' \leftarrow X_{n-1} + \epsilon$
4: sinh $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$
5: **if** $U \leq 2^{|X_{n-1}|-|X'|}$ **then**
6: $X_n \leftarrow X'$
7: **else**
8: $X_n \leftarrow X_{n-1}$
9: **end**

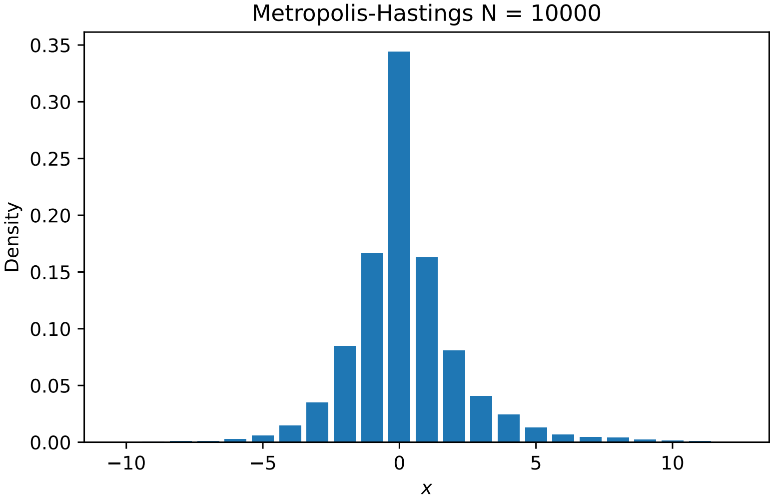
Metropolis-Hastings - Ví dụ (tt)



Metropolis-Hastings - Ví dụ (tt)



Metropolis-Hastings - Ví dụ (tt)



Thuật toán Metropolis

Trường hợp hàm mật độ xác suất đề cử đối xứng

$$g(x'|x) = g(x|x'), \forall x, x'$$

ta có hàm xác suất chấp nhận là

$$\alpha(x'|x) = \min\left(1, \frac{f(x')g(x|x')}{f(x)g(x'|x)}\right) = \min\left(1, \frac{f(x')}{f(x)}\right).$$

Khi đó, thuật toán Metropolis-Hastings được gọi là **thuật toán Metropolis**. Đặc biệt, khi đề cử có dạng

$$X' = X_{n-1} + \epsilon$$

với ϵ có phân phối đối xứng (tức là ϵ có cùng phân phối như $-\epsilon$) thì thuật toán được gọi là **bước ngẫu nhiên Metropolis** (random walk Metropolis).

Bước ngẫu nhiên Metropolis - Ví dụ

Trong trường hợp rời rạc, như Ví dụ trước, "độ dời" hay "bước" ϵ thường được dùng là $\mathcal{U}\{-1, 1\}$, tức là

$$P(\epsilon = -1) = P(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}.$$

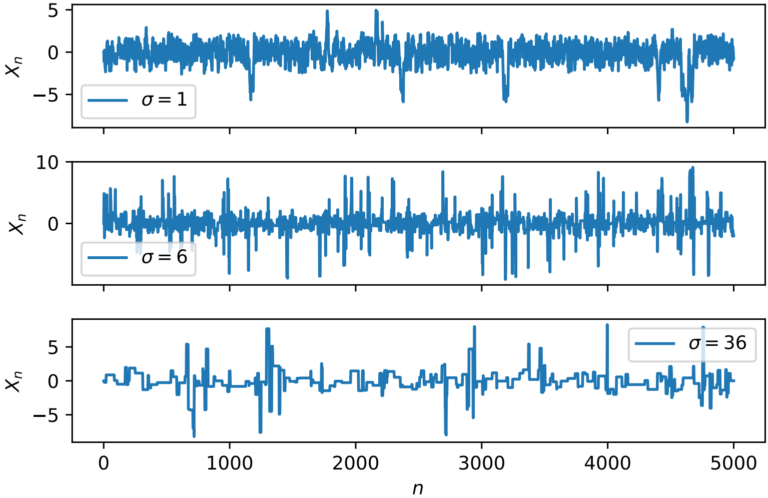
Trong trường hợp liên tục, độ dời thường được dùng là $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Trong đó σ^2 phải được chọn phù hợp để việc lấy mẫu hiệu quả.

Ví dụ: dùng thuật toán bước ngẫu nhiên Metropolis lấy mẫu từ phân phối có hàm mật độ

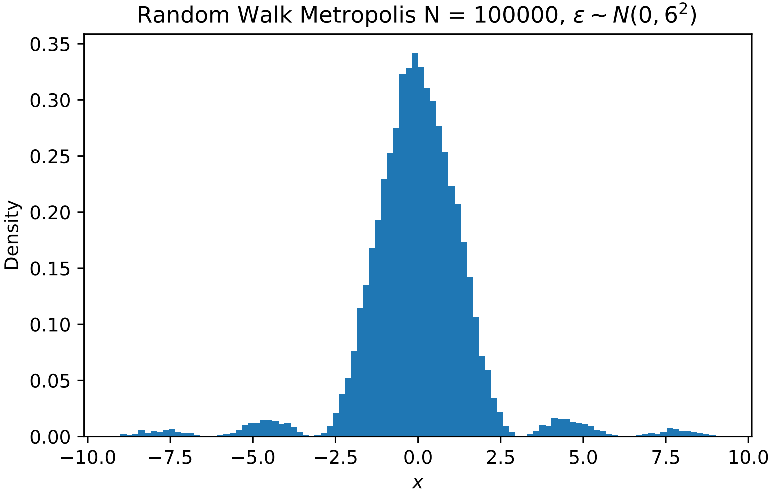
$$f(x) \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathbb{I}_{[-3\pi, 3\pi]}(x)$$

với độ dời $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Bước ngẫu nhiên Metropolis - Ví dụ (tt)



Bước ngẫu nhiên Metropolis - Ví dụ (tt)



Lấy mẫu Gibbs

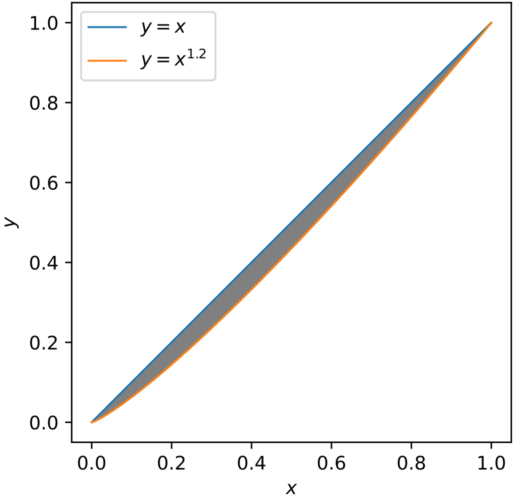
Thuật toán Gibbs. (Gibbs sampling)
Input:

- phân phối $f_{X_1,X_2,...,X_d}$,
- $X^{(0)} = \left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, ..., X_d^{(0)}\right)$.

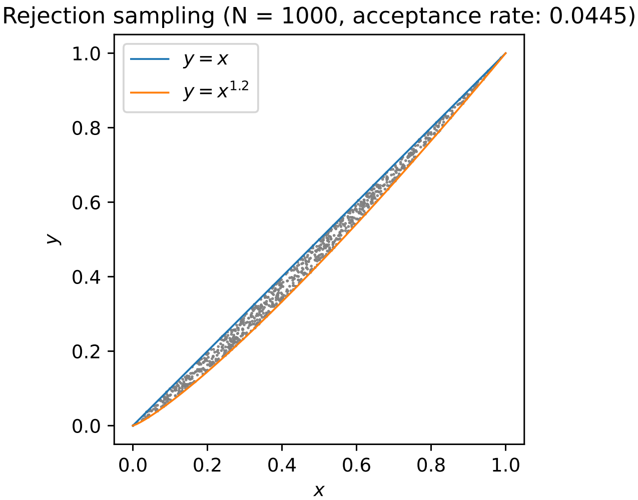
Output: xích Markov $X^{(1)}, X^{(2)}, ...$ có phân phối dừng là f.

1: **for** $n = 1, 2, 3, ...$ **do**
2:     **for** $i = 1, 2, ..., d$ **do**
3:         sinh $X_i^{(n)} \sim f_{X_i|\neg X_i}\left(.\middle|X_1^{(n)}, ..., X_{i-1}^{(n)}, X_{i+1}^{(n-1)}, ..., X_d^{(n-1)}\right)$
4:     **end for**
5: **end for**

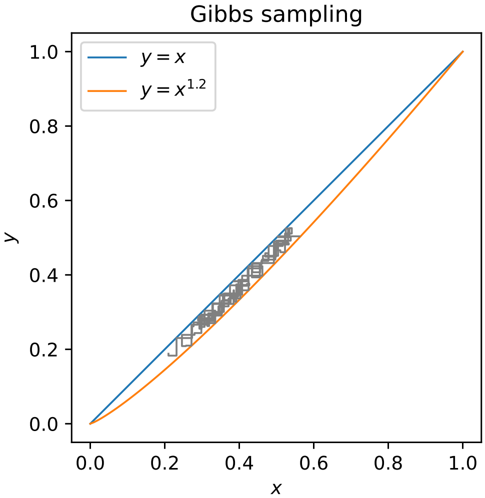
Lấy mẫu Gibbs - Ví dụ



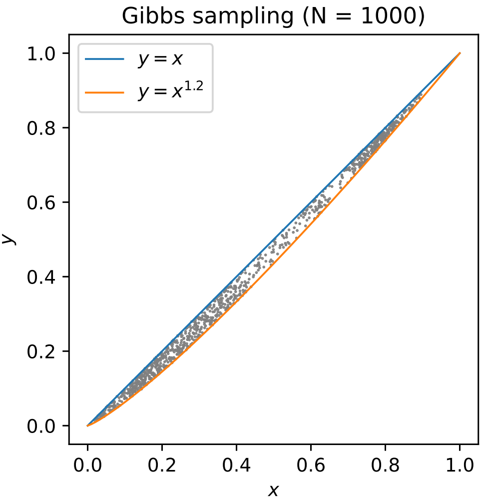
Lấy mẫu Gibbs - Ví dụ (tt)



Lấy mẫu Gibbs - Ví dụ (tt)



Lấy mẫu Gibbs - Ví dụ (tt)



Tài liệu tham khảo

Jupyter Notebook đi kèm.

Chapter 2, 5, 6, 7 John K. Kruschke. *Doing Bayesian Data Analysis – A Tutorial with R, JAGS, and Stan*. Elsevier, 2015.

Chapter 12. Sheldon M. Ross. *Simulation*. Elsevier, 2023.

Chapter 4. Jochen Voss. *An Introduction to Statistical Computing - A Simulation-based Approach*. John Wiley & Sons, 2014.