Buinoschi Anda, MOC2
Luncașu Bogdan, MOC2

5.11.2020

Operations research
Homework 2.2

① a)

$$(P_1)\begin{cases} \min\ z = 6x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Duala problemei (P_1) este:

$$(D_1)\begin{cases} \max\ y_1 + 9y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t. } 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 6 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ -y_1 - 2y_2 + 8y_3 = 1 \\ y_1 = 0 \\ y_1 \text{ nerestricționat},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Duala acestei probleme este:

$$(D_2)\begin{cases} \min\ 6x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3, x_4 \text{ nerestricționate} \end{cases}$$

Se poate observa că duala (D_2) a dualei (D_1) este echivalentă cu problema primală (P_1).

b)

$$(P)\begin{cases} \min\ z = 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\ \text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \geq 24 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 \geq 17 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Duala problemei (P) este:

$$(D_1)\begin{cases} \max\ 24y_1 + 17y_2 \\ \text{s.t. } 4y_1 + 2y_2 \le 2 \\ \quad 3y_1 - 7y_2 \le -9 \\ \quad 5y_1 - 4y_2 \le 5 \\ \quad 8y_1 - 6y_2 = -6 \\ \quad y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Duala problemei (D_1) este:

$$(D_2)\begin{cases} \min\ 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\ \text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \ge 24 \\ \quad 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 \ge 17 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0,\ x_4 \text{ nerestricționată} \end{cases}$$

Se poate observa că duala (D_2) a dualei (D_1) a problemei (P) este echivalentă cu cea din urmă.

c)

$$(P)\begin{cases} \min\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } 2x_1 - x_2 + x_3 \le 6 \\ \quad x_1 + x_2 - x_3 \ge 3 \\ \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Duala problemei (P) este:

$$(D_1)\begin{cases} \max\ 6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t. } 2y_1 + y_2 + y_3 \le -1 \\ \quad -y_1 + y_2 - 2y_3 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 + 3y_3 \le 1 \\ \quad y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \text{ nerestricționată} \end{cases}$$

Duala problemei (D_1) este:

$$(D_2)\begin{cases} \min\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } 2x_1 - x_2 + x_3 \le 6 \\ \quad x_1 + x_2 - x_3 \ge 3 \\ \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad x_1, x_3 \ge 0,\ x_2 \text{ nerestricționată} \end{cases}$$

Se poate observa că duala (D_2) a dualei (D_1) este echivalentă cu problema primală (P).

d)

$$(P)\begin{cases} \min\ z = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geq 23 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Duala problemei (P) este:

$$(D_1)\begin{cases} \max\ 11y_1 + 23y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t. } 4y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq 6 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq -3 \\ -8y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ 7y_1 + 6y_2 + 2y_3 = 5 \\ y_1 \text{ nerestricționată},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Duala problemei (D_1) este:

$$(D_2)\begin{cases} \min\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geq 23 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \text{ nerestricționată} \end{cases}$$

Se poate observa că duala (D_2) a dualei (D_1) a problemei (P) este echivalentă cu cea din urmă.

②

$$(P)\begin{cases} \max\ z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t. } 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Verificați</u> dacă $x_* = (0, 10.4, 0, 0.4)$ este soluția optimă pentru problema dată.

Verificăm dacă x_* este soluție fezabilă.

$$\begin{cases} 10.4 + 4\cdot 0.4 = 12 \le 12 \\ -3\cdot 10.4 + 3\cdot 0.4 = -30 \le 7 \\ 10.4 - 0.4 = 10 \le 10 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluția } x_* \text{ este soluție fezabilă.}$$

x_* este punct de optim $\Leftrightarrow$ $c^t \cdot x_* = b^t y_*$, y_* - soluția optimă a dualei

$$\Downarrow \text{C.S.T}$$

$$\begin{cases} (b - Ax_*)y_* = 0 \quad (1) \\ (A^t y_* - c)x_* = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$u = b - Ax_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 37 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Duala problemei este:

$$(D)\begin{cases} \min \ 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \\ \text{s.t. } \ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2 \\ \quad y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 4 \\ \quad y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ \quad 4y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 1 \\ \quad y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 37 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot y_* = 0 \Rightarrow y_{*2} = 0 \quad (4)$

Notăm cu $v = A^t y_* - c$

$x_* = (0, 10.4, 0, 0.4)$ $\overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases} \quad (5)$

Rezolvăm sistemul (D) folosindu-ne de informațiile (4) și (5) pentru a găsi y_*.

$$\begin{cases} y_{*1} + y_{*3} = 4 \\ 4y_{*1} - y_{*3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{*1} = 1 \\ y_{*3} = 3 \end{cases} \xrightarrow{(4)} y_* = (1, 0, 3)$$

Verificăm dacă y_* este soluție fezabilă.

$$\begin{cases} 3\cdot 1 + 2\cdot 3 = 8 \ge 2 \\ 1 + 3\cdot 3 = 10 \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluția } y_* \text{ este soluție fezabilă.}$$

$$\left.\begin{aligned} c\cdot x_* &= 4\cdot 10.4 + 0.4 = 42 \\ b\cdot y_* &= 12\cdot 1 + 10\cdot 3 = 42 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c\cdot x_* = b\cdot y_* \Rightarrow x_* \text{ soluția optimă a primalei (P)}$$

③ Există o problemă LP echivalentă cu duala ei?

Fie

I. $(P_1)\begin{cases}\text{minimize } c^t x\\ \text{s.t. } Ax \geq b\\ x \geq 0\end{cases}$ și duala ei $(D_1)\begin{cases}\text{maximize } b^t y\\ \text{s.t. } A^t y \leq c\\ y \geq 0\end{cases}$.

Cele două probleme pot fi echivalente $\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \text{ (obiectiv)}\\ A^t = A \Rightarrow A \text{ matrice simetrică}\\ A = -A \Leftrightarrow A = 0\end{cases}$ (constrâng.)

Ultima condiție nu poate fi luată în calcul deoarece nu formează o problemă LP.

II Fie $(P_2)\begin{cases}\text{minimize } c^t x\\ \text{s.t. } Ax = b\\ x \text{ nerestricționată}\end{cases}$ și duala ei $(D_2)\begin{cases}\text{maximize } b^t y\\ \text{s.t. } A^t y = c\\ y \text{ nerestricționată}\end{cases}$

Pentru ca (P_2) să fie echivalentă cu (D_2), trebuie să îndeplinească condițiile:

$$\begin{cases} A = A^t\\ b = -c \text{ (obiectiv)}\\ b = c \text{ (coeficienții liberi din restricții)}.\end{cases}$$

Se poate observa că ultimele două condiții se contrazic una pe cealaltă, deci nu există o problemă LP care să le satisfacă simultan.

Din cazurile I și II $\Rightarrow \nexists\, P$ a.î. $P = D$ deoarece mereu va exista o condiție ce nu poate fi satisfăcută.

④ A - matrice simetrică $n \times n \Rightarrow A^t = A$ ①

$c \in \mathbb{R}^n$

LP $\begin{cases}\text{minimize } z = c^t x\\ \text{s.t. } Ax = c\\ x \geq 0\end{cases}$

---

dacă $Ax_* = c$ și $x_* \geq 0$ atunci x_* - soluție optimă pentru LP

Duala problemei LP este:

$(D)\begin{cases}\max\ c^t y\\ \text{s.t. } A^t y \leq c\\ y \text{ nerestricționat}\end{cases} \overset{①}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}\max\ c^t y\\ \text{s.t. } Ay \leq c\\ y \text{ nerestricționat}\end{cases}$

Din definiții $\left.\begin{matrix} Ax_* = c \ ②\\ x_* \geq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_*$ soluție primală fezabilă ④

Fie y_* sol. optimală duală $\overset{def.}{\Longrightarrow} c^t y_* \geq c^t y, \forall y \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $Ay \leq c$

$$\left.\begin{array}{l} c^t y_* \geq c^t y \\ Ay \leq c \end{array}\right| \Rightarrow Ay_* = c \ (3)$$

x_* - soluție optimală primară $\overset{C.S.T}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (c - Ax_*) y_* = 0 \\ (Ay_* - c) x_* = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} (c - Ax_*) y_* \overset{(2)}{=} 0 \cdot y_* = 0 \\ (Ay_* - c) x_* \overset{(3)}{=} 0 \cdot x_* = 0 \end{array}\right| \overset{(4)}{\Longrightarrow} x_* \text{ este soluție optimală primală}$$

q.e.d.

(5) Dați un exemplu de pereche de probleme (primală și duală) care au multiple soluții optimale.

Fie problema primală:

$$(P) \begin{cases} \min\ z = 2x_1 \\ \text{s.t.}\ -3x_1 \geq 0 \\ \quad 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Din constrângerile $x_1 \geq 0$ și $-3x_1 \geq 0 \Rightarrow$ singura valoare pe care o poate avea x_1 este $x_1 = 0 \Rightarrow z_* = 0$.

Câteva dintre soluțiile optimale primale sunt: $x_* \in \{(0,6), (0,7), (0,8)\}$. Există o infinitate de soluții optimale. Trebuie îndeplinite condițiile: $x_1 = 0$ și $x_2 \geq 6$.

Forma duală a problemei (P) este:

$$(D) \begin{cases} \text{maximize}\ w = 6y_2 \\ \text{s.t.}\ -3y_1 + 4y_2 \leq 2 \\ \quad y_2 \leq 0 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Din constrângerile $y_2 \leq 0$ și $y_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow w_* = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -3y_1 \leq 2 \Rightarrow y_1 \geq -\frac{2}{3} \\ y_1 \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow y_1 \geq 0$$

Avem multiple soluții optimale care îndeplinesc condițiile: $y_2 = 0$ și $y_1 \geq 0$.
Câteva dintre ele sunt $y_* \in \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$

⑥ Se dau problemele

$$(P_1)\begin{cases}\min z = c^t x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ \quad x \geq 0\end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases}\min z = c^t x \\ \text{s.t. } Ax = \bar{b} \\ \quad x \geq 0\end{cases}$$

x_* - sol. optimală pt problema (P_1)

y_* - sol. optimală a dualei problemei (P_1)

$\bar{x}$ - sol. optimală a pb. (P_2)

$$y_*^t(\bar{b} - b) \leq c^t(\bar{x} - x_*)$$

Problema duală a primalei (P_1) este:

$$(D_1)\begin{cases}\max b^t y \\ \text{s.t. } A^t y \leq c \\ \quad y \in \mathbb{R}^n\end{cases}$$

x_* - sol. opt. pt. $(P_1) \Rightarrow Ax_* = b$

y_* - sol. opt. pt $(D_1) \Rightarrow A^t y_* \leq c$

$\bar{x}$ - sol. opt. pt. $(P_2) \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}$ ②

$$\left.\begin{array}{l}x_* \text{ - sol. opt. a primalei } (P_1) \\ y_* \text{ - sol. opt. a dualei } (D_1)\end{array}\right| \xrightarrow{D.T.} c^t x_* = b^t y_* \quad ①$$

$$y_*^t(\bar{b} - b) - c^t(\bar{x} - x_*) = y_*^t \bar{b} - y_*^t b - c^t \bar{x} + c^t x_* \quad ③$$

$$c^t x_* - y_*^t b = c^t x_* - b^t y_* \overset{①}{=\!=} 0 \quad ④$$

$$A^t y_* \leq c \Leftrightarrow (y_*^t A)\bar{x} \leq c^t \bar{x}$$

$$\overset{②}{\Leftrightarrow} y_*^t \bar{b} \leq c^t \bar{x}$$

$$\Rightarrow y_*^t \bar{b} - c^t \bar{x} \leq 0 \quad ⑤$$

Din ③, ④ și ⑤ $\Rightarrow y_*^t(\bar{b} - b) - c^t(\bar{x} - x_*) \leq 0$

$$\Rightarrow y_*^t(\bar{b} - b) \leq c^t(\bar{x} - x_*)$$

q.e.d.

⑦ Se dă problema

$$\begin{cases} \min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.}\ \ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b \\ \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

Folosind dualitatea, găsiți o regulă pt. a determina o soluție optimală, dacă există.

Transformăm problema în formă standard:

$$(P)\begin{cases} \min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.}\ \ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + t = b \\ \qquad x_1, x_2, \dots, x_n, t \ge 0 \end{cases}$$

Duala acestei probleme primale (P) este:

$$(D)\begin{cases} \max\ by \\ \text{s.t.}\ \ a_1y \le c_1 \\ \qquad a_2y \le c_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a_ny \le c_n \\ \qquad t \le 0 \\ \qquad y \in \mathbb{R} \end{cases} \xleftrightarrow[\text{standard}]{\text{formă}} (D)\begin{cases} \max\ by \\ \text{s.t.}\ \ a_1y + s_1 = c_1 \\ \qquad a_2y + s_2 = c_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a_ny + s_n = c_n \\ \qquad t \le 0 \\ \qquad y \in \mathbb{R}, s_1, s_2, \dots, s_n \ge 0 \end{cases}$$

$x_* = [x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_{n*}, t] \to 1$ componentă de bază și n componente 0

$y_* = [y_*, s_1, s_2, \dots, s_n] \to n$ componente de bază și 1 componentă 0

x_* - sol. opt. a primalei $\Rightarrow x_*$ - sol. fezabilă a primalei $\Rightarrow t \ge 0$

y_* - sol. opt. a dualei $\Rightarrow y_*$ - sol. fezabilă a dualei $\Rightarrow t \le 0$ $\Big\} \Rightarrow t = 0$ ①

C.S.T. $\begin{cases} (b - Ax_*)y_* = 0 \Rightarrow ty_* = 0 \xRightarrow{①} y_* \in \mathbb{R} \\ (A^ty_* - c)x_* = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1x_{1*} \\ s_2x_{2*} \\ \vdots \\ s_nx_{n*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{②} \end{cases}$

Componenta i este de bază în $x_* \Rightarrow x_* = [0, 0, \dots, \frac{b}{a_i}, 0, 0] \Rightarrow x_{i*} = \frac{b}{a_i}$ ③

x_* - sol. fezabilă $\xRightarrow{③} \frac{b}{a_i} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I}\ \ b > 0 \Rightarrow a_i > 0 \\ \text{II}\ \ b = 0 \Rightarrow a_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ ④} \\ \text{III}\ \ b < 0 \Rightarrow a_i < 0 \end{cases}$

Din ② și ③ $\Rightarrow s_i = 0 \Rightarrow y_* = \frac{c_i}{a_i}$, fezabilă pt problema duală $\forall a_i \ne 0$ ⑤

Din relațiile (4) și 5 deosebim următoarele cazuri:

I Dacă $b > 0$, $a_i > 0$ $\Rightarrow y_* \leq 0$ pt ca duala să fie mărginită superior

i) $c_i < 0 \Rightarrow$ problema primală este nemărginită inferior

ii) $\boxed{c_i = 0} \Rightarrow$ problema primală mărginită

II Dacă $b = 0$, $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ și problema primală și cea duală sunt mărginite

III Dacă $b < 0$, $a_i < 0$ $\Rightarrow y_* \geq 0$ pt. ca duala să fie mărginită superior

i) $c_i < 0 \Rightarrow$ problema primală este nemărginită inferior

ii) $\boxed{c_i = 0} \Rightarrow$ problema primală este mărginită

Din cele 3 cazuri detaliate mai sus, putem trage următoarea concluzie:

- x_* soluție optimală pentru problema primală dacă și numai dacă:

I $b = 0$ și x_* va fi de forma $[0, 0, \ldots, 0]$ ($n+1$ componente)

sau

II $\exists\, i$ astfel încât $c_i = 0$ și $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și x_* va fi de forma

$$x_* = \left[0, 0, \ldots, \frac{b}{a_i}, 0, 0\right] \ (n+1 \text{ componente})$$