線性聯立方程組

至少一解 $(0,0,0)$
不可能無解

$\xleftarrow[\text{homogeneous}]{a=c=0}$

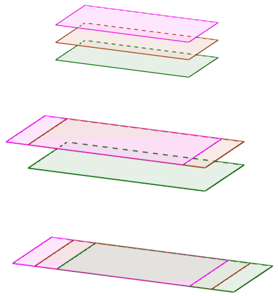
三法向量皆不平行

$$\begin{cases} x+ & y+ & z & =0 \\ x+ & 2y+ & 0 & =a \\ 2x+ & 3y+ & bz & =c \end{cases}$$

空間
→ 面
→ 線
→ 點

限制 ∼ 方程式 $\xrightarrow{\text{式} < \text{變數}}$ 不會恰有一解
自由 ∼ 變數 $\xrightarrow{\text{式} > \text{變數}}$ 化簡後再判斷

三法向量皆平行



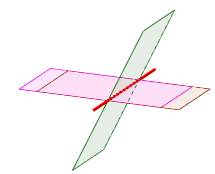
增廣矩陣 ↓ 位置表示符號

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 3 & b & c \end{array}\right]$$

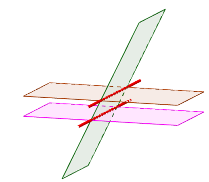
$\xrightarrow[r_3-r_1]{b=1}$ 恰兩法向量平行

$$\begin{cases} x+y+z & =0 \\ x+2y & =a \\ x+2y & =c \end{cases}$$

$\xrightarrow{c=a}$ 無限多解



$\xrightarrow{c\neq a}$ 無解



高斯消去法
列運算解不變 ↓ 化繁為簡
以簡馭繁

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b-2 & c \end{array}\right]$$

$\xleftarrow[a=c=2]{b=3}$

$$\begin{array}{c} \\ \text{-1} \\ \text{-1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

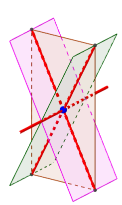
$\downarrow r_3/2$

$$\begin{array}{c} \\ \text{-2} \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

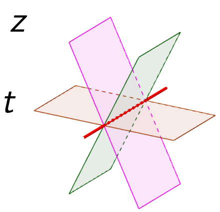
$\xrightarrow[a,c\text{ 任意}]{b\neq 1}$ 恰有一解



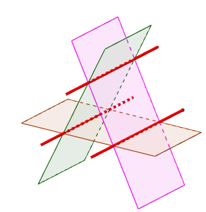
$\xrightarrow[c=a]{b=1}$ 無限多解

$$\begin{cases} x+y & =-z \\ y & =a+z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & =-a-2t \\ y & =a+t \\ z & =t \end{cases}$$



$\xrightarrow[c\neq a]{b=1}$ 無解



行空間與列空間的關係

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{高斯消去法解不變}]{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 12 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

行空間, dim:3,

$\dim(\text{Col}(A)) + \text{nullity}(A) =$ **變數個數**

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{解不變, 相依關係不變}]{\text{行空間會改變}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

行空間, dim:3,

$\dim(\text{Col}(A')) + \text{nullity}(A') =$ **變數個數**

$\dim(\text{Row}(A)) = \text{Rank}(A) = \dim(\text{Col}(A))$

解空間, nullity :2

Echelon Form 的解空間, nullity :2

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \xleftarrow[\text{列運算解不變}]{\text{解空間相同}} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 = & -3x_3 & -7x_4 \\ x_2 = & -x_3 & -3x_4 \\ x_3 = & x_3 & \\ x_4 = & & x_4 \\ x_5 = & 0 & \end{cases}$$

列空間, rank: 3

$[1, -2, 1, 1, 2]^T$,
$[-1, 3, 0, 2, -2]^T$,
$[0, 1, 1, 3, 4]^T$,
$[1, 0, 5, 13, 5]^T$.

$\text{Rank}(A) + \text{nullity}(A) =$ **變數個數**

$\xleftarrow[\text{列運算解不變}]{\text{列空間相同}}$

Echelon Form 的列空間, rank:3

$[1, 0, 3, 7, 0]^T$,
$[0, 1, 1, 3, 0]^T$,
$[0, 0, 0, 0, 1]^T$,
$[0, 0, 0, 0, 0]^T$.

$\text{Rank}(A') + \text{nullity}(A') =$ **變數個數**

(A) 解的判斷

- 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 設 a, b, c 為實數，試討論下列線性方程組解的情況？

$$\begin{cases} x + 2y + az &= 1 \\ 3x + 4y + bz &= -1 \\ 2x + 10y + 7z &= c \end{cases}$$

(B) 平面的相交情況：

- 假設坐標空間中三相異平面 E_1, E_2, E_3 皆通過 $(-1, 2, 0)$ 與 $(3, 0, 2)$ 兩點，試問哪些點也同時在此三平面上？
- 設 a, b, c, d, e 為實數。已知一次方程組

$$\begin{cases} ax + 3y + 5z &= b \\ y + cz &= 0 \\ 2y + dz &= e \end{cases}$$

的解的圖形是坐標空間中包含 x 軸的一個平面，則 a, b, c 為何？

(C) 解方程

- 試解 $\begin{cases} x + 3y + 5z &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + y + 3z &= 1 \end{cases}$
- 對矩陣 $\begin{pmatrix} 4 & 9 & a \\ 3 & 7 & b \end{pmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，則 $(a, b) = ?$

(D) 方程組個數與解個數

- 「是非題」若方程式的個數比變數少，且常數項為 0 ，則必無限多解。
- 為何線性聯立方程組不會恰有兩解？
- 「舉例」方程組比變數多，但恰有一解。
- 在一次測驗中有一道解聯立方程式的問題如下：$\begin{cases} x - y &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x - z &= 0 \end{cases}$ 某生將方程組中的某一個負號看成正號，而後完全沒有發生任何計算錯誤。試問此生可能得到的結果為： (1) 無解 (2) 恰有一組解 (3) 有無限多組解 (4) 與原方程組有相同的解。

(A)

- 什麼是 row-echelon form？
- 化成 row-Echelon 有何好處？
- 任何矩陣都可以化為 row-echelon form 嗎？
- 「是非」$n \times m$ 的矩陣 $(n > m)$，其 row-echelon form 中有 $n - m$ 列為 0。

(B)

- 「舉例」列運算後，行空間不相同的例子。
- 尋找下列矩陣所對應的列空間 (row space)、行空間 (column space)、解空間 (null space) 的基底。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(C)

- 尋找下列矩陣所對應的列空間 (row space)、行空間 (column space)、解空間 (null space) 的基底。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- 「是非」若 D 為一個 6×5 的矩陣，且 $\dim(N(A)) = 2$，則 $\text{rank}(A) = 4$。

(D)

- 「是非」A, B 皆為方陣 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \geq \text{rank}(A + B)$
- D 為一個 $m \times n$ 的矩陣，$\text{nullity}(A) = \text{nullity}(A^T)$