Buinoschi Anda MOC2
Luncașu Bogdan MOC2

15.10.2020

Operations research
Homework 12

② $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcție convexă

$c \in \mathbb{R}$

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le c\}$

S - mulțime convexă

$\forall x, y \in S \Rightarrow \begin{cases} f(x) \le c \\ f(y) \le c \end{cases}$ (1)

f - funcție convexă $\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall \lambda \in [0,1]$

$\overset{(1)}{\le} \lambda c + (1-\lambda) c$

$= \cancel{\lambda c} + c - \cancel{\lambda c}$

$\Downarrow$

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le c, \forall \lambda \in [0,1]$

$\Downarrow$

$\lambda x + (1-\lambda) y \in S \Rightarrow S$ - mulțime convexă

q.e.d.

③ x^1, x^2 - soluții fezabile pt. problema $\min\{c^T x : Ax = b, x \ge 0\}$ a.î. $c^T x^1 = c^T x^2 = d$

Orice combinație convexă x de x^1 și x^2 are aceeași valoare pentru funcția obiectiv $c^T x = d$

$x \overset{def.}{=} \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ și $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$

$\Leftrightarrow x = \lambda_1 x^1 + (1-\lambda_1) x^2, \lambda_1 \ge 0$

$\Leftrightarrow x = \lambda_1 x^1 + x^2 - \lambda_1 x^2$

$c^T x = c^T(\lambda_1 x^1 + x^2 - \lambda_1 x^2)$

$\Leftrightarrow c^T x = \lambda_1 \underbrace{c^T x^1}_{d} + \underbrace{c^T x^2}_{d} - \lambda_1 \underbrace{c^T x^2}_{d}$

$\Leftrightarrow c^T x = \cancel{\lambda_1 d} + d - \cancel{\lambda_1 d} = d$

q.e.d.

④ $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, 0 \le x_n \le 1\}$ mulțime

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \ge 0\}$ poliedru în formă standard

Poate fi S regiunea fezabilă a problemei peste P?

Reducere la absurd: considerăm că S este regiune fezabilă pentru P (1)

$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b$

$x \in S : x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$

$\Rightarrow A_n x_n = b$, $0 \le x_n \le 1$ $\Rightarrow$ componenta x_n nu poate fi interval continuu

$\Downarrow$

presupunerea făcută este falsă

$\Downarrow$

Mulțimea S nu poate fi regiune fezabilă pentru poliedrul P

⑥

$$\begin{cases} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

a) Sub ce condiții problema este fezabilă?

b) Dezv. o regulă pentru a determina o sol. optimală dacă există.

a) Problema în forma standard este:

$$\begin{cases} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + s_1 = b \\ & x_1, x_2, \dots, x_n, s_1 \ge 0 \end{cases}$$

$n+1$ variabile

$m = 1$ constrângere

$\Rightarrow$ soluția va avea o variabilă de bază și n variabile ne-bazice

• $n = 2$

var. nebazice	var. bazice	fezabilitate
$x_2 = s_1 = 0$	$x_1 = \frac{b}{a_1}$	DA, dacă $\frac{b}{a_1} \ge 0$
$x_1 = s_1 = 0$	$x_2 = \frac{b}{a_2}$	DA, dacă $\frac{b}{a_2} \ge 0$
$x_1 = x_2 = 0$	$s_1 = b$	DA, dacă $b \ge 0$

• pentru $n+1$ variabile și variabila de bază este x_n. Soluția este:

$$x^0 = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, s_1)^T = (0, 0, \dots, 0, \frac{b}{a_n}, 0)$$

x^0 - sol. fezabilă $\Leftrightarrow \frac{b}{a_n} \geq 0 \Leftrightarrow$ b și a_n au același semn și $a_n \neq 0$

$$\begin{cases} a_n \\ \text{sau} \\ b = 0 \end{cases}$$

Așadar, problema este fezabilă dacă are loc unul din cazurile:

I $b \geq 0$ (va fi mereu o soluție $(x_1, x_2, \dots, x_n, s_1)^T = (0, 0, \dots, 0, b)^T$ care este fezabilă prin definiție)

II $b < 0$ și $\exists\ a_i < 0$, $\forall i = \overline{1,n}$

b) Dacă $a_i \cdot c_i < 0$, $\forall i \Rightarrow z$ este nemărginit inferior $\Rightarrow$ nu găsim o sol. optimală

Pentru a avea o soluție optimală $\Rightarrow \exists\ i$ a.î. $a_i > 0$ și $c_i \geq 0$

⑧
$$\begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema în forma standard este:

$$\begin{cases} \min\ z' = -x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.}\ x_1 + 2x_2 + s_1 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 21 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

var. nebazice	var. bazice	fezabilitate	val. fct. obiectiv	
$x_1 = x_2 = 0$	$s_1 = 12, s_2 = 21$	DA	0	
$x_1 = s_1 = 0$	$x_2 = 6, s_2 = -3$	NU	—	
$x_1 = s_2 = 0$	$x_2 = \frac{21}{4}, s_1 = \frac{3}{2}$	DA	$\boxed{-21}$	$\Rightarrow$ sol. $(0, \frac{21}{4}, \frac{3}{2}, 0)$ - sol. optimă
$x_2 = s_1 = 0$	$x_1 = 12, s_2 = -15$	NU	—	
$x_2 = s_2 = 0$	$x_1 = 7, s_1 = 5$	DA	-7	
$s_1 = s_2 = 0$	$x_1 = -3, x_2 = \frac{15}{2}$	NU	—	

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12 - 2x_2 \\ 36 - 6x_2 + 4x_2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 12 - 2x_2 \\ -2x_2 = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{15}{2} \\ x_1 = -3 \end{cases}$$

(9)
$$\begin{cases} \max & z = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ & 5x_1 + x_2 \le 12 \\ & x_1 + 5x_2 \le 15 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Problema în formă standard este:

$$\begin{cases} \min & z' = -2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 10 \\ & 5x_1 + x_2 + s_2 = 12 \\ & x_1 + 5x_2 + s_3 = 15 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{cases}$$

var. nebazice	var. bazice	fezabilitate	val. obiectivului
$x_1 = x_2 = 0$	$s_1 = 10, s_2 = 12, s_3 = 15$	DA	0
$x_1 = s_1 = 0$	$x_2 = \frac{10}{3}, s_2 = \frac{26}{3}, s_3 = -\frac{5}{3}$	NU	–
$x_1 = s_2 = 0$	$x_2 = 12, s_1 = -26, s_3 = -45$	NU	–
$x_1 = s_3 = 0$	$x_2 = 3, s_1 = 1, s_2 = 9$	DA	-15
$x_2 = s_1 = 0$	$x_1 = 5, s_2 = -13, s_3 = 10$	NU	–
$x_2 = s_2 = 0$	$x_1 = \frac{12}{5}, s_1 = \frac{26}{5}, s_3 = \frac{63}{5}$	DA	$-\frac{24}{5} = -4{,}8$
$x_2 = s_3 = 0$	$x_1 = 15, s_1 = -20, s_2 = -63$	NU	–
$s_1 = s_2 = 0$	$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 3$	DA	-14
$s_1 = s_3 = 0$	$x_1 = \frac{5}{7}, x_2 = \frac{20}{7}, s_2 = \frac{39}{7}$	DA	$\boxed{-\frac{110}{7}} \simeq -15{,}7142$

$s_2 = s_3 = 0$	$x_1 = \frac{15}{8}, x_2 = \frac{21}{8}$, $s_1 = \frac{-13}{8}$	NU	–

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ 5x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 36 - 15x_1 = 10 \\ x_2 = 12 - 5x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13x_1 = -26 \\ x_2 = 12 - 5x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 10x_2 + 3x_2 = 10 \\ x_1 = 15 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x_2 = -20 \\ x_1 = 15 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{20}{7} \\ x_1 = \frac{5}{7} \end{cases}$$

$$s_2 = 12 - 5x_1 - x_2 \Leftrightarrow s_2 = 12 - \frac{25}{7} - \frac{20}{7} = \frac{39}{7}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75 - 25x_2 + x_2 = 12 \\ x_1 = 15 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24x_2 = -63 \\ x_1 = 15 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{21}{8} \\ x_1 = \frac{15}{8} \end{cases}$$

$$s_1 = 10 - 2x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow s_1 = 10 - \frac{30}{8} - \frac{63}{8} = \frac{-13}{8}$$

$\left(\frac{5}{7}, \frac{20}{7}, 0, \frac{39}{7}, 0\right)$ - sol. optimă a problemei

(10)
$$\begin{cases} \max \quad z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Problema în forma standard este:

$$\begin{cases} \min \quad z' = -2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad -3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ \qquad x_1 + 2x_2 - e_1 = 2 \\ \qquad x_1, x_2, s_1, e_1 \ge 0 \end{cases}$$

var. nebazice	var. bazice	fezabilitate	val. obiectivului
$x_1 = x_2 = 0$	$s_1 = 6, e_1 = -2$	NU	–
$x_1 = s_1 = 0$	$x_2 = 3, e_1 = 4$	DA	$\boxed{-12}$
$x_1 = e_1 = 0$	$x_2 = 1, s_1 = 4$	DA	-4
$x_2 = s_1 = 0$	$x_1 = -2, e_1 = -4$	NU	–
$x_2 = e_1 = 0$	$x_1 = 2, s_1 = 12$	DA	-4
$s_1 = e_1 = 0$	$x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$	NU	–

$\Rightarrow$ soluția $(0, 3, 0, 4)$ - soluție optimă

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2=6 \\ x_1+2x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6+6x_2+2x_2=6 \\ x_1=2-2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_2=12 \\ x_1=2-2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{3}{2} \\ x_1=-1 \end{cases}$$