Buinoschi Anda, MOC2 8.10.2020
Luncașu Bogdan, MOC2

Operations research
Homework 1.1

① Fie $O(x_0, y_0)$ centrul cercului de rază r și $\{A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \dots, A_n(x_n,y_n)\}$ mulțimea celor n puncte din enunț.

Problema de optimizare poate fi formulată astfel:

minimize r

s.t. $d(O, A_i) \le r, \ \forall\, i=\overline{1,n}$

and $O\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\right)$

③ Notăm cu $\delta_k = |I_k - I_k^*|$ diferența dintre iluminatul efectiv și cel optim al segmentului k, care poate duce la inegalitatea $-\delta_k \le I_k - I_k^* \le \delta_k$.

Problema se reduce la:

minimize $\sum_{k=1}^{n} \delta_k$

s.t. $I_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, p_j, \ \forall k,$

$-\delta_k \le I_k - I_k^*, \ \forall k \Leftrightarrow \delta_k \ge I_k^* - I_k, \ \forall k$

$I_k - I_k^* \le \delta_k, \ \forall k \Leftrightarrow \delta_k \ge I_k - I_k^*, \ \forall k$

$p_j \ge 0, \ j=\overline{1,m}, \ \delta_k \ge 0$

⑥(1) x_{ij} = nr de tone produse de P_i și distribuite către W_j, $\forall\, i \in \{1,2\}, j=\overline{1,3}$

(2) minimize $10\cdot x_{11} + 9\cdot x_{12} + 12\cdot x_{13} + 9\cdot x_{21} + 11\cdot x_{22} + 10\cdot x_{23}$

(3) s.t. $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 110,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 120,$

$x_{11} + x_{21} \ge 70,$

$x_{12} + x_{22} \ge 60,$

$x_{13} + x_{23} \ge 80,$

$x_{11} + x_{21} \le 85,$

$x_{12} + x_{22} \le 85,$

$x_{13} + x_{23} \le 85,$

$x_{ij} \ge 0, \ i \in \{1,2\}, \ j=\overline{1,3}$

b) Problema rămâne în mare măsură aceeași doar că sunt eliminate câteva dintre restricții. Restricțiile noii probleme sunt:

(3) $x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 110,$
$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 120,$
$x_{11}+x_{21}\ge 70,$
$x_{12}+x_{22}\ge 60,$
$x_{13}+x_{23}\ge 80,$
$x_{ij}\ge 0,\ i\in\{1,2\},\ j=\overline{1,3}$

⑦ (1) x_1 = nr de angajați care își încep tura de luni

x_2 = " ——— " marți

Analog pentru $x_3,\dots,x_7$ = nr de angajați care își încep tura de miercuri, joi, ..., duminică

a) (2) minimize $\sum_{i=1}^{7} x_i$

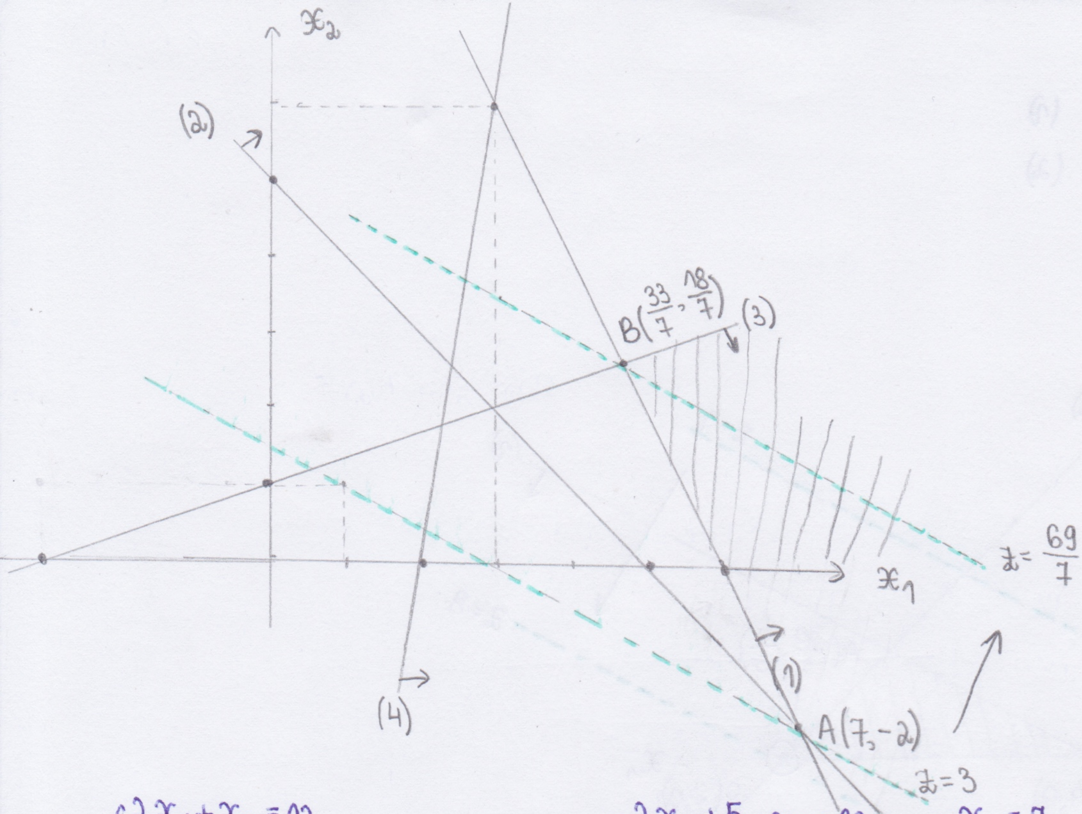
(3)
$$x_1 + x_4+x_5+x_6+x_7\ge 20,$$
$$x_1+x_2+x_5+x_6+x_7\ge 17,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_6+x_7\ge 19,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_7\ge 15,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\ge 22,$$
$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\ge 18,$$
$$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\ge 19,$$
$$x_i\ge 0,\ \forall\, i=\overline{1,7}$$

b) (2) minimize $x_1(150+140+140+130+150)+x_2(140+140+130+150+190)+x_3(140+130+150+190+210)+x_4(130+150+190+210+150)+x_5\cdot(150+190+210+150+140)+x_6(190+210+150+140+140)+x_7(210+150+140+140+130)$

$\Leftrightarrow$ minimize $710x_1+750x_2+820x_3+830x_4+840x_5+830x_6+770x_7$

Restricțiile rămân la fel ca la subpunctul a).

⑧
$$\begin{cases} \max\ z=x_1+2x_2 \\ \text{s.t. } 2x_1+x_2\ge 12\ (1) \\ x_1+x_2\ge 5\ (2) \\ -x_1+3x_2\le 3\ (3) \\ 6x_1-x_2\ge 12\ (4) \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5 - x_1 = 12 \\ x_2 = 5 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad A(7,-2)$$

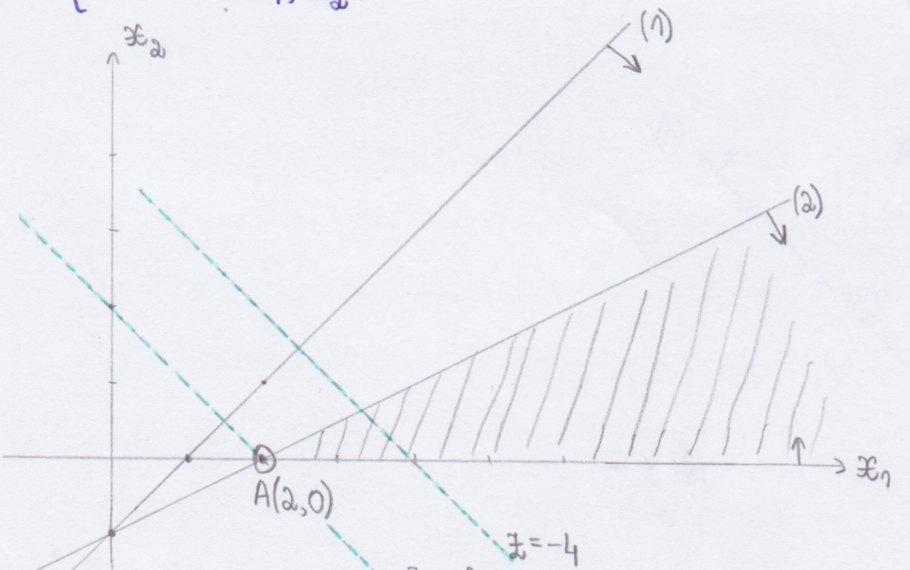
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3x_2 - 3) + x_2 = 12 \\ x_1 = 3x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_2 - 6 + x_2 = 12 \\ x_1 = 3x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{18}{7} \\ x_1 = \frac{33}{7} \end{cases}$$

Soluția problemei este $z = +\infty$.

$B\left(\frac{33}{7}, \frac{18}{7}\right)$

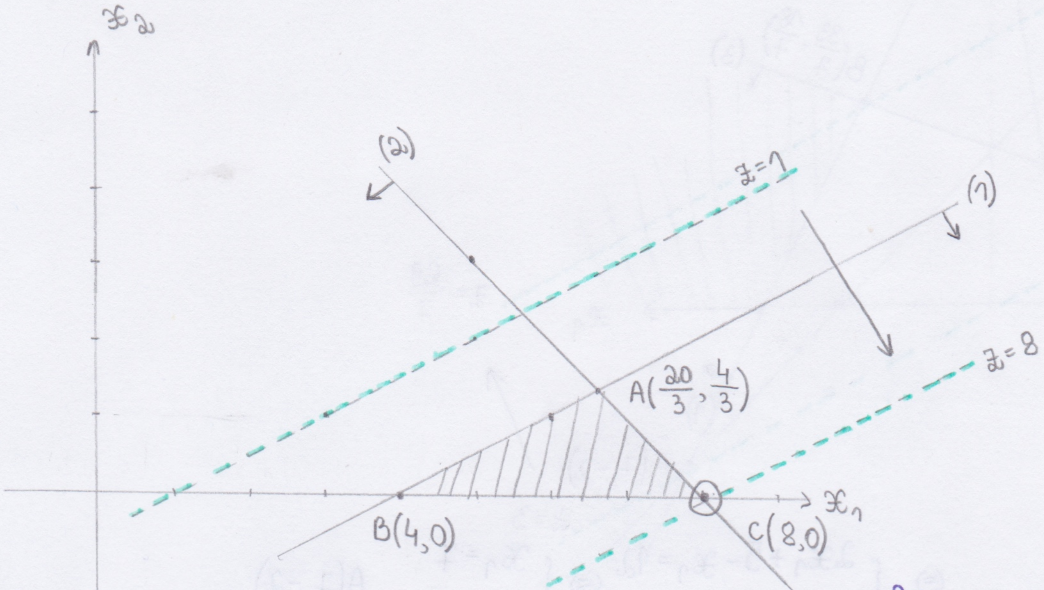
9

$$\begin{cases} \max\ z = -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 \geq 1 \ (1) \\ \qquad x_1 - 2x_2 \geq 2 \ (2) \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Soluția optimă a problemei este $z=-2$ în punctul $A(2,0)$ cu valorile $x_1=2$ și $x_2=0$.

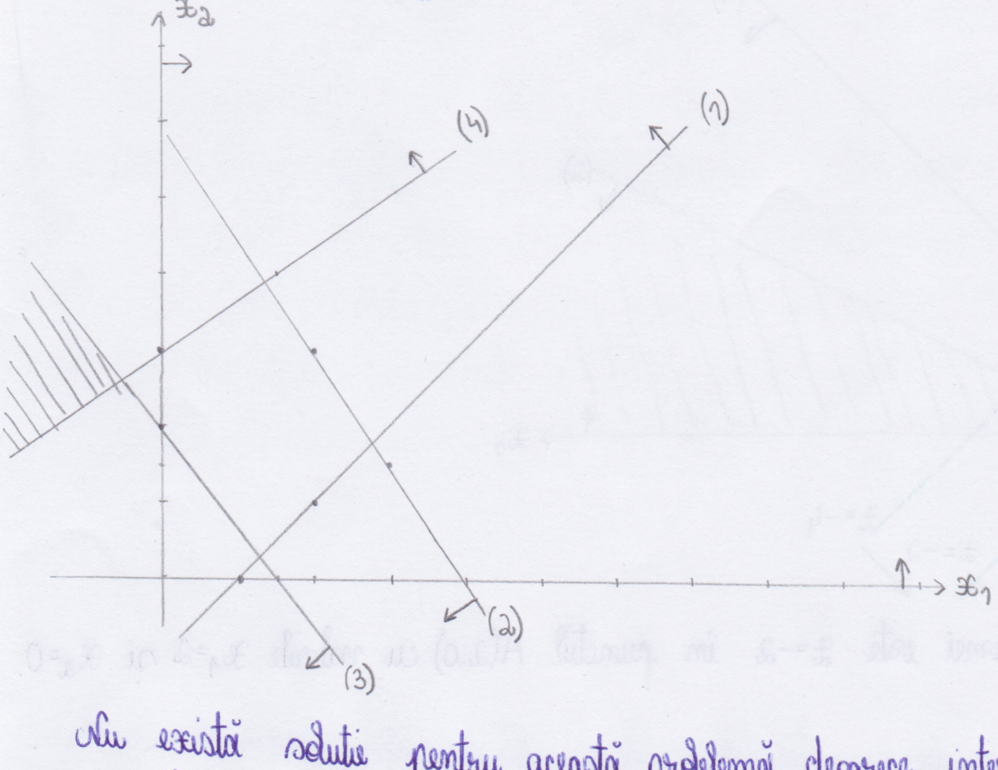
(10)
$$\begin{cases} \max \quad z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 - 2x_2 \geq 4 \quad (1) \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 8 \quad (2) \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 8 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 16 + 2x_1 = 4 \\ x_2 = 8 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \quad A\left(\frac{20}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Soluția problemei este $z = 8$ în punctul $C(8,0)$, unde $x_1 = 8$ și $x_2 = 0$.

(11)
$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \quad (1) \\ \qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (2) \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \quad (3) \\ \qquad -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \quad (4) \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Nu există soluție pentru această problemă deoarece intersecția constrângerilor este mulțimea vidă.