$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a_n + b_n) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

倒水 ← 轉移矩陣 → 狀態 抽球

改變

細菌 ← 遞迴關係

轉移矩陣 → 移動

抽球 $\xrightarrow{\text{同時}}$

$$\begin{array}{c|cc} & BW, WW & WW, BW \\ \hline BW, WW & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ WW, BW & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

抽球 $\xrightarrow{\text{先後}}$

$$\begin{array}{c|cc} & BW, WW & WW, BW \\ \hline BW, WW & \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{3} & \frac{2}{2}\frac{1}{3} \\ WW, BW & \frac{1}{2}\frac{2}{3} & \frac{2}{2}\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

No one can be told what the Matrix is.
You have to see it for yourself.

操作 → 遞迴關係

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 + r_3 \\ r_2 + 2r_3 \end{bmatrix}$$

操作 → 左乘操作列

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

操作 → 右乘操作行

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & (c_1 + c_2) & (c_1 + 2c_2) \end{bmatrix}$$

矩陣 → 操作

矩陣 → 資料

$$\begin{array}{c} \\ 醫 \\ 資 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} 國 & 英 & 數 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 國 \\ 英 \\ 數 \end{array} \begin{bmatrix} 頂 & 前 & 均 & 後 & \cdots \\ 13 & 12 & 11 & 9 & \cdots \\ 14 & 12 & 10 & 6 & \cdots \\ 13 & 11 & 8 & 5 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 醫 \\ 資 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} 頂 & 前 & 均 & 後 & \cdots \\ 40 & 35 & 29 & 20 & \cdots \\ 40 & 34 & 26 & 16 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

資料 → 一目十行 → 行向量 線性組合

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

資料 → 列向量 解

$$\begin{cases} (1,1,1)(x,y,z) = 0 \\ (0,1,2)(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

→ 一解、無解、無限多解

矩陣 → 代數結構

代數結構 $\xrightarrow{\det(A) \neq 0}$ 反操作 回不去了? → 加密解密

反操作 → 一解、無解、無限多解

$$AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$$

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{adj}(A))^T$$

代數結構 → $AB \neq BA$

$$(A+B)(A-B) = A^2 + AB - BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

$$(A+I)(A-I) = A^2 - I^2$$

I 單位矩陣，$AI = IA = A$

$$AB \neq BA$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

代數結構 → $AB = O = AC, B \neq C$

$$AB = O = AC, B \neq C$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A) 矩陣的乘法

- 矩陣能簡化計算嗎？
- 矩陣的乘法是怎樣規定？乘法規定這樣有何好處？

(B) 行向量或列向量

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的行空間、列空間、解空間的維度為何？
- 以下方程的解為何？

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(C)

- $A \cdot B$, $B \cdot A$ 有何不同？

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

- 請計算

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

(D)

- 轉移矩陣為會趨於穩定你覺得直覺嗎？
- 用轉移矩陣來解釋政策與族群比有何看法？
- 請計算現在有兩桶球 A 兩白、B 兩黑，每次操作為同時取一球交換，試問長期而言，A 中一黑一白的機率為何？

(E)

- 請找個例子使得 $AB = O$, $BA \neq O$ 。
- 請找個例子使得 $A^2 = I$, $A \neq I, -I$。
- 請找個例子使得 $A^2 = A$, $A \neq I$。

(F)

- 已知 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix}$ 。試問 $\begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ 的反方陣?
- 二階方陣 A 滿足 $A\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$。若 $A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$，則 a, b, c, d 為何？

(G) 試求 λ 的值，使得有無限多解解 (x, y) 滿足下列方程：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$